

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Φυσικής

Κοσμολογικές παρατηρησιακές προβλέψεις γενικευμένων θεωριών βαρύτητας

Νέσσερης Σάββας

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ



ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2008

Τα μέλη που συγκρότησαν την επταμελή εξεταστική επιτροπή της παρούσας διδακτορικής διατριβής, ήταν οι:

- Λ. Περιβολαρόπουλος, Αναπλ. Καθηγητής του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων (επιβλέπων)
- Κ. Ταμβάκης, Καθηγητής του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
- Ι. Ρίζος, Αναπλ. Καθηγητής του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
- Κ. Βαγιονάκης, Καθηγητής του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
- Γ. Λεοντάρης, Καθηγητής του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
- Π. Καντή, Αναπλ. Καθηγήτρια του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
- Α. Κεχαγιάς, Επικ. Καθηγητής του ΣΕΜΦΕ του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου

Αφιερώνεται στη μνήμη της μητέρας μου

Ευχαριστίες

Η παρούσα διδακτορική διατριβή εκπονήθηκε στο Τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων υπό την επίβλεψη του Αναπληρωτή Καθηγητή Λ. Περιβολαρόπουλου, στον οποίο και απευθύνω τις θερμές μου ευχαριστίες για την βοήθεια, συνεργασία και καθοδήγηση. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω την Τριμελή Επιτροπή μου, κ.κ. Λ. Περιβολαρόπουλο, Κ. Ταμβάκη και Ι.Ρίζο για το χρόνο που διέθεσε στην ανάγνωση της παρούσης διατριβής αλλά και για τα εποικοδομητικά τους σχόλια.

Θερμές ευχαριστίες οφείλω στους πολύ καλούς μου φίλους και συναδέλφους Ορέστη Ευθυμίου, Χάρη Μπογδάνο, Ανδρέα Ψαλλίδα, Απόστολο Δημητριάδη, Μιχάλη Παρασκευά και Τάσο Δημητρίου για τις πολύτιμες συζητήσεις μας σε θέματα φυσικής, προγραμματισμού αλλά και γενικότερης φύσης.

Επίσης, δεν θα μπορούσα να παραλείψω να ευχαριστήσω τον καθηγητή Salvatore Carozziello και τους ερευνητές Ruth Lazkoz και Stephane Fay για την άψογη συνεργασία μας πάνω σε ποικίλα και άκρως ενδιαφέροντα ερευνητικά θέματα. Ακόμη, θερμές ευχαριστίες οφείλω στους Gilles Esposito-Farese, David Polarski, Yun Wang, P. Mukherjee, U. Alam και M. Reinecke για την βοήθεια τους και τις χρήσιμες υποδείξεις που μου παρείχαν κατά καιρούς σε ερευνητικά θέματα.

Η παρούσα διδακτορική διατριβή πραγματοποιήθηκε με την οικονομική υποστήριξη του *Ιδρύματος Κρατικών Υποτροφιών (Ι.Κ.Υ.)*.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον αδερφό μου Ηλία αλλά και τους γονείς μου για την υποστήριξη τους, ηθική και οικονομική, όλα αυτά τα χρόνια. Χωρίς αυτούς η διεκπεραίωση της παρούσης διατριβής θα ήταν αδύνατη.

Σύνοψη

Στην παρούσα διδακτορική διατριβή θα εξεταστούν μερικές από τις πιο ενδιαφέρουσες λύσεις για το πρόβλημα της επιταχυνόμενης διαστολής του σύμπαντος, για το οποίο δεν υπάρχει απολύτως ικανοποιητική λύση στα πλαίσια του Καθιερωμένου Κοσμολογικού μοντέλου. Συγκεκριμένα, οι θεωρίες οι οποίες θα εξεταστούν περιλαμβάνουν γενικευμένες θεωρίες βαρύτητας, αλλά και θεωρητικά μοντέλα στα πλαίσια της Γενικής Σχετικότητας. Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιηθούν τα τρέχοντα κοσμολογικά δεδομένα, όπως για παράδειγμα είναι οι υπερκαινοφανείς αστέρες τύπου Ia, η Κοσμική Ακτινοβολία Μικροκυμάτων Υποβάθρου, οι Ακουστικές Ταλαντώσεις των Βαρυονίων και η Υπερπυκνότητα των διαταραχών της ύλης, για ελεγχθούν τόσο η συμβατότητα με τις παρατηρήσεις, όσο και οι ενδεχόμενες παρατηρησιακές υπογραφές των θεωριών αυτών.

Τα είδη των κοσμολογικών παρατηρήσεων, τα οποία θα χρησιμοποιηθούν στη μελέτη αυτή, μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες: τις Γεωμετρικές, οι οποίες ανιχνεύουν απευθείας την γεωμετρία του σύμπαντος μέσω της εξάρτησης στην ερυθρή μετατόπιση των κοσμολογικών αποστάσεων ($d_L(z)$ ή $d_A(z)$), και τις Δυναμικές, οι οποίες προσδιορίζουν την εξέλιξη του σύμπαντος μέσω της πυκνότητας ενέργειας μέσα σε αυτό και χρησιμοποιούν μια θεωρία βαρύτητας για να τη συσχετίσουν με τη γεωμετρία. Αυτή η μέθοδος βασίζεται στη γνώση των δυναμικών εξισώσεων που συνδέουν την γεωμετρία με την ενέργεια, οι οποίες και μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε συνδυασμό με τις γεωμετρικές μεθόδους για τον έλεγχο των δυναμικών εξισώσεων.

Συγκεκριμένα, θα μελετηθούν θεωρίες με βαθμωτά πεδία απευθείας συζευγμένα με το βαρυτικό πεδίο, όπως είναι οι Scalar-Tensor θεωρίες, αλλά και θεωρίες με Λαγκρανζιανές που είναι γενικές συναρτήσεις της Λαγκρανζιανής της Γενικής Σχετικότητας, λόγω χάρη οι θεωρίες τύπου $f(R)$. Οι θεωρίες αυτές μπορούν να δώσουν επιταχυνόμενη διαστολή με φυσικό τρόπο, αλλά επιτρέπουν και την διάσχιση της γραμμής $w = -1$, κάτι το οποίο δεν μπορεί να γίνει με φυσικό τρόπο στα πλαίσια της Γενικής Σχετικότητας. Τέλος, θα μελετηθεί και μια ενδιαφέρουσα εναλλακτική των παραπάνω γενικεύσεων της Γενικής Σχετικότητας, η οποία βασίζεται στην κοσμολογία βρανών (branes) και περιλαμβάνει ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ της βράνης και του υπερχώρου (bulk).

Abstract

In this thesis we will examine some of the most interesting solutions of the problem of the accelerated expansion of the universe, for which there is no totally satisfactory solution within the Standard Cosmological model. Specifically, the class of theories we will examine include both Generalized Gravity theories and models within the context of General Relativity. To achieve this goal we will use observational probes that include Supernovae Type Ia (SnIa), the Cosmic Microwave Background Radiation (CMBR), the Baryon Acoustic Oscillations (BAO) and the Growth Factor of the matter density perturbations, to investigate both the agreement with observations and the observational signatures of these theories.

The observational probes that will be used in this thesis may be divided into two classes: Geometric methods that probe the large scale geometry of space-time directly through the redshift dependence of cosmological distances ($d_L(z)$ or $d_A(z)$) and Dynamical methods that determine the expansion rate of the universe by measuring the evolution of energy density (background or perturbations) and using a gravity theory to relate them with geometry ie with $H(z)$. The latter of these methods rely on the knowledge of the dynamical equations that connect geometry with energy and may therefore be used in combination with geometric methods to test these dynamical equations.

The classes of theories we will consider are Scalar-Tensor extensions of General Relativity that have scalar fields non-minimally coupled to the gravity sector and $f(R)$ theories that have Lagrangians, which are general functions of the Ricci scalar R . Both these theories explain the accelerated expansion of the universe in a natural way, but also allow the crossing of the Phantom Divide Line ($w = -1$), which is hinted by observations but cannot be explained naturally in the context of General Relativity. Finally, we will consider a braneworld model with bulk-brane energy exchange, which allows for the crossing of the $w = -1$ phantom divide line without introducing phantom energy with quantum instabilities.

Περιεχόμενα

Πρόλογος	15
1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ	17
1.1 Ιστορική αναδρομή και σύντομη εισαγωγή στο Καθιερωμένο μοντέλο της Κοσμολογίας	17
1.2 Προκλήσεις στο μοντέλο της Μεγάλης Έκρηξης	24
2 ΕΙΔΗ ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΚΩΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ	27
2.1 Εισαγωγή	27
2.2 Γεωμετρικές μέθοδοι	28
2.2.1 Υπερκαινοφανείς αστέρες τύπου Ia	28
2.2.2 Κοσμική Ακτινοβολία Μικροκυμάτων Υποβάθρου	37
2.2.3 Οι Ακουστικές Ταλαντώσεις των Βαρυονίων	45
2.2.4 Το ποσοστό της μάζας των βαρυονικών αερίων των σημών γαλαξιών	48
2.3 Δυναμικές Μέθοδοι	51
2.3.1 Η υπερπυκνότητα των διαταραχών της ύλης $\delta(\alpha)$	51
3 ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΑΚΟΙ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΣΤΑ ΠΛΑΙΣΙΑ ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ	59
3.1 Εισαγωγή	59
3.2 Η Κοσμολογική Σταθερά - Το μοντέλο Λ CDM	60
3.2.1 Γενικά	60
3.2.2 Νέα τεστ συμβατότητας/αυτοσυνέπειας της Κοσμολογικής Σταθεράς	63
3.3 Επεκτάσεις στα πλαίσια της Γενικής Σχετικότητας	69
3.3.1 Σύμπαν με Quintessence και Phantom πεδία	69
3.3.2 Η μοίρα των βαρυτικά δέσμιων συστημάτων σε quintessence και phantom κοσμολογίες	70
3.3.3 Άλλα μοντέλα και σύγκριση αυτών με χρήση των δεδομένων των υπερκαινοφανών αστέρων	83
3.4 Το πρόβλημα της PDL	92
3.4.1 Θεωρία και πιθανές λύσεις στα πλαίσια της Γενικής Σχετικότητας	92
3.4.2 Χρήση των παρατηρησιακών δεδομένων - Αποτελέσματα	94
3.5 Σύγκριση των σετ δεδομένων Gold και SNLS	98

3.5.1	Οι διαφορές των σετ δεδομένων Gold και SNLS	98
3.5.2	Εξερευνώντας τη στατιστική ομοιογένεια του Gold σετ	102
4	ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ	113
4.1	Εισαγωγή	113
4.2	Μοντέλα με βαθμωτά πεδία τύπου Scalar - Tensor	116
4.2.1	Θεωρία	116
4.2.2	Το πρόβλημα της PDL στα πλαίσια Scalar - Tensor θεωριών και ενδείξεις για έξτρα φυσική	118
4.2.3	Χρονικά εξαρτώμενη σταθερά της παγκόσμιας έλξης G_N	119
4.2.4	Όρια στην 2η χρονική παράγωγο του $G_N(t)$	124
4.2.5	Ανάλυση με χρήση δυναμικών συστημάτων	136
4.2.6	Noether συμμετρίες και Scalar-Tensor θεωρίες	146
4.3	Μοντέλα τύπου $f(R)$	155
4.3.1	Θεωρία	155
4.3.2	Ανάλυση με χρήση δυναμικών συστημάτων	156
4.3.3	Προσδιορισμός της συμβατής με τις παρατηρήσεις συνάρτησης $f(R)$	164
4.4	Μοντέλα με έξτρα διαστάσεις	169
4.4.1	Θεωρία	169
4.4.2	Χρήση των δεδομένων	172
5	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	177
	Παράρτημα	187
	Βιβλιογραφία	193

Πρόλογος

Η κοσμολογία είναι η επιστήμη που μελετά την ιστορία και την εξέλιξη του σύμπαντος από την γένεσή του περίπου 13.7 δισεκατομμύρια χρόνια πριν μέχρι σήμερα. Αν και για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα της ανθρώπινης ιστορίας η κοσμολογία υπήρξε κλάδος της μεταφυσικής, μόλις τους τελευταίους αιώνες με την Νευτώνεια μηχανική μπόρεσε να γίνει επιστήμη με τη γνωστή έννοια, δηλαδή να έχει την δυνατότητα να εξηγεί και να προβλέπει νέα, άγνωστα φαινόμενα.

Η πρόοδος στη φυσική στις αρχές του εικοστού αιώνα, με τη θεωρία της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας αλλά και τις βελτιωμένες αστρονομικές παρατηρήσεις μακρινών αντικειμένων, έδωσαν τη δυνατότητα στο να γίνουν υποθέσεις για την προέλευση του σύμπαντος και καθιέρωσαν την θεωρία της Μεγάλης Έκρηξης. Σύμφωνα με αυτή τη θεωρία, η παρατηρούμενη, ήδη από την εποχή του Hubble, διαστολή των μακρινών γαλαξιών συνεπάγεται ότι στο παρελθόν το σύμπαν ήταν πιο μικρό, πιο πυκνό και πιο θερμό φτάνοντας έτσι σε μια εποχή που επικρατούσαν ακραίες θερμοκρασίες και πυκνότητες. Χρησιμοποιώντας αυτό το γεγονός, μπορούν να γίνουν συγκεκριμένες προβλέψεις για το ποσοστό του δευτερίου και του ηλίου στο σύμπαν, αλλά και ότι πρέπει ο περιβάλλοντας χώρος σήμερα να γεμίζει από μία θερμική ακτινοβολία μικροκυμάτων, με τις προβλέψεις να ταιριάζουν με τις παρατηρήσεις.

Ωστόσο, υπάρχουν κάποια ζητήματα τα οποία η θεωρία της Μεγάλης Έκρηξης δεν παρέχει ικανοποιητικές απαντήσεις. Ένα από τα πιο σημαντικά, και που θα μας απασχολήσει σε αυτή τη διατριβή, είναι το πρόβλημα της επιταχυνόμενης διαστολής. Το 1998 δύο ομάδες που παρατηρούσαν υπερκαινοφανείς αστέρες τύπου Ia που θεωρούνται καθιερωμένα κεριά (standard candles), δηλαδή αστέρες των οποίων η μέγιστη λαμπρότητα κατά την έκρηξη τους είναι γνωστή και ίδια για όλους, ανέφεραν ότι αυτοί οι αστέρες δεν ήταν τόσο λαμπροί όπως αναμενόταν σε σχέση με ένα σύμπαν στο οποίο κυριαρχεί η ύλη. Ένα τέτοιο σύμπαν λόγω της ύπαρξης της ύλης αναμένεται να διαστέλλεται επιβραδυνόμενα. Όμως, η επιταχυνόμενη διαστολή συνεπάγεται την ύπαρξη μιας απωστικής δύναμης, η οποία πρέπει να κυριαρχεί της βαρύτητας σε μεγάλες κλίμακες, ενώ σε μικρές κλίμακες να μην γίνεται αντιληπτή, ώστε να μην υπάρχει διαφωνία με τις παρατηρήσεις στο ηλιακό σύστημα.

Για το πρόβλημα της επιταχυνόμενης διαστολής έχουν προταθεί διάφορες θεωρίες στα πλαίσια της Γενικής Σχετικότητας οι οποίες χρησιμοποιούν τη Σκοτεινή Ενέργεια (*Dark Energy*). Ένα γενικό χαρακτηριστικό όλων αυτών είναι ότι σύμφωνα με πολλές παρατηρήσεις η Σκοτεινή Ενέργεια φαίνεται να κυριαρχεί στο σύμπαν αποτελώντας πάνω από το 70% της ενέργειας του σύμπαντος. Μέσα στα πλαίσια της Γενικής Σχετικότητας, όπως θα δούμε και σε επόμενο κεφάλαιο, η Σκοτεινή Ενέργεια αποδίδεται γενικά στην ύπαρξη

ενός ιδανικού ρευστού με αρνητική πίεση είτε ισοδύναμα σε ένα βαθμωτό πεδίο με κατάλληλο δυναμικό γνωστό ως *Quintessence*. Το πιο απλό τέτοιο μοντέλο είναι η κοσμολογική σταθερά, που προτάθηκε από τον ίδιο τον Einstein, για άλλο όμως λόγο. Μερικές πιο πολύπλοκες εναλλακτικές θεωρίες περιλαμβάνουν βαθμωτά πεδία με αρνητικό πρόσημο στον κινητικό όρο, γνωστό ως *Phantom* αλλά και βαθμωτά πεδία με γενικευμένους κινητικούς όρους (*k-essence*).

Ωστόσο, τα τελευταία χρόνια πιστεύεται ότι το πρόβλημα της επιταχυνόμενης διαστολής ή ισοδύναμα της ύπαρξης της Σκοτεινής Ενέργειας μπορεί να εξηγηθεί με πιο φυσικό και στέρεο θεωρητικά τρόπο υποθέτοντας ότι η Γενική Σχετικότητα καταρρέει σε κλίμακες μεγαλύτερες της τάξης των υπερσημών των γαλαξιών. Έτσι, υπάρχουν στη βιβλιογραφία πολλές θεωρίες που περιλαμβάνουν γενικεύσεις της Γενικής Σχετικότητας, όπως είναι οι $f(R)$ θεωρίες, θεωρίες με βαθμωτά πεδία απευθείας συζευγμένα με το βαρυτικό πεδίο όπως είναι οι Scalar-Tensor θεωρίες αλλά και θεωρίες με Λαγκρανζιανές που περιλαμβάνουν όρους Gauss - Bonnet.

Η παρούσα διδακτορική διατριβή έχει την ακόλουθη δομή: το πρώτο κεφάλαιο αποτελεί μια σύντομη εισαγωγή στο καθιερωμένο πρότυπο της κοσμολογίας αλλά και στα ανοικτά ζητήματα αυτού που αναμένουν απάντηση. Το δεύτερο κεφάλαιο αναλώνεται στην παρουσίαση των κοσμολογικών παρατηρήσεων που θα χρησιμοποιηθούν στη μελέτη των λύσεων για το πρόβλημα της επιταχυνόμενης διαστολής του σύμπαντος ενώ στο τρίτο κεφάλαιο θα δούμε κάποιες από αυτές τις λύσεις, και τους παρατηρησιακούς περιορισμούς αυτών, στα πλαίσια της Γενικής Σχετικότητας. Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο θα μελετήσουμε τις γενικευμένες θεωρίες βαρύτητας τύπου Scalar-Tensor και $f(R)$, καθώς αυτές μπορούν να δώσουν επιταχυνόμενη διαστολή με φυσικό τρόπο ενώ στο τελευταίο κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε εν συντομία τα αποτελέσματα της διατριβής.

Κεφάλαιο 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Ιστορική αναδρομή και σύντομη εισαγωγή στο Καθιερωμένο μοντέλο της Κοσμολογίας

Η κοσμολογία είναι ο κλάδος της φυσικής που ασχολείται με την προέλευση του σύμπαντος, αλλά και τη φύση του ιδίου σε πολύ μεγάλες κλίμακες. Οι πρώτες σχετικά ρεαλιστικές κοσμολογικές θεωρίες διατυπώθηκαν από τους αρχαίους Έλληνες φυσικούς φιλοσόφους της κλασικής και ελληνοιστιικής εποχής. Αυτές οι θεωρίες ήταν βασισμένες στη λογική και στην παρατήρηση, σε αντίθεση με τις αντιλήψεις και θεωρίες των Ινδών φιλοσόφων της ίδιας εποχής, οι οποίες πήγαιναν από αρχαία θεολογικά κείμενα του Ινδουισμού. Συγκεκριμένα, το γεωκεντρικό σύστημα του Πτολεμαίου ήταν η παραδεκτή θεωρία για περισσότερους από 15 αιώνες για την εξήγηση της κίνησης των πλανητών, αν και υπήρχε και η θεωρία για το ηλιοκεντρικό σύστημα του Αρίσταρχου του Σάμιου. Η κατάσταση αυτή παρέμεινε αμετάβλητη μέχρι το 16^ο αιώνα όταν ο Copernicus, βασιζόμενος στη μελέτη των αρχαίων συγγραφέων, ξαναπρότεινε το ηλιοκεντρικό σύστημα, το οποίο υποστηρίχθηκε και αργότερα από τους Johannes Kepler και Galileo Galilei.

Το 1609 ο Kepler, αφού ανέλυσε τις αστρονομικές παρατηρήσεις του Tycho Brahe, πρότεινε τους τρεις γνωστούς νόμους της κίνησης των πλανητών βασιζόμενος στην ηλιοκεντρική θεωρία. Ωστόσο, το ζήτημα της κίνησης των πλανητών λύθηκε οριστικά από τον Sir Isaac Newton το 1687, όταν προσδιόρισε το φυσικό μηχανισμό για τους νόμους του Kepler και το νόμο της παγκόσμιας έλξης που ισχύει για όλα τα σώματα. Η διατύπωση του νόμου της παγκόσμιας έλξης του Newton αποτέλεσε την πρώτη αξιοσημείωτη πρόοδο στην κοσμολογία μετά από πολλούς αιώνες, καθώς παρείχε ένα στέρεο θεωρητικό υπόβαθρο πάνω στο οποίο έγινε δυνατό να εξηγηθούν πολλά από τα έως τότε ανεξήγητα φαινόμενα αλλά και να γίνουν νέες προβλέψεις.

Μέχρι εκείνη την εποχή το γνωστό σύμπαν περιελάμβανε τους 5 γνωστούς πλανήτες του ηλιακού συστήματος, όσους από τους δορυφόρους τους είχαν ανακαλυφθεί και τους απλανείς αστέρες. Ωστόσο, όπως παρατήρησε ο Halley [1], και με βάση πάντα τις παραδοχές της εποχής, η υπόθεση ότι μπορεί να υπάρξει ένα άπειρο και ομοιόμορφα γεμάτο με αστέρες σύμπαν θα οδηγούσε στην προφανώς λανθασμένη πρόβλεψη ότι ο νυχτερινός ουρανός θα

έπρεπε να είναι σχεδόν εξίσου φωτεινός με τον Ήλιο. Αυτό το παράδοξο μελετήθηκε και αργότερα, το 1823, από το γερμανό αστρονόμο Heinrich Olber και έμεινε γνωστό ως το παράδοξο του Olber[1], [2]. Επιπλέον, όπως είχε αποδείξει και ο ίδιος ο Newton, ένα τέτοιο άπειρο και ομοιόμορφα γεμάτο από αστέρια σύμπαν θα κατέρρευε κάτω από την ίδια του την (άπειρη) βαρύτητα. Αργότερα, κατά το 18^ο αιώνα, ο Kant υπέθεσε ότι οι αστέρες δεν είναι δυνατό να κατανέμονται ομοιόμορφα, αλλά θα πρέπει να σχηματίζουν δομές, τους γαλαξίες. Η υπόθεση αυτή τοποθετήθηκε σε πιο στέρεα θεωρητική βάση δύο αιώνες αργότερα, το 1902, με το κριτήριο της βαρυτικής αστάθειας από τον Jeans.

Η αρχή του 20^ο αιώνα ήταν μια συναρπαστική εποχή συνταρακτικών παρατηρησιακών και θεωρητικών ανακαλύψεων για την κοσμολογία που άλλαξαν για πάντα την εικόνα που έχουμε για τον κόσμο. Το πρώτο βήμα έγινε με τη δημιουργία της θεωρίας της Γενικής Σχετικότητας (General Relativity) από τον *Albert Einstein*¹. Οι βάσεις της θεωρίας μπήκαν το 1907, όταν ο Einstein δημοσίευσε ένα άρθρο[3] σχετικά με την επιτάχυνση των σωμάτων στα πλαίσια της Ειδικής Σχετικότητας. Σε αυτό το άρθρο, υποστήριξε ότι η ελεύθερη πτώση είναι στην πράξη αδρανειακή κίνηση και για το λόγο αυτό αυτό πρέπει για ένα παρατηρητή ο οποίος πέφτει ελεύθερα να ισχύουν οι νόμοι της Ειδικής Σχετικότητας. Το επιχείρημα αυτό δεν είναι άλλο από την *Αρχή της Ισοδυναμίας* (Equivalence Principle)[4]. Συνεχώς εργαζόμενος με την πίστη ότι η βαρύτητα μπορεί να περιγραφεί γεωμετρικά, ο Einstein χρησιμοποίησε την ιδέα της γενικής συναλλοιωτότητας (general covariance), ότι δηλαδή όλοι οι φυσικοί νόμοι πρέπει να είναι ίδιοι σε όλα τα συστήματα, για την δημιουργία μιας νέας θεωρίας βαρύτητας. Η πρόταση αυτή ισοδυναμεί μαθηματικά με τη χρήση ταυστών και έτσι το 1915 δημοσίευσε τις εξισώσεις πεδίου της νέας του θεωρίας, της *Γενικής Σχετικότητας* [5]:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

όπου $G_{\mu\nu}$ είναι ο ταυστής Einstein, $R_{\mu\nu}$ είναι ο ταυστής Ricci, $g_{\mu\nu}$ είναι ο μετρικός ταυστής ο οποίος σχετίζεται με το στοιχείο μήκους ως

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \quad (1.2)$$

και T^μ_ν είναι ο ταυστής ενέργειας ορμής, ο οποίος για ένα ιδανικό ρευστό δίνεται από τη σχέση[6]

$$T^\mu_\nu = P g^\mu_\nu + (\rho + P)U^\mu U_\nu \quad (1.3)$$

όπου P είναι η πίεση του ρευστού, ρ η πυκνότητα ενέργειας και $U^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{ds}$ είναι το τετράνυσμα της ταχύτητας του ρευστού.

Λίγο αργότερα, με την αποστολή του Sir Arthur Eddington το 1919 αποδείχθηκε ότι η νέα αυτή θεωρία συμφωνεί ικανοποιητικά με τις προβλέψεις για την καμπύλωση του φωτός από τον Ήλιο [8], ενώ λίγα χρόνια νωρίτερα είχε αποδειχθεί ότι επίσης προβλέπει σωστά και την μετάπτωση του περιηλίου του Ερμή[5]. Βλέποντας αυτή την επιτυχία της θεωρίας αμέσως άρχισαν να δημιουργούνται και τα πρώτα κοσμολογικά μοντέλα. Στο μεταξύ ο Hubble[9]

¹Για μία ενδιαφέρουσα ανασκόπηση αλλά και την τρέχουσα πρόοδο της Γενικής Σχετικότητας, δες την αναφορά [7].

χρησιμοποιώντας μια ομάδα μεταβαλλόμενων αστερών, τους Κηφείδες, είχε αποδείξει ότι όχι μόνο δεν βρίσκονται όλα τα αστέρια μέσα στο Γαλαξία αλλά ότι υπάρχουν και άλλοι γαλαξίες και μάλιστα σε πολύ μεγάλες αποστάσεις.

Καθώς συσσωρεύονταν συνεχώς παρατηρήσεις από πολύ μακρινούς γαλαξίες έγινε αντιληπτή η αληθινή κλίμακα του σύμπαντος. Μια πολύ σημαντική διαπίστωση, η οποία έγινε νωρίς και προς τη σωστή κατεύθυνση, ήταν ότι το σύμπαν σε πολύ μεγάλες κλίμακες, μεγαλύτερες από 200Mpc, πρέπει να είναι ομογενές και ισότροπο. Το ότι είναι ομογενές σημαίνει ότι είναι, κατά μέσο όρο και σε μεγάλες κλίμακες, το ίδιο σε κάθε σημείο, ενώ το ότι είναι ισότροπο σημαίνει ότι δείχνει το ίδιο σε κάθε διεύθυνση. Το γεγονός αυτό λέγεται Κοσμολογική Αρχή και στην ορολογία της Γενικής Σχετικότητας μεταφράζεται στο ότι η μετρική του χωροχρόνου πρέπει να είναι η λεγόμενη Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FRLW)[10],[6]

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \alpha(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi^2) \right) \quad (1.4)$$

όπου η συνάρτηση $\alpha(t)$ είναι γνωστή ως ο παράγοντας κλίμακας (scale factor).

Η καμπυλότητα (Gaussian curvature) του χωρικού μέρους της παραπάνω μετρικής, η οποία σε συμφωνία με την Κοσμολογική Αρχή είναι σταθερή σε κάθε σημείο του χώρου, δίνεται από τη σχέση [6]

$$K(t) = \frac{k}{\alpha(t)^2} \quad (1.5)$$

και εκφράζει το πόσο αποκλίνει η γεωμετρία του χώρου από την Ευκλείδεια. Ακόμη, ο παράγοντας k εκφράζει το πρόσημο της καμπυλότητας του χώρου και μπορεί να έχει τις τιμές $k = 0, \pm 1$, κάτι το οποίο φαίνεται από το ότι οι μετασχηματισμοί

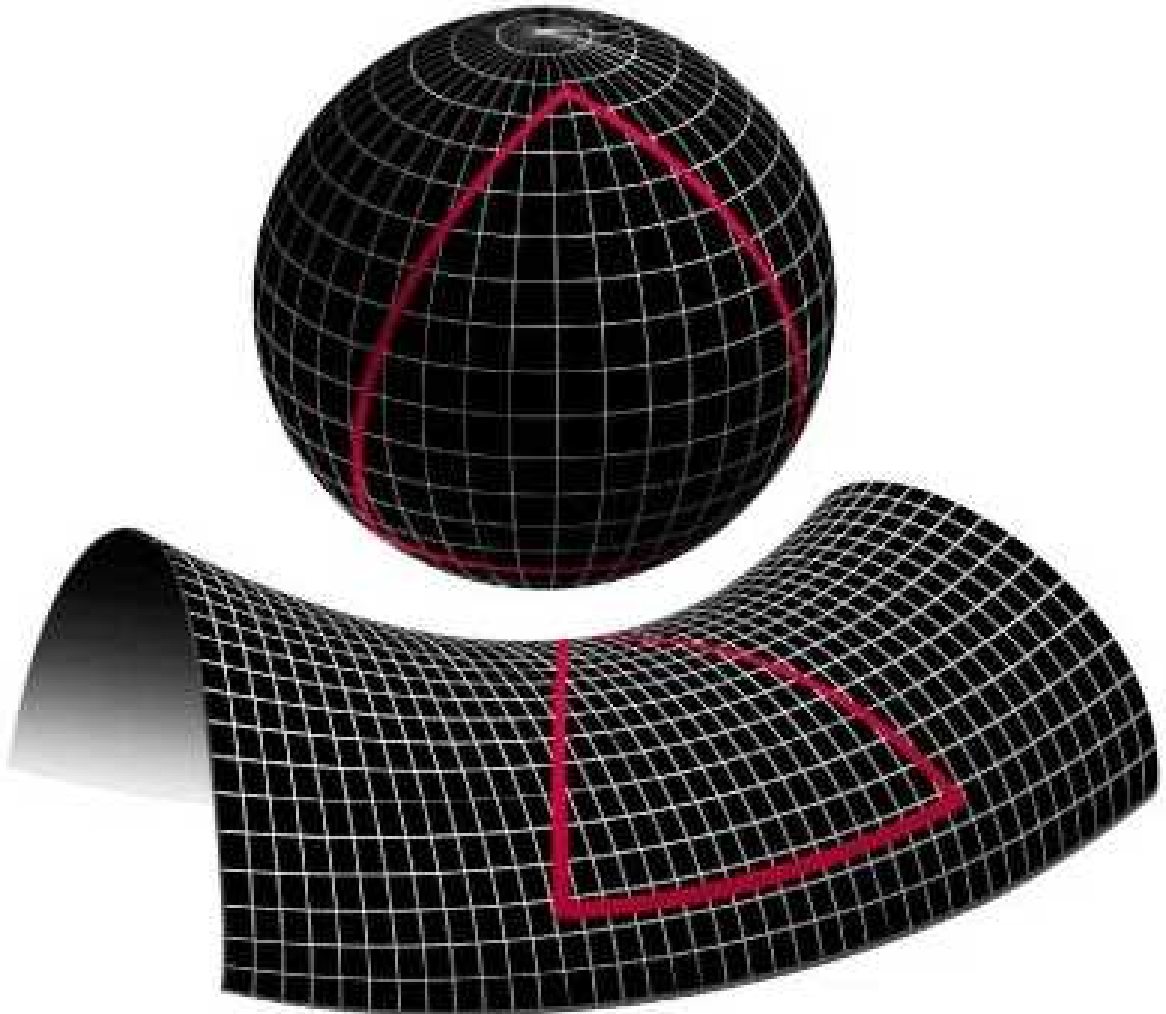
$$\begin{aligned} k &\rightarrow \frac{k}{|k|} \\ r &\rightarrow \sqrt{|k|}r \\ \alpha &\rightarrow \frac{\alpha}{|k|} \end{aligned}$$

αφήνουν τη μετρική (1.4) αναλλοίωτη. Η περίπτωση για $k = -1$ αντιστοιχεί σε σταθερή αρνητική καμπυλότητα και τότε ο χώρος αποκαλείται ανοικτός, καθώς αντιστοιχεί σε σαμαροειδές. Όταν έχουμε $k = 0$ τότε ο χώρος είναι επίπεδος και αντιστοιχεί στο γνωστό Ευκλείδειο χώρο, ενώ η περίπτωση για $k = +1$ αποκαλείται κλειστή και αντιστοιχεί σε σταθερή θετική καμπυλότητα, όπως είναι για παράδειγμα μια σφαίρα (δες και το σχήμα 1.1).

Το 1922 ο Friedmann χρησιμοποιώντας την μετρική (1.4) και τις εξισώσεις (1.1) της Γενικής Σχετικότητας βρήκε τις εξισώσεις που περιγράφουν την χρονική εξέλιξη του παράγοντα κλίμακας [12]

$$H^2(\alpha) = \left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho(\alpha) - \frac{k}{\alpha^2} \quad (1.6)$$

$$\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho(\alpha) + 3P(\alpha)) \quad (1.7)$$



Σχήμα 1.1: Παραδείγματα κλειστής γεωμετρίας $k = +1$ (πάνω) και ανοικτής $k = -1$ (κάτω). Το σχήμα είναι από την ιστοσελίδα [11].

όπου ρ η μέση ενεργειακή πυκνότητα της ύλης μέσα σε αυτό. Για κάθε τιμή της συνάρτησης $H(\alpha)$ υπάρχει και μια ειδική τιμή της πυκνότητας ρ η οποία θα απαιτείτο για να γίνει η γεωμετρία του σύμπαντος επίπεδη, δηλαδή $k = 0$. Αυτή είναι γνωστή ως *κρίσιμη πυκνότητα* (critical density) ρ_c και είναι ίση με

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (1.8)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (1.8) μπορούμε να ορίσουμε την αδιάστατη παράμετρο πυκνότητας Ω , η οποία εκφράζει το τι ποσοστό της κρίσιμης πυκνότητας ρ_c αποτελεί η πυκνότητα

ρ , και είναι ίση με

$$\Omega(t) \equiv \frac{\rho}{\rho_c} \quad (1.9)$$

Έτσι, με τον ορισμό αυτό από την εξίσωση (1.6) προκύπτει ότι

$$\Omega(\alpha) - 1 = \frac{k}{\alpha^2 H(\alpha)^2} \quad (1.10)$$

Όμως, για την πλήρη περιγραφή του μοντέλου χρειαζόμαστε και τις εξισώσεις για την εξέλιξη της πίεσης P και της πυκνότητας ενέργειας ρ του ιδανικού ρευστού. Επειδή ο τανυστής Einstein ικανοποιεί την ταυτότητα Bianchi[6]

$$\nabla_\nu G^{\mu\nu} = 0 \quad (1.11)$$

προκύπτει ότι το ίδιο πρέπει να κάνει και το δεξί μέλος των εξισώσεων (1.1), δηλαδή

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad (1.12)$$

η οποία αντιστοιχεί στην εξίσωση της συνέχειας του τανυστή ενέργειας ορμής [6] και από την οποία παίρνουμε για τη χρονική συνιστώσα $\nabla_\nu T^{0\nu}$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0 \quad (1.13)$$

Ωστόσο, για να μπορέσουμε να περιγράψουμε πλήρως το ρευστό μας χρειαζόμαστε και μια καταστατική εξίσωση, δηλαδή μία σχέση η οποία συνδέει τις ρ και P . Μία απλή επιλογή, η οποία ωστόσο καλύπτει μια μεγάλη ποικιλία μοντέλων, είναι η

$$P = w \rho \quad (1.14)$$

όπου η συνάρτηση w εν γένει μπορεί να εξαρτάται από τον χρόνο. Η μη σχετικιστική ύλη δεν έχει πίεση ($P \ll \rho$), οπότε έχουμε $w = 0$, ενώ για την ακτινοβολία, η οποία μπορεί να είναι είτε φως είτε υπερσχετικιστικά σωματίδια, ισχύει $P = \frac{1}{3}\rho$ οπότε $w = \frac{1}{3}$. Από την εξίσωση (1.13) μπορούμε να βρούμε την χρονική εξέλιξη της πυκνότητας για σταθερό w ως:

$$\rho = \rho_0 \alpha^{-3(1+w)} \quad (1.15)$$

η οποία για $w = 0$ δίνει $\rho = \rho_0 \alpha^{-3}$, ενώ για την ακτινοβολία ($w = \frac{1}{3}$) παίρνουμε $\rho = \rho_0 \alpha^{-4}$.

Ο Friedmann [12] βρήκε ότι οι εξισώσεις (1.6) και (1.7) επιδέχονται λύσεις στις οποίες το σύμπαν είτε διαστελλεται είτε συστέλλεται, ενώ αργότερα ο Lemaitre[13] ξαναβρήκε τη λύση για ένα διαστελλόμενο σύμπαν. Ωστόσο, ο Einstein πίστευε ότι το σύμπαν πρέπει να είναι στατικό και γι' αυτό προσέθεσε την περίφημη, πλέον, κοσμολογική σταθερά στις εξισώσεις πεδίου[14]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.16)$$

ώστε η απωστική δύναμη που οφείλεται στην κοσμολογική σταθερά να αντιτίθεται στην ελκτική δύναμη της βαρύτητας και να είναι δυνατή η ύπαρξη ενός στατικού σύμπαντος.

Όμως το 1929 ο Hubble συνδέοντας τις μετρήσεις του των αποστάσεων πολλών γαλαξιών με τις μετρήσεις ερυθρών μετατοπίσεων από τους ίδιους γαλαξίες διαπίστωσε ότι αυτές τις δύο ποσότητες τις συνδέει η γραμμική σχέση[9]

$$v = H_0 d \quad (1.17)$$

όπου $v = cz$ είναι η ταχύτητα απομάκρυνσης του γαλαξία και βρίσκεται από την ερυθρή μετατόπιση z που είναι μετρήσιμη και d είναι η απόσταση του γαλαξία, η οποία μπορεί να βρεθεί από μια ομάδα μεταβλητών αστερών, τους Κηφείδες. Από την προηγούμενη γραμμική σχέση μπόρεσε μάλιστα να βρει[9] και την τιμή της παραμέτρου H_0 (γνωστής ως παραμέτρου Hubble) ίση με $H_0 = 500 \text{ km/s/Mpc}$, η οποία αν και είναι πολύ μεγαλύτερη από τη σήμερα αποδεκτή τιμή[15] $H_0 = 72 \pm 8 \text{ km/s/Mpc}$, αποτέλεσε την πρώτη απόδειξη ότι το σύμπαν διαστέλλεται.

Όπως είδαμε, η παράμετρος $H = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}$ μετράει το ρυθμό διαστολής του σύμπαντος με H_0 να είναι η τιμή αυτής της παραμέτρου σήμερα. Άλλη μία πολύ χρήσιμη ποσότητα είναι ο ρυθμός επιβράδυνσης q , ο οποίος ονομάζεται έτσι για ιστορικούς πλέον λόγους, και ορίζεται ως

$$q \equiv -\frac{\ddot{\alpha}}{\dot{\alpha}^2} \quad (1.18)$$

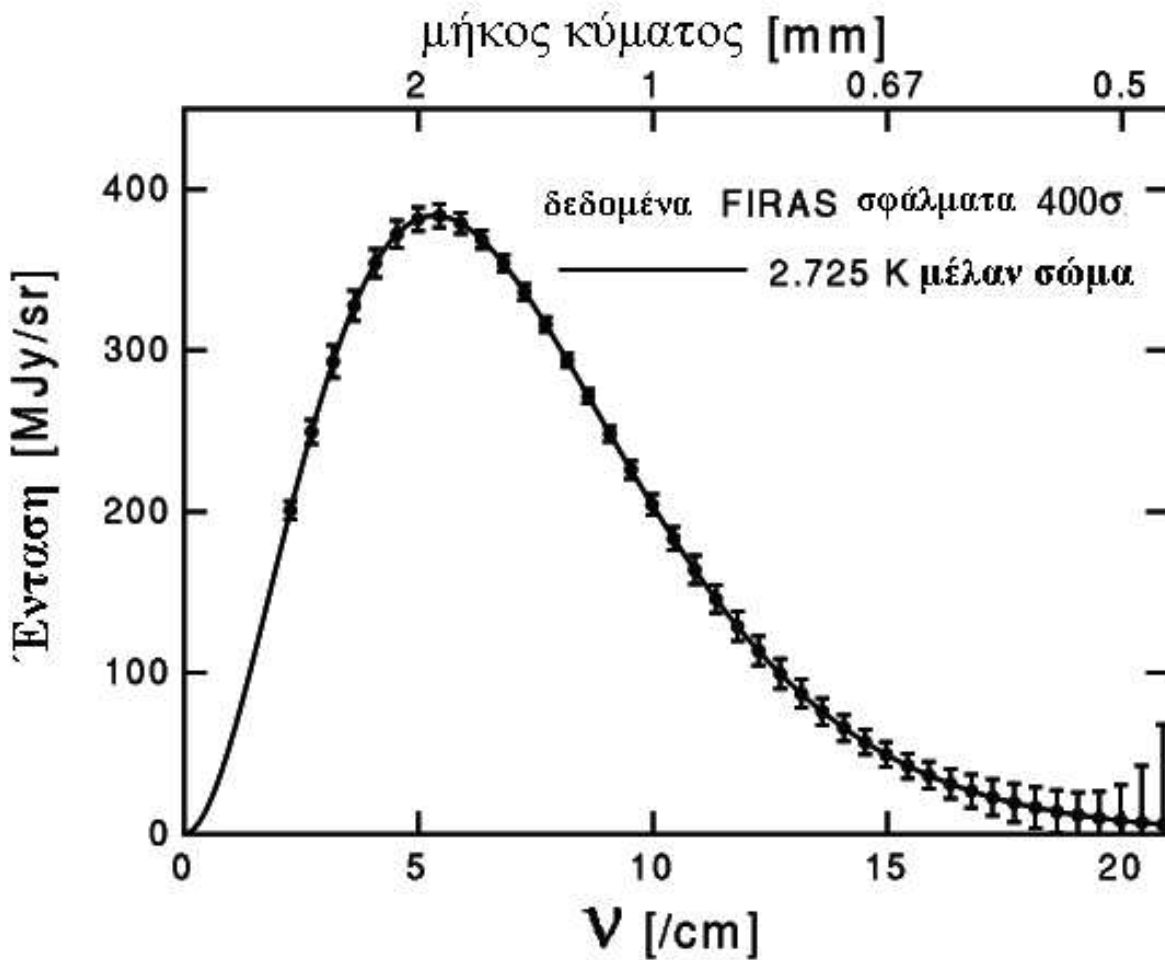
Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (1.6), (1.7) και (1.18) βρίσκουμε ότι

$$q(\alpha) = \frac{1 + 3w}{2} \Omega(\alpha) \quad (1.19)$$

Έτσι, αν γνωρίζουμε ποιά είναι ακριβώς η καταστατική εξίσωση w , τότε μπορούμε να βρούμε την παράμετρο Ω , καθώς ο παράγοντας επιβράδυνσης είναι μετρήσιμος.

Συνοψίζοντας, αν θεωρήσουμε ότι σήμερα το σύμπαν διαστέλλεται, τότε πρέπει στο παρελθόν να ήταν πιο μικρό, πιο πυκνό και πιο θερμό φτάνοντας έτσι σε μια εποχή που επικρατούσαν ακραίες θερμοκρασίες και πυκνότητες. Όλο αυτό το κοσμολογικό μοντέλο έχει ονομαστεί θεωρία της *Μεγάλης Έκρηξης* (Big Bang). Ειρωνικά, ο όρος αυτός είχε αποδοθεί από τον Fred Hoyle σε μια προσπάθεια μείωσης της σπουδαιότητας της θεωρίας[17]. Ωστόσο, μία σχεδόν άμεση επιβεβαίωση της θεωρίας προέκυψε το 1965 όταν ανακαλύφθηκε από τους Penzias και Wilson[18] η Κοσμική Ακτινοβολία Μικροκυμάτων Υποβάθρου (Cosmic Microwave Background Radiation).

Η Κοσμική Ακτινοβολία Μικροκυμάτων Υποβάθρου είχε προβλεφθεί θεωρητικά από το 1948 από τους George Gamow και Ralph Alpher[19],[20], οι οποίοι εκτίμησαν ότι θα έπρεπε να έχει μια θερμοκρασία της τάξης των 5K. Ωστόσο, η πειραματική επιβεβαίωση της ύπαρξής της ήλθε το 1965 από τους Penzias και Wilson[18] υπό τη μορφή μιας επιπλέον θερμοκρασίας 3.5K της κεραίας που χρησιμοποιούσαν για πειράματα τηλεπικοινωνιών. Η εξήγηση του φαινομένου, η οποία υποστηρίζει την θεωρία της *Μεγάλης Έκρηξης*, είναι ότι το πρώιμο σύμπαν αποτελούνταν από θερμό πλάσμα βαρυονίων, ηλεκτρονίων και φωτονίων, με τα τελευταία να βρίσκονται σε συνεχή αλληλεπίδραση με το πλάσμα μέσω της σκέδασης Thomson. Όμως, όπως το σύμπαν διαστέλλονταν, η θερμοκρασία του πλάσματος άρχισε να μειώνεται και έτσι τα ηλεκτρόνια μπόρεσαν να συνδεθούν με τα πρωτόνια σχηματίζοντας



Σχήμα 1.2: Το φάσμα της Κοσμικής Ακτινοβολίας Μικροκυμάτων Υποβάθρου όπως μετρήθηκε από τον δορυφόρο COBE [16]. Όπως φαίνεται, η συμφωνία με το φάσμα μέλανος σώματος είναι καταπληκτική, καθώς τα σφάλματα έχουν μεγενθυθεί κατά ένα παράγοντα 400.

άτομα υδρογόνου[21]. Αυτό συνέβη όταν η θερμοκρασία ήταν περίπου 3000K ή χρονικά σε 400.000 έτη μετά τη Μεγάλη Έκρηξη ($z = 1088$) από την οποία στιγμή τα φωτόνια ήταν πλέον σε θέση να ταξιδεύουν ελεύθερα. Η όλη αυτή διαδικασία λέγεται επανασύνδεση (recombination)[22],[23]. Στα πλαίσια της θεωρίας της Μεγάλης Έκρηξης προβλέπεται ότι η Κοσμική Ακτινοβολία Μικροκυμάτων Υποβάθρου θα πρέπει να είναι ισοτροπική και να έχει φάσμα μέλανος σώματος (δες και το σχήμα 1.2), δύο προβλέψεις που έχουν ήδη επιβεβαιωθεί[16].

1.2 Προκλήσεις στο μοντέλο της Μεγάλης Έκρηξης

Αν και η θεωρία της Μεγάλης Έκρηξης απάντησε σε πολλά ερωτήματα, υπάρχουν κάποια ζητήματα στα οποία η απάντηση δεν είναι τόσο εύκολη [24]:

- *Το πρόβλημα του ορίζοντα:* Όπως φαίνεται από τις παρατηρήσεις το σύμπαν σε μεγάλες κλίμακες ($\sim 100Mpc$) και κατά μέσο όρο είναι ομογενές. Ωστόσο, λόγω της πεπερασμένης ηλικίας του σύμπαντος, υπάρχει ένα όριο (ένας ορίζοντας) στην απόσταση στην οποία δύο απομακρυσμένες περιοχές μπορούν να είναι σε αιτιοκρατική επαφή. Αυτό σημαίνει ότι στο παρελθόν υπήρχαν περιοχές μη αιτιοκρατικά συνδεδεμένες με συνέπεια να μην μπορούν να έρθουν σε θερμική ισορροπία ώστε να εξαφανιστούν έτσι οι ανομοιογένειες. Αυτό βέβαια έρχεται σε αντίθεση με την Κοσμική Ακτινοβολία Μικροκυμάτων Υποβάθρου, η οποία είναι εξαιρετικά ομοιόμορφη[16].
- *Το πρόβλημα της επιπεδότητας:* Όπως είδαμε, το σύμπαν μπορεί να έχει θετική, αρνητική ή μηδενική καμπυλότητα αναλόγως με την ολική πυκνότητα ενέργειας. Όμως, από πολλές παρατηρήσεις βρίσκεται ότι το σύμπαν μέσα στα όρια των παρατηρησιακών αβεβαιοτήτων φαίνεται πως είναι επίπεδο. Ένας εύκολος υπολογισμός με χρήση της εξίσωσης (1.10) δείχνει ότι ένα επίπεδο σύμπαν είναι πολύ ασταθές [25]:

$$\Omega(\alpha) - 1 = \frac{k}{\alpha^2 H(\alpha)^2} \quad (1.20)$$

όπου για παράδειγμα για ένα σύμπαν που κυριαρχείται από την ύλη, χρησιμοποιώντας την εξίσωση Friedmann (1.6), μπορεί να βρεθεί ότι $\alpha^2 H^2 \propto t^{-2/3}$ οπότε $\Omega(\alpha) - 1 \propto t^{2/3}$. Έτσι, η διαφορά ανάμεσα στο Ω και το 1 είναι μια αύξουσα συνάρτηση του χρόνου, οπότε για να είναι σήμερα το σύμπαν επίπεδο, πρέπει να ήταν και στο παρελθόν με τρομερή ακρίβεια.

- *Τα μαγνητικά μονόπολα:* Όλες οι Μεγάλες Ενοποιημένες Θεωρίες (*Grand Unification Theories*) προβλέπουν την ύπαρξη τοπολογικών ατελειών (topological defects), μία εκ των οποίων είναι τα μαγνητικά μονόπολα, τα οποία σχηματίζονται σύμφωνα με το μηχανισμό Kibble[26] κατά το σπάσιμο μιας σφαιρικής συμμετρίας. Τα μονόπολα αυτά θα είχαν πολύ μεγάλη μάζα ($m_{mon} \sim 10^{15} \text{ GeV}$) και πυκνότητα, έτσι ώστε η σημερινή τιμή της αδιάστατης παραμέτρου πυκνότητας Ω θα ήταν $\Omega \gg 1$, δημιουργώντας με αυτό τον τρόπο ένα κλειστό σύμπαν.
- *Το πρόβλημα της βαρυονικής ασυμμετρίας:* Οι παρατηρήσεις φαίνεται να υποδεικνύουν ότι όλο το ορατό σύμπαν αποτελείται από τη γνωστή σε όλους ύλη. Έτσι, βγαίνει το συμπέρασμα ότι πολύ νωρίς πρέπει να δημιουργήθηκε μια ασυμμετρία μεταξύ της ύλης και της αντιύλης.
- *Η σκοτεινή ύλη:* Από το 1933 χάρη σε παρατηρήσεις του Zwicky[27], είναι γνωστό ότι στα σμήνη γαλαξιών, αλλά και στους γαλαξίες τους ίδιους, υπάρχει μη ορατή ύλη η οποία όχι μόνο γίνεται αντιληπτή χάρη στη βαρυτική της αλληλεπίδραση και μόνο,

αλλά φαίνεται πως αποτελεί και το μεγαλύτερο ποσοστό της ύλης στο σύμπαν. Πλέον, η ύπαρξη της σκοτεινής ύλης έχει επιβεβαιωθεί από πάρα πολλές παρατηρήσεις, όπως οι καμπύλες περιστροφής των γαλαξιών[28], η διασπορά των ταχυτήτων των γαλαξιών και των σημηνών αυτών, η Κοσμική Ακτινοβολία Μικροκυμάτων Υποβάθρου[29], η κατανομή της ύλης σε μεγάλες κλίμακες (large scale structure) και οι παρατηρήσεις ασθενών βαρυτικών φακών (weak gravitational lensing)[30].

- *Η επιταχυνόμενη διαστολή:* Το 1998 δύο ομάδες[31] που παρατηρούσαν υπερκαινοφανείς αστέρες τύπου Ia που θεωρούνται καθιερωμένα κεριά (standard candles), δηλαδή αστέρες των οποίων η μέγιστη λαμπρότητα κατά την έκρηξη τους είναι γνωστή και ίδια για όλους, ανέφεραν ότι αυτοί οι αστέρες δεν ήταν τόσο λαμπροί όπως αναμενόταν σε σχέση με ένα σύμπαν στο οποίο κυριαρχεί η ύλη. Ένα τέτοιο σύμπαν λόγω της ύπαρξης της ύλης, όπως φαίνεται και από την εξίσωση (1.7), αναμένεται να διαστέλλεται επιβραδυνόμενα. Όμως, η επιταχυνόμενη διαστολή συνεπάγεται την ύπαρξη μιας απωστικής δύναμης, η οποία πρέπει να κυριαρχεί της βαρύτητας σε μεγάλες κλίμακες, ενώ σε μικρές κλίμακες να μην γίνεται αντιληπτή, ώστε να μην υπάρχει διαφωνία με τις παρατηρήσεις στο ηλιακό σύστημα.

Τα τρία πρώτα ερωτήματα απαντώνται στα πλαίσια της θεωρίας του πληθωρισμού [32],[33]. Σύμφωνα με αυτή τη θεωρία ένα ομογενές και ισότροπο βαθμωτό πεδίο κυριάρχησε στο σύμπαν σε πολύ πρώιμες εποχές, με συνέπεια το σύμπαν να έχει για ένα χρονικό διάστημα υπεισέλθει σε εκθετική διαστολή. Αυτό έχει ως συνέπεια ο ορίζοντας να διαστέλλεται πολύ πιο γρήγορα από ότι υποτέθηκε πριν, έτσι ώστε περιοχές που σήμερα φαίνονται να είναι σε τελείως αντίθετες περιοχές του ουρανού να έχουν έρθει στο παρελθόν σε αιτιοκρατική επαφή. Επίσης, λόγω της εκθετικής διαστολής κατά την εποχή του πληθωρισμού η καμπυλότητα, τουλάχιστον τοπικά τείνει να μηδενιστεί, ενώ ταυτόχρονα με τον ίδιο μηχανισμό λύνεται και το πρόβλημα των μαγνητικών μονοπόλων, τα οποία, ακόμα και αν υπήρξαν, η πυκνότητα τους πλέον θα είναι τόσο μικρή που δεν θα ανιχνεύονται.

Όσον αφορά τη σκοτεινή ύλη, κατά καιρούς έχουν προταθεί διάφοροι υποψήφιοι, οι οποίοι πρέπει να μην εκπέμπουν ή απορροφούν ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία, αλλά να γίνεται γνωστή η ύπαρξη τους μόνο βαρυτικά, ωστόσο κανένας τους δεν είναι απολύτως ικανοποιητικός. Μερικοί από αυτούς τους υποψήφιους είναι[34] τα άμαζα και έμμαζα νετρίνα, διάφορα στοιχειώδη σωματίδια γνωστά ως WIMPs, και με λιγότερες πιθανότητες τα αξιόνια[35] αλλά και οι καφέ νάνοι, οι μαύρες τρύπες και τέλος τα σκοτεινά νέφη. Πρέπει να αναφερθεί ότι υπάρχουν και πιο εξωτικές προτάσεις, όπως ότι το πρόβλημα της σκοτεινής ύλης μπορεί να οφείλεται σε διορθώσεις της γνωστής φυσικής με παράδειγμα τη θεωρία MOND[36], η οποία διορθώνει το 2^ο νόμο του Νεύτωνα στο όριο των πολύ μικρών επιταχύνσεων.

Τέλος, για το πρόβλημα της επιταχυνόμενης διαστολής έχουν προταθεί διάφορες θεωρίες οι οποίες χρησιμοποιούν τη Σκοτεινή Ενέργεια (*Dark Energy*). Ένα γενικό χαρακτηριστικό όλων αυτών είναι ότι σύμφωνα με πολλές παρατηρήσεις η Σκοτεινή Ενέργεια φαίνεται να κυριαρχεί στο σύμπαν αποτελώντας πάνω από το 70% της ενέργειας του σύμπαντος. Μέσα στα πλαίσια της Γενικής Σχετικότητας, όπως θα δούμε και σε επόμενο κεφάλαιο, η Σκοτεινή Ενέργεια αποδίδεται γενικά στην ύπαρξη ενός ιδανικού ρευστού με αρνητική πίεση είτε

ισοδύναμα σε ένα βαθμωτό πεδίο με κατάλληλο δυναμικό γνωστό ως *Quintessence*[37]. Το πιο απλό τέτοιο μοντέλο είναι η κοσμολογική σταθερά, που όπως είδαμε, προτάθηκε από τον ίδιο τον Einstein, για άλλο όμως λόγο. Μερικές πιο πολύπλοκες εναλλακτικές θεωρίες περιλαμβάνουν βαθμωτά πεδία με αρνητικό πρόσημο στον κινητικό όρο, γνωστό ως *Phantom*[38] αλλά και βαθμωτά πεδία με γενικευμένους κινητικούς όρους (*k-essence*)[39].

Ωστόσο, τα τελευταία χρόνια πολλοί θεωρητικοί φυσικοί πιστεύουν ότι το πρόβλημα της επιταχυνόμενης διαστολής ή ισοδύναμα της ύπαρξης της Σκοτεινής Ενέργειας μπορεί να εξηγηθεί με πιο φυσικό και στέρεο θεωρητικά τρόπο υποθέτοντας ότι η Γενική Σχετικότητα καταρρέει σε κλίμακες μεγαλύτερες της τάξης των υπερσημών των γαλαξιών. Έτσι, υπάρχουν στη βιβλιογραφία πολλές θεωρίες που περιλαμβάνουν γενικεύσεις της Γενικής Σχετικότητας, όπως είναι οι $f(R)$ θεωρίες [40] που θα μελετήσουμε στο κεφάλαιο 4, θεωρίες με βαθμωτά πεδία απευθείας συζευγμένα με το βαρυτικό πεδίο όπως είναι οι Scalar-Tensor θεωρίες[41],[42],[43] αλλά και θεωρίες με Λαγκρανζιανές που περιλαμβάνουν όρους Gauss - Bonnet[44].

Μεγάλο ενδιαφέρον θεωρητικά παρουσιάζουν επίσης και οι θεωρίες με έξτρα διαστάσεις δεδομένου ότι στηρίζονται θεωρητικά στη θεωρία χορδών. Η βασική ιδέα αυτών των θεωριών είναι ότι το ορατό τετραδιάστατο σύμπαν (και όλα τα σωματίδια του Καθιερωμένου Μοντέλου) είναι περιορισμένο σε μια υπερεπιφάνεια (brane), η οποία βρίσκεται μέσα σε ένα υπερχώρο (bulk) $4+d$ διαστάσεων (με $d \geq 1$). Οι επιπλέον διαστάσεις μπορεί να είναι μικρές συμπαγείς (compact), στην οποία περίπτωση έχουν πεπερασμένο μήκος συνήθως πολύ μικρό ώστε να μην είναι παρατηρήσιμες, όπως γίνεται στο μοντέλο Kaluza - Klein [45], [46], ή να είναι αρκετά μεγάλες ακόμα και άπειρες με την γνωστή ύλη να είναι περιορισμένη πάνω στην υπερεπιφάνεια [47], [48].

Σε αυτή τη διδακτορική διατριβή θα μελετήσουμε κάποιες από τις λύσεις που αναφέραμε παραπάνω για το πρόβλημα της επιταχυνόμενης διαστολής του σύμπαντος και θα χρησιμοποιήσουμε τα τρέχοντα κοσμολογικά δεδομένα, όπως είναι οι υπερκαινοφανείς αστέρες τύπου Ia, η Κοσμική Ακτινοβολία Μικροκυμάτων Υποβάθρου και άλλα, για να ελέγξουμε την συμβατότητα των μοντέλων αυτών με τις παρατηρήσεις.

Κεφάλαιο 2

ΕΙΔΗ ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΚΩΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ

2.1 Εισαγωγή

Όπως έχει αναφερθεί και στο προηγούμενο κεφάλαιο, η επιταχυνόμενη διαστολή του σύμπαντος μπορεί να οφείλεται είτε στην Σκοτεινή Ενέργεια είτε στις γενικευμένες θεωρίες βαρύτητας. Και οι δύο περιπτώσεις έχουν χαρακτηριστικές προβλέψεις, ένα είδος υπογραφής για την κάθε περίπτωση. Για να αναγνωριστούν αυτές οι υπογραφές πρέπει να βρεθεί με μεγάλη ακρίβεια η συνάρτηση $H(z)$ και αυτό απαιτεί ένα συνδυασμό από διάφορες κοσμολογικές παρατηρήσεις. Αυτές γενικά μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες [49] σύμφωνα με τις μεθόδους που χρησιμοποιήθηκαν για να βρεθεί η $H(z)$:

- Οι *Γεωμετρικές παρατηρήσεις* ανιχνεύουν την γεωμετρία του σύμπαντος σε μεγάλη κλίμακα μέσω της εξάρτησης των διάφορων κοσμολογικών αποστάσεων ($d_L(z)$ ή $d_A(z)$) στην ερυθρή μετατόπιση z . Συνεπώς, προσδιορίζουν την $H(z)$ ανεξάρτητα από το αν ισχύουν οι εξισώσεις Einstein.
- Οι *Δυναμικές παρατηρήσεις* προσδιορίζουν την συνάρτηση $H(z)$ μετρώντας την εξέλιξη της πυκνότητας ενέργειας (του υποβάθρου ή των διαταραχών) και χρησιμοποιώντας μια θεωρία βαρύτητας μπορούμε να τα συσχετίσουμε με την γεωμετρία, δηλαδή την $H(z)$. Αυτές οι μέθοδοι βασίζονται στην γνώση των δυναμικών εξισώσεων που συνδέουν την γεωμετρία με την ενέργεια και συνεπώς μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε συνδυασμό με τις γεωμετρικές παρατηρήσεις για να ελεγχθούν οι δυναμικές εξισώσεις.

Παραδείγματα γεωμετρικών μεθόδων είναι:

1. Η απόσταση λαμπρότητας $d_L(z)$, η οποία προσδιορίζεται χρησιμοποιώντας τους υπερκαινοφανείς αστέρες τύπου Ia [31],[50],[51] και η οποία για ένα επίπεδο σύμπαν σχετίζεται με την $H(z)$ ως εξής[22]

$$d_L(z) = c(1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad (2.1)$$

2. Η γωνιακή διαμετρική απόσταση $d_A(z_{rec})$, η οποία προσδιορίζεται χρησιμοποιώντας την Κοσμική Ακτινοβολία Μικροκυμάτων Υποβάθρου [29],[52] και η οποία υπολογίζεται την εποχή της επανασύνδεσης z_{rec} ως:

$$d_A(z_{rec}) = \frac{1}{1 + z_{rec}} \int_0^{z_{rec}} \frac{dz'}{H(z')} \quad (2.2)$$

3. Η κλίμακα του ηχητικού οριζοντα μετρούμενη σε σχετικά μικρές ερυθρές μετατοπίσεις ($z_{BAO} \sim 0.35$), η οποία υπολογίζεται μέσω των συναρτήσεων συσχέτισης (correlation functions) από τις έρευνες ερυθρής μετατόπισης της δομής μεγάλης κλίμακας [53]

$$D_V(z) = \left[\left(\int_0^{z_{BAO}} \frac{dz}{H(z)} \right)^2 \frac{z_{BAO}}{H(z_{BAO})} \right]^{1/3} \quad (2.3)$$

4. Το ποσοστό της μάζας των βαρυονίων της ύλης σε σμήνη γαλαξιών με βάση τις έρευνες με ακτίνες X

$$f_{gas} = \frac{M_{gas}}{M_{tot}} \quad (2.4)$$

η οποία θεωρείται σταθερή για όλα τα σμήνη και ανάλογη της ποσότητας $\frac{\Omega_b}{\Omega_{om}}$. Η μέθοδος αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση της γωνιακής διαμετρικής απόστασης [54],[55],[56] των σμηνών γαλαξιών.

Ένα παράδειγμα δυναμικής μεθόδου ανίχνευσης της γεωμετρίας είναι η υπερπυκνότητα των διαταραχών της ύλης $\delta(\alpha)$ (*matter overdensity* αλλά γνωστή και ως *growth factor*) που ορίζεται ως [22]

$$\delta(\alpha) \equiv \frac{\frac{\delta\rho}{\rho}(\alpha)}{\frac{\delta\rho}{\rho}(\alpha = 1)} \quad (2.5)$$

όπου ρ είναι η μέση πυκνότητα της ύλης, ενώ $\delta\rho$ είναι η διαταραχή σε πρώτη τάξη αυτής. Στην συνέχεια θα περιγραφούν όλες αυτές οι μέθοδοι αναλυτικά και θα χρησιμοποιηθούν κατά τη μελέτη θεωρητικών μοντέλων και την εύρεση παρατηρησιακών περιορισμών στα πλαίσια, αλλά κυρίως και πέρα από αυτά, της Γενικής Σχετικότητας.

2.2 Γεωμετρικές μέθοδοι

2.2.1 Υπερκαινοφανείς αστέρες τύπου Ia

Ένα από τα πιο χρήσιμα παρατηρησιακά εργαλεία είναι αναμφίβολα οι υπερκαινοφανείς αστέρες τύπου Ia (Supernovae Ia - SnIa). Αυτά προκύπτουν από διπλά άστρα, εκ των οποίων το ένα από τα δύο έχει μάζα κάτω από το όριο Chandrasekhar και τελικά καταλήγει [57] (αφού το υδρογόνο και το ήλιο καούν) ως λευκός νάνος υποστηριζόμενος πλέον από την πίεση εκφυλισμού. Όταν ο άλλος συνοδός γίνει ερυθρός γίγαντας τότε ο λευκός νάνος αρχίζει να

απορροφά μάζα από τα ανώτερα στρώματα του ερυθρού γίγαντα και έτσι προσκτάται μάζα. Όταν η μάζα του λευκού νάνου γίνει ίση με το όριο Chandrasekhar, τότε η πίεση εκφυλισμού δεν μπορεί να συγκρατήσει την βαρυτική πίεση[58], ο λευκός νάνος συρρικνώνεται και αυξάνει την θερμοκρασία του ξεκινώντας την σύντηξη του άνθρακα. Αυτό προκαλεί μία βίαιη έκρηξη[59] η οποία ανιχνεύεται από την καμπύλη φωτός η οποία αυξάνει την φωτεινότητα του αστέρα σε χρονικό διάστημα λιγότερο του ενός μήνα, φτάνει στη μέγιστη τιμή της και εξαφανίζεται σε 1 – 2 μήνες. Οι υπερκαινοφανείς αστέρες τύπου Ia είναι ιδανικοί για μετρήσεις απόστασης στην κοσμολογία για πολλούς λόγους[60]:

1. Έχουν υπερβολικά μεγάλη λαμπρότητα η οποία στο μέγιστό της μπορεί να φτάσει τα $M \simeq -19$ απόλυτα μεγέθη.
2. Έχουν σχετικά μικρή διασπορά στο μέγιστο απόλυτο μέγεθος.
3. Ο μηχανισμός δημιουργίας τους είναι περίπου ο ίδιος και είναι καλά κατανοητός.
4. Σύμφωνα με τη γνωστή φυσική, ο μηχανισμός της έκρηξης[60] δεν εξελίσσεται κοσμολογικά.
5. Υπάρχουν αρκετοί τοπικοί υπερκαινοφανείς αστέρες που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να δοκιμασθεί η φυσική του μηχανισμού της έκρηξης και για να υπολογιστεί το απόλυτό τους μέγεθος.

Αντίθετα, το κύριο πρόβλημα για την χρήση των υπερκαινοφανών αστέρων τύπου Ia ως ‘καθιερωμένα κεριά’ (standard candles) είναι ότι δεν είναι εύκολο να εντοπιστούν και είναι εντελώς αδύνατο να προβλεφθεί μία έκρηξη. Μάλιστα ο αναμενόμενος αριθμός εκρήξεων ανά γαλαξία είναι 1-2 την χιλιετία. Είναι επομένως σημαντικό να αναπτυχθεί μία αποδοτική στρατηγική εύρεσης υπερκαινοφανών αστέρων που βρίσκονται ακόμα σε πρώιμο στάδιο της καμπύλης φωτός τους. Η μέθοδος που χρησιμοποιείται (με μικρές παραλλαγές) για την ανακάλυψη και την παρακολούθηση φωτομετρικά και φασματοσκοπικά των υπερκαινοφανών αστέρων είναι η εξής[61]:

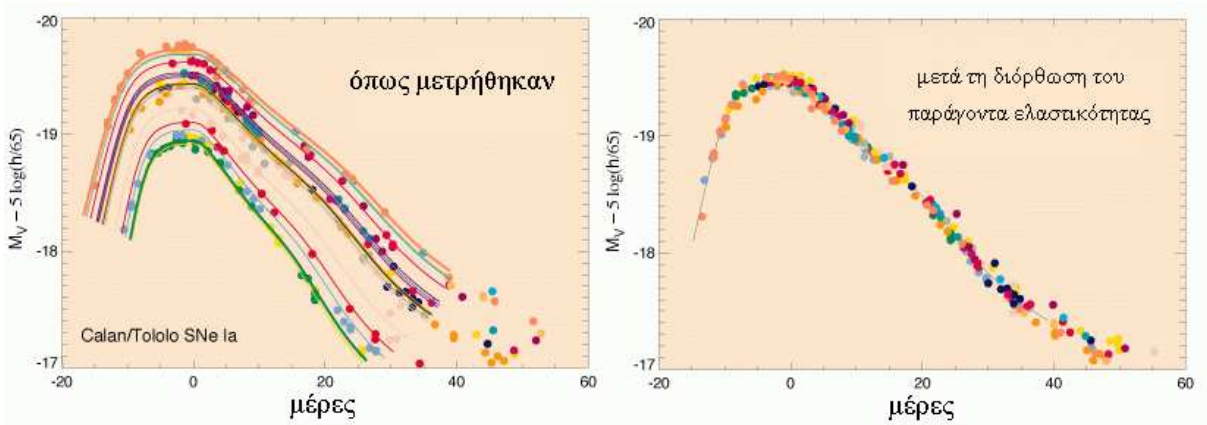
1. Γίνεται παρακολούθηση ενός μεγάλου πεδίου του ουρανού έξω από το επίπεδο του Γαλαξία. Σε κάθε κομμάτι του ουρανού βρίσκονται δεκάδες χιλιάδες γαλαξίες.
2. Έπειτα από τρεις εβδομάδες (μετά το νέο φεγγάρι) γίνεται παρατήρηση των ίδιων περιοχών του ουρανού.
3. Γίνεται αφαίρεση των φωτογραφιών που αποκαλύπτει κατά μέσο όρο 12-14 υπερκαινοφανείς αστέρες.
4. Προγραμματίζεται εκ των προτέρων φασματοσκοπική και φωτομετρική ανάλυση αυτών των υπερκαινοφανών αστέρων κατά την χρονική περίοδο που η φωτεινότητά τους φτάνει στο μέγιστο.

Δεδομένου ότι το χρονικό διάστημα μεταξύ της πρώτης και της δεύτερης παρατήρησης είναι σχετικά μικρό (τρεις εβδομάδες), οι περισσότεροι υπερκαινοφανείς αστέρες δεν προλαβαίνουν να φτάσουν στη μέγιστη φωτεινότητα και συνεπώς όλες σχεδόν οι παρατηρήσεις γίνονται πριν το μέγιστο. Μέσω αυτής της στρατηγικής ένα κατά τα άλλα σπάνιο γεγονός μπορεί να μελετηθεί συστηματικά. Ως αποτέλεσμα παίρνουμε ένα σετ από καμπύλες φωτός των υπερκαινοφανών αστέρων σε διάφορες περιοχές του φάσματος. Αυτές οι καμπύλες φωτός είναι μεταξύ τους παρόμοιες και η μέγιστή τους φαινόμενη φωτεινότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να κατασκευαστεί ένα διάγραμμα Hubble, υποθέτοντας ότι η απόλυτη φωτεινότητα είναι ίδια. Ωστόσο, προτού γίνει αυτό πρέπει να γίνουν μερικές διορθώσεις ώστε να συνυπολογιστούν οι μικρές εγγενείς διαφορές στην απόλυτη φωτεινότητα (λόγω μιας πιθανής διαφοράς στη σύσταση) μεταξύ των υπερκαινοφανών αστέρων καθώς και η απορρόφηση της ακτινοβολίας από το ενδογαλαξιακό υλικό.

Με την χρήση κοντινών υπερκαινοφανών αστέρων έχει παρατηρηθεί εμπειρικά ότι οι μικρές διαφορές στην απόλυτη φωτεινότητα των υπερκαινοφανών αστέρων σχετίζεται με τις διαφορές στο σχήμα των καμπυλών φωτός τους. Φαρδύες, και αργά φθίνουσες καμπύλες φωτός (με παράγοντα ελαστικότητας $s > 1$) αντιστοιχούν σε λαμπρότερους υπερκαινοφανείς αστέρες ενώ στενότερες και ταχέως φθίνουσες καμπύλες φωτός (με παράγοντα ελαστικότητας $s < 1$) αντιστοιχούν σε πιο αμυδρούς υπερκαινοφανείς αστέρες [62]. Αυτή η εξάρτηση της απόλυτης φωτεινότητας των υπερκαινοφανών αστέρων στον παράγοντα ελαστικότητας έχει παρατηρηθεί χρησιμοποιώντας κοντινούς υπερκαινοφανείς αστέρες [63]. Έχειδειχθεί ότι η συστολή φαρδύων καμπύλων φωτός ταυτόχρονα ελαττώνοντας την μέγιστη φωτεινότητα και η διαστολή στενών καμπύλων φωτός ταυτόχρονα αυξάνοντας την μέγιστη φωτεινότητα κάνει τις καμπύλες φωτός να συμπίπτουν (σχήμα 2.1).

Ταυτόχρονα με την διόρθωση του παράγοντα ελαστικότητας χρειάζεται και μία άλλη προτού συγκριθούν οι καμπύλες φωτός μακρινών υπερκαινοφανών αστέρων με αυτές των κοντινών. Συγκεκριμένα όλες οι καμπύλες φωτός πρέπει να μετασχηματιστούν στο ίδιο σύστημα αναφοράς και συγκεκριμένα στο σύστημα ηρεμίας του υπερκαινοφανούς αστέρα. Για παράδειγμα, η καμπύλη φωτός από ένα υπερκαινοφανή αστέρα χαμηλής ερυθράς μετατόπισης z (κοντινό) που βρίσκεται στην μπλε B περιοχή του φάσματος πρέπει να συγκριθεί με την αντίστοιχη καμπύλη φωτός από ένα υπερκαινοφανή αστέρα υψηλής ερυθράς μετατόπισης z (μακρινό) που βρίσκεται στην κόκκινη R περιοχή του φάσματος. Ο μετασχηματισμός αυτός επίσης περιλαμβάνει και διορθώσεις για την κοσμολογική διαστολή του χρόνου (γεγονότα σε ερυθρή μετατόπιση z διαρκούν $1+z$ φορές περισσότερο από γεγονότα στο $z \simeq 0$). Οι διορθώσεις αυτές περιλαμβάνουν την διόρθωση K (K-correction)[64],[65] και χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με την διόρθωση του παράγοντα ελαστικότητας s που αναφέρθηκε παραπάνω.

Αφού γίνουν οι προαναφερθείσες διορθώσεις τότε τα δεδομένα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εξαγωγή πληροφορίας. Συγκεκριμένα, ας θεωρήσουμε μία φωτεινή πηγή κοσμολογικής προέλευσης που εκπέμπει ακτινοβολία ολικής ισχύος L (απόλυτη λαμπρότητα) σε συγκεκριμένο μήκος κύματος και έναν παρατηρητή σε απόσταση d_L από την πηγή. Η ακτινοβολούμενη ισχύς κατανέμεται στην σφαιρική επιφάνεια με ακτίνα d_L οπότε η ένταση I



Σχήμα 2.1: Αριστερά: Το εύρος της καμπύλης φωτός για κοντινούς υπερκαινοφανείς αστέρες που ανακαλύφθηκαν από την έρευνα Calan/Tololo Supernova Survey. Σε αυτές τις ερυθρές μετατοπίσεις, οι σχετικές αποστάσεις μπορούν να υπολογιστούν έτσι οι σχετικές λαμπρότητες είναι γνωστές. Δεξιά: Οι ίδιες καμπύλες φωτός μετά την ρύθμιση της λαμπρότητας χρησιμοποιώντας την ‘ελαστικότητα’ της χρονικής κλίμακας της καμπύλης φωτός ως ένδειξη της λαμπρότητας (και το χρώμα στην κορυφή ως ένδειξη της απορρόφησης) (από την αναφορά [63]).

(φαινόμενη λαμπρότητα) που ανιχνεύεται από τον παρατηρητή είναι [24],[22]

$$l = \frac{L}{4\pi d_L^2} \quad (2.6)$$

Η ποσότητα

$$d_L \equiv \sqrt{\frac{L}{4\pi l}} \quad (2.7)$$

είναι γνωστή ως *απόσταση λαμπρότητας* (luminosity distance) και σε ένα στατικό Ευκλείδειο σύμπαν συμπίπτει με την κανονική απόσταση. Αλλά, σε ένα διαστελλόμενο σύμπαν, η ενέργεια της ακτινοβολίας που ανιχνεύεται από τον παρατηρητή έχει ελαττωθεί όχι μόνο λόγω της κατανομής των φωτονίων στην σφαιρική επιφάνεια αλλά και επειδή η ενέργεια των φωτονίων έχει μετατοπιστεί προς το ερυθρό ενώ ο ρυθμός ανίχνευσής τους ελαττώνεται συγκρινόμενος με τον ρυθμό εκπομπής λόγω της διαστολής του σύμπαντος [66]. Το καθένα από αυτά τα δύο φαινόμενα δίνει μία μείωση της ανιχνευόμενης ενέργειας κατά ένα παράγοντα $\frac{\alpha(t_0)}{\alpha(t)} = (1+z)$, όπου $\alpha(t)$ είναι ο κανονικοποιημένος παράγοντας κοσμικής κλίμακας του σύμπαντος την χρονική στιγμή t και t_0 είναι η παρούσα χρονική στιγμή. Συνήθως το $\alpha(t)$ είναι κανονικοποιημένο έτσι ώστε $\alpha(t_0) = 1$. Συνεπώς, η παρατηρούμενη φαινόμενη λαμπρότητα σε ένα διαστελλόμενο σύμπαν μπορεί να γραφεί ως

$$l = \frac{L}{4\pi\alpha(t_0)^2 x(z)^2 (1+z)^2} \quad (2.8)$$

όπου $x(z)$ είναι η ομοκινούμενη (comoving) απόσταση ως το φωτεινό αντικείμενο που εκπέμπει με ερυθρή μετατόπιση z . Αυτό προϋποθέτει ότι σε ένα διαστελλόμενο σύμπαν η απόσταση λαμπρότητας $d_L(z)$ σχετίζεται με την ομοκινούμενη απόσταση $x(z)$ μέσω της σχέσης

$$d_L(z) = x(z)(1+z) \quad (2.9)$$

Δεδομένου ότι οι φωτσειδείς γεωδαισιακές σε ένα επίπεδο διαστελλόμενο σύμπαν ικανοποιούν τη σχέση $ds^2 = 0$ [6], από τη σχέση (2.9) βρίσκουμε ότι

$$c dt = \alpha(z) dx(z) \quad (2.10)$$

και έτσι μπορούμε να εκφράσουμε το ρυθμό διαστολής του σύμπαντος $H(z) \equiv \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}(z)$ σε μια ερυθρή μετατόπιση z (όπου ο παράγοντας κλίμακας $\alpha = \frac{1}{1+z}$) συναρτήσει της παρατηρούμενης απόστασης λαμπρότητας ως εξής

$$H(z) = c \left(\frac{d}{dz} \left(\frac{d_L(z)}{1+z} \right) \right)^{-1} \quad (2.11)$$

Η σχέση αυτή συνδέει την θεωρητικά προβλεπόμενη $H(z)$ με την παρατηρήσιμη τιμή της απόστασης λαμπρότητας $d_L(z)$ σε ένα επίπεδο σύμπαν. Συνεπώς, αν η απόλυτη λαμπρότητα ενός κοσμολογικού αντικειμένου είναι γνωστή και η φαινόμενη λαμπρότητα έχει μετρηθεί ως συνάρτηση της ερυθρής μετατόπισης, τότε η εξίσωση (2.7) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της απόστασης λαμπρότητας $d_L(z)$ συναρτήσει της ερυθρής μετατόπισης. Τότε, η συνάρτηση $H(z)$ μπορεί να υπολογιστεί παραγωγίζοντας την απόσταση λαμπρότητας $d_L(z)$ ως προς την ερυθρή μετατόπιση σύμφωνα με την εξίσωση (2.11). Αντίθετα, αν η συνάρτηση $H(z)$ είναι γνωστή θεωρητικά, τότε η αντίστοιχη $d_L(z)$ βρίσκεται από την (2.11) ολοκληρώνοντας την $H(z)$ ως εξής

$$d_L(z) = c (1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad (2.12)$$

Αυτή η προβλεπόμενη $d_L(z)$ μπορεί να συγκριθεί με την παρατηρούμενη $d_L(z)$ για να δοκιμαστεί η συνέπεια του θεωρητικού μοντέλου σε σχέση με τις παρατηρήσεις. Όμως, στην πράξη οι αστρονόμοι δεν χρησιμοποιούν το λόγο της απόλυτης με την φαινόμενη λαμπρότητα, αλλά χρησιμοποιούν τη διαφορά μεταξύ στο φαινόμενο μέγεθος m και το απόλυτο μέγεθος M τα οποία ορίζονται ως [6]

$$\begin{aligned} m(z) &= -2.5 \log_{10} \left(\frac{L}{4\pi d_L(z)^2} \right) \\ M &= -2.5 \log_{10} \left(\frac{L}{4\pi (10pc)^2} \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

και που συνδέονται με την σχέση

$$m(z) - M = 5 \log_{10} \left[\frac{d_L(z)}{Mpc} \right] + 25 \quad (2.14)$$

όπου M είναι το απόλυτο μέγεθος το οποίο θεωρείται σταθερό για τους υπερκαινοφανείς αστέρες τύπου Ia εφόσον έχουν γίνει οι διορθώσεις που αναφέρθηκαν παραπάνω. Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί και ως εξής

$$m_{th}(z; a_1, \dots, a_n) = \bar{M}(M, H_0) + 5 \log_{10}(D_L(z; a_1, \dots, a_n)) \quad (2.15)$$

όπου σε ένα επίπεδο κοσμολογικό μοντέλο

$$D_L(z; a_1, \dots, a_n) = (1+z) \int_0^z dz' \frac{H_0}{H(z'; a_1, \dots, a_n)} \quad (2.16)$$

είναι η κανονικοποιημένη κατά Hubble απόσταση λαμπρότητας ($H_0 d_L$), a_1, \dots, a_n είναι οι παράμετροι του θεωρητικού μοντέλου και \bar{M} είναι ο παράγοντας μηδενικής τιμής του μεγέθους και εξαρτάται από το απόλυτο μέγεθος M και την παρούσα τιμή της παραμέτρου Hubble H_0 ως εξής

$$\bar{M} = M + 5 \log_{10} \left(\frac{H_0^{-1}}{Mpc} \right) + 25 = M - 5 \log_{10} h + 42.38 \quad (2.17)$$

Η παράμετρος M είναι το απόλυτο μέγεθος το οποίο μετά την εφαρμογή των παραπάνω διορθώσεων θεωρείται σταθερό.

Εν γένει, τα δεδομένα δίνονται συναρτήσει του συντελεστή απόστασης (distance modulus)

$$\mu_{obs}(z_i) \equiv m_{obs}(z_i) - M \quad (2.18)$$

Έτσι, οι παράμετροι ενός θεωρητικού μοντέλου μπορούν να προσδιοριστούν ελαχιστοποιώντας την ποσότητα [67]

$$\chi_{SnIa}^2(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^N \frac{(\mu_{obs}(z_i) - \mu_{th}(z_i; a_1, \dots, a_n))^2}{\sigma_{\mu i}^2 + \sigma_{int}^2 + \sigma_{v i}^2} \quad (2.19)$$

όπου N είναι ο αριθμός των παρατηρησιακών σημείων, a_1, \dots, a_n είναι οι παράμετροι του θεωρητικού μοντέλου και $\sigma_{\mu i}^2$, σ_{int}^2 και $\sigma_{v i}^2$ είναι τα σφάλματα λόγω αβεβαιοτήτων στην ροή του φωτός, στην εσωτερική διασπορά του απολύτου μεγέθους M και της χαρακτηριστικής διασποράς της ταχύτητας των υπερκαινοφανών αστέρων αντίστοιχα. Τα σφάλματα αυτά θεωρούνται πως είναι γκαουσιανά και ασυσχέτιστα (uncorrelated) μεταξύ τους. Η θεωρητική τιμή του συντελεστή απόστασης ορίζεται ως

$$\mu_{th}(z_i; a_1, \dots, a_n) \equiv m_{th}(z_i; a_1, \dots, a_n) - M = 5 \log_{10}(D_L(z)) + \mu_0 \quad (2.20)$$

όπου

$$\mu_0 = 42.38 - 5 \log_{10} h \quad (2.21)$$

το μ_{obs} δίνεται από την (2.18) ενώ h είναι η κανονικοποιημένη σταθερά Hubble ($h \equiv \frac{H_0}{100 \text{ km/s/Mpc}}$).

Τα διαθέσιμα σετ δεδομένων των υπερκαινοφανών αστέρων

Σε αυτό το σημείο είναι απαραίτητο να αναφερθούμε στα διαθέσιμα σετ δεδομένων για τους υπερκαινοφανείς αστέρες τύπου Ia τα οποία χρησιμοποιήθηκαν σε αυτή την μελέτη. Την παρούσα χρονική στιγμή τα δύο πιο αξιόπιστα σετ δεδομένων που υπάρχουν είναι το Gold[50],[68] και το SNLS από την έρευνα Supernova Legacy Survey [51].

Το σετ δεδομένων Gold (Gold04)[50] περιέχει δεδομένα από διάφορες πηγές τα οποία έχουν αναλυθεί με ένα ενιαίο και συστηματικό τρόπο με μειωμένα σφάλματα βαθμολόγησης. Περιέχει συνολικά 157 σημεία εκ των οποίων 143 σημεία είχαν δημοσιευτεί και προηγουμένως και 14 επιπλέον σημεία με $z > 1$ που ανακαλύφθηκαν από το διαστημικό τηλεσκόπιο Hubble (HST). Το νέο σετ δεδομένων Gold (Gold06) από την ίδια ερευνητική ομάδα [68] περιέχει 182 σημεία τα οποία και αυτά προέρχονται από διάφορες πηγές και έχουν αναλυθεί με ένα ενιαίο και συστηματικό τρόπο με μειωμένα σφάλματα βαθμολόγησης. Τα 119 από τα σημεία προέρχονται από το προηγούμενο σετ [50] (Gold04) ενώ περιέχονται και 16 σημεία στο εύρος $0.46 < z < 1.39$ από το Hubble (HST). Επίσης, περιέχονται και 47 σημεία ($0.25 < z < 1$) από το σετ SNLS[51] από το σύνολο των 73.

Το SNLS προέρχεται από μια πενταετή έρευνα για υπερκαινοφανείς αστέρες τύπου Ia με $z < 1$ η οποία σχετικά πρόσφατα [51] δημοσίευσε τα αποτελέσματά της. Το SNLS χρησιμοποιεί μια πιο αποτελεσματική στρατηγική όπου κάθε κομμάτι του ουρανού παρατηρείται κάθε τρίτο ή τέταρτο βράδυ με τα ίδια φωτογραφικά εξαρτήματα μειώνοντας έτσι τα συστηματικά σφάλματα. Τα δημοσιευμένα δεδομένα αποτελούνται από 44 προηγουμένως δημοσιευμένους κοντινούς υπερκαινοφανείς αστέρες με $0.015 < z < 0.125$ καθώς και 73 μακρινούς υπερκαινοφανείς αστέρες ($0.15 < z < 1$) που ανακαλύφθηκαν από το SNLS, δύο όμως από τα οποία δεν χρησιμοποιήθηκαν στην ανάλυση καθώς ήταν στατιστικά πολύ μακριά από τα υπόλοιπα σημεία.

Το γεγονός ότι τα δύο σετ δεδομένων έχουν ένα κοινό υποσύνολο με σημεία χαμηλής ερυθρής μετατόπισης θα μπορούσε ίσως να οδηγήσει σε μικρά αλλά κοινά συστηματικά σφάλματα, λόγω αυτής της χαμηλής ερυθρής μετατόπισης.

Τα βήματα για την ελαχιστοποίηση του χ^2

Αφού αναφερθήκαμε στα δύο ξεχωριστά σετ δεδομένων μπορούμε τώρα να παρουσιάσουμε τα βήματα που ακολουθήσαμε για την ελαχιστοποίηση της (2.19), τα οποία περιγράφονται αναλυτικά και στις αναφορές [69],[70],[71], και τα οποία είναι ξεχωριστά για τα δύο σετ.

Αυτό γίνεται γιατί για το Gold σετ τα δεδομένα δίνονται συναρτήσει του συντελεστή απόστασης (distance modulus)

$$\mu_{obs}^G(z_i) \equiv m_{obs}^G(z_i) - M \quad (2.22)$$

Όμως, το SNLS σετ περιέχει επιπλέον για κάθε σημείο και τον παράγοντα ελαστικότητας s που χρησιμοποιείται για την βαθμονόμηση του απολύτου μεγέθους αλλά και τον παράγοντα χρώματος του συστήματος ηρεμίας c , ο οποίος μετρά την απορρόφηση λόγω σκόνης. Έτσι ο συντελεστής απόστασης εξαρτάται σε αυτή την περίπτωση, εκτός από το απόλυτο μέγεθος

M , και σε δύο επιπλέον παραμέτρους α και β που ορίζονται από τη σχέση[51]:

$$\mu_{obs}^{SNLS} = m_{obs}^{SNLS}(z_i) - M + \alpha(s_i - 1) - \beta c_i \quad (2.23)$$

και τα οποία ελαχιστοποιούνται μαζί με τις θεωρητικές παραμέτρους όπως θα δούμε παρακάτω.

Πρώτα ας περιγράψουμε τη μέθοδο που χρησιμοποιείται για την ανάλυση των δεδομένων Gold. Από τις εξισώσεις (2.19), (2.20) και (2.21) βρίσκουμε ότι

$$\chi^2(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^N \frac{(\mu_{obs\ i} - 5 \log_{10} D_L(z_i; a_1, \dots, a_n) - \mu_0)^2}{\sigma_i^2} \quad (2.24)$$

όπου

$$\sigma_i^2 = \sigma_{\mu\ i}^2 + \sigma_{int}^2 + \sigma_v^2 \quad (2.25)$$

είναι το ολικό σφάλμα για το κάθε σημείο όπως έχει δημοσιευθεί.

Η παράμετρος μ_0 είναι ‘ενοχλητική’ (nuisance parameter) και για αυτό πρέπει να την ‘περιθωριοποιήσουμε’ (marginalization) καθώς είναι ανεξάρτητη από τα δεδομένα. Το γεγονός αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως τεστ συνέπειας των δεδομένων [72]. Η ελαχιστοποίηση ως προς το μ_0 μπορεί εύκολα να γίνει αν αναλύσουμε το χ^2 της εξίσωσης (2.19) ως προς το μ_0 ως εξής

$$\chi^2(a_1, \dots, a_n) = A - 2\mu_0 B + \mu_0^2 C \quad (2.26)$$

όπου έχουμε θέσει

$$\begin{aligned} A(a_1, \dots, a_n) &= \sum_{i=1}^N \frac{(m_{obs}(z_i) - m_{th}(z_i; \mu_0 = 0, a_1, \dots, a_n))^2}{\sigma_{m_{obs}(z_i)}^2} \\ B(a_1, \dots, a_n) &= \sum_{i=1}^N \frac{(m_{obs}(z_i) - m_{th}(z_i; \mu_0 = 0, a_1, \dots, a_n))}{\sigma_{m_{obs}(z_i)}^2} \\ C &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_{m_{obs}(z_i)}^2} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Η εξίσωση (2.26) παρουσιάζει ελάχιστο για $\mu_0 = B/C$ με τιμή

$$\tilde{\chi}^2(a_1, \dots, a_n) = A(a_1, \dots, a_n) - \frac{B(a_1, \dots, a_n)^2}{C} \quad (2.28)$$

Έτσι αντί να ελαχιστοποιήσουμε το $\chi^2(\mu_0, a_1, \dots, a_n)$ μπορούμε να ελαχιστοποιήσουμε το $\tilde{\chi}^2(a_1, \dots, a_n)$ το οποίο είναι ανεξάρτητο του μ_0 . Προφανώς, ισχύει ότι $\partial_{a_i} \chi_{min}^2 = \partial_{a_i} \tilde{\chi}_{min}^2$ και αυτή είναι η μέθοδος που χρησιμοποιήσαμε.

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να λάβουμε υπόψη το γεγονός ότι για τις παραμέτρους a_1, \dots, a_n η κατανομή πιθανότητας είναι[67]

$$P(a_1, \dots, a_n) = \mathcal{N} e^{-\chi^2(a_1, \dots, a_n)/2} \quad (2.29)$$

όπου \mathcal{N} είναι μια σταθερά κανονικοποίησης. Έτσι μπορούμε να ολοκληρώσουμε την παράμετρο μ_0 , δηλαδή να αθροίσουμε την κατανομή πιθανότητας (2.29), και να ορίσουμε ένα καινούριο $\tilde{\chi}^2$ ως [69],[73],[74]

$$e^{-\tilde{\chi}^2(a_1, \dots, a_n)/2} = \int e^{-\chi^2(a_1, \dots, a_n; \mu_0)/2} d\mu_0 \quad (2.30)$$

Μετά από μερικές πράξεις έχουμε:

$$\tilde{\chi}^2(a_1, \dots, a_n) = A(a_1, \dots, a_n) - \frac{B(a_1, \dots, a_n)^2}{C} + \ln(C/2\pi) \quad (2.31)$$

και το οποίο πρέπει να ελαχιστοποιηθεί ως προς τις παραμέτρους a_1, \dots, a_n . Στην ανάλυση του Gold σετ χρησιμοποιήσαμε την εξίσωση (2.28) η οποία είναι ήδη ελαχιστοποιημένη ως προς μ_0 . Η ελαχιστοποίηση της (2.24) έγινε με την εντολή FindMinimum του πακέτου Mathematica και ένα μέρος του κώδικα αυτού φαίνεται στο παράρτημα.

Η ανάλυση του SNLS έγινε με ένα κάπως διαφορετικό τρόπο ακολουθώντας την αναφορά [51]. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.23) στην (2.19) κατασκευάσαμε το χ^2 ως

$$\begin{aligned} \chi^2(\alpha, \beta, M + \mu_0, a_1, \dots, a_n) = \\ = \sum_{i=1}^N \frac{(\mu_{obs\ i} - 5 \log_{10} D_L(z_i; a_1, \dots, a_n) - \mu_0)^2}{\sigma_{\mu\ i}^2 + \sigma_{int}^2 + \sigma_{v\ i}^2} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Για τα σφάλματα του συντελεστή απόστασης έχουμε

$$\sigma_{\mu\ i}^2 = \sigma_{m\ i}^2 + \alpha^2 \sigma_{s\ i}^2 + \beta^2 \sigma_{c\ i}^2 \quad (2.33)$$

όπου καθένα από τα $\sigma_{m\ i}$, $\sigma_{s\ i}$ και $\sigma_{c\ i}$ έχει δημοσιευθεί στην αναφορά [51]. Το σφάλμα της διασποράς της ταχύτητας $\sigma_{v\ i}^2$, αν υποθέσουμε την τιμή 300 km/sec για την χαρακτηριστική ταχύτητα, μπορεί να γραφεί ως

$$\sigma_{v\ i}^2 = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{\ln(10)} \left(\frac{1}{1 + z_i} + \frac{1}{H(z_i) \int_0^{z_i} \frac{dz}{H(z)}} \right)^2 \quad (2.34)$$

Το σφάλμα στην εσωτερική διασπορά του απολύτου μεγέθους σ_{int}^2 αρχικά παίρνει την τιμή $\sigma_{int} = 0.15$ και μετά ανανεώνεται με βάση τα τρία βήματα της ακόλουθης διαδικασίας[51]:

1. Επιλέγουμε τις τιμές του α και του β στον όρο $\sigma_{\mu\ i}^2$ και ελαχιστοποιούμε το χ^2 της εξίσωσης (2.33) με $\sigma_{int} = 0.15$. Αν δεν γίνει αυτό, τότε υπάρχει η τάση για την αύξηση των σφαλμάτων κατά την ελαχιστοποίηση.
2. Προσαρμόζουμε την τιμή του σ_{int} ώστε να πάρουμε $\chi^2 = 1$.
3. Χρησιμοποιούμε την νέα τιμή του σ_{int} και ελαχιστοποιούμε ξανά κρατώντας τις τιμές των α και β στον όρο $\sigma_{\mu\ i}^2$ σταθερές.

Η διαδικασία αυτή περιγράφεται και στη σελίδα 10 της αναφοράς [51], και οδηγεί στις τιμές των παραμέτρων $M + \mu_0$, α , β , a_1, \dots, a_n .

2.2.2 Κοσμική Ακτινοβολία Μικροκυμάτων Υποβάθρου

Εισαγωγή στη θεωρία διαταραχών

Η θεωρία του σχηματισμού των γαλαξιών, η οποία βασίζεται στη θεωρία της βαρυτικής κατάρρευσης, αποσκοπεί στο να περιγράψει πως οι αρχέγονες διαταραχές της ύλης και της ακτινοβολίας εξελίχθηκαν σε δέσμια συστήματα, όπως είναι οι γαλαξίες και τα σμήνη γαλαξιών. Αυτό μπορεί να γίνει όταν το πλάτος των διαταραχών είναι μικρό, οπότε και μπορούμε να περιγράψουμε το φαινόμενο αυτό με βάση τη γραμμική θεωρία διαταραχών και να υπολογίσουμε την εξέλιξη των διαταραχών της ύλης. Μία πολύ σημαντική εφαρμογή της γραμμικής θεωρίας είναι και η Κοσμική Ακτινοβολία Μικροκυμάτων Υποβάθρου και αυτό γιατί όπως θα δούμε και παρακάτω οι διαταραχές στην κατανομή των φωτονίων στο φασικό χώρο αντιστοιχούν σε διαταραχές στην κοσμική ακτινοβολία μικροκυμάτων υποβάθρου[21].

Σε ένα επίπεδο χωροχρόνο FRW οι βαθμωτές διαταραχές της μετρικής μπορούν να περιγραφούν στη σύμμορφη Νευτώνεια βαθμίδα (conformal Newtonian gauge) ως εξής[21]

$$ds^2 = \alpha^2(\tau)(-(1 + 2\Psi)d\tau^2 + (1 - 2\Phi)dx^i dx_i) \quad (2.35)$$

όπου $\Phi(\vec{x}, \tau)$ και $\Psi(\vec{x}, \tau)$ είναι δύο βαθμωτά δυναμικά. Το πλεονέκτημα αυτής της βαθμίδας είναι ότι ο μετρικός τανυστής $g_{\mu\nu}$ είναι διαγώνιος, γεγονός το οποίο απλοποιεί σημαντικά τους υπολογισμούς. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Einstein σε πρώτη τάξη της θεωρίας διαταραχών και δουλεύοντας στο χώρο Fourier προκύπτει ότι[21]:

$$k^2\Phi + 3\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}(\dot{\Phi} + \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\Psi) = 4\pi G\alpha^2\delta T_0^0 \quad (2.36)$$

$$k^2(\dot{\Phi} + \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\Psi) = 4\pi G\alpha^2(\bar{\rho} + \bar{P})\theta \quad (2.37)$$

$$\ddot{\Phi} + \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}(\dot{\Psi} + 2\dot{\Phi}) + (2\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} - \frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha^2})\Psi = \frac{4\pi}{3}G\alpha^2\delta T_i^i \quad (2.38)$$

$$\Phi = \Psi \quad (2.39)$$

όπου $\dot{\alpha} \equiv \frac{d\alpha}{d\tau}$, $\theta = ik^j v_j$ και v_j είναι η ταχύτητα ενός ιδανικού ρευστού ενώ οι $\bar{\rho}$ και \bar{P} είναι οι αδιατάραχτες ποσότητες της πυκνότητας και της πίεσης αντίστοιχα. Επίσης, ο τανυστής ενέργειας - ορμής για ένα ιδανικό ρευστό είναι

$$T_\nu^\mu = P g_\nu^\mu + (\rho + P)U^\mu U_\nu \quad (2.40)$$

όπου $U^\mu = dx^\mu/d\tau$ είναι το τετράνυσμα της ταχύτητας. Τότε από την εξίσωση διατήρησης $T_{;\mu}^{\mu\nu} = 0$ προκύπτουν οι διαταραγμένες εξισώσεις του ρευστού

$$\dot{\delta} = -(1+w)(\theta - 3\dot{\Phi}) - 3\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\left(\frac{\delta P}{\delta\rho} - w\right)\delta \quad (2.41)$$

$$\dot{\theta} = -\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}(1-3w)\theta - \frac{\dot{w}}{1+w}\theta + \frac{\delta P/\delta\rho}{1+w}k^2\delta + k^2\Psi \quad (2.42)$$

όπου $w = P/\rho$ είναι η καταστατική εξίσωση του ρευστού, $\delta \equiv \frac{\delta\rho}{\rho}$, $\delta\rho = \rho - \bar{\rho}$ και $\delta P = P - \bar{P}$ είναι σε πρώτη τάξη οι διαταραγμένες ποσότητες της πυκνότητας και της πίεσης αντίστοιχα. Για φωτόνια και βαρυόνια το w είναι σταθερό και είναι $w = 1/3$ και $w = 0$ αντίστοιχα. Για ισεντροπικές διαταραχές οι παραπάνω εξισώσεις απλοποιούνται καθώς ισχύει ότι $\delta P = c_s^2 \delta\rho$, όπου c_s^2 είναι η ταχύτητα μετάδοσης των διαταραχών και στην περίπτωση αυτή ισούται με $c_s^2 = w + \rho \frac{dw}{d\rho}$.

Για να συνδέσουμε τις παραπάνω εξισώσεις διαταραχών με την Κοσμική Ακτινοβολία Μικροκυμάτων Υποβάθρου πρέπει να λάβουμε υπόψη το γεγονός ότι τα φωτόνια επηρεάζονται όχι μόνο από την βαρύτητα αλλά και από την σκέδαση Compton με τα ελεύθερα ηλεκτρόνια. Όμως τα ηλεκτρόνια, την χρονική στιγμή της τελευταίας σκέδασης, συνδέονται στενά (tight coupling) με τα πρωτόνια αλλά και τα δύο μαζί επηρεάζονται από την βαρύτητα. Ο μετρικός τανυστής που αναφέραμε παραπάνω επηρεάζεται από όλα αυτά αλλά και από τα νετρίνα και την σκοτεινή ύλη. Ένας συστηματικός τρόπος για να λάβουμε όλες τις παραπάνω αλληλεπιδράσεις υπόψη είναι μέσω της εξίσωσης Boltzmann[22]:

$$\frac{df}{dt} = C[f] \quad (2.43)$$

όπου f είναι η συνάρτηση κατανομής (για τα φωτόνια είναι η Bose-Einstein) και το δεξιό μέλος της εξίσωσης περιέχει όλους τους όρους αλληλεπίδρασης όπως π.χ. αυτόν της σκέδασης Compton. Η κατανομή Bose-Einstein μπορεί να γραφεί ως

$$f(\vec{x}, p, \hat{p}, t) = [e^{\bar{T}(t)(1 + \frac{p}{\Theta(\vec{x}, \hat{p}, t)})} - 1]^{-1} \quad (2.44)$$

όπου p είναι το μέτρο της ορμής των φωτονίων, \hat{p} είναι η διεύθυνση της ανισοτροπίας και T είναι η θερμοκρασία σε μηδενική τάξη και Θ η διαταραχή πρώτης τάξης, έτσι ώστε $\Theta = \frac{\delta T}{T}$.

Η σκέδαση Compton περιγράφεται από την διαδικασία

$$e^-(\vec{q}) + \gamma(\vec{p}) \leftrightarrow e^-(\vec{q}') + \gamma(\vec{p}') \quad (2.45)$$

Ο συντελεστής $C[f]$ ορίζεται ως [22]

$$C[f(\vec{p})] = \sum_{\vec{q}, \vec{q}', \vec{p}'} |M|^2 (f_e(\vec{q}')f(\vec{p}') - f_e(\vec{q})f(\vec{p})) \quad (2.46)$$

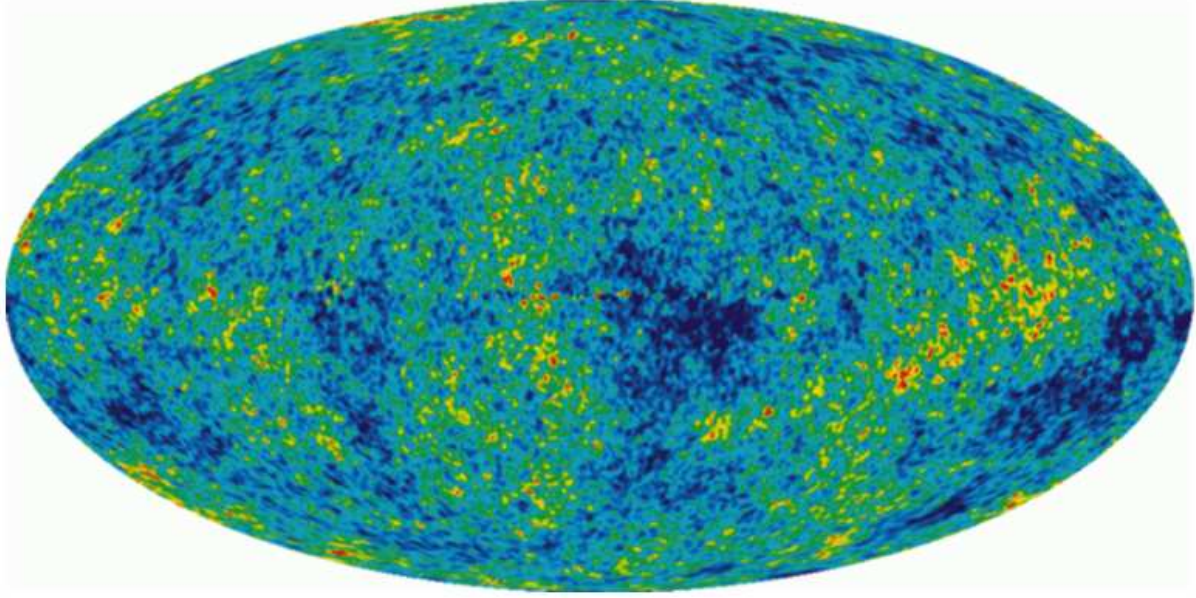
όπου ο όρος M αντιστοιχεί στο πλάτος πιθανότητας για τη σκέδαση Compton. Σε πρώτη τάξη έχουμε[22]:

$$|M|^2 = 8\pi\sigma_T m_e^2 \quad (2.47)$$

όπου σ_T είναι η διατομή σκέδασης Thomson. Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, η εξίσωση Boltzmann για τα φωτόνια μπορεί να βρεθεί στο χώρο Fourier¹ ως [22]:

$$\dot{\tilde{\Theta}} + ik\mu\tilde{\Theta} - \dot{\tilde{\Phi}} + ik\mu\tilde{\Psi} = n_e\sigma_T\alpha(\tilde{\Theta}_0 - \tilde{\Theta} + \mu\tilde{v}_b) \quad (2.48)$$

¹Όλες οι ποσότητες με $\tilde{}$ είναι μετασχηματισμένες κατά Fourier.



Σχήμα 2.2: Ένας χάρτης της διακύμανσης της θερμοκρασίας της Κοσμικής Ακτινοβολίας Μικροκυμάτων Υποβάθρου, όπως μετρήθηκε από τον δορυφόρο WMAP (από την αναφορά [29]).

όπου $\mu = \hat{k}\hat{p}$ και $\Theta_0(\vec{x}, t) \equiv \frac{1}{4\pi} \int d\Omega' \Theta(\hat{p}', \vec{x}, t)$. Ακόμη, μπορούμε να αναλύσουμε το Θ σε πολύπολα, κάτι το οποίο διευκολύνει κατά πολύ την επίλυση των εξισώσεων, ως εξής:

$$\Theta_l \equiv \frac{1}{(-i)^l} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{2} \mathcal{P}_l(\mu) \Theta(\mu) \quad (2.49)$$

και τώρα το σύστημα των εξισώσεων (2.36)-(2.42) μπορεί να λυθεί αριθμητικά, όπως γίνεται σε διάφορους υπολογιστικούς κώδικες π.χ. το CAMB [75].

Παρόλο που προσδιορίστηκε η $\Theta_l(k, \tau)$, δεν είναι τόσο εύκολο να την συγκρίνουμε με τις παρατηρήσεις διότι συνήθως αυτό που υπολογίζεται από τις ερευνητικές ομάδες είναι η διακύμανση της θερμοκρασίας $\frac{\delta T}{T}$ σε διάφορες διευθύνσεις υπό την μορφή ενός χάρτη, όπως αυτός του σχήματος 2.2). Για να συγκριθούν αυτά τα δύο, αναλύουμε το πεδίο Θ σε σφαιρικές αρμονικές:

$$\Theta(\vec{x}, \hat{p}, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \alpha_{lm} Y_{lm}(\hat{p}) \quad (2.50)$$

$$\alpha_{lm}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{x}} Y_{lm}^*(\hat{p}) \Theta(\vec{k}, \hat{p}, t) \quad (2.51)$$

Όλη η πληροφορία που περιέχεται στο πεδίο T περιέχεται επίσης και στις παραμέτρους α_{lm} , οι οποίες θεωρούνται τυχαίες μεταβλητές. Συνεπώς, δεν μπορούμε να κάνουμε προβλέψεις

για κάποιο α_{lm} ξεχωριστά αλλά μόνο για την κατανομή από την οποία προέρχονται. Ο πίνακας συσχέτισης των συνιστωσών α_{lm} , για τις οποίες ισχύει $\langle \alpha_{lm} \rangle = 0$, μας δίνει το φάσμα των ανισοτροπιών:

$$\langle \alpha_{lm} \alpha_{l'm'}^* \rangle = \delta_{l'l} \delta_{m'm} C_l \quad (2.52)$$

Από τις εξισώσεις (2.51) και (2.52) μπορούμε να βρούμε το γωνιακό φάσμα ως:

$$C_l = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk k^2 P(k) \left| \frac{\Theta_l(k)}{\delta(k)} \right|^2 \quad (2.53)$$

όπου $\delta(k)$ είναι η μετασχηματισμένη κατά Fourier της ανισοτροπίας της ύλης δ και $P(k)$ είναι το φάσμα ισχύος (power spectrum) αυτής που ορίζεται μέσω της σχέσης

$$\langle \delta(\vec{k}) \delta^*(\vec{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}' - \vec{k}) P(k) \quad (2.54)$$

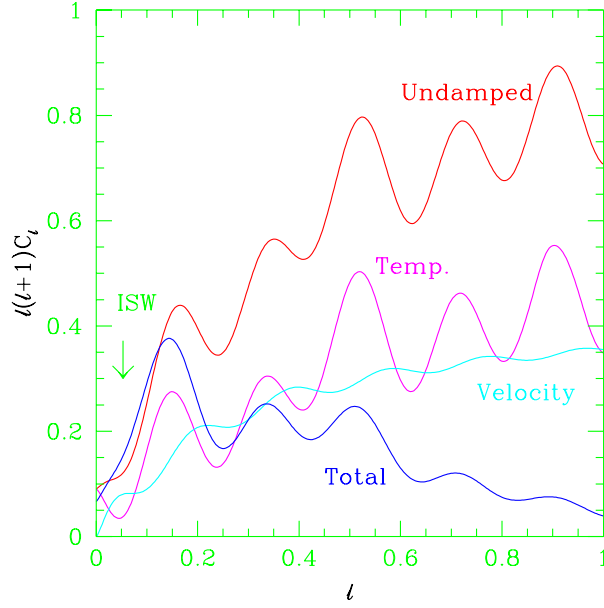
Παρόλο που, όπως φαίνεται από τα παραπάνω, ο υπολογισμός του φάσματος της Κοσμικής Ακτινοβολίας Μικροκυμάτων Υποβάθρου, πρακτικά δηλαδή των C_l 's, είναι μη τετριμμένος το τελικό φάσμα μπορούμε ποιοτικά να το αντιληφθούμε ως την υπέρθεση των φασμάτων δύο φαινομένων[22],[24]:

- Των ακουστικών ταλαντώσεων (acoustic oscillations), οι οποίες οφείλονται στον συναγωνισμό των φωτονίων με το θερμό βαρυονικό πλάσμα. Η πίεση των φωτονίων τείνει να εξαλείψει τις ανισοτροπίες, ενώ η βαρυτική έλξη των βαρυονίων τα ωθεί στο να καταρρεύσουν. Ο συναγωνισμός αυτών των δύο φαινομένων δημιουργεί ακουστικές ταλαντώσεις, οι οποίες δίνουν στο φάσμα της Κοσμικής Ακτινοβολίας Μικροκυμάτων Υποβάθρου την χαρακτηριστική του δομή με τις κορυφές.
- Η απόσβεση της διάχυσης της ακτινοβολίας ή απόσβεση *Silk*, λόγω της οποίας σε μικρές κλίμακες (ή αντίστοιχα μεγάλα l) οι διαταραχές της ακτινοβολίας αποσβένονται. Αυτό γίνεται γιατί σε ένα διαστελλόμενο σύμπαν καθώς το πλάσμα αραιώνει, το μέσο ελεύθερο μήκος των φωτονίων αυξάνει και έτσι οι διαταραχές των φωτονίων αποσβένονται.

Εκτός από τα παραπάνω, το φάσμα επηρεάζεται και από άλλα φαινόμενα τα οποία γενικά χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, τα **πρωτεύοντα**, τα οποία προκύπτουν από διεργασίες κατά την εποχή της επανασύνδεσης, και τα **δευτερεύοντα** τα οποία προκύπτουν από διεργασίες μετά την εποχή της επανασύνδεσης και καθώς το φως κινείται ανάμεσα από την επιφάνεια της τελευταίας σκέδασης και τον παρατηρητή.

Οι πρωτεύουσες ανισοτροπίες είναι τρεις και καθεμιά κυριαρχεί σε μεγάλες, μεσαίες και μικρές γωνιακές κλίμακες:

- Οι βαρυτικές διαταραχές (*Sachs - Wolfe effect*), στις οποίες φωτόνια από πυκνότερες περιοχές κατά την εποχή της τελευταίας σκέδασης καθώς βγαίνουν από τα πηγάδια δυναμικού μετατοπίζονται περισσότερο προς το ερυθρό, το οποίο μεταφράζεται ως $\frac{\delta T}{T} = \frac{\delta \Phi}{c^2}$. Όμως, οι βαρυτικές διαταραχές προκαλούν και μία διαστολή του χρόνου



Σχήμα 2.3: Η συνεισφορά κάθε όρου στο τελικό φάσμα της ανισοτροπίας (από την αναφορά [77]).

$\frac{\delta t}{t} = \frac{\delta \Phi}{c^2}$ αλλά επειδή $\alpha(t) \propto t^{2/3}$ και $T \propto 1/\alpha$ παίρνουμε μία συνεισφορά $\frac{\delta T}{T} = -\frac{2}{3} \frac{\delta \Phi}{c^2}$. Συνεπώς, η ολική συνεισφορά είναι το άθροισμα των δύο $\frac{\delta T}{T} = \frac{\delta \Phi}{3c^2}$ κάνοντας έτσι τις πιο πυκνές περιοχές να φαίνονται πιο ψυχρές.

- Οι αδιαβατικές διαταραχές, μέσω των οποίων στις υπέρπυκνες περιοχές η συζεύξη ύλης και ακτινοβολίας μπορεί να συμπιέσει την ακτινοβολία αυξάνοντας έτσι την θερμοκρασία. Αυτό γίνεται γιατί για αυτές ισχύει ότι η ποσοστιαία υπερπυκνότητα $\delta\rho/\rho$ για το κάθε είδος (φωτόνια, βαρυόνια κλπ) είναι ίδια. Έτσι, επειδή $\frac{\delta n_\gamma}{n_\gamma} = \frac{\delta \rho_\gamma}{\rho_\gamma}$ και $n_\gamma \propto T^3$ έχουμε $\delta = \delta\rho_\gamma/\rho_\gamma = 3\frac{\delta T}{T}$ και $\frac{\delta T}{T} = \frac{\delta}{3}$.
- Οι διαταραχές λόγω της ταχύτητας (Doppler), στις οποίες το θερμό πλάσμα κατά την εποχή της τελευταίας σκέδασης έχει μη μηδενική ταχύτητα, κάτι το οποίο οδηγεί σε μετατοπίσεις στην συχνότητα και συνεπώς στην θερμοκρασία.

Αντίστοιχα, οι κύριες δευτερεύουσες ανισοτροπίες είναι δύο:

- Το ολοκληρωτικό φαινόμενο *Sachs - Wolfe (ISW effect)*. Όταν το βαρυτικό δυναμικό αλλάζει κατά μήκος της τροχιάς του φωτονίου, τότε αυτό συνεπάγεται ότι το φωτόνιο συσσωρεύει ερυθρή μετατόπιση η οποία ισοδυναμεί με μια διαταραχή στην θερμοκρασία [76]:

$$\Theta_l(k, \eta_0) = (2l + 1) \int_{\eta_{rec}}^{\eta_0} d\eta e^{-\tau} \left[2\dot{\Phi}(k, \eta) \right] j_l(k(\eta_0 - \eta)) \quad (2.55)$$

όπου η τελεία υποδηλώνει παράγωγο ως προς το σύμμορφο χρόνο η (conformal time) $d\eta \equiv dt/\alpha$, $\tau(\eta) \equiv \int_{\eta_{rec}}^{\eta_0} d\eta' n_e \sigma_T \alpha$ είναι το οπτικό βάθος, $\Theta \equiv \frac{\delta T}{T}$ και το ολοκλήρωμα

γίνεται κατά μήκος της γραμμής ως την επιφάνεια της τελευταίας σκέδασης. Επειδή στο ολοκλήρωμα εμφανίζονται οι συναρτήσεις Bessel j_l , η κυρίαρχη συνεισφορά του φαινομένου αυτού γίνεται σε μεγάλες κλίμακες ή μικρά l .

- Ο επαναϊονισμός (*Reionization*) του διαγαλαξιακού υλικού (IGM). Όπως φαίνεται από τα φάσματα απορρόφησης μακρινών γαλαξιών, το μεγαλύτερο ποσοστό του διαγαλαξιακού υλικού σήμερα είναι ιονισμένο καθώς οι γραμμές απορρόφησης του ουδέτερου υδρογόνου είναι ελάχιστες. Έτσι τα εισερχόμενα φωτόνια σκεδάζονται από τα ελεύθερα φορτία, π.χ. τα ηλεκτρόνια, και αυτό έχει ως συνέπεια οι ανισotropίες σε μικρές κλίμακες να αποσβένονται.

Ο παράγοντας μετατόπισης R

Ένα πολύ ακριβές και ευαίσθητο είδος παρατήρησης είναι η γωνιακή κλίμακα του ηχητικού ορίζοντα της επιφάνειας της τελευταίας σκέδασης, όπως αυτή κωδικοποιείται στην θέση l_1^{TT} της πρώτης κορυφής του φάσματος της Κοσμικής Ακτινοβολίας Μικροκυμάτων Υποβάθρου. Μετρώντας την γωνιακή κλίμακα $\theta_1^{TT} \sim 1/l_1^{TT}$ του ηχητικού ορίζοντα της επιφάνειας της τελευταίας σκέδασης και υπολογίζοντας την ομοκινούμενη κλίμακα $r_s(z_{dec})$, όπου z_{dec} είναι η ερυθρή μετατόπιση στην οποία γίνεται η αποσύζευξη των φωτονίων από την ύλη, ανεξάρτητα από την φυσική της ακτινοβολίας μικροκυμάτων υποβάθρου, η απόσταση γωνιακής διαμέτρου του ηχητικού ορίζοντα $d_A(z_{rec})$ μπορεί να βρεθεί, υποθέτοντας επιπεδότητα, ως εξής:

$$d_A(z_{rec}) = \frac{r_s(z_{rec})}{\theta_1^{TT}} = \frac{1}{1+z_{rec}} \int_0^{z_{rec}} \frac{dz}{H(z)} \quad (2.56)$$

παρέχοντας έτσι ένα χρήσιμο παρατηρησιακό όριο στην $H(z)$. Για να μην υπάρχει αυτή η εξάρτηση από το θεωρητικό μοντέλο στον υπολογισμό της κλίμακας του ηχητικού ορίζοντα, μπορούμε να ορίσουμε μία σχεδόν ανεξάρτητη από το θεωρητικό μοντέλο παράμετρο διαιρώντας την μετρούμενη γωνία $\theta_1^{TT} \sim 1/l_1^{TT}$ με την αντίστοιχη γωνία $\theta_1'^{TT}$ ενός πρότυπου μοντέλου. Η παράμετρος αυτή είναι γνωστή ως ‘*παράμετρος μετατόπισης*’ (*‘shift parameter’*). Η παράμετρος μετατόπισης ορίζεται ως [78],[79],[80],[81]

$$R = \frac{l_1'^{TT}}{l_1^{TT}} \quad (2.57)$$

όπου l_1^{TT} είναι το πολύπολο που αντιστοιχεί στην πρώτη κορυφή του φάσματος της Κοσμικής Ακτινοβολίας Μικροκυμάτων Υποβάθρου. Στον ορισμό του R , το $l_1'^{TT}$ αντιστοιχεί στο μοντέλο (με σταθερές Ω_{0m} , Ω_{0b} και h) που χαρακτηρίζεται από την παράμετρο μετατόπισης και το $l_1'^{TT}$ αντιστοιχεί στην πρώτη κορυφή του φάσματος ενός πρότυπου επιπέδου Standard Cold Dark Matter - SCDM μοντέλου (για το οποίο ισχύει $\Omega'_{0m} = 1$) με ίδια $\omega_m \equiv \Omega_{0m}h^2$ και $\omega_b = \Omega_{0b}h^2$ όπως το αρχικό μοντέλο. Η θέση l_1^{TT} της πρώτης κορυφής συνδέεται με την απόσταση γωνιακής διαμέτρου d_A κατά την επιφάνεια της τελευταίας σκέδασης και με τον ηχητικό ορίζοντα r_s κατά την επιφάνεια της τελευταίας σκέδασης ($z = z_{rec}$) ως εξής [79],[82]:

$$l_1^{TT} = l_A(d_A, r_s)(1 - \psi(\omega_m, \omega_b)) \quad (2.58)$$

όπου

$$l_A(d_A, r_s) \equiv \frac{\pi}{\theta_1^{TT}} \quad (2.59)$$

$$\theta_1^{TT} \equiv \frac{r_s(z_{rec})}{d_A(z_{rec})} \quad (2.60)$$

ενώ η παράμετρος φάσης είναι $\psi(\omega_m, \omega_b) \simeq 0.27$ [82] και η οποία εξαρτάται ασθενώς από τις κοσμολογικές παραμέτρους. Ο ηχητικός ορίζοντας r_s και η απόσταση γωνιακής διαμέτρου d_A εξαρτώνται από την $H(\alpha)$ ως εξής:

$$\begin{aligned} r_s &= \alpha_{rec} \int_0^{\alpha_{rec}} \frac{c_s(\alpha) d\alpha}{\alpha^2 H(\alpha)} = \\ &= \alpha_{rec} \int_0^{\alpha_{rec}} \frac{c_s(\alpha) d\alpha}{\Omega_{0m}^{1/2}} \left[\frac{\Omega_r h^2}{\Omega_{0m} h^2} + \alpha \right]^{-1/2} \end{aligned} \quad (2.61)$$

όπου $c_s(\alpha)$ είναι η ταχύτητα του ‘ήχου’, δηλαδή η ταχύτητα με την οποία διαδίδονται οι διαταραχές, η οποία κατά την αποσύζευξη (decoupling) ($\alpha = \alpha_{rec}$) είναι

$$c_s^2(\alpha_{rec}) = \frac{\delta p}{\delta \rho} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 + \frac{3\Omega_b}{4\Omega_r} \alpha_{rec}} \quad (2.62)$$

και

$$d_A(z) = \frac{\alpha_{rec}}{H_0 \sqrt{\Omega_k}} \sin \left[H_0 \sqrt{\Omega_k} \int_0^{z_{rec}} \frac{dz'}{H(z')} \right] \quad (2.63)$$

Για το πρότυπο SCDM μοντέλο έχουμε

$$\begin{aligned} d'_A(z'_{rec}) &= \frac{\alpha_{rec}}{H_0} \int_0^{z_{rec}} \frac{dz'}{[\Omega'_{0m}(1+z)^3 + \Omega'_r(1+z)^4]^{1/2}} = \\ &= \frac{2\alpha_{rec}}{H_0} [(\alpha'_{eq} + 1)^{1/2} - (\alpha'_{rec} + \alpha'_{eq})^{1/2}] = \\ &= \frac{2\alpha_{rec}}{H_0} [(\Omega'_r + 1)^{1/2} - (\alpha'_{rec} + \Omega'_r)^{1/2}] \\ &\equiv \frac{2\alpha_{rec}}{H_0} q(\Omega'_r, \alpha'_{rec}) \end{aligned} \quad (2.64)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2.58)-(2.64) είναι εύκολο να δείξουμε ότι

$$R = \frac{l_1^{TT}}{l_A^{TT}} = \frac{l'_A(1 - \psi')}{l_A(1 - \psi)} = \frac{r_s d'_A(z'_{rec})}{r'_s d_A(z_{rec})} = \frac{2}{\Omega_{0m}^{1/2}} \frac{q(\Omega'_r, \alpha_{rec})}{\chi(z)} \quad (2.65)$$

όπου

$$\chi(z) \equiv \int_0^z \frac{H_0 dz'}{H(z')} \quad (2.66)$$

έχοντας υποθέσει επιπεδότητα και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\psi = \psi'$, αφού $\omega_b = \omega'_b$ και $\omega_m = \omega'_m$, και $\alpha_{rec}(\omega_b, \omega_m) = \alpha'_{rec}(\omega'_b, \omega'_m)$ [82]. Το μεγάλο πλεονέκτημα της παραμέτρου μετατόπισης R , έναντι της χρήσης απλά της τιμής της l_1^{TT} , είναι ότι εξαρτάται πολύ ασθενώς σε άλλες παραμέτρους πέραν της γεωμετρίας ($H(z)$). Η εξάρτηση στις άλλες παραμέτρους εισάγεται μέσω των όρων $\Omega_{0m}^{-1/2}$ και $q(\Omega'_r, \alpha_{rec}) = q(\omega_r/h'^2, \alpha_{rec}(\omega_m, \omega_b))$ όπου $\omega_r \equiv \Omega_r h^2 \simeq 2.47 \cdot 10^{-5}$, $h'^2 = \omega_m$ και [82] $z_{rec} = \frac{1}{\alpha_{rec}} - 1 = 1048(1 + 0.00124\omega_b^{-0.738})(1 + g_1\omega_m^{g_2})$ όπου $g_1 = 0.0783\omega_b^{-0.238}(1 + 39.5\omega_b^{0.763})^{-1}$ και $g_2 = 0.560(1 + 21.1\omega_b^{1.81})^{-1}$. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να σημειωθεί ότι αυτή η ασθενής εξάρτηση της παραμέτρου μετατόπισης στις ω_m, ω_b , μέσω του $q(\omega_m, \omega_b)$, δεν έχει καταδειχθεί ρητά σε προηγούμενες μελέτες [52]. Αντίθετα, η παράμετρος μετατόπισης συνήθως γράφεται ως

$$R' = \frac{2}{\Omega_{0m}^{1/2}\chi(z_{rec})} \quad (2.67)$$

ή ισοδύναμα ως $\bar{R} = \Omega_{0m}^{1/2}\chi(z_{rec})$ παραλείποντας έτσι τη διόρθωση $q(\omega_m, \omega_b)$. Για τις τιμές $\Omega_{0m} = 0.27$, $\Omega_b = 0.043$ και $0.5 \leq h \leq 0.9$, το $q(\omega_m, \omega_b)$ παραμένει στην περιοχή $0.964 \leq q \leq 0.968$ και επομένως η εξάρτηση της παραμέτρου Hubble που προέρχεται από το q είναι πολύ ασθενής.

Το κύριο μειονέκτημα της παραμέτρου μετατόπισης είναι ότι για να υπολογιστεί, χρησιμοποιώντας τον ορισμό (2.57), για ένα δεδομένο κοσμολογικό μοντέλο, δεν χρειαζόμαστε μόνο την θέση της πρώτης κορυφής l_1^{TT} , αλλά και την θέση της πρώτης κορυφής για το αντίστοιχο πρότυπο Λ CDM μοντέλο. Για να είναι ακριβές το αποτέλεσμα πρέπει να χρησιμοποιηθεί κάποιος αριθμητικός κώδικας σε υπολογιστή όπως το πρόγραμμα CAMB [75] με $\Omega'_{0m} = 1$, $\omega'_m = \omega_m$, $\omega'_b = \omega_b$ και να υπολογιστεί η θέση της πρώτης κορυφής l_1^{TT} . Η διαδικασία αυτή φαίνεται στο σχήμα 2.4 όπου δείχνουμε τα δεδομένα WMAP του τρίτου έτους μαζί με μία θεωρητική καμπύλη που αντιστοιχεί στις παραμέτρους $(\omega_m, \omega_b, h) = (0.14, 0.022, 0.72)$ έχοντας υποθέσει ένα επίπεδο Λ CDM μοντέλο. Η πρώτη κορυφή για το μοντέλο αυτό βρίσκεται στη θέση $l_1^{TT} = 220 \pm 0.8$ ενώ για το πρότυπο Λ CDM μοντέλο με $(\omega_m, \omega_b, h) = (0.14, 0.022, 0.37)$ (το οποίο συνεπάγεται $\Omega_{0m} = 1$) έχουμε $l_1^{TT} = 246$ (δες και το σχήμα 2.4). Έτσι παίρνουμε

$$R = \frac{l_1^{TT}}{l_1'^{TT}} = 1.123 \pm 0.03 \quad (2.68)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.65) και (2.67) με $q = 0.965$ βρίσκουμε ότι

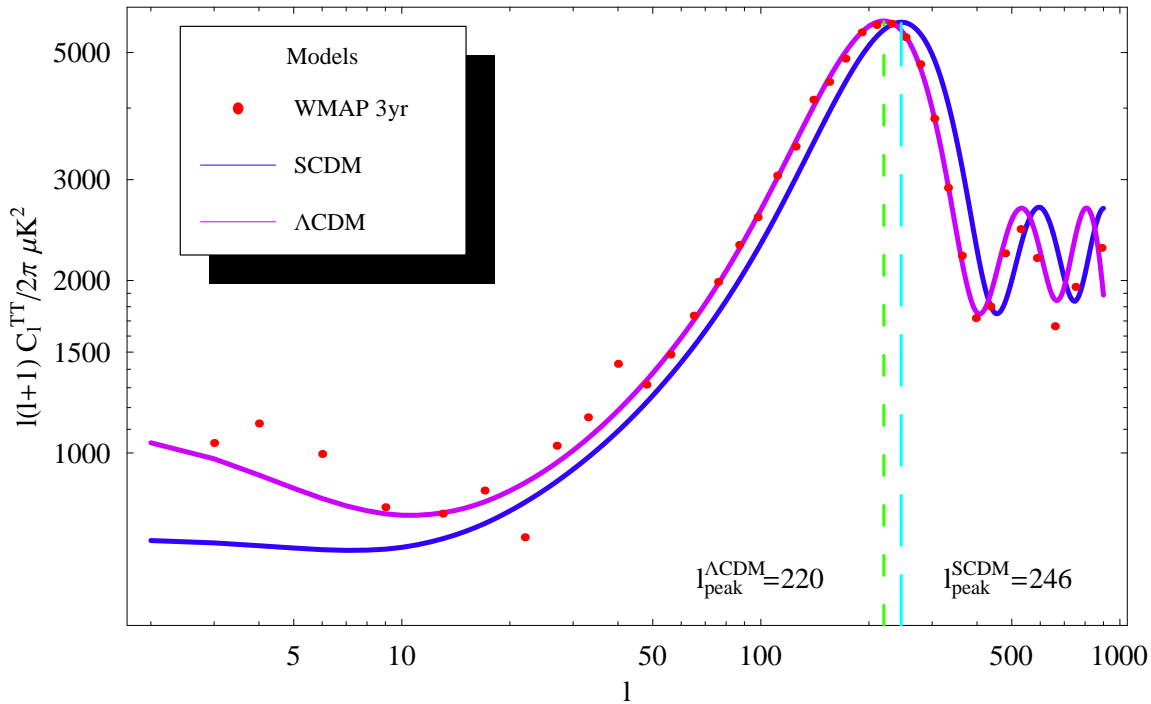
$$\bar{R} \equiv \Omega_{0m}^{1/2}\chi(z_{rec}) = 1.71 \pm 0.05 \quad (2.69)$$

Το αποτέλεσμα αυτό βρίσκεται σε καλή συμφωνία με αυτό της αναφοράς [52] όπου με την χρήση προσομοίωσης *Monte-Carlo* και την χρήση των δεδομένων WMAP βρέθηκε η τιμή για το \bar{R}

$$\bar{R} = 1.70 \pm 0.03 \quad (2.70)$$

Η μέτρηση αυτή της παραμέτρου μετατόπισης (εξίσωση (2.69)) μας επιτρέπει να προσθέσουμε ένα σημαντικό όρο στο χ^2 . Ο όρος αυτός είναι της μορφής

$$\chi_{CMB}^2(\Omega_{0m}, w_0, w_1) = \frac{(\bar{R}(\Omega_{0m}, w_0, w_1) - 1.70)^2}{0.03^2} \quad (2.71)$$



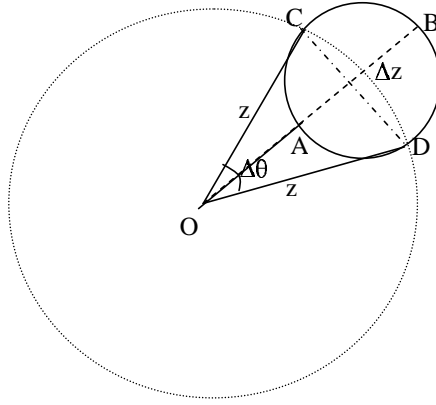
Σχήμα 2.4: Παραγωγή της παραμέτρου μετατόπισης: Τα δεδομένα WMAP του τρίτου έτους μαζί με μία θεωρητική καμπύλη που αντιστοιχεί σε ένα επίπεδο Λ CDM μοντέλο και στις παραμέτρους ($\omega_m = 0.14, \omega_b = 0.022, h = 0.72$) και ένα SCDM μοντέλο με ($\omega_m = 0.14, \omega_b = 0.022, h = 0.37$). Για το Λ CDM η πρώτη κορυφή βρίσκεται στη θέση $l_1^{TT} = 220$ ενώ για το SCDM μοντέλο στη θέση $l_1^{TT} = 246$.

και μπορεί να είναι πολύ σημαντικός κατά την μελέτη κοσμολογικών μοντέλων για δύο λόγους:

1. Η παράμετρος μετατόπισης έχει πολύ μικρό σφάλμα (της τάξης του 1%)
2. Το ολοκλήρωμα του $H(z)$ γίνεται μέχρι και ($z_{rec} \simeq 1089$). Οπότε, μικρές μεταβολές στο $H(z)$ μπορεί να αυξήσουν σημαντικά το χ^2 λόγω αυτού του όρου.

2.2.3 Οι Ακουστικές Ταλαντώσεις των Βαρυονίων

Η συνάρτηση συσχέτισης της δομής μεγάλης κλίμακας όπως μετρήθηκε με τη χρήση του δείγματος ερυθρών γαλαξιών από την έρευνα SDSS (Sloan Digital Sky Survey) [53] παρουσιάζει μία ξεκάθαρη κορυφή στη θέση $100h^{-1}Mpc$. Η κορυφή αυτή έχει ταυτιστεί με το διαστελλόμενο σφαιρικό κύμα, το οποίο έχει ακτίνα περίπου $150Mpc$, των διαταραχών των ακουστικών ταλαντώσεων των βαρυονίων την εποχή της επανασύνδεσης. Η ταυτοποίηση της ομοκινούμενης κλίμακας, στην οποία παρατηρήθηκε το μέγιστο στην συνάρτηση συσχε-



Σχήμα 2.5: Ένα σφαιρικό κέλυφος στο χώρο της ερυθρής μετατόπισης.

τισμού, απαιτεί μία κατάλληλη μορφή για την συνάρτηση $H(z)$ κατά την μετατροπή από την ερυθρή μετατόπιση σε αποστάσεις. Συνεπώς, ο ακριβής προσδιορισμός της $H(z)$ συνεπάγεται τη χρήση ενός γενικού μοντέλου ή μιας παραμετροποίησης της συνάρτησης $H(z)$ ώστε να μετατραπούν τα δεδομένα από ερυθρή μετατόπιση σε αποστάσεις και μετά να μεταβληθούν οι παράμετροι αυτές ώσπου η παρατηρούμενη κορυφή στις ακουστικές ταλαντώσεις των βαρυονίων (Baryon Acoustic Oscillation - (BAO)) να συμπέσει με την αναμενόμενη τιμή από την φυσική της Κοσμικής Ακτινοβολίας Μικροκυμάτων Υποβάθρου.

Μια απλουστευμένη εκδοχή αυτής της μεθόδου χρησιμοποιήθηκε στις αναφορές [53], [83]. Αυτή περιλαμβάνει τη χρήση ενός πρότυπου Λ CDM μοντέλου για την κατασκευή της συνάρτησης συσχετισμού από τα παρατηρησιακά δεδομένα (γωνίες μεταξύ γαλαξιών και ερυθρές μετατοπίσεις) και την εύρεση της κλίμακας r_{peak} στην οποία η κορυφή των BAO εμφανίζεται. Η σύγκριση αυτής της τιμής με την αναμενόμενη r'_{peak} από την CMB φυσική απαιτεί μια μετατόπιση της κλίμακας κατά ένα παράγοντα α : $r'_{peak} = \alpha r_{peak}$. Ο παράγοντας α μπορεί να προσεγγιστεί ως ο λόγος της απαιτούμενης χαρακτηριστικής κλίμακας $D_V(z_{BAO})$ της έρευνας, που έχει μέση ερυθρή μετατόπιση z_{BAO} , προς την κλίμακα $D_V^{\Lambda CDM}(z_{BAO})$ που αντιστοιχεί στο πρότυπο Λ CDM μοντέλο

$$\alpha = \frac{r'_{peak}}{r_{peak}} = \frac{D_V(z_{BAO})}{D_V^{\Lambda CDM}(z_{BAO})} \quad (2.72)$$

Η χαρακτηριστική κλίμακα της έρευνας, η οποία γίνεται σε μέση κλίμακα z_s , μπορεί να συνδεθεί με την $H(z)$ ως εξής: Ας θεωρήσουμε ένα σφαιρικό κέλυφος (Σχήμα 2.5) ομοκινούμενης ακτίνας R . Έστω z είναι η ερυθρή μετατόπιση που αντιστοιχεί στη σφαίρα (σημεία C και D) όπως τα βλέπει ένας παρατηρητής στη θέση O και Δz η διαφορά στην ερυθρή μετατόπιση μεταξύ A και B .

Αν μετρήσουμε την γωνιακή κλίμακα $\Delta\theta$ τις ερυθρές μετατοπίσεις z και Δz , τότε δοθέντος ενός κοσμολογικού μοντέλου $H(z)$, μπορούμε να υπολογίσουμε τις ομοκινούμενες

κλίμακες CD και AB μέσω της επίπεδης FRW μετρικής ως εξής [84]

$$CD = x\Delta\theta = \Delta\theta \int_{t_i}^{t_0} \frac{dt}{\alpha(t)} = \frac{\Delta\theta}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{E(z)} \quad (2.73)$$

όπου έχουμε ορίσει $E(z) \equiv H(z)/H_0$ και

$$AB = \Delta x = \frac{\Delta t}{\alpha(t)} = \frac{1}{H_0} \frac{\Delta z}{E(z)} \quad (2.74)$$

όπου $\alpha(t)$ είναι ο παράγοντας κλίμακας. Γενικεύοντας τα παραπάνω σε μία παραμορφωμένη σφαίρα ($AB \neq CD$) μπορούμε να συσχετίσουμε μία και μοναδική κλίμακα στη σφαίρα ως εξής [53]

$$D_V(z) = \left[\left(\frac{CD}{\Delta\theta} \right)^2 (AB) \right]^{1/3} = \left[\left(\frac{1}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{E(z)} \right)^2 \frac{1}{H_0} \frac{\Delta z}{E(z)} \right]^{1/3} \quad (2.75)$$

όπου $CD/\Delta\theta$ είναι η ομοκινούμενη απόσταση γωνιακής διαμέτρου (angular diameter distance). Επίσης, θέλουμε αυτή η κλίμακα να είναι αντιπροσωπευτική όλου του δείγματος (η πρότυπη γωνιακή απόσταση για την έρευνα SDSS είναι σε ερυθρή μετατόπιση $z_{BAO} = 0.35$) και έτσι επιτρέπουμε στην σφαίρα να εκτείνεται από τον παρατηρητή σε ($A \rightarrow O$) ως $z \simeq 0.35$ ($z_{BAO} \simeq 0.35$) και συνεπώς $\Delta z \simeq z_{BAO} \simeq 0.35$. Για δείγματα που βρίσκονται σε χαμηλές ερυθρές μετατοπίσεις, π.χ. $z_{BAO} = 0.35$, μπορούμε να υποθέσουμε πως η κλίμακα $D_V(z)$ περιέχει όλη την πληροφορία που απαιτείται για την μετατροπή της ερυθρής μετατόπισης σε αποστάσεις. Απαιτώντας ότι η κλίμακα της κορυφής της συνάρτησης συσχέτισης συμπίπτει με την ακουστική κλίμακα (η οποία μπορεί να βρεθεί ακόμα και με απλή φυσική, δεσ εξίσωση (2.61), και εξαρτάται από την παράμετρο $\Omega_{0m}h^2$) έχει δειχθεί [53] ότι

$$D_V(0.35) = 1370 \pm 64 Mpc \quad (2.76)$$

για $\Omega_{0m}h^2 = 0.130 \pm 0.010$. Μια αδιάστατη και ανεξάρτητη της παραμέτρου H_0 εκδοχή της κλίμακας D_V είναι

$$A \equiv D_V(0.35) \frac{\sqrt{\Omega_{0m}H_0^2}}{z_{BAO}} = \Omega_{0m}^{1/2} E(z_{BAO})^{-1/3} \left[\frac{1}{z_{BAO}} \int_0^{z_1} \frac{dz'}{E(z')} \right]^{2/3} = 0.469 \pm 0.017 \quad (2.77)$$

Η μέτρηση της παραμέτρου A (εξίσωση (2.77)) επιτρέπει την προσθήκη ενός ακόμα όρου στο χ^2 των εξισώσεων (2.19), (2.71) που θα ελαχιστοποιηθεί ως προς τις παραμέτρους του $H(z)$ μοντέλου. Ο όρος αυτός είναι:

$$\chi_{BAO}^2(\Omega_{0m}, w_0, w_1) = \frac{(A(\Omega_{0m}, w_0, w_1) - 0.469)^2}{0.017^2} \quad (2.78)$$

2.2.4 Το ποσοστό της μάζας των βαρυονικών αερίων των σμηνών γαλαξιών

Μία ακόμα μέθοδος που μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη μελέτη κοσμολογικών μοντέλων αφορά τη μέτρηση του ποσοστού της μάζας των βαρυονικών αερίων των σμηνών γαλαξιών. Η βασική υπόθεση αυτής της μεθόδου είναι ότι το ποσοστό της μάζας των βαρυονικών αερίων των σμηνών γαλαξιών [85],[54],[55]:

$$f_{gas} = \frac{M_{b-gas}}{M_{tot}} \quad (2.79)$$

είναι σταθερό, ανεξάρτητο της ερυθρής μετατόπισης και σχετίζεται με το ολικό ποσοστό του σύμπαντος $\frac{\Omega_b}{\Omega_{0m}}$ με τον εξής απλό τρόπο:

$$b \frac{\Omega_b}{\Omega_{0m}} = \frac{M_b}{M_{tot}} = (1 + \xi) \frac{M_{b-gas}}{M_{tot}} = (1 + \xi) f_{gas} \quad (2.80)$$

όπου b είναι ένας παράγοντας πόλωσης (bias factor) ο οποίος δηλώνει ότι το ποσοστό των βαρυονίων στα σμήνη των γαλαξιών είναι ελαφρώς μικρότερο από ότι στο σύμπαν στο σύνολο του. Επίσης, με τον παράγοντα $(1 + \xi)$ λαμβάνεται υπόψη το γεγονός ότι η ολική μάζα των βαρυονίων στα σμήνη αποτελείται από θερμό αέριο που εκπέμπει ακτίνες X αλλά και βαρυονική μάζα που εκπέμπει στο ορατό, δηλαδή τα αστέρια, με τα δύο να είναι μεταξύ τους ανάλογα και με σταθερά αναλογίας $\xi \simeq 0.19\sqrt{h}$, σύμφωνα με την αναφορά [55]. Υποθέτοντας ότι το θερμό αέριο στο σμήνος μπορεί να περιγραφεί από ένα σφαιρικά συμμετρικό και ισοθερμικό μοντέλο της μορφής:

$$n_e = n_{e0} \left(1 + \frac{r^2}{r_c^2}\right)^{-3\beta/2} \quad (2.81)$$

όπου β είναι μία σταθερά, n_e είναι η αριθμητική πυκνότητα των ηλεκτρονίων και n_{e0} , r_c είναι η κεντρική αριθμητική πυκνότητα των ηλεκτρονίων και η ακτίνα του πυρήνα αντίστοιχα, μπορούμε να δείξουμε ότι [56],[86]

$$M_{gas}(< R) = B(T_e, R/r_c, \beta) r_c^{3/2} L_X(< R)^{1/2} \quad (2.82)$$

Στην εξίσωση (2.82) T_e είναι η θερμοκρασία των ηλεκτρονίων, $L_X(< R)$ είναι η βολομετρική λαμπρότητα εντός της ακτίνας R και B είναι μία σταθερά που είναι ανεξάρτητη των κοσμολογικών παραμέτρων. Οι ποσότητες r_c , $L_X(< R)$ μπορούν να βρεθούν από την παρατηρούμενη γωνιακή ακτίνα του πυρήνα θ_c και την παρατηρούμενη φαινόμενη λαμπρότητα εντός της θ ($L_X(< \theta)$) ως

$$L_X(< R) = 4\pi d_L(z)^2 l_X(< \theta) \quad (2.83)$$

$$r_c = \theta_c d_A(z) \quad (2.84)$$

$$R = \theta d_A(z) \quad (2.85)$$

όπου $d_L(z)$ και $d_A(z)$ είναι η αποστάσεις λαμπρότητας και γωνιακής διαμέτρου αντίστοιχα, οι οποίες εξαρτώνται από το κοσμολογικό μοντέλο $H(z)$ ως

$$d_L(z) = (1+z)^2 d_A(z) = c(1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad (2.86)$$

για μία επίπεδη κοσμολογία. Από τις εξισώσεις (2.82)-(2.86) βρίσκουμε ότι

$$M_{gas}(< R) = C(\theta_c, \theta, l_X, z) d_A(z)^{5/2} \quad (2.87)$$

όπου όλη η εξάρτηση στο κοσμολογικό μοντέλο περιέχεται στην $d_A(z)$ ενώ η σταθερά C εξαρτάται από παρατηρήσιμες ποσότητες που χαρακτηρίζουν το κάθε σμήνος $(\theta_c, l_X(< \theta), T_e, z)$.

Παρόμοια, η ολική μάζα $M_{tot}(< R)$ του σμήνους, εντός της ακτίνας R , μπορεί να βρεθεί υποθέτοντας ότι η μάζα ανάμεσα στα σμήνη βρίσκεται σε υδροστατική ισορροπία

$$M_{tot}(< R) = D R = D \theta d_A(z) \quad (2.88)$$

όπου η σταθερά D είναι ανεξάρτητη κοσμολογικών παρατηρήσεων και εξαρτάται μόνο από ιδιότητες του σμήνους. Από τις εξισώσεις (2.87) και (2.88) βρίσκουμε ότι

$$f_{gas} = \frac{M_{gas}(< R)}{M_{tot}(< R)} = \frac{C}{D\theta} d_A(z)^{3/2} \equiv Q d_A(z)^{3/2} \quad (2.89)$$

όπου το Q εξαρτάται μόνο από ιδιότητες του σμήνους. Αν υποθέσουμε τώρα ότι οι ποσότητες Q_i ($i = 1, \dots, N$) για ένα δείγμα N σμηνών που βρίσκονται σε ερυθρές μετατοπίσεις z_i έχουν μετρηθεί, τότε από τις εξισώσεις (2.80) και (2.89) έχουμε

$$b \frac{\Omega_b}{\Omega_{0m}} = (1 + \xi) f_{gas}(z_i) = (1 + \xi) Q_i d_A(z_i)^{3/2} \quad (2.90)$$

Ορίζοντας

$$f_{gas}^{SCDM}(z_i) \equiv Q_i d_A^{SCDM}(z_i)^{3/2} \quad (2.91)$$

όπου $d_A^{SCDM}(z_i)$ είναι η απόσταση γωνιακής διαμέτρου για το πρότυπο SCDM μοντέλο (για το οποίο ισχύει $\Omega_{0m} = 1$), μπορούμε να λύσουμε την (2.91) ως προς Q_i και αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2.90) βρίσκουμε

$$f_{gas}^{SCDM}(z_i) \equiv \frac{b}{1 + \xi} \frac{\Omega_b}{\Omega_{0m}} \left(\frac{d_A^{SCDM}(z_i)}{d_A(z_i)} \right)^{3/2} \quad (2.92)$$

Επειδή το f_{gas}^{SCDM} είναι γνωστό παρατηρησιακά [55] μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (2.92) για να προσδιορίσουμε την συνάρτηση $d_A(z_i)$ και συνεπώς το κοσμολογικό μοντέλο που ταιριάζει καλύτερα στα δεδομένα. Με την χρήση των 26 παρατηρησιακών

Πίνακας 2.1: Τα δεδομένα για τα σμήνη γαλαξιών της αναφοράς [55].

z_i	$f_{gas,i}$	$\sigma_{gas,i}^2$
0.078	0.189	0.011
0.088	0.184	0.011
0.143	0.167	0.019
0.188	0.169	0.011
0.206	0.180	0.015
0.208	0.137	0.018
0.240	0.163	0.009
0.252	0.164	0.012
0.288	0.149	0.017
0.313	0.169	0.010
0.314	0.175	0.023
0.324	0.177	0.018
0.345	0.173	0.019
0.352	0.189	0.025
0.363	0.159	0.017
0.391	0.159	0.024
0.399	0.177	0.017
0.450	0.155	0.019
0.451	0.137	0.009
0.461	0.129	0.019
0.461	0.156	0.034
0.494	0.094	0.025
0.539	0.135	0.011
0.686	0.155	0.018
0.782	0.100	0.016
0.892	0.114	0.021

δεδομένων για τα $f_{gas}^{SCDM}(z_i)$ που δημοσιεύτηκαν στην αναφορά [55] μπορούμε να ελαχιστοποιήσουμε το χ_{CBF}^2 (Cluster Baryon Fraction) που ορίζεται ως

$$\chi_{CBF}^2(\Omega_{0m}, w_0, w_1) \equiv \sum_{i=1}^{26} \frac{(f_{gas}^{SCDM}(z_i) - f_{gas,i})^2}{\sigma_{gas,i}^2} \quad (2.93)$$

όπου τα $f_{gas}^{SCDM}(z_i)$ δίνονται από την εξίσωση (2.92) και τα δεδομένα $f_{gas,i}, \sigma_{gas,i}^2$ που χρησιμοποιήθηκαν στην ανάλυση φαίνονται στον Πίνακα 2.1. Η παράμετρος $\frac{b}{1+\alpha} \frac{\Omega_b}{\Omega_{0m}}$ είναι ‘ενοχλητική’ και γι’ αυτό μπορούμε με την ακόλουθη μέθοδο μπορούμε να την ‘περιθωριοποιήσουμε’

(marginalization). Αν ορίσουμε $\lambda \equiv \frac{b}{1+\alpha} \frac{\Omega_b}{\Omega_{\text{om}}}$ τότε

$$f_{gas}^{SCDM}(z_i) = \lambda \cdot \left(\frac{d_A^{SCDM}(z_i)}{d_A(z_i)} \right)^{3/2} \equiv \lambda \cdot \tilde{f}_{gas}^{SCDM}(z_i) \quad (2.94)$$

και αφού αναπτύξουμε ως προς λ την εξίσωση (2.93) παίρνουμε

$$\chi_{CBF}^2 \equiv \lambda^2 A - 2\lambda B + C \quad (2.95)$$

όπου

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^N \frac{\tilde{f}_{gas}^{SCDM}(z_i)^2}{\sigma_{f_{gas,i}}^2} \\ B &= \sum_{i=1}^N \frac{\tilde{f}_{gas}^{SCDM}(z_i) \cdot f_{gas,i}}{\sigma_{f_{gas,i}}^2} \\ C &= \sum_{i=1}^N \frac{f_{gas,i}^2}{\sigma_{f_{gas,i}}^2} \end{aligned} \quad (2.96)$$

Η εξίσωση (2.95) έχει ελάχιστο για $\lambda = B/A$, με τιμή

$$\tilde{\chi}_{CBF}^2 \equiv C - B^2/A \quad (2.97)$$

η οποία είναι ανεξάρτητη του λ . Θα πρέπει να τονιστεί ότι τα δεδομένα αυτά έχουν σφάλμα πάνω από 10% και συνεπώς μεταβολές της $H(z)$ με δεδομένο Ω_{om} επηρεάζει το χ_{CBF}^2 πολύ λιγότερο από τα υπόλοιπα δεδομένα.

2.3 Δυναμικές Μέθοδοι

2.3.1 Η υπερπυκνότητα των διαταραχών της ύλης $\delta(\alpha)$

Ένα παράδειγμα δυναμικής μεθόδου της γεωμετρίας είναι η υπερπυκνότητα των διαταραχών της ύλης $\delta(\alpha)$ (*matter overdensity*) που ορίζεται ως

$$\delta(\alpha) \equiv \frac{\frac{\delta\rho}{\rho}(\alpha)}{\frac{\delta\rho}{\rho}(\alpha=1)} \quad (2.98)$$

όπου ρ είναι η μέση πυκνότητα της ύλης, ενώ $\delta\rho$ είναι η διαταραχή σε πρώτη τάξη αυτής. Οι μετρήσεις του $\delta(\alpha)$ μπορούν να γίνουν με διάφορους τρόπους π.χ. με τον παράγοντα παραμόρφωσης (redshift distortion factor) από τις έρευνες ερυθρής μετατόπισης [87], τις μεθόδους των ασθενών βαρυτικών φακών (weak lensing) [88], την αριθμητική κατανομή των σημνών των γαλαξιών [89], το φαινόμενο ISW [76] και το φάσμα ισχύος των δομών μεγάλης κλίμακας [90],[91]. Η θεωρητικά προβλεπόμενη εξέλιξη του $\delta(\alpha)$ (στα πλαίσια της Γενικής

Σχετικότητας) μπορεί να βρεθεί συνδυάζοντας τις εξισώσεις (2.36)-(2.42) και λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι μόνο οι τρόποι ταλάντωσης που βρίσκονται εντός της ακτίνας *Hubble* $k^2 \gg \alpha^2 H^2$ συνεισφέρουν, βρίσκουμε την διαφορική εξίσωση που περιγράφει την εξέλιξη του $\delta(\alpha)$ [22]:

$$\delta''(\alpha) + \left(\frac{3}{\alpha} + \frac{H'(\alpha)}{H(\alpha)} \right) \delta'(\alpha) - \frac{3}{2} \frac{\Omega_{0m}}{\alpha^5 H(\alpha)^2} \delta(\alpha) = 0 \quad (2.99)$$

με αρχικές συνθήκες $\delta(\alpha) \simeq \alpha$ για $\alpha \simeq 0$. Στην εξίσωση (2.99) έχουμε αγνοήσει τις ανισοτροπικές πιέσεις και τις διαταραχές της Σκοτεινής Ενέργειας[92] οι οποίες έχουν μικρή συνεισφορά εντός της ακτίνας *Hubble*. Ο τελευταίος όρος της εξίσωσης (2.99) απορρέει από την σύνδεση των διαταραχών της μετρικής με τις διαταραχές της ύλης. Όπως θα δούμε και παρακάτω, αυτό που μετρείται στην πράξη είναι ο γραμμικός ρυθμός μεταβολής των διαταραχών που ορίζεται ως

$$f \equiv \alpha \frac{d\delta(\alpha)/d\alpha}{\delta(\alpha)} \quad (2.100)$$

Εν γένει, η εξίσωση (2.99) δεν μπορεί να λυθεί αναλυτικά, αλλά είναι δυνατό να βρεθεί μια προσέγγιση στον γραμμικό ρυθμό μεταβολής των διαταραχών f . Αν στην εξίσωση (2.99) αλλάξουμε μεταβλητές από α σε $\ln \alpha$ παίρνουμε [93]

$$(\ln \delta)'' + (\ln \delta)'^2 + (\ln \delta)' \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2} w(1 - \Omega_m(\alpha)) \right] = \frac{3}{2} \Omega_m(\alpha) \quad (2.101)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$\Omega_m(\alpha) \equiv \frac{\rho_m(\alpha)}{\rho_m(\alpha) + \rho_{de}(\alpha)} \quad (2.102)$$

Μπορούμε ακόμη, να αλλάξουμε τις μεταβλητές από $\ln \alpha$ σε $\Omega_m(\alpha)$ λαμβάνοντας υπόψη την διαφορική μορφή της εξίσωσης (2.102) και χρησιμοποιώντας την διατήρηση της ενέργειας ($d\rho = -3(\rho + p)d \ln \alpha$) παίρνουμε [93]

$$3w\Omega_m(1 - \Omega_m) \frac{df}{d\Omega_m} + f^2 + f \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2} w(1 - \Omega_m) \right] = \frac{3}{2} \Omega_m \quad (2.103)$$

όπου θέσαμε

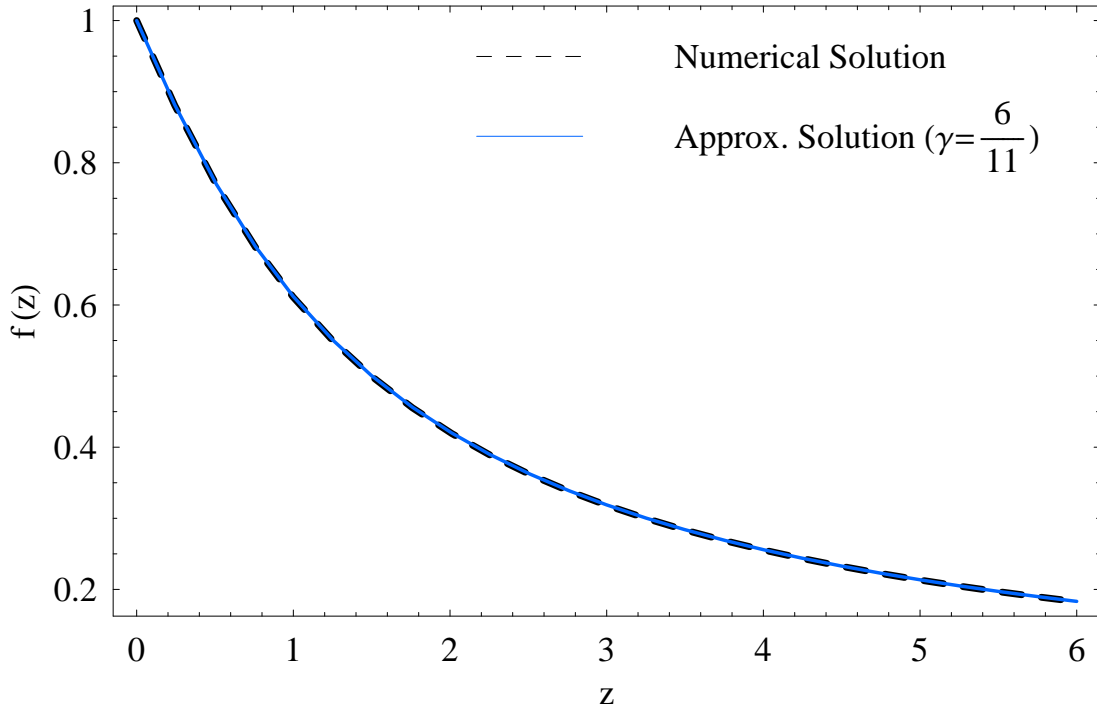
$$f \equiv \frac{d \ln \delta}{d \ln \alpha} \quad (2.104)$$

Κάνοντας την υπόθεση εργασίας[93]

$$f = \Omega_m^{\gamma(\Omega_m)} \quad (2.105)$$

τότε, χρησιμοποιώντας στην εξίσωση (2.103) και αναπτύσσοντας γύρω από το $\Omega_m = 1$ (το οποίο για $z \gtrsim 1$ είναι πολύ καλή προσέγγιση) βρίσκουμε σε μηδενική τάξη

$$\gamma = \frac{3(w - 1)}{6w - 5} \quad (2.106)$$



Σχήμα 2.6: Η αριθμητική λύση της εξίσωσης (2.101) για τον κανονικοποιημένο γραμμικό ρυθμό διαταραχών f της εξίσωσης (2.100) για το Λ CDM ($\Omega_{0m} = 0.3$) (μαύρη διακεκομμένη γραμμή) μαζί με το αντίστοιχο προσεγγιστικό αποτέλεσμα με $\gamma = \frac{6}{11}$ όπως βρίσκεται από την εξίσωση (2.105) (μπλε συνεχής γραμμή). Η συμφωνία μεταξύ των δύο μεθόδων είναι εξαιρετική.

το οποίο απλοποιείται σε $\gamma = \frac{6}{11}$ για $w = -1$. Οι εξισώσεις (2.105) και (2.106) όπως φαίνεται στο σχήμα (2.6) είναι εξαιρετικές προσεγγίσεις στην αριθμητική λύση της $f(z)$. Έτσι, μπορούμε από την (2.105) να βρούμε για την υπερπυκνότητα των διαταραχών της ύλης $\delta(\alpha)$ την προσέγγιση[93],[94]

$$\delta(z) = \delta(0)e^{f_1^{\frac{1}{1+z}} \Omega_m(\alpha)^\gamma \frac{d\alpha}{\alpha}} \quad (2.107)$$

Τα πιο χρήσιμα παρατηρησιακά δεδομένα για τον προσδιορισμό του δ χρησιμοποιούν την παράμετρο παραμόρφωσης της ερυθρής μετατόπισης β , η οποία συνδέει το φάσμα ισχύος (power spectrum) της σχέσης (2.54) στο χώρο της ερυθρής μετατόπισης $P_s(\vec{k})$ με το αληθινό φάσμα ισχύος των γαλαξιών $P_g(k)$ ως εξής[22]

$$P_s(\vec{k}) = (1 + \beta\mu^2)^2 P_g(k) \quad (2.108)$$

όπου $\mu = \cos\theta$ και θ είναι η γωνία μεταξύ των \vec{k} και της γραμμής θέασης. Η παράμετρος β μπορεί να προσδιοριστεί παρατηρησιακά από το παρατηρούμενο φάσμα ισχύος (ή με την

μετασχηματισμένη του κατά *Fourier* συνάρτηση συσχέτισης $\xi(r)$) στο χώρο της ερυθρής μετατόπισης και μπορεί ναδειχθεί ότι σχετίζεται με την υπερπυκνότητα των διαταραχών της ύλης $\delta(\alpha)$ στην ενεργό (effective) ερυθρή μετατόπιση στην οποία μετρείται το φάσμα ισχύος ως [95]

$$\beta = \frac{f}{b} \quad (2.109)$$

όπου b είναι ο παράγοντας πόλωσης ($b \equiv \frac{\delta_g}{\delta}$) ο οποίος συνδέει την υπερπυκνότητα στους γαλαξίες δ_g με την υπερπυκνότητα της ύλης δ .

Η απόδειξη της (2.109) μπορεί να σχηματιστεί ως εξής [95]: Η ακτινική απόσταση ενός γαλαξία με χαμηλή ερυθρή μετατόπιση z και με μηδενική ιδιάζουσα ταχύτητα (peculiar velocity) μπορεί να προσεγγιστεί ως

$$\chi(z) = \frac{z}{H_0} \quad (2.110)$$

οπότε το διάνυσμα θέσης στο χώρο της ερυθρής μετατόπισης είναι

$$\vec{x}_s = \frac{z}{H_0} (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \quad (2.111)$$

Ωστόσο, λόγω βαρυτικών φαινομένων, οι γαλαξίες έχουν ιδιάζουσες ταχύτητες \vec{v} , οι οποίες επηρεάζουν την ερυθρή μετατόπιση z ως εξής $z = H_0 x + \vec{v} \cdot \hat{x}$ όπου \hat{x} είναι η διεύθυνση κατά την γραμμή θέασης. Συνεπώς, η αληθινή ομοκινούμενη απόσταση x ως τον γαλαξία συνδέεται με την απόσταση που προήρθε από την ερυθρή μετατόπιση ως

$$\frac{z}{H_0} \equiv x_s = x + \frac{\vec{v} \cdot \hat{x}}{H_0} \quad (2.112)$$

Για να συνδέσουμε την γαλαξιακή υπερπυκνότητα στο χώρο της ερυθρής μετατόπισης $\delta_s = \frac{\delta \rho_s(\vec{x}_s)}{\bar{\rho}}$ με την αντίστοιχη γαλαξιακή υπερπυκνότητα $\delta_g = \frac{\delta \rho_g(x)}{\bar{\rho}}$ πρέπει να λάβουμε υπόψη το ότι ο αριθμός των γαλαξιών σε μία περιοχή είναι ανεξάρτητος του συστήματος συντεταγμένων, δηλαδή

$$n_s(\vec{x}_s) d^3 x_s = n(\vec{x}) d^3 x \quad (2.113)$$

ή

$$\bar{n}(1 + \delta_s) = \bar{n}(1 + \delta_g) \frac{dx}{dx_s} \frac{x^2}{x_s^2} \quad (2.114)$$

όπου \bar{n} είναι η μέση αριθμητική πυκνότητα των γαλαξιών. Αν υποθέσουμε ότι οι ταχύτητες είναι μικρές και λάβουμε υπόψη μόνο τρόπους εξέλιξης με $kx \gg 1$, τότε από τις εξισώσεις (2.112) και (2.114) προκύπτει ότι

$$\delta_s(\vec{x}) = \delta_g(\vec{x}) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\vec{v}(x) \cdot \hat{x}}{H_0} \right) \quad (2.115)$$

Μετασχηματίζοντας κατά Fourier την εξίσωση (2.115) και εκφράζοντας την ιδιάζουσα ταχύτητα συναρτήσει της υπερπυκνότητας της ύλης δ , χρησιμοποιώντας την εξίσωση συνέχειας, παίρνουμε τη σχέση

$$\alpha \frac{d\delta}{dt} + ikv = 0 \quad (2.116)$$

από την οποία συνεπάγεται [95]

$$\vec{v}(k, \alpha) = \frac{if\alpha H\delta(k, \alpha)\vec{k}}{k^2} \quad (2.117)$$

βρίσκοντας έτσι (για $z \ll 1$)

$$\tilde{\delta}_s(\vec{k}) = \delta_g(k) + f\mu^2\delta(k) \quad (2.118)$$

όπου $\mu = \cos\theta = \hat{k} \cdot \hat{x}$ και το f έχει οριστεί στην εξίσωση (2.100). Τώρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον παράγοντα πόλωσης $b \equiv \frac{\delta_g}{\delta}$ για να γράψουμε την εξίσωση (2.118) ως

$$\tilde{\delta}_s(\vec{k}) = (1 + \frac{f}{b}\mu^2)\delta_g(k) \quad (2.119)$$

από την οποία προκύπτουν οι εξισώσεις (2.108) και (2.109).

Η παράμετρος $\beta = \frac{f}{b}$ μπορεί να προσδιοριστεί μετρώντας το φάσμα ισχύος $P_s(\vec{k})$ και αναλύοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης (2.108) σε πολυώνυμα Legendre $\mathcal{P}_l(\mu)$ [95]:

$$\begin{aligned} P_s(\vec{k}) &= P_s^{(0)}(k)\mathcal{P}_0(\mu) + P_s^{(2)}(k)\mathcal{P}_2(\mu) + P_s^{(4)}(k)\mathcal{P}_4(\mu) = \\ &= (1 + \beta\mu^2)^2 P_g(k) = [(1 + \frac{2}{3}\beta + \frac{1}{5}\beta^2)\mathcal{P}_0(\mu) + \\ &+ (\frac{4}{3}\beta + \frac{4}{7}\beta^2)\mathcal{P}_2(\mu) + \frac{8}{35}\beta^2\mathcal{P}_4(\mu)]P_g(k) \end{aligned} \quad (2.120)$$

Επομένως ένας τρόπος για να μετρηθεί το β είναι να χρησιμοποιηθεί ο λόγος της τετραπολικής και της μονοπολικής ροπής

$$\frac{P_s^{(2)}(k)}{P_s^{(0)}(k)} = \frac{\frac{4}{3}\beta + \frac{4}{7}\beta^2}{1 + \frac{2}{3}\beta + \frac{1}{5}\beta^2} \quad (2.121)$$

ο οποίος οδηγεί στον προσδιορισμό της τιμής του β και, αν ο παράγοντας πόλωσης b είναι γνωστός, στην εύρεση της τιμής του f για την ενεργό ερυθρή μετατόπιση της έρευνας.

Τα διαθέσιμα παρατηρησιακά δεδομένα για τις παραμέτρους β και b για διάφορες ερυθρές μετατοπίσεις φαίνονται στον Πίνακα 2.2. Οι αναφορές του Πίνακα 2.2 έχουν υποθέσει το Λ CDM μοντέλο με $\Omega_{\text{om}} = 0.3$ για την μετατροπή από την ερυθρή μετατόπιση σε αποστάσεις, οπότε τα δεδομένα αυτά δεν είναι αξιόπιστα για την δοκιμή μοντέλων πέρα από το Λ CDM. Επίσης, όπως παρατηρήθηκε από την αναφορά [96], τα δεδομένα των αναφορών [97], [98], [99] του Πίνακα 2.2 αντιστοιχούν σε μετρήσεις $\beta(z)$ αλλά ο προσδιορισμός της πόλωσης b γίνεται συγκρίνοντας φάσματα ισχύος, που υπολογίστηκαν αριθμητικά με προσομοιώσεις, με

Πίνακας 2.2: Τα διαθέσιμα παρατηρησιακά δεδομένα για τις παραμέτρους β και b για διάφορες ερυθρές μετατοπίσεις. Η αναφορά [100] αναφέρει μόνο το γραμμικό ρυθμό μεταβολής των διαταραχών f και όχι τις παραμέτρους β και b .

z	β	b	f_{obs}	Αναφ.
0.15	0.49 ± 0.09	1.04 ± 0.11	0.51 ± 0.11	[87],[102]
0.35	0.31 ± 0.04	2.25 ± 0.08	0.70 ± 0.18	[97]
0.55	0.45 ± 0.05	1.66 ± 0.35	0.75 ± 0.18	[98]
1.4	$0.60^{+0.14}_{-0.11}$	1.5 ± 0.20	0.90 ± 0.24	[99]
3.0	—	—	1.46 ± 0.29	[100]

τις παρατηρήσεις. Εφόσον τα φάσματα ισχύος, που υπολογίστηκαν αριθμητικά με προσομοιώσεις, έχουν υποθέσει το Λ CDM μοντέλο, τα τελικά $f_{obs} = \beta b$ πρέπει να ερμηνευτούν με προσοχή και μπορούν μόνο να χρησιμοποιηθούν για τον έλεγχο της αυτοσυνέπειας του Λ CDM.

Στον ίδιο πίνακα επίσης υπάρχει και το σημείο της αναφοράς [100], η οποία δημοσίευσε μόνο το γραμμικό ρυθμό διαταραχών f και όχι τις παραμέτρους β και b , λόγω του ότι έχει χρησιμοποιήσει διαφορετική μέθοδο, δηλαδή βρέθηκε απευθείας η αλλαγή του φάσματος ισχύος από δεδομένα τύπου $Ly - \alpha$ forest από την έρευνα SDSS, σε διάφορες φέτες ερυθής μετατόπισης. Το σημείο αυτό (σε συνδυασμό με το πρώτο) έχει χρησιμοποιηθεί προηγουμένως από άλλους συγγραφείς [101] με παρόμοιο τρόπο. Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του Πίνακα 2.2 μπορούμε να κατασκευάσουμε τον όρο

$$\chi_f^2(\Omega_{0m}, \gamma) = \sum_i \left[\frac{f_{obs}(z_i) - f_{th}(z_i, \gamma)}{\sigma_{f_{obs}}} \right]^2 \quad (2.122)$$

όπου τα f_{obs} και $\sigma_{f_{obs}}$ βρίσκονται από τον Πίνακα 2.2, ενώ τα $f_{th}(z_i, \gamma)$ βρίσκονται από την εξίσωση (2.105).

Ένα εναλλακτικό σετ δεδομένων είναι η εξάρτηση στην ερυθρή μετατόπιση της μέσης διαχύμανσης της μάζας $\sigma_8(z)$ που ορίζεται ως

$$\sigma^2(R, z) = \int_0^\infty W^2(kR) \Delta^2(k, z) \frac{dk}{k} \quad (2.123)$$

με

$$W(kR) = 3 \left(\frac{\sin(kR)}{(kR)^3} - \frac{\cos(kR)}{(kR)^2} \right) r \quad (2.124)$$

$$\Delta^2(kz) = 4\pi k^3 P_\delta(k, z) \quad (2.125)$$

Πίνακας 2.3: Τα διαθέσιμα δεδομένα για την μέση διακύμανση της μάζας $\sigma_8(z)$ σε διάφορες ερυθρές μετατοπίσεις.

z	σ_8	σ_{σ_8}	Αναφ.
2.125	0.95	0.17	[103]
2.72	0.92	0.17	
2.2	0.92	0.16	[104]
2.4	0.89	0.11	
2.6	0.98	0.13	
2.8	1.02	0.09	
3.0	0.94	0.08	
3.2	0.88	0.09	
3.4	0.87	0.12	
3.6	0.95	0.16	
3.8	0.90	0.17	
0.35	0.55	0.10	[105]
0.6	0.62	0.12	
0.8	0.71	0.11	
1.0	0.69	0.14	
1.2	0.75	0.14	
1.65	0.92	0.20	

με $R = 8h^{-1}Mpc$ και $P_\delta(k, z)$ το φάσμα ισχύος της ύλης σε ερυθρή μετατόπιση z . Η συνάρτηση $\sigma_8(z)$ συνδέεται με την διαταραχή $\delta(z)$ ως εξής

$$\sigma_8(z) = \frac{\delta(z)}{\delta(0)} \sigma_8(z=0) \quad (2.126)$$

από την οποία συνεπάγεται ότι

$$s_{th}(z_1, z_2) \equiv \frac{\sigma_8(z_1)}{\sigma_8(z_2)} = \frac{\delta(z_1)}{\delta(z_2)} = \frac{e^{\int_1^{1+z_1} \Omega_m^\gamma(\alpha) \frac{d\alpha}{\alpha}}}{e^{\int_1^{1+z_2} \Omega_m^\gamma(\alpha) \frac{d\alpha}{\alpha}}} \quad (2.127)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την εξίσωση (2.107). Τα περισσότερα διαθέσιμα δεδομένα $\sigma_8(z_i)$ προέρχονται από την εξέλιξη με την ερυθρή μετατόπιση του φάσματος ισχύος του φαινομένου $Ly - \alpha$ [103],[104],[105]. Τα σημεία αυτά φαίνονται στον Πίνακα 2.3 .

Θα πρέπει όμως να σημειωθεί, ότι τα δεδομένα αυτά δεν είναι τόσο χρήσιμα όσο ο παράγοντας ερυθρής μετατόπισης β για δύο λόγους:

1. Η ποσότητα $\sigma_8(z)$ δεν συνδέεται άμεσα με τον ρυθμό ανάπτυξης των διαταραχών $f(z)$. Αντίθετα, σχετίζεται με το $f(z)$ μέσω του ολοκληρώματος της εξίσωσης (2.107).
2. Τα περισσότερα από τα δεδομένα σ_8 που προέρχονται από το φαινόμενο $Ly - \alpha$ βρίσκονται σε υψηλές ερυθρές μετατοπίσεις όπου το Λ CDM μοντέλο δεν ξεχωρίζει από τα μοντέλα με Σκοτεινή Ενέργεια.

Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του Πίνακα 2.3 μπορούμε να κατασκευάσουμε τον αντίστοιχο όρο χ_s^2 που ορίζεται ως

$$\chi_s^2(\Omega_{0m}, \gamma) = \sum_i \left[\frac{s_{obs}(z_i, z_{i+1}) - s_{th}(z_i, z_{i+1})}{\sigma_{s_{obs},i}} \right]^2 \quad (2.128)$$

όπου τα $\sigma_{s_{obs},i}$ μπορούν να βρεθούν από τα αντίστοιχα 1σ σφάλματα των $\sigma_8(z_i)$ και $\sigma_8(z_{i+1})$ ενώ το $s_{th}(z_i, z_{i+1})$ ορίζεται στην εξίσωση (2.127). Θα πρέπει όμως να σημειωθεί ότι όλες οι αναφορές δημοσίευσαν τα δεδομένα τους έχοντας υποθέσει το Λ CDM μοντέλο με $\Omega_{0m} = 0.3$ για την μετατροπή των ερυθρών μετατοπίσεων σε αποστάσεις (εκτός από την αναφορά [99] που χρησιμοποίησε $\Omega_{0m} = 0.25$ και τις [103],[104] που χρησιμοποίησαν $\Omega_{0m} = 0.26$).

Κεφάλαιο 3

ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΑΚΟΙ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΣΤΑ ΠΛΑΙΣΙΑ ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

3.1 Εισαγωγή

Ένας από τους θεμελιώδεις στόχους της κοσμολογίας είναι η κατανόηση της εξέλιξης του σύμπαντος, η οποία στα πλαίσια της Γενικής Σχετικότητας μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση Friedmann:

$$H^2(\alpha) = \left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(\alpha) \quad (3.1)$$

όπου $\alpha(t)$ είναι ο παράγοντας κλίμακας (scale factor) του σύμπαντος και ρ η μέση ενεργειακή πυκνότητα της ύλης μέσα σε αυτό. Όμως, τα τελευταία χρόνια μέσω των ερευνών ανίχνευσης υπερκαινοφανών αστέρων [31],[50],[51] τύπου Ia (SnIa), που βρίσκονται σε κοσμολογικές αποστάσεις, έχει υποδειχθεί ότι σχετικά πρόσφατα (σε κοσμολογική κλίμακα) και σε ερυθρή μετατόπιση $z \simeq 0.5$ το σύμπαν έχει μπει σε μια φάση επιταχυνόμενης διαστολής. Μάλιστα, οι παρατηρήσεις αυτές δείχνουν ότι δεν είναι δυνατό και τα δύο μέλη της εξίσωσης (3.1) να είναι ίσα αν $\rho(\alpha) = \rho_m(\alpha) \sim \alpha^{-3}$, ακόμα και αν υποτεθεί μη μηδενική καμπυλότητα.

Η επιταχυνόμενη αυτή διαστολή μπορεί να εξηγηθεί με δύο τρόπους: Είτε πρέπει να τροποποιηθεί το δεξί μέλος της εξίσωσης Friedmann (3.1) εισάγοντας ένα νέο ιδανικό ρευστό, με πυκνότητα ενέργειας $\rho(\alpha) = \rho_m(\alpha) + \rho_X(\alpha)$, το οποίο θα έχει την κατάλληλη εξέλιξη έτσι ώστε να αποκατασταθεί η ισότητα των δύο μελών της εξίσωσης είτε πρέπει να τροποποιηθούν και τα δύο μέλη της εξίσωσης (3.1), κάτι το οποίο σημαίνει ότι πρέπει να τροποποιηθούν οι ίδιες οι εξισώσεις Einstein. Στην πρώτη περίπτωση το νέο αυτό ιδανικό ρευστό, το οποίο έχει πυκνότητα ενέργειας $\rho_X(\alpha)$, έχει ονομαστεί *Σκοτεινή Ενέργεια* και για να είναι υπεύθυνο για την επιταχυνόμενη διαστολή του σύμπαντος πρέπει να έχει αρνητική πίεση. Τέλος,

διάφορα μοντέλα της Σκοτεινής Ενέργειας θα μελετηθούν σε αυτό εδώ το κεφάλαιο, ενώ τροποποιήσεις των εξισώσεων Einstein θα μελετηθούν στο επόμενο.

3.2 Η Κοσμολογική Σταθερά - Το μοντέλο Λ CDM

3.2.1 Γενικά

Ο απλούστερος υποψήφιος για την Σκοτεινή Ενέργεια είναι η Κοσμολογική Σταθερά η οποία έχει καταστατική εξίσωση $w = \frac{p}{\rho} = -1$. Η κοσμολογική σταθερά είχε προταθεί για πρώτη φορά από τον Einstein ως τροποποίηση της Γενικής Σχετικότητας για να πετύχει ένα στατικό σύμπαν. Ωστόσο, ο Einstein εγκατέλειψε την ιδέα μετά την ανακάλυψη από τον Hubble ότι η ερυθρή μετατόπιση του φωτός μακρινών γαλαξιών είναι ανάλογη της απόστασής τους [9], κάτι το οποίο υποδείκνυε ότι το σύμπαν δεν είναι στατικό. Όμως, η ανακάλυψη της επιταχυνόμενης διαστολής κατά την δεκαετία του 90 έχει δώσει καινούριο ενδιαφέρον στην κοσμολογική σταθερά.

Όπως είδαμε, η κοσμολογική σταθερά Λ εμφανίζεται στις εξισώσεις Einstein ως εξής

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (3.2)$$

Όπως μπορεί να δειχθεί η συναλλοίωτη παράγωγος και των δύο μελών των εξισώσεων (3.2) εξακολουθεί να παραμένει μηδέν, μένοντας έτσι συμβατές με τους νόμους της τοπικής διατήρησης της ενέργειας και της ορμής. Περαιτέρω, με τον τρόπο με τον οποίο έχουν γραφεί οι εξισώσεις (3.2), η σταθερά Λ μοιάζει με την καμπυλότητα του κενού. Όμως, είναι πιο ενδιαφέρον αν μετακινήσουμε την σταθερά Λ στο δεξί μέλος των εξισώσεων οπότε και μπορούμε να σχηματίσουμε τον ταυστή ενέργειας – ορμής του κενού:

$$T_{\mu\nu}^{vac} = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G} g_{\mu\nu} \quad (3.3)$$

Από την εξίσωση (2.40) βλέπουμε ότι $p_{vac} = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G}$ και

$$p_{vac} = -\rho_{vac} \quad (3.4)$$

το οποίο δικαιολογεί αυτό που είπαμε για την καταστατική εξίσωση $w = \frac{p}{\rho} = -1$. Από τις εξισώσεις (3.2) μπορεί να δειχθεί [24] ότι στο όριο ασθενών βαρυτικών πεδίων παίρνουμε μια τροποποιημένη εξίσωση Poisson

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G(\rho + 3p) \quad (3.5)$$

Σε αυτή την περίπτωση, η ποσότητα $\rho + 3p$ είναι αρνητική και συνεπώς μία θετική τιμή για την σταθερά Λ την κάνει να δρα ως απωστική δύναμη.

Αν συμπεριλάβουμε την κοσμολογική σταθερά στην εξίσωση Friedmann τότε αυτή γίνεται

$$H(\alpha)^2 \equiv \frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha^2} = H_0^2 (\Omega_m \alpha^{-3} + \Omega_\Lambda) \quad (3.6)$$

και επειδή έχουμε απαιτήσει επιπεδότητα πρέπει να ισχύει $H(\alpha = 1) \equiv H_0$ δίνοντας έτσι τη συνθήκη

$$\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1 \quad (3.7)$$

Επίσης, μπορεί ναδειχθεί ότι ο παράγοντας επιβράδυνσης $q_0 \equiv -\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha H(\alpha)^2} |_{\alpha=1}$ είναι

$$q_0 = \Omega_{0m}/2 - \Omega_\Lambda \quad (3.8)$$

και για $\Omega_\Lambda > \Omega_{0m}/2$ έχουμε επιτάχυνση.

Με την χρήση των δεδομένων των υπερκαινοφανών αστερών μπορούμε να θέσουμε κάποια ενδιαφέροντα όρια στο Λ CDM μοντέλο. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τα παρακάτω 3 σετ δεδομένων:

- Το σετ δεδομένων SNLS που περιέχει 115 δεδομένα και τα οποία βρίσκονται σε $z < 1$.
- Το ολόκληρο Gold04 σετ (Full Gold dataset - **FG**) με 157 δεδομένα και $0 < z < 1.7$.
- Το κομμένο Gold04 σετ (Truncated Gold dataset (**TG**)) με 140 σημεία και $z < 1$, το οποίο μπορεί να συγκριθεί πιο άμεσα με το SNLS λόγω του ότι βρίσκονται στο ίδιο εύρος της ερυθρής μετατόπισης z .

Για αυτή την περίπτωση θα λάβουμε υπόψη και την καμπυλότητα:

$$H(z)^2 = H_0^2[\Omega_{0m}(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + (1 - \Omega_{0m} - \Omega_\Lambda)(1+z)^2] \quad (3.9)$$

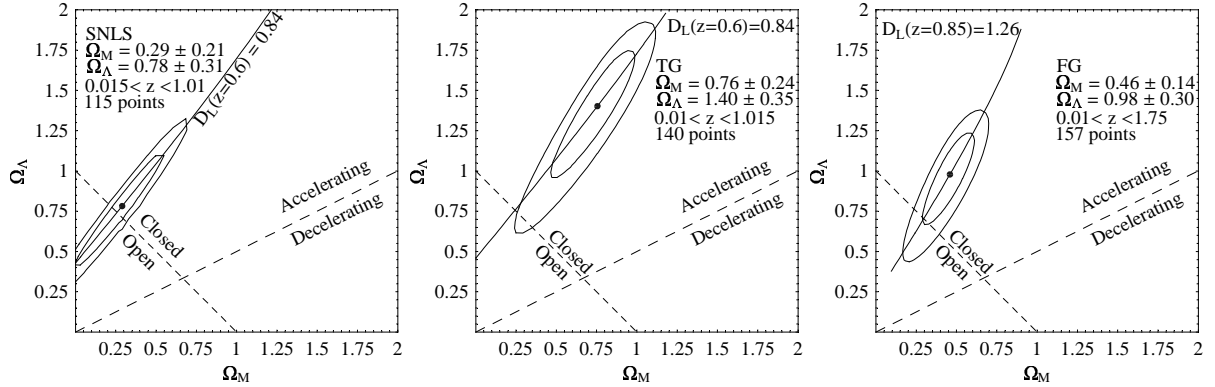
Όμως, λόγω αυτού η απόσταση λαμπρότητας γενικεύεται ως

$$D_L(z) = \frac{(1+z)}{\sqrt{\Omega_{0m} + \Omega_{0X} - 1}} \text{Sin}[\sqrt{\Omega_{0m} + \Omega_{0X} - 1} \int_0^z dz \frac{H_0}{H(z)}] \quad (3.10)$$

αντί της εξίσωσης (2.16) η οποία είναι μόνο κατάλληλη για επίπεδα μοντέλα.

Στο σχήμα 3.1 δείχνουμε τις ελλείψεις εμπιστοσύνης 68.3% και 95.4% στο $\Omega_{0m} - \Omega_\Lambda$ επίπεδο με βάση το μοντέλο (3.9). Οι τρεις γραφικές αντιστοιχούν στα τρία σετ δεδομένων που αναφέρονται στο κείμενο SNLS, TG και FG. Μπορούμε να κάνουμε τα ακόλουθα σχόλια για αυτές τις γραφικές:

- Ο μεγάλος άξονας των ελλείψεων είναι σχεδόν παράλληλος και στις τρεις γραφικές. Το φαινόμενο αυτό [72] οφείλεται στον εκφυλισμό του $D_L(z; \Omega_{0m}, \Omega_\Lambda)$ κατά την ελαχιστοποίηση ως προς συγκεκριμένους γραμμικούς συνδυασμούς των παραμέτρων $\Omega_{0m} - \Omega_\Lambda$ στο υπό εξέταση εύρος της ερυθρής μετατόπισης. Για παράδειγμα, επιλέγοντας μια αντιπροσωπευτική ερυθρή μετατόπιση $z = 0.6$ μπορεί ναδειχθεί ότι η τιμή $D_L(z = 0.6) = 0.84$ βρίσκεται από όλους τους συνδυασμούς των $\Omega_{0m} - \Omega_\Lambda$ που ικανοποιούν $\Omega_{0m} - 0.80\Omega_\Lambda = -0.38$. Η διεύθυνση αυτής της (προσεγγιστικής) γραμμής εκφυλισμού, εξαρτάται από το συγκεκριμένο $H(z)$ μοντέλο και του υπό εξέταση εύρους της ερυθρής μετατόπισης αλλά η ακριβής θέση της γραμμής εξαρτάται από τα δεδομένα.



Σχήμα 3.1: Οι ελλείψεις εμπιστοσύνης 68.3% και 95.4% στο $\Omega_{0m} - \Omega_{\Lambda}$ επίπεδο με βάση το μοντέλο (3.9). Οι τρεις γραφικές αντιστοιχούν στα τρία σετ δεδομένων που αναφέρονται στο κείμενο (SNLS, TG και FG). Πρέπει να αναφερθεί ότι το επίπεδο Λ CDM μοντέλο προτιμάται περισσότερο από το SNLS σετ παρά από τα Gold.

- Οι δύο εκδόχές του Gold σετ ευνοούν ένα κλειστό σύμπαν αντί για ένα επίπεδο ($\Omega_{tot}^{TG} = 2.16 \pm 0.59$, $\Omega_{tot}^{FG} = 1.44 \pm 0.44$). Αυτή η τάση δεν ισχύει για το SNLS σετ το οποίο δίνει $\Omega_{tot}^{SNLS} = 1.07 \pm 0.52$.
- Το σημείο που αντιστοιχεί στο SCDM ($\Omega_{0m}, \Omega_{\Lambda}) = (1, 0)$ αποκλείεται από όλα τα σετ με περισσότερα από 10σ επίπεδα εμπιστοσύνης.
- Οι τιμές της παραμέτρου μ_0^{min} που ελαχιστοποιούν το $\chi^2(\Omega_{0m}, \Omega_{\Lambda})$ της εξίσωσης (2.19) (με το $H(z)$ να δίνεται από την εξίσωση (3.9)) βρίσκονται να είναι συμβατές μεταξύ όλων των σετ. Βρέθηκε πως $\mu_0^{SNLS} = 43.15 \pm 0.05$, $\mu_0^{TG} = 43.30 \pm 0.05$ και $\mu_0^{FG} = 43.32 \pm 0.05$. Αυτό ξεκαθαρίζει και την πιθανή ασυμφωνία μεταξύ των δεδομένων με υψηλή και χαμηλή ερυθρή μετατόπιση που συζητήθηκε στην αναφορά [72].
- Αν υποθέσουμε επιπεδότητα, τότε ισχύει ότι $\Omega_{0m} + \Omega_{\Lambda} = 1$, μπορούμε να περιορίσουμε τον παραμετρικό χώρο πάνω στην διακεκομμένη καμπύλη του σχήματος (3.1). Χρησιμοποιώντας την σχέση

$$H(z)^2 = H_0^2[\Omega_{0m}(1+z)^2 + (1 - \Omega_{0m})] \quad (3.11)$$

μπορούμε να ελαχιστοποιήσουμε το $\chi^2(\Omega_{0m})$ της εξίσωσης (2.19) και να βρούμε τις νέες τιμές των παραμέτρων

$$\Omega_{0m}^{SNLS} = 0.26 \pm 0.04 \quad (3.12)$$

$$\Omega_{0m}^{TG} = 0.30 \pm 0.05 \quad (3.13)$$

$$\Omega_{0m}^{FG} = 0.31 \pm 0.04 \quad (3.14)$$

Οι τιμές του Ω_{0m}^{SNLS} και του Ω_{0m}^{FG} είναι πρακτικά ίδιες με τις αντίστοιχες των αναφορών [50],[51], στις οποίες δημοσιεύτηκαν τα δεδομένα. Αυτό, μαζί με άλλα παρόμοια τεστ, επιβεβαιώνουν την εγκυρότητα της ανάλυσής μας.

3.2.2 Νέα τεστ συμβατότητας/αυτοσυνέπειας της Κοσμολογικής Σταθεράς

Όπως αναφέραμε το μοντέλο Λ CDM έχει περάσει με επιτυχία πολλά τεστ συμβατότητας με τις παρατηρήσεις. Ένα καινούριο και ενδιαφέρον τεστ είναι ο προσδιορισμός του παράγοντα εξέλιξης των διαταραχών γ . Όμως αυτός απαιτεί να είναι γνωστό όχι μόνο το $\delta(z)$ αλλά και η χρονική εξέλιξη του $H(z)$ και του Ω_{0m} (δες εξίσωση (2.102)). Ωστόσο, είναι δυνατό να βρεθούν πιο άμεσα τεστ για το Λ CDM τα οποία να απαιτούν μόνο την γνώση των $\delta(z)$ και $H(z)$. Ένα τέτοιο τεστ συμβατότητας για το Λ CDM έχει πρόσφατα προταθεί από την αναφορά [106], στην οποία παρατηρήθηκε ότι για να ισχύει το Λ CDM πρέπει να ισχύει και η ακόλουθη ισότητα

$$\frac{(H(z)^2/H_0^2)'}{(1+z)^2\delta'(0)^2} \int_0^\infty \frac{\delta(z)\delta'(z)}{(1+z)} dz + 1 = 0 \quad (3.15)$$

όπου $' \equiv \frac{d}{dz}$. Μάλιστα, στην αναφορά [107] βρήκαμε και μία βελτιωμένη εκδοχή αυτού του τεστ η οποία δεν περιέχει παραγώγους του $H(z)$ οπότε και είναι λιγότερο επιρρεπής σε παρατηρησιακά σφάλματα.

Και τα δύο τεστ που συζητήθηκαν παραπάνω (ο παράγοντας εξέλιξης των διαταραχών γ και το τεστ συμβατότητας) απαιτούν τον παρατηρησιακό προσδιορισμό του $\delta(z)$ με κάποια από τις μεθόδους που αναφέρθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Δυστυχώς, τα υπάρχοντα δεδομένα είναι περιορισμένα στον αριθμό και στην ακρίβεια. Επίσης, περιέχουν αρκετά μεγάλα σφάλματα και για την παραγωγή των δεδομένων έχουν γίνει κάποιες μη τετριμμένες υποθέσεις οι οποίες εμποδίζουν τον ξεκάθαρο προσδιορισμό του $\delta(z)$. Επιπλέον, ένα μεγάλο μέρος των δεδομένων βρίσκεται σε σχετικά μεγάλες ερυθρές μετατοπίσεις ($z > 1$) όπου το Λ CDM είναι εκφυλισμένο σε σχέση με τα υπόλοιπα μοντέλα, αφού η Σκοτεινή Ενέργεια, για τα περισσότερα από αυτά, είναι υποδεσπόζουσα σε σχέση με την ύλη σε υψηλές ερυθρές μετατοπίσεις.

Παρόλα αυτά, είναι ακόμα ενδιαφέρον το να χρησιμοποιήσουμε τα υπάρχοντα δεδομένα για να διερευνήσουμε τα παρατηρησιακά όρια που μπορούν να επιβληθούν στο Λ CDM μοντέλο. Αυτό εξυπηρετεί δύο σκοπούς:

1. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως πρότυπο για όταν υπάρξουν πιο ακριβή δεδομένα.
2. Μπορεί να δώσει παρατηρησιακά όρια για ένα δυναμικό τεστ που θα είναι ορθογώνια και τελείως ανεξάρτητα από τα συνήθη γεωμετρικά τεστ.

Έτσι, σε ό,τι ακολουθεί θα χρησιμοποιήσουμε ένα μεγάλο εύρος από τα δεδομένα των παραμέτρων παραμόρφωσης της ερυθρής μετατόπισης β και των $\sigma_8(z)$ για να προσδιορίσουμε την παράμετρο γ και για να δοκιμάσουμε το Λ CDM μοντέλο με δύο τρόπους:

1. Συγκρίνοντας την μετρούμενη τιμή γ με την θεωρητική πρόβλεψη $\gamma = \frac{6}{11}$.
2. Εφαρμόζοντας ένα νέο τεστ το οποίο εκμεταλλεύεται τη σχέση συνέπειας μεταξύ του $H(z)$ και του $\delta(z)$ για το μοντέλο αυτό.

Όσον αφορά την πρώτη περίπτωση, για να προσδιορίσουμε την παράμετρο γ μπορούμε να κατασκευάσουμε τον συνδυασμένο όρο $\chi_{tot}^2(\Omega_{0m}, \gamma)$ ως εξής:

$$\chi_{tot}^2(\Omega_{0m}, \gamma) \equiv \chi_f^2(\Omega_{0m}, \gamma) + \chi_s^2(\Omega_{0m}, \gamma) \quad (3.16)$$

Όμως, πρέπει να αναφέρουμε ότι όλες οι αναφορές δίνουν τα δεδομένα τους έχοντας υποθέσει ένα Λ CDM μοντέλο για την μετατροπή των ερυθρών μετατοπίσεων σε αποστάσεις, με $\Omega_{0m} = 0.3$ (εκτός από την [99] που χρησιμοποίησε $\Omega_{0m} = 0.25$ και τις [103],[104] που χρησιμοποίησαν $\Omega_{0m} = 0.26$).

Θέτοντας $\Omega_{0m} = 0.3$ και ελαχιστοποιώντας το χ_{tot}^2 ως προς το γ βρίσκουμε

$$\gamma = 0.674_{-0.169}^{+0.195} \quad (3.17)$$

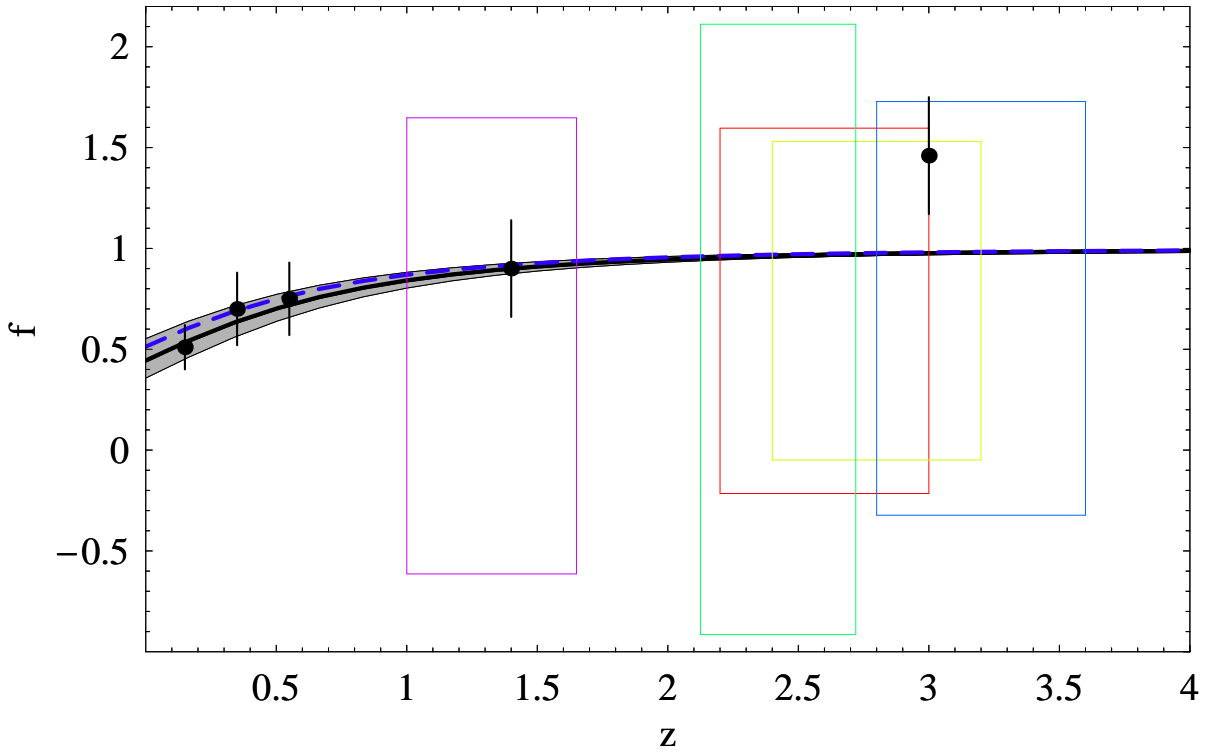
το οποίο διαφέρει κάπως από το αποτέλεσμα της αναφοράς [101] επειδή χρησιμοποιήσαμε ένα ευρύτερο σετ δεδομένων, μια διαφορετική παραμετροποίηση για το f και υποθέσαμε το Λ CDM ως το μοντέλο μας αποφεύγοντας έτσι την ολοκλήρωση ως προς την παράμετρο w_0 . Το αποτέλεσμα (3.17) υποδεικνύει ότι η τιμή $\gamma = \frac{6}{11} = 0.545$ είναι μέσα στο 1σ επίπεδο εμπιστοσύνης από την καλύτερη τιμή στο ελάχιστο και συνεπώς είναι συμβατή με τα δεδομένα. Όμως, τα παρατηρησιακά όρια είναι σχετικά αδύναμα και ακόμα και ένα επίπεδο μοντέλο που έχει μόνο ύλη (SCDM) και το οποίο προβλέπει $\gamma = 0.6$ (το οποίο προκύπτει εύκολα αν θέσουμε $w = 0$ στην εξίσωση (2.106)), είναι συμβατό με τα δεδομένα. Επίσης, αυτό το αποτέλεσμα υποδεικνύει ότι αν χρειαζόταν μόνο η τιμή του f_{obs} και η μέτρηση του β τότε αυτό θα είχε βρεθεί εύκολα από το f_{obs} για το Λ CDM (το οποίο είναι γνωστό αναλυτικά) και το μετρούμενο β χωρίς να χρειάζεται η προσομοίωση. Σε αυτή την περίπτωση θα είχαμε βρει και πολύ καλή συμφωνία με το Λ CDM. Αντίθετα βρήκαμε μια κάπως μεγαλύτερη τιμή για το γ . Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία αλλά αφαιρώντας τα τρία σημεία για $z = 0.35, 0.55$ και 1.4 βρίσκουμε μια ελαφρώς διαφορετική τιμή για το γ :

$$\gamma = 0.73 \pm 0.23 \quad (3.18)$$

αλλά και πάλι μέσα στο 1σ της τιμής του Λ CDM.

Από την άλλη, αγνοώντας τα δεδομένα τύπου $\sigma_8(z)$ βρίσκουμε μια αμελητέα διαφορά, σε σχέση με το καλύτερο ελάχιστο όλων των 22 σημείων, συγκεκριμένα $\gamma = 0.663 \pm 0.2$. Αυτό είναι συνεπές με ό,τι αναφέρθηκε παραπάνω σχετικά με την χρησιμότητα προς το παρόν αυτών των δεδομένων. Εναλλακτικά, υποθέτοντας την τιμή του γ για το Λ CDM ($\gamma = \frac{6}{11}$) και ελαχιστοποιώντας ως προς Ω_{0m} βρίσκουμε $\Omega_{0m} = 0.24_{-0.07}^{+0.09}$.

Τα κοσμολογικά δεδομένα για το γραμμικό ρυθμό εξέλιξης των διαταραχών της ύλης $f(z)$ φαίνονται στο σχήμα 3.2 μαζί με το καλύτερο μοντέλο $f = \Omega_m(z)^\gamma$ με $\Omega_{0m} = 0.3$ και τα αντίστοιχα 1σ σφάλματα (γκρίζα περιοχή). Στο ίδιο σχήμα δείχνουμε (με την διακεκομμένη γραμμή) το αντίστοιχο $f_{\Lambda CDM}(z)$ το οποίο βρίσκεται λύνοντας αριθμητικά την εξίσωση



Σχήμα 3.2: Τα κοσμολογικά δεδομένα για τον γραμμικό ρυθμό των διαταραχών $f(z)$ μαζί με το καλύτερο μοντέλο $f = \Omega_m(z)^\gamma$ για $\Omega_{0m} = 0.3$ (μαύρη συνεχής γραμμή) και τα αντίστοιχα 1σ σφάλματα (γκρίζα περιοχή). Τα ορθογώνια σφάλματος για το f βρίσκονται παίρνοντας τους λόγους στις συγκεκριμένες ερυθρές μετατοπίσεις. Εμφανώς, το καλύτερο μοντέλο (συνεχής γραμμή) διαφέρει ελάχιστα από το Λ CDM (διακεκομμένη γραμμή) και αυτό μόνο σε μικρές ερυθρές μετατοπίσεις.

(2.101) για $w = -1$ και $\Omega_{0m} = 0.3$. Εμφανώς, το καλύτερο μοντέλο (συνεχής γραμμή) διαφέρει ελάχιστα από το Λ CDM (διακεκομμένη γραμμή) και αυτό μόνο σε μικρές ερυθρές μετατοπίσεις. Επομένως, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το Λ CDM είναι συμβατό με τα υπάρχοντα δεδομένα για την υπερπυκνότητα των διαταραχών της ύλης $\delta(z)$.

Το τεστ για το Λ CDM που αναφέρθηκε παραπάνω απαιτεί την γνώση από πριν για την παράμετρο Ω_{0m} , αφού τα δεδομένα δεν είναι ακόμα τόσο ακριβή ώστε να επιτρέπουν την ταυτόχρονη ελαχιστοποίηση ως προς το Ω_{0m} και το γ με σχετικά μικρά σφάλματα. Συνεπώς, είναι χρήσιμο να βρεθεί ένα τεστ το οποίο να εξαρτάται μόνο από τα παρατηρούμενα $H(z)$ και $\delta(z)$. Ένα τέτοιο τεστ αυτοσυνέπειας συζητήθηκε πρόσφατα στην αναφορά [106] και αφορά τα $H(z)$, $\delta(z)$ και τις παραγώγους τους (δες εξίσωση (3.15)). Εδώ θα δείξουμε [107] μια βελτιωμένη έκδοση αυτού του τεστ η οποία είναι ανεξάρτητη των παραγώγων του $H(z)$ και συνεπώς είναι λιγότερο ευάλωτη σε παρατηρησιακά σφάλματα. Ξεκινώντας από

την εξίσωση (2.99) και γράφοντάς την ως προς $H(\alpha)$ βρίσκουμε

$$\frac{dH(\alpha)^2}{d\alpha} + 2 \left(\frac{3}{\alpha} + \frac{\delta''}{\delta'} \right) H^2 = \frac{3\Omega_{0m}H_0^2\delta}{\alpha^5\delta'} \quad (3.19)$$

όπου $' \equiv \frac{d}{d\alpha}$. Η λύση στην εξίσωση (3.19) είναι [108]

$$\frac{H(\alpha)^2}{H_0^2} = \frac{3\Omega_{0m}}{\alpha^6\delta'(\alpha)^2} \int_0^\alpha \alpha\delta(\alpha)\delta'(\alpha)d\alpha \quad (3.20)$$

η οποία μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της ερυθρής μετατόπισης ως

$$\frac{H(z)^2}{H_0^2} = -\frac{3\Omega_{0m}(1+z)^2}{\delta'(z)^2} \int_z^\infty \frac{\delta(z)\delta'(z)}{1+z} dz \quad (3.21)$$

και θέτοντας $z = 0$ προκύπτει

$$\Omega_{0m} = -\frac{1}{3}\delta'(0)^2 \left[\int_0^\infty \frac{\delta(z)\delta'(z)}{1+z} dz \right]^{-1} \quad (3.22)$$

Για να μετατρέψουμε την εξίσωση (3.22) σε ένα τεστ αυτοσυνέπειας για το Λ CDM πρέπει να εκφράσουμε το Ω_{0m} συναρτήσει γεωμετρικών παρατηρήσιμων μεγεθών όπως το $H(z)$.

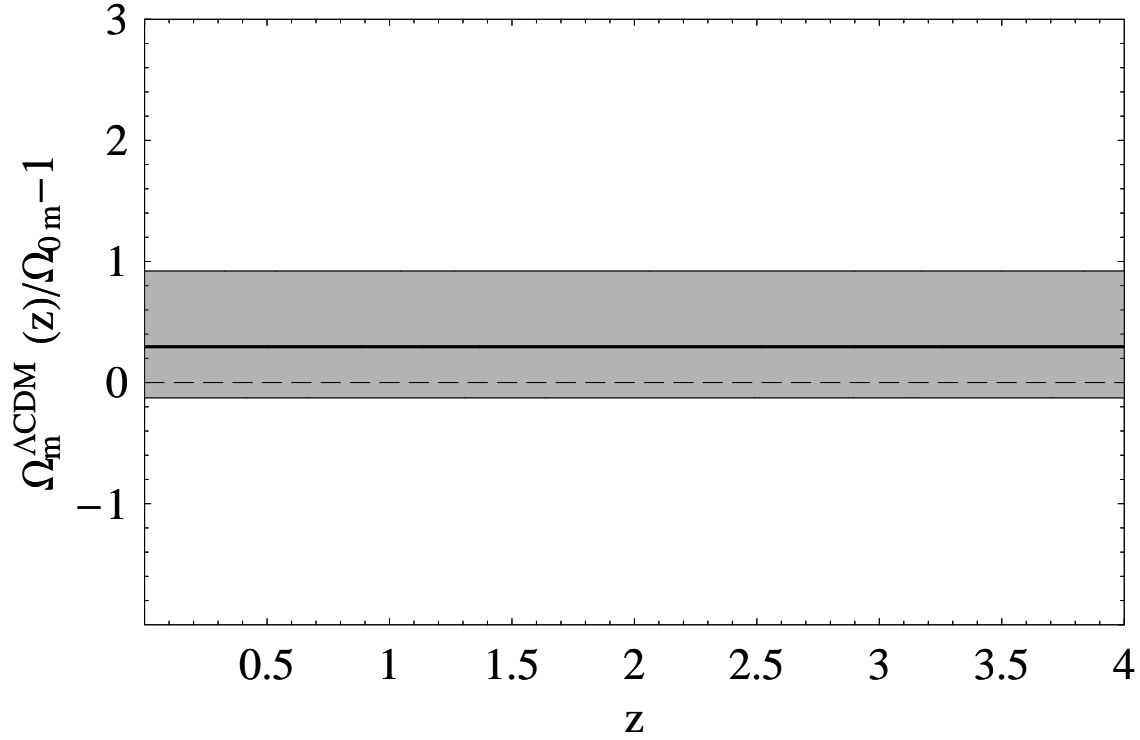
Στα πλαίσια του Λ CDM έχουμε

$$\Omega_m^{\Lambda CDM}(z) = \left[\left(\frac{H(z)}{H_0} \right)^2 - 1 \right] \frac{1}{(1+z)^3 - 1} \quad (3.23)$$

το οποίο έχει ως όριο το $\Omega_m^{\Lambda CDM}(z) = \Omega_{0m}$ όταν το $H(z)$ υπολογίζεται για το Λ CDM. Διαιρώντας την (3.23) με την (3.22) έχουμε

$$\frac{\Omega_m^{\Lambda CDM}(z)}{\Omega_{0m}} - 1 = -\frac{3 \left(\frac{H(z)^2}{H_0^2} - 1 \right) \int_0^\infty \frac{\delta(z)\delta'(z)}{1+z} dz}{[(1+z)^3 - 1] \delta'(0)^2} - 1 = 0 \quad (3.24)$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει μόνο όταν το Λ CDM είναι η ισχύουσα θεωρία. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2.107) και (3.17) στην (3.24) μπορούμε να βρούμε το 1σ εύρος του αριστερού μέλους της εξίσωσης (3.24), το οποίο φαίνεται στο σχήμα 3.3 (γκρίζα περιοχή). Πρέπει να αναφερθεί ότι εκ κατασκευής είναι ανεξάρτητο της ερυθρής μετατόπισης z , αφού υποθέσαμε ότι το γεωμετρικό μέρος της εξίσωσης (3.24) ($H(z)$) περιγράφεται από το Λ CDM ($\Omega_{0m} = 0.3$). Η τιμή 0 που αντιστοιχεί στο Λ CDM για τα κατάλληλα $H(z)$ και $\delta(z)$ (διακεκομμένη γραμμή) είναι εμφανώς μέσα στο 1σ από την καλύτερη καμπύλη στο ελάχιστο (συνεχής γραμμή). Αυτό είναι αναμενόμενο, αφού το εύρος του γ στην εξίσωση (3.17) περιλαμβάνει την τιμή $\gamma = \frac{6}{11}$. Αν είχαμε χρησιμοποιήσει μια πιο γενική μορφή για το $H(z)$ τότε το 1σ εύρος της εξίσωσης (3.24) θα ήταν εξαρτώμενο από την ερυθρή μετατόπιση. Ωστόσο, όπως αναφέραμε και πιο πριν, σε αυτή την περίπτωση το επιτρεπόμενο εύρος του γ



Σχήμα 3.3: Το 1σ εύρος (γκρίζα περιοχή) του αριστερού μέλους της εξίσωσης (3.24) (μαύρη συνεχής γραμμή). Πρέπει να αναφερθεί ότι εκ κατασκευής είναι ανεξάρτητο της ερυθρής μετατόπισης z αφού υποθέσαμε ότι το γεωμετρικό μέρος της εξίσωσης (3.24) ($H(z)$) περιγράφεται από το Λ CDM ($\Omega_{0m} = 0.3$). Η τιμή 0 που αντιστοιχεί στο Λ CDM και για τα $H(z)$ και $\delta(z)$ (διακεκομμένη γραμμή) είναι εμφανώς μέσα στο 1σ από την καλύτερη καμπύλη στο ελάχιστο (συνεχής γραμμή). Αυτό είναι αναμενόμενο αφού το εύρος του γ στην εξίσωση (3.17) περιλαμβάνει την τιμή $\gamma = \frac{6}{11}$.

θα ήταν λιγότερο αξιόπιστο, εφόσον οι έρευνες που παρέχουν τα δεδομένα των Πινάκων 2.2 και 2.3 μετατρέπουν τις ερυθρές μετατοπίσεις σε αποστάσεις χρησιμοποιώντας το Λ CDM με $\Omega_{0m} = 0.3$. Συνεπώς, αυτά τα δεδομένα μπορούν να χρησιμοποιηθούν μόνο για τον έλεγχο του Λ CDM.

Συμπερασματικά, μπορούμε να πούμε ότι ο συνδυασμός των γεωμετρικών ($H(z)$) και των δυναμικών ($\delta(z)$) παρατηρήσεων που χρησιμοποιήσαμε σε αυτό το εδάφιο για να ελέγξουμε το Λ CDM θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και για τον έλεγχο γενικευμένων θεωριών βαρύτητας οι οποίες δεν μπορούν να ελεγχθούν εύκολα μόνο με την χρήση γεωμετρικών τεστ. Ωστόσο, σε αυτή την περίπτωση θα πρέπει να αναλυθούν ξανά τα φάσματα ισχύος χρησιμοποιώντας τη σωστή μορφή του $H(z)$ για την μετατροπή των ερυθρών μετατοπίσεων σε αποστάσεις.

Παρόλα αυτά, δεδομένων των παρόντων σφαλμάτων στις παρατηρήσεις του γραμμικού

ρυθμού διαταραχών f , είναι προφανές ότι χρειάζονται δεδομένα πολύ καλύτερης ποιότητας για να ξεχωρίσουμε το Λ CDM από τις γενικευμένες θεωρίες βαρύτητας. Αυτά τα δεδομένα θα προέλθουν από έρευνες ασθενών βαρυτικών φακών μεγάλης κλίμακας όπως η έρευνα DUNE, η οποία αναμένεται να μετρήσει την καταστατική εξίσωση της Σκοτεινής Ενέργειας με ακρίβεια καλύτερη από 5% [109].

3.3 Επεκτάσεις στα πλαίσια της Γενικής Σχετικότητας

3.3.1 Σύμπαν με Quintessence και Phantom πεδία

Παρόλο που η κοσμολογική σταθερά με καταστατική εξίσωση $w = -1$ είναι η απλούστερη μορφή Σκοτεινής Ενέργειας που είναι συμβατή με τα δεδομένα, η πιθανότητα για μοντέλα με χρονικά εξελισσόμενη Σκοτεινή Ενέργεια και μη σταθερή καταστατική εξίσωση $w(z)$ παραμένει μια βιώσιμη εναλλακτική η οποία ίσως δώσει καλύτερη συμβατότητα με τα δεδομένα από το Λ CDM.

Το ρόλο αυτό, στην πιο απλή περίπτωση, μπορεί να τον αναλάβει κάθε φυσικό πεδίο με θετική πυκνότητα ενέργειας και αρνητική πίεση το οποίο παραβιάζει την Ισχυρή Συνθήκη Ενέργειας: $\rho + 3p > 0$ ($w > -\frac{1}{3}$). Τα βαθμωτά πεδία τύπου: *Quintessence*[110] με θετικό κινητικό όρο και καταστατική εξίσωση στο εύρος $-1 < w < -\frac{1}{3}$ παραβιάζουν την Ισχυρή Συνθήκη Ενέργειας αλλά όχι και την Κυρίαρχη Συνθήκη: $\rho + p > 0$. Από την άλλη τα πεδία τύπου *Phantom*[111] έχουν αρνητικό κινητικό όρο ($w < -1$), παραβιάζουν την κυρίαρχη συνθήκη ενέργειας και μπορεί να είναι ασταθή. Ωστόσο, προς το παρόν είναι συμβατά με τα τρέχοντα κοσμολογικά δεδομένα και σύμφωνα με μερικές μελέτες ίσως είναι πιο προτιμητέα από τα πρώτα.

Τα ομογενή βαθμωτά πεδία τύπου quintessence ή phantom περιγράφονται από Λαγκρανζιανές του τύπου

$$\mathcal{L} = \pm \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (3.25)$$

όπου το άνω (κάτω) πρόσημο αντιστοιχεί σε πεδίο quintessence (phantom) στην εξίσωση (3.25). Για μια επίπεδη μετρική FRW οι εξισώσεις κίνησης για το βαθμωτό πεδίο που απορρέουν από την Λαγκρανζιανή είναι:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (3.26)$$

και η εξίσωση Friedmann γίνεται

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[\rho_m + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right] \quad (3.27)$$

Η καταστατική εξίσωση του πεδίου είναι

$$w = \frac{p}{\rho} = \frac{\pm \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\pm \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi)} \quad (3.28)$$

Για πεδία quintessence (phantom) με $V(\phi) > 0$ ($V(\phi) < 0$) η παράμετρος w παραμένει στην περιοχή $-1 < w < 1$ ($w < -1$). Για τυχαίο πρόσημο του $V(\phi)$ η παραπάνω διάκριση δεν ισχύει, αλλά είναι ακόμα αδύνατο για το w να διασχίσει την γραμμή $w = -1$ (γνωστή

στη βιβλιογραφία ως *Phantom Divide Line* ή PDL) κατά συνεχή τρόπο. Ο λόγος για αυτό είναι ότι για $w = -1$ απαιτείται ένας μηδενικός κινητικός όρος $\pm \dot{\phi}^2$ και η συνεχής μετάβαση από την περιοχή $w < -1$ στην $w > -1$ (ή αντίθετα) απαιτεί την αλλαγή του προσήμου του κινητικού όρου. Ωστόσο, το πρόσημο αυτού του όρου είναι σταθερό και για τα δύο μοντέλα. Η δυσκολία αυτή στην μετάβαση της PDL μπορεί να παίζει σημαντικό ρόλο στην αναγνώριση του σωστού μοντέλου για την Σκοτεινή Ενέργεια, δεδομένου ότι τα τρέχοντα δεδομένα δείχνουν ότι $w \simeq -1$ και ότι τα περισσότερα μοντέλα του $w(z)$ όπου διασχίζεται η PDL φαίνεται να ευνοούνται περισσότερο από την απλή κοσμολογική σταθερά με $w = -1$ [69].

Η συνάρτηση $w(\alpha)$ καθορίζει όχι μόνο τις βαρυτικές ιδιότητες της Σκοτεινής Ενέργειας αλλά επίσης και την εξέλιξή της. Η εξέλιξη αυτή μπορεί εύκολα να βρεθεί από την διατήρηση της ενέργειας

$$d(\rho_X \alpha^3) = -p_X d(\alpha^3) \quad (3.29)$$

η οποία οδηγεί στη σχέση

$$\rho_X = \rho_{0X} e^{-3 \int_1^\alpha \frac{d\alpha'}{\alpha'} (1+w(\alpha'))} = \rho_{0X} e^{3 \int_0^z \frac{dz'}{1+z'} (1+w(z'))} \quad (3.30)$$

Συνεπώς ο καθορισμός του $w(z)$ είναι ισοδύναμος με τον καθορισμό του $\rho_X(z)$, από τον οποίο μπορεί εύκολα να βρεθεί το παρατηρούμενο $H(z)$, που δίνεται από την εξίσωση Friedmann (3.1) και γράφεται ως

$$H(z) = H_0 \left(\Omega_{0m} (1+z)^3 + \Omega_{0X} e^{3 \int_0^z \frac{dz'}{1+z'} (1+w(z'))} \right) \quad (3.31)$$

Έτσι, η γνώση των Ω_{0m} και $H(z)$ επαρκεί για να καθοριστεί η $w(z)$, η οποία μπορεί να βρεθεί και από την εξίσωση (3.31) ως [112]

$$w(z) = \frac{\frac{2}{3}(1+z) \frac{d \ln H}{dz} - 1}{1 - \frac{H_0^2}{H^2} \Omega_{0m} (1+z)^3} \quad (3.32)$$

3.3.2 Η μοίρα των βαρυτικά δέσμιων συστημάτων σε quintessence και phantom κοσμολογίες

Σε αντίθεση με τα quintessence πεδία, η πυκνότητα ενέργειας των phantom πεδίων αυξάνει με τον χρόνο και το ίδιο κάνει και ο προβλεπόμενος ρυθμός επιταχυνόμενης διαστολής $\frac{\ddot{a}}{a}$. Αυτή η μονοτονικά με το χρόνο επιταχυνόμενη διαστολή μπορεί ναδειχθεί ότι οδηγεί σε ένα νέο είδος ‘ανωμαλίας’ (singularity) το οποίο μπορεί να συμβεί σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα στο μέλλον και χαρακτηρίζεται από τον απειρισμό του παράγοντα κλίμακας a , της παραμέτρου Hubble H , της παραγώγου της \dot{H} καθώς και της καμπυλότητας. Αυτή η ανωμαλία είχε ονομαστεί ‘Big Smash’ [113] την πρώτη φορά που είχε εξεταστεί και ‘Big Rip’ στην αναφορά [114] (CKW σε ό,τι ακολουθεί) σε μια πιο πρόσφατη μελέτη. Παρόλο που υπάρχουν μηχανισμοί με τους οποίους η ανωμαλία ‘Big Rip’ μπορεί να αποφευχθεί [115], παραμένει ωστόσο ως ένα ενδιαφέρον τέλος για το σύμπαν.

Μια άμεση συνέπεια της πολύ απότομης διαστολής, όπως φτάνουμε την ανωμαλία, είναι η αποσυσχέτιση των βαρυτικά δέσιμων συστημάτων λόγω της συσσωρευμένης απωστικής αρνητικής πίεσης στο εσωτερικό αυτών των συστημάτων. Η παρατήρηση αυτή έγινε για πρώτη φορά στην αναφορά [114], όταν και αναλύθηκαν ποιοτικά οι χρόνοι αποσυσχέτισης για διάφορα δέσμια συστήματα. Ωστόσο, στην αναφορά [116] κάναμε για πρώτη φορά την ολοκληρωμένη ποσοτική μελέτη της εξέλιξης ενός δέσιμου συστήματος σε ένα διαστελλόμενο σύμπαν. Η ποιοτική προσέγγιση του προβλήματος έγινε από τους CKW, όπου υποτέθηκε ότι ένα δέσμιο σύστημα αποσυσχετίζεται όταν η πηγή της απωστικής phantom ενέργειας για ένα δέσμιο σύστημα μεγέθους R ($-\frac{4}{3}\pi(\rho + 3p)R^3$) εξισορροπήσει το κανονικό βαρυτικό δυναμικό (από την μάζα M του συστήματος). Παρόλο που αυτή η υπόθεση είναι ποιοτικά χρήσιμη, γιατί παρέχει την φυσική εξήγηση στο γιατί ένα δέσμιο σύστημα αποσυσχετίζεται, ποσοτικά όμως οδηγεί σε λάθος εκτιμήσεις για τους χρόνους αποσυσχέτισης επειδή αγνοεί το φυγόκεντρο φράγμα στο ενεργό δυναμικό. Η ποσοτική ανάλυση πρέπει να χρησιμοποιεί τις εξισώσεις κίνησης στο τοπικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς, οι οποίες βρίσκονται από τις γεωδαισιακές εξισώσεις χρησιμοποιώντας μια κατάλληλη μετρική. Με την χρήση αυτής της εξίσωσης, το χρονικά εξαρτώμενο ενεργό δυναμικό δύο σωμάτων μπορεί να δειχθεί ότι αποτελείται από τρεις όρους, το στατικό ελκτικό βαρυτικό όρο, το στατικό απωστικό φυγόκεντρο όρο και τον χρονικά εξαρτώμενο, από την Σκοτεινή Ενέργεια, όρο.

Η σταθερότητα του δέσιμου συστήματος εξαρτάται από την ύπαρξη ή όχι ενός ελαχίστου για το παραπάνω δυναμικό. Στην περίπτωση της quintessence ($w > -1$) το ελάχιστο δεν μπορεί να εξαφανιστεί καμία στιγμή στο μέλλον επειδή ο χρονικά εξαρτώμενος απωστικός όρος μειώνεται με τον χρόνο. Για την phantom ενέργεια ($w < -1$) ωστόσο ο χρονικά εξαρτώμενος απωστικός αυξάνει με τον χρόνο και σε κάποια κρίσιμη χρονική στιγμή κυριαρχεί των άλλων δύο όρων και καταστρέφει το ελάχιστο οδηγώντας ταυτόχρονα σε αποσυσχέτιση το σύστημα. Ωστόσο, πρέπει να αναφέρουμε ότι η κρίσιμη αυτή στιγμή, που το ελάχιστο του ενεργού δυναμικού εξαφανίζεται, δεν είναι ο χρόνος όπου η απωστική Σκοτεινή Ενέργεια εξισορροπεί το ελκτικό βαρυτικό δυναμικό όπως υποτέθηκε από τους CKW. Αυτό θα το δούμε με λεπτομέρεια, αναλυτικά και αριθμητικά στις επόμενες υποενότητες.

Γεωδαισιακές μιας διαστελλόμενης μετρικής Schwarzschild

Για να διερευνήσουμε τις συνέπειες της διαστολής ενός τοπικού δέσιμου συστήματος πρέπει να βρούμε τις γεωδαισιακές των δοκιμαστικών σωματιδίων με βάση μια κατάλληλη μετρική, η οποία μπορεί να περιγράψει το χωροχρόνο στην γειτονιά μιας σημειακής μάζας M τοποθετημένης σε ένα διαστελλόμενο σύμπαν. Μία τέτοια μετρική θα πρέπει να παρεμβάλει μεταξύ μιας στατικής μετρικής Schwarzschild σε μικρές αποστάσεις από την μάζα M και ενός χρονικά εξαρτώμενου χωροχρόνου σε μεγάλες αποστάσεις. Η λεπτομερής μορφή αυτής της παρεμβολής δεν είναι μοναδική και έχουν γίνει διάφορες προσπάθειες στην βιβλιογραφία [117],[118],[119],[120]. Στο Νευτώνειο όριο, δηλαδή θεωρώντας ασθενή πεδία και μικρές μη σχετικιστικές ταχύτητες, μια τέτοια μετρική έχει τη μορφή

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{\alpha(t)\rho}\right) \cdot dt^2 - \alpha(t)^2 \cdot (d\rho^2 + \rho^2 \cdot (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)) \quad (3.33)$$

όπου το ρ είναι η ομοκινούμενη ακτινική συντεταγμένη. Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$r = \alpha(t) \cdot \rho \quad (3.34)$$

οι γεωδαισιακές που αντιστοιχούν στη μετρική (3.33) παίρνουν τη μορφή

$$-(\ddot{r} - \frac{\ddot{\alpha}}{\alpha}r) - \frac{GM}{r^2} + r\dot{\varphi}^2 = 0 \quad (3.35)$$

και

$$r^2\dot{\varphi} = L \quad (3.36)$$

όπου L είναι η σταθερά της στροφορμής ανά μονάδα μάζας. Συνεπώς η ακτινική εξίσωση κίνησης για ένα δοκιμαστικό σωματίδιο στο Νευτώνειο όριο είναι

$$\ddot{r} = \frac{\ddot{\alpha}}{\alpha}r + \frac{L^2}{r^3} - \frac{GM}{r^2} \quad (3.37)$$

Θα πρέπει να τονίσουμε ότι η ίδια εξίσωση κίνησης βρίσκεται και στο Νευτώνειο όριο με άλλες παρόμοιες μετρικές, παρόλο που οι λεπτομέρειες μπορεί να διαφέρουν [119].

Όμως υπάρχει και ένας άλλος απλός και διαισθητικός (αλλά όχι αυστηρός) τρόπος για να βρούμε την ίδια εξίσωση κίνησης. Αυτό μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας το νόμο του Gauss για το βαρυτικό πεδίο με πηγές μάζας M μέσω του ολοκληρώματος του $\rho + 3p$ για μια ομογενή πηγή, που απορρέει από την εξίσωση (3.5). Η προσέγγιση αυτή οδηγεί στην εξίσωση

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r} - \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)\vec{r} \quad (3.38)$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας την εξίσωση Friedmann (3.1) παίρνουμε την εξίσωση (3.37).

Συνεπώς, η δυναμική ενός δοκιμαστικού σωματιδίου, το οποίο κινείται με ταχύτητες αρκετά μικρότερες από αυτή του φωτός, στο βαρυτικό πεδίο μιας μάζας M (ή ισοδύναμα ένα δέσμιο σύστημα δύο σωμάτων) σε ένα διαστελλόμενο σύμπαν μπορεί να περιγραφεί από την γεωδαισιακή εξίσωση κίνησης (3.37). Σε ό,τι ακολουθεί θα μελετήσουμε τις συνέπειες αυτής της εξίσωσης σε διάφορες κοσμολογίες.

Ως απλή άσκηση μπορούμε να δούμε την εξέλιξη ενός δέσμιου συστήματος σε ένα διαστελλόμενο σύμπαν με παράγοντα κλίμακας

$$\alpha(t) \sim t^a \quad (3.39)$$

όπου $a = \text{const}$. Ας υποθέσουμε ότι κάποια αρχική στιγμή t_0 το δοκιμαστικό σωματίδιο βρίσκεται σε κυκλική τροχιά με ακτίνα r_0 και $\dot{\varphi}(t_0) = \omega_0 = \frac{GM}{r_0^3}$. Τότε, η εξίσωση κίνησης (3.37) μπορεί να γραφεί σε αδιάστατη μορφή ως

$$\ddot{\bar{r}} - \frac{\bar{\omega}_0^2}{\bar{r}^3} + \frac{\bar{\omega}_0^2}{\bar{r}^2} - \frac{a(a-1)}{\bar{t}^2}\bar{r} = 0 \quad (3.40)$$

όπου $\bar{r} \equiv \frac{r}{r_0}$, $\bar{\omega}_0 \equiv \omega_0 t_0$ και $\bar{t} \equiv \frac{t}{t_0}$. Σε ό,τι ακολουθεί θα παραλείψουμε την παύλα (...) για ευκολία, αλλά θα συνεχίσουμε να δουλεύουμε με τις αδιάστατες εξισώσεις. Για τυπικά βαρυτικά δέσμια συστήματα σε κοσμολογικές χρονικές κλίμακες έχουμε

$$\omega_0^2 = \frac{GM}{r_0^3} t_0^2 \gg 1 \quad (3.41)$$

(π.χ. για γαλαξίες $\omega_0 \simeq O(100)$), οπότε και μπορούμε να θεωρήσουμε τον τελευταίο όρο στην εξίσωση (3.40) ως μια διαταραχή της κυκλικής τροχιάς $r_0 = 1$ το $r = 1 + \delta r(t)$. Είναι τότε εύκολο να δειχθεί ότι (όπως αναφέρεται και στην [121])

$$\delta r(t) = \frac{a(a-1)}{\omega_0^2 t^2} \quad (3.42)$$

Η ακτίνα της τροχιάς τείνει να αυξηθεί για $a \in (0, 1)$ (επιβραδυνόμενη διαστολή) ενώ η διαταραχή δr είναι αρνητική επειδή η ομογενής ελκτική βαρυτική πηγή ($\rho + 3p > 0$ σε αυτή την περίπτωση) μέσα σε μια σφαίρα ακτίνας r μειώνεται με τον χρόνο. Για $a > 1$ (επιταχυνόμενη διαστολή) η διαταραχή δr είναι θετική αλλά μειώνεται με τον χρόνο, επειδή η ομογενής απωστική βαρυτική πηγή ($\rho + 3p < 0$ σε αυτή την επιταχυνόμενη περίπτωση) μέσα σε μια σφαίρα ακτίνας r μειώνεται με τον χρόνο.

Για να καταλάβουμε καλύτερα την συμπεριφορά της διαταραγμένης τροχιάς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση Friedmann (3.1). Η εξίσωση αυτή δείχνει ότι ο χρονικά εξαρτώμενος διαταρακτικός όρος της εξίσωσης (3.40) προέρχεται από την ομογενή βαρυτική πηγή $S = \frac{4\pi}{3}(\rho+3p)r_0^3$ που περιέχεται μέσα στην αδιατάρακτη ακτίνα r_0 . Για μια καταστατική εξίσωση $p = w\rho$ έχουμε

$$\alpha \sim t^{\frac{2}{3(w+1)}} = t^a \quad (3.43)$$

$$\rho \sim \alpha^{-3(1+w)} \sim t^{-2} \quad (3.44)$$

Η περίπτωση $w > -\frac{1}{3}$ αντιστοιχεί σε $a \in (0, 1)$ και η ακτινική διαταραχή (3.42) είναι αρνητική και μειώνεται με τον χρόνο. Αυτό είναι αναμενόμενο επειδή η βαρυτική πηγή $S \sim \rho + 3p$ είναι θετική (ελκτική) και μειώνεται με τον χρόνο (εξίσωση (3.44)). Συνεπώς το δr είναι αρνητικό (ελκτική διαταραχή) αλλά μειώνεται με τον χρόνο (η πυκνότητα ενέργειας μειώνεται με τον χρόνο και το ίδιο κάνει και η βαρυτική πηγή). Για $-1 < w < -\frac{1}{3}$ έχουμε $a > 1$ και η ακτίνα της διαταραχής (3.42) είναι θετική και μειώνεται με τον χρόνο. Αυτό γίνεται γιατί η βαρυτική πηγή S είναι αρνητική (απωστική) και ελαττώνεται με τον χρόνο. Έτσι η δr είναι θετική (απωστική διαταραχή) αλλά ελαττώνεται με τον χρόνο. Τέλος, για $w < -1$ έχουμε $a < 0$. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε μια διαστελλόμενη φάση για $t < 0$, την ανωμαλία (Big Rip) την στιγμή $t = 0$ και μία φάση συστολής για $t > 0$.

Η παρούσα φάση της διαστολής ταυτίζεται με την πρώτη περίοδο ($t < 0$) και η ακτίνα της διαταραχής είναι θετική και αυξάνεται με τον χρόνο. Αυτό είναι αναμενόμενο γιατί η βαρυτική πηγή S είναι αρνητική (απωστική) αλλά επίσης αυξάνεται με τον χρόνο καθώς το t πλησιάζει την ανωμαλία την στιγμή $t = 0$ (εξίσωση 3.44). Συνεπώς, το δr είναι θετικό (απωστική διαταραχή) και αυξάνεται με τον χρόνο.

Αυτή η μέθοδος αποδεικνύει ότι η ακτινική διαταραχή για ένα δέσμιο σύστημα αυξάνεται μόνο για $w < -1$ ή $a < 0$ αλλά δεν δίνει πληροφορίες για το αν και πότε θα αποσυσχετιστεί. Για αυτό χρειάζεται μία μη-διαταρακτική μέθοδος η οποία θα οδηγήει στην πλήρη χρονική εξέλιξη της ακτίνας ενός δέσμιου συστήματος δύο σωμάτων.

Προτού προχωρήσουμε θα ήταν χρήσιμο να βελτιώσουμε την εκτίμησή μας για την εξέλιξη του παράγοντα κλίμακας θεωρώντας ένα ιδανικό ρευστό αποτελούμενο από δύο μέρη αντί για ένα. Υποθέτοντας ότι τα μέρη αυτά είναι ύλη με πυκνότητα ενέργειας ρ_m και Σκοτεινή Ενέργεια, με πυκνότητα ρ_x και καταστατική εξίσωση $p_x = w\rho_x$, μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις Friedmann ως [122]

$$\frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha^2} = \frac{8\pi G}{3} (\rho_m + \rho_x) = H_0^2 (\Omega_m^0 (\alpha_0/\alpha)^3 + \Omega_x^0 (\alpha_0/\alpha)^{3(1+w)}) \quad (3.45)$$

και

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} &= -\frac{4\pi G}{3} (\rho_m + \rho_x(1+3w)) = -\frac{4\pi G}{3} \rho_x (\Omega_x^{-1} + 3w) \\ &= -\frac{4\pi G}{3} \rho_x \left(\frac{\Omega_m^0}{\Omega_x^0} \left(\frac{\alpha_0}{\alpha} \right)^{-3w} + 1 + 3w \right) \end{aligned}$$

Η μετάβαση από την φάση της ύλης στην φάση της Σκοτεινής Ενέργειας γίνεται στην ερυθρή μετατόπιση

$$1 + z_m = \frac{\alpha_0}{\alpha_m} = \left(\frac{-(3w+1)\Omega_x^0}{\Omega_m^0} \right)^{-\frac{1}{3w}} \quad (3.46)$$

Για $z > z_m$ η λύση της εξίσωσης Friedmann είναι

$$\alpha^{3/2}(t) = \frac{3}{2}\xi t \quad (3.47)$$

όπου ξ είναι μία σταθερά. Κατά την επιταχυνόμενη φάση $z < z_m$ η αντίστοιχη λύση προσεγγίζεται από την σχέση

$$\alpha^{3(1+w)/2}(t) = \frac{3}{2}\chi t + c \quad (3.48)$$

όπου c είναι μια σταθερά ολοκλήρωσης και $\chi = H_0\sqrt{\Omega_x^0}$. Επεκτείνοντας τις σχέσεις (3.47) και (3.48) μέχρι τη στιγμή t_m και ταιριάζοντας τις σταθερές ξ και c , βρίσκεται η σχέση για τον παράγοντα κλίμακας που ισχύει για $t > t_m$ ($z < z_m$)

$$\alpha(t) = \frac{\alpha(t_m)}{(-w + (1+w)t/t_m)^{-\frac{2}{3(1+w)}}} \quad \text{για } t > t_m \quad (3.49)$$

Για $w < -1$ ο παράγοντας κλίμακας απειρίζεται σε πεπερασμένο χρόνο

$$t_* = \frac{w}{1+w}t_m > 0 \quad (3.50)$$

και οδηγεί στην ανωμαλία Big Rip. Αφού $\rho_x \sim \alpha^{-3(1+w)}$ φαίνεται εύκολα ότι και η πυκνότητα της Σκοτεινής Ενέργειας απειρίζεται την στιγμή t_* ως

$$\rho_x(t) = \frac{\rho(t_m)}{[-w + (1+w)t/t_m]^2} \quad (3.51)$$

Η εξέλιξη των βαρυτικά δέσιμων συστημάτων

Αντικαθιστώντας τη σχέση για τον παράγοντα κλίμακας της εξίσωσης (3.49) στην εξίσωση της κίνησης (3.37) για ένα σύστημα δύο σωμάτων σε ένα διαστελλόμενο σύμπαν παίρνουμε

$$\ddot{r} - \frac{\omega_0^2}{r^2} \left(1 - \frac{1}{r}\right) + \frac{2}{9} \frac{(1+3w)r}{(-w + (1+w)t)^2} = 0 \quad (3.52)$$

Παρόμοια με την εξίσωση (3.40) έτσι και αυτή έχει γραφεί σε αδιάστατη μορφή θέτοντας $\frac{r}{r_0} \rightarrow r$ και $\frac{t}{t_m} \rightarrow t$. Ο χρονικά εξαρτώμενος τελευταίος όρος που είναι ανάλογος του

$$\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) = \frac{2}{9} \frac{(1+3w)}{(-w + (1+w)t)^2} \quad (3.53)$$

εκφράζει τα βαρυτικά φαινόμενα της Σκοτεινής Ενέργειας που περιέχεται σε μία σφαίρα ακτίνας r , ενώ η αδιάστατη παράμετρος ω_0^2 ορίζεται ως

$$\omega_0^2 = \frac{GM}{r_0^3} t_m^2 \quad (3.54)$$

Χρησιμοποιώντας την αδιάστατη εξίσωση κίνησης (3.52) με αρχικές συνθήκες $r(t=1) = r_{min}$ και $\dot{r}(t=1) \simeq 0$ (όπου r_{min} είναι το ελάχιστο στο ενεργό δυναμικό τη χρονική στιγμή $t=1$) μπορούμε να μελετήσουμε την εξέλιξη της ακτίνας δύο σωμάτων τα οποία αρχικά βρισκόταν σε κυκλική τροχιά.

Στην απλουστευμένη ποιοτική μέθοδο των CKW δεν είχε αναφερθεί καθόλου το θέμα της εξίσωσης κίνησης καθώς είχε υποθεθεί ότι η αποσυσχέτιση συμβαίνει όταν η χρονικά εξαρτώμενη Σκοτεινή Ενέργεια μέσα σε μια ακτίνα r ισορροπήσει με την ελκτική βαρυτική πηγή $\frac{\omega_0^2}{r_{min}^2}$. Η μέθοδος αυτή είναι όχι μόνο απλά ποιοτική αλλά οδηγεί και σε λάθος αποτελέσματα για δύο λόγους:

- Δεν λαμβάνει υπόψη το φυγόκεντρο όρο $\frac{\omega_0^2}{r_{min}^3}$
- Σιωπηρά υποθέτει ότι η ακτίνα του συστήματος ακριβώς πριν την αποσυσχέτιση είναι η ίδια με την αρχική ακτίνα r_{min} .

Μολαταύτα, για σύγκριση με τα ακριβή αποτελέσματα που θα αναφέρουμε αργότερα θα αναπαράξουμε τα αποτελέσματα των CKW. Η συνθήκη ισορροπίας των CKW μπορεί να γραφεί ως

$$\omega_0^2 \equiv \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = -\frac{2}{9} \frac{(1+3w)}{(-w + (1+w)t)^2} \quad (3.55)$$

το οποίο δίνει

$$t_* - t_{rip} = \frac{T\sqrt{2|1+3w|}}{6\pi|1+w|} \quad (3.56)$$

όπου t_* είναι η χρονική στιγμή που γίνεται η ανωμαλία.

Το χρονικά εξαρτώμενο ενεργό δυναμικό που καθορίζει την δυναμική του δέσμιου συστήματος μπορεί με χρήση της εξίσωσης (3.52) να βρεθεί

$$V_{eff} = -\frac{\omega_0^2}{r} + \frac{\omega_0^2}{2r^2} - \frac{1}{2}\lambda(t)^2 r^2 \quad (3.57)$$

όπου

$$\lambda(t) = \frac{\sqrt{2|1+3w|}}{3(-w+(1+w)t)} \quad (3.58)$$

με $w < -1$. Τη στιγμή $t = 1$ το σύστημα υποτίθεται πως βρίσκεται σε κυκλική τροχιά που δίνεται από το ελάχιστο $r_{min}(t)$ του ενεργού δυναμικού της εξίσωσης (3.57). Η θέση του $r_{min}(t)$ εξαρτάται από το χρόνο και ισούται κατά προσέγγιση με την ακτίνα του συστήματος ανά πάσα χρονική στιγμή και είναι η λύση της εξίσωσης

$$q(t)^2 r_{min}^4 = r_{min} - 1 \quad (3.59)$$

όπου

$$q(t) \equiv \frac{\lambda(t)}{\omega_0} \quad (3.60)$$

Μπορεί να δειχθεί ότι η εξίσωση αυτή έχει λύση μόνο για

$$q(t)^2 \leq \frac{27}{256} \equiv q_c \quad (3.61)$$

Συνεπώς, ο χρόνος t_{rip} για τον οποίο το ελάχιστο του δυναμικού (3.57) εξαφανίζεται και το σύστημα διαλύεται δίνεται από την λύση της εξίσωσης:

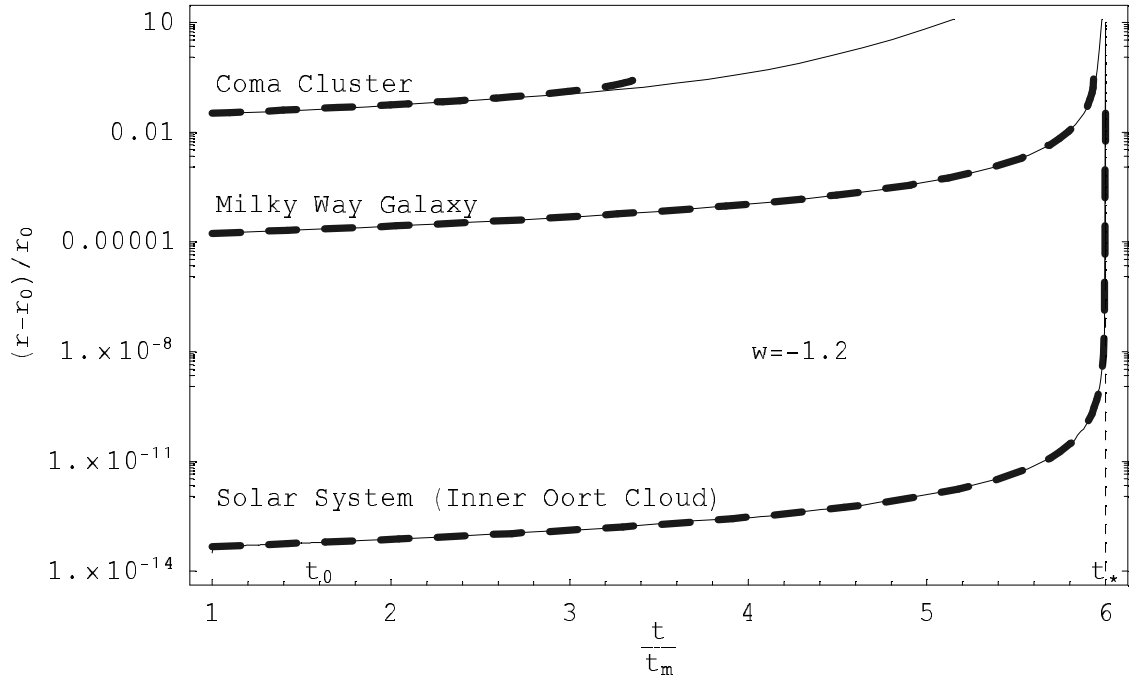
$$q(t_{rip})^2 = \frac{27}{256} \quad (3.62)$$

Είναι εύκολο να λύσουμε την εξίσωση (3.62) ως προς t_{rip} και να βρούμε

$$t_* - t_{rip} = \frac{16\sqrt{3}T\sqrt{2|1+3w|}}{9 \cdot 6\pi|1+w|} \quad (3.63)$$

Το αποτέλεσμα αυτό διαφέρει από αυτό των CKW κατά ένα παράγοντα $\frac{16\sqrt{3}}{9} \simeq 3$.

Για να ελέγξουμε αυτό το αποτέλεσμα πρέπει να επιλύσουμε αριθμητικά την εξίσωση κίνησης (3.52) για ένα δεδομένο δέσμιο σύστημα, να βρούμε αριθμητικά τις τροχιές $r(t)$ και να συγκρίνουμε την αναλυτική πρόβλεψη για το χρόνο αποσυσχέτισης με αυτόν που προκύπτει από την αριθμητική λύση. Για την λύση θεωρούμε μία phantom κοσμολογία με $w = -1.2$, $\Omega_m^0 = 0.3$ και $\Omega_x^0 = 0.7$. Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε την αδιάστατη γωνιακή ταχύτητα ω_0 για διάφορα συγκεκριμένα συστήματα την οποία και θα χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε αριθμητικά την αντίστοιχη μελλοντική ακτινική εξέλιξη. Τα τρία συστήματα που θα μελετήσουμε είναι: το ηλιακό σύστημα ($M = 2 \times 10^{33}gr$, $r_0 = 7 \times 10^{15}cm$, $\omega_0 = 3.5 \times 10^6$), ο Γαλαξίας ($M = 2 \times 10^{45}gr$, $r_0 = 5 \times 10^{22}cm$, $\omega_0 = 182$) και το σμήνος



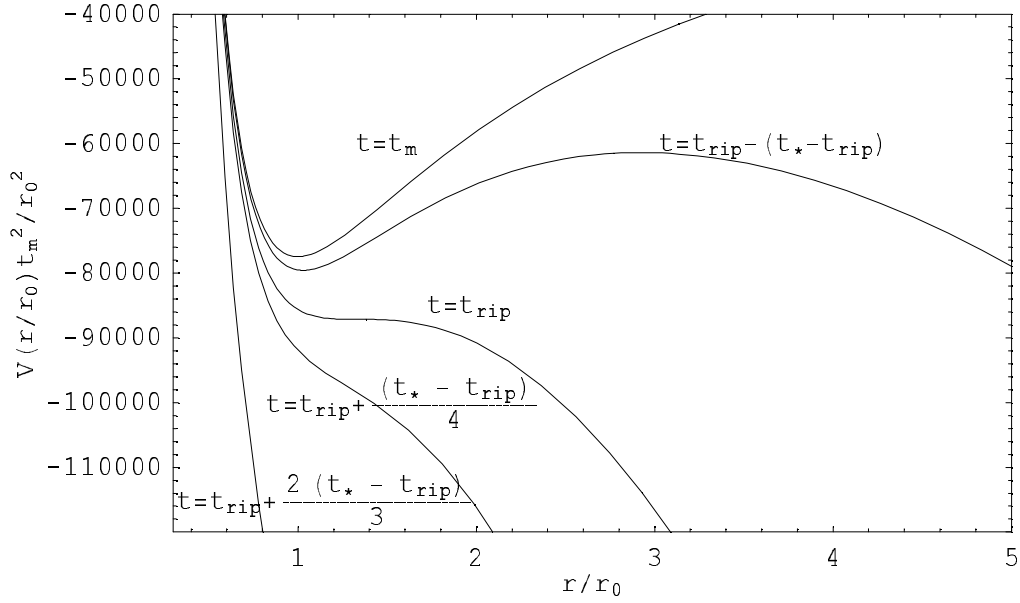
Σχήμα 3.4: Η αριθμητική εξέλιξη της ακτίνας (συνεχής γραμμή) και η αναλυτική εξέλιξη του ελαχίστου του ενεργού δυναμικού (διακεκομμένη γραμμή) για τα τρία αυτά συστήματα.

Coma ($M = 6 \times 10^{48} gr$, $r_0 = 9 \times 10^{24} cm$, $\omega_0 = 4.15$). Στον υπολογισμό του ω_0 για τα παραπάνω συστήματα έχουμε χρησιμοποιήσει την τιμή του t_m για την phantom κοσμολογία

$$t_m = (H_0 \sqrt{\Omega_m^0})^{-1} \frac{2}{3} (1 + z_m)^{-\frac{3}{2}} \simeq 1.8 \times 10^{17} h^{-1} sec \quad (3.64)$$

Η εξέλιξη της ακτίνας για τα παραπάνω συστήματα έγινε χρησιμοποιώντας δύο μεθόδους: με υπολογισμό του ελαχίστου του ενεργού δυναμικού (παχιές διακεκομμένες γραμμές στο σχήμα 3.4) χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.59) μέχρι το ελάχιστο να εξαφανιστεί και με αριθμητική λύση της εξίσωσης κίνησης (3.52) (συνεχής γραμμή) μέχρι το χρόνο αποσυσχέτισης, όπως βρέθηκε από την εξίσωση (3.56). Η αριθμητική εξέλιξη ξεκινά την αρχική στιγμή $t = t_m$ ($t = 1$ στην αδιάστατη μορφή) με αρχική ακτίνα το ελάχιστο του ενεργού δυναμικού και αμελητέα ακτινική ταχύτητα έτσι ώστε να ελαχιστοποιούνται οι ακτινικές ταλαντώσεις. Όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.4 η συμφωνία μεταξύ της αριθμητικής εξέλιξης (συνεχής γραμμή) και της αναλυτικής εξέλιξης του ελαχίστου του ενεργού δυναμικού (διακεκομμένη γραμμή) είναι πολύ καλή.

Ακόμη, η τιμή του χρόνου t_0 φαίνεται στον άξονα του χρόνου του σχήματος 3.4. Στο σχήμα 3.5 φαίνεται η εξέλιξη του αδιάστατου δυναμικού γύρω από τη στιγμή t_{rip} όταν το ελάχιστο εξαφανίζεται για ένα δέσμιο σύστημα που αντιστοιχεί στο Γαλαξία. Καθώς ο απωστικός όρος καταστρέφει το ελάχιστο εμφανίζεται μια μικρή αύξηση στη θέση του ελαχίστου,



Σχήμα 3.5: Η εξέλιξη του αδιάστατου ενεργού δυναμικού για τον Γαλαξία.

Πίνακας 3.1: Η διαφορά στους χρόνους αποσυσχέτισης $t_* - t_{rip}$ για τα τρία δέσμια συστήματα σε χρόνια όπως προβλέπεται από τις εξισώσεις (3.63) και (3.56). Υποτέθηκε η τιμή $w = -1.2$.

Σύστημα	$t_* - t_{rip}$ (χρ.)	$(t_* - t_{rip})_{CKW}$ (χρ.)
Ηλιακό σύστημα	$1.88 \cdot 10^4$	$6.11 \cdot 10^3$
Γαλαξίας	$3.59 \cdot 10^8$	$1.17 \cdot 10^8$
Σμήνος Coma	$1.58 \cdot 10^{10}$	$5.14 \cdot 10^9$

μετά αυτό εξαφανίζεται απότομα και το σύστημα αποσυσχετίζεται. Η διαφορά μεταξύ της ποσοτικής πρόβλεψης για το t_{rip} (που υποδεικνύεται από τις διακεκομμένες γραμμές του σχήματος 3.4) και της αντίστοιχης ποιοτικής εκτίμησης των CKW (που υποδεικνύεται από το τέλος της συνεχής γραμμής) είναι μεγαλύτερη για το Σμήνος Coma και μικρότερη για το Γαλαξία. Οι ακριβείς τιμές σε χρόνια για τη διαφορά $t_* - t_{rip}$ φαίνονται στον Πίνακα 3.1 μαζί με την ποιοτική πρόβλεψη των CKW. Οι αντίστοιχοι χρόνοι αποσυσχέτισης t_{rip} σε μονάδες t_m φαίνονται στον Πίνακα 3.1.

Για την περίπτωση $w = -1.5$ που χρησιμοποιήθηκε από τους CKW οι αντίστοιχες προβλέψεις για την αποσυσχέτιση του Γαλαξία είναι $t_* - t_{rip} \simeq 166 Myrs$ και $(t_* - t_{rip})_{CKW} \simeq 54 Myrs$.

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση κίνησης (3.52) μαζί με την διατήρηση της στροφορμής

$$r^2 \dot{\phi} = r_0^2 \omega_0 \quad (3.65)$$

Πίνακας 3.2: Οι χρόνοι αποσυσχέτισης t_{rip} για τα τρία δέσμια συστήματα σε μονάδες t_m . Για $w = -1.2$ έχουμε $t_m \simeq 5.65h^{-1}Gyrs$.

Σύστημα	t_{rip}/t_m
Ηλιακό σύστημα	6.00
Γαλαξίας	5.94
Σμήνος Coma	3.19

πολύ εύκολα μπορούμε να βρούμε αριθμητικά την τροχιά που αντιστοιχεί στα τρία δέσμια συστήματα και να αποκτήσουμε εποπτεία της διαδικασίας αποσυσχέτισης.

Η αποσυσχέτιση αυτή φαίνεται στα σχήματα 3.6 και 3.7 για ένα δέσμιο σύστημα που αντιστοιχεί στον Γαλαξία. Συγκεκριμένα, στο σχήμα 3.6 το σύστημα εξελίσσεται μέχρι το ελάχιστο του ενεργού δυναμικού να εξαφανιστεί, ενώ η εξέλιξη στο σχήμα 3.7 αντιστοιχεί στο ίδιο σύστημα, αλλά μέχρι η απωστική δύναμη λόγω της Σκοτεινής Ενέργειας να αντισταθμίσει τη βαρυτική έλξη της μάζας. Προφανώς, ο χρόνος αποσυσχέτισης είναι ο χρόνος εξέλιξης του σχήματος 3.6, ενώ η εξέλιξη του σχήματος 3.7 συνεχίζει πολύ μετά την αποσυσχέτιση. Η ακτινική (αντί για εφαπτομενική) κίνηση μετά την αποσυσχέτιση οφείλεται στην κυρίαρχη πλέον απωστική δύναμη λόγω της Σκοτεινής Ενέργειας.

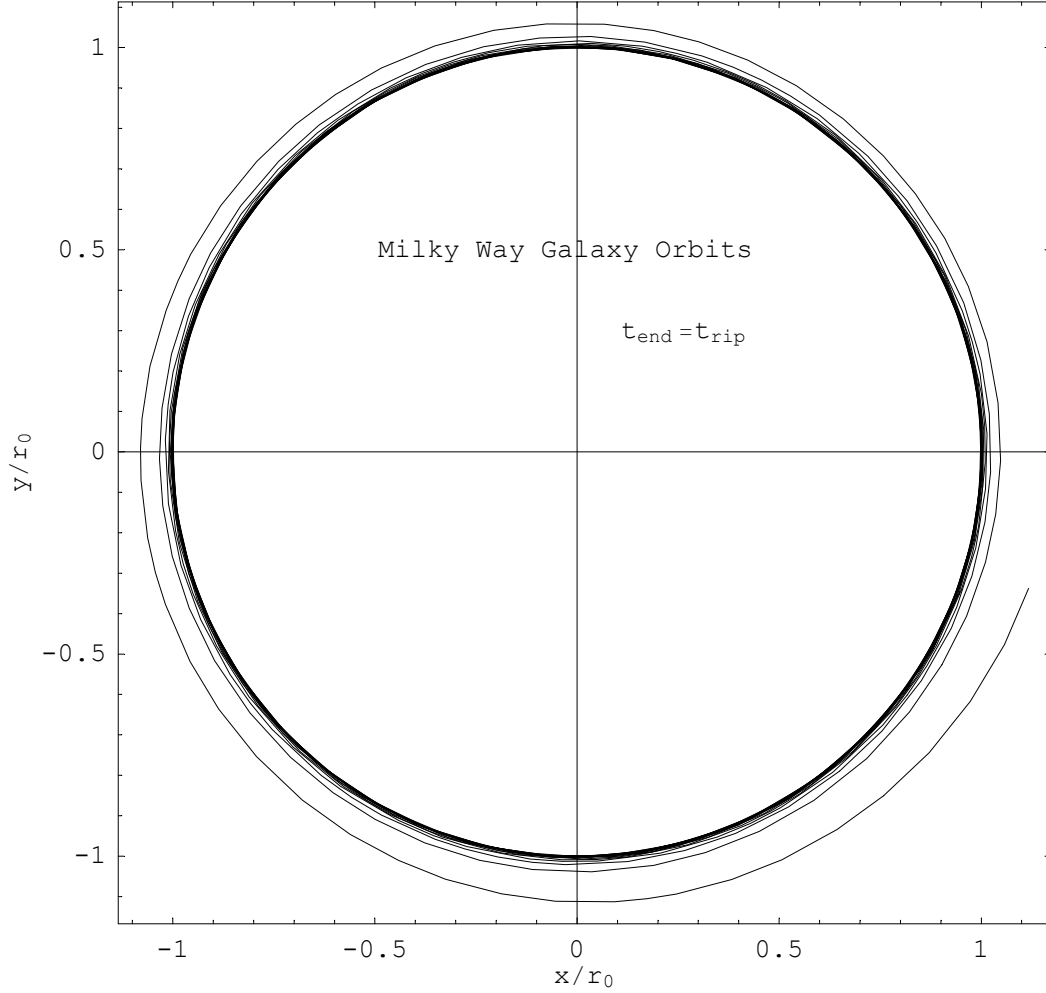
Για την αριθμητική εξέλιξη των συστημάτων στα σχήματα 3.4 και 3.5 έχουμε υποθέσει ότι $w = -1.2$. Ωστόσο, ο χρόνος αποσυσχέτισης t_{rip} είναι ευαίσθητος στην τιμή της παραμέτρου w , όπως φαίνεται και από την εξίσωση (3.63). Στο σχήμα 3.8 φαίνεται η εξάρτηση του σχετικού χρόνου αποσυσχέτισης ορισμένου ως

$$\frac{t_* - t_{rip}}{T} \quad (3.66)$$

(όπου T είναι η περίοδος περιστροφής του δέσμιου συστήματος) στην παράμετρο w για $w < -1$. Η συνεχής καμπύλη ορίζει το t_{rip} ως το χρόνο όταν το ελάχιστο του ενεργού δυναμικού εξαφανίζεται, ενώ η διακεκομμένη καμπύλη δείχνει το χρόνο για τον οποίο η ολική βαρυτική δύναμη μηδενίζεται. Προφανώς οι δύο καμπύλες διαφέρουν σημαντικά και η διαφορά αυτή μεγαλώνει καθώς το w πλησιάζει την τιμή $w = -1$.

Μέχρι στιγμής η ανάλυση βασίστηκε στην υπόθεση ότι $w < -1$. Αυτό έγινε γιατί όπως προαναφέρθηκε η quintessence ($w > -1$) δεν μπορεί να επηρεάσει σημαντικά την εξέλιξη των βαρυτικά δέσμιων συστημάτων. Για να δείξουμε ότι όντως η επίδραση της quintessence είναι μικρή, σχεδιάσαμε το ενεργό δυναμικό για ένα σύστημα της τάξης του Γαλαξία με $w = -0.9$ κατά τις χρονικές στιγμές $t = t_m$ και $t = 3t_0$ (σχήμα 3.9). Η αντίστοιχη γραφική για ένα σύστημα της τάξης ενός σμήνους γαλαξιών, όπου η παράμετρος ω_0 είναι της τάξης $O(1)$, φαίνεται στο σχήμα 3.10. Η μείωση στην ακτίνα είναι και στις δύο περιπτώσεις μικρή, αλλά στην περίπτωση του σμήνους γαλαξιών είναι κάπως πιο εμφανής, όπως αναμένεται και από τη διαταρακτική εξίσωση (3.42).

Τέλος, είναι ενδιαφέρον να μελετηθεί και η εξέλιξη βαρυτικά δέσμιων συστημάτων με επίπεδη γεωμετρία. Έστω ένα δοκιμαστικό σωματίδιο σε απόσταση h από μία επιφάνεια με



Σχήμα 3.6: Η εξέλιξη του συστήματος του Γαλαξία μέχρι την εξαφάνιση του ελαχίστου του ενεργού δυναμικού.

επιφανειακή πυκνότητα σ μέσα σε ένα διαστελλόμενο σύμπαν. Χρησιμοποιώντας τον νόμο του Gauss για ευκολία, δεν είναι δύσκολο ναδειχθεί ότι η εξίσωση κίνησης του σωματιδίου είναι

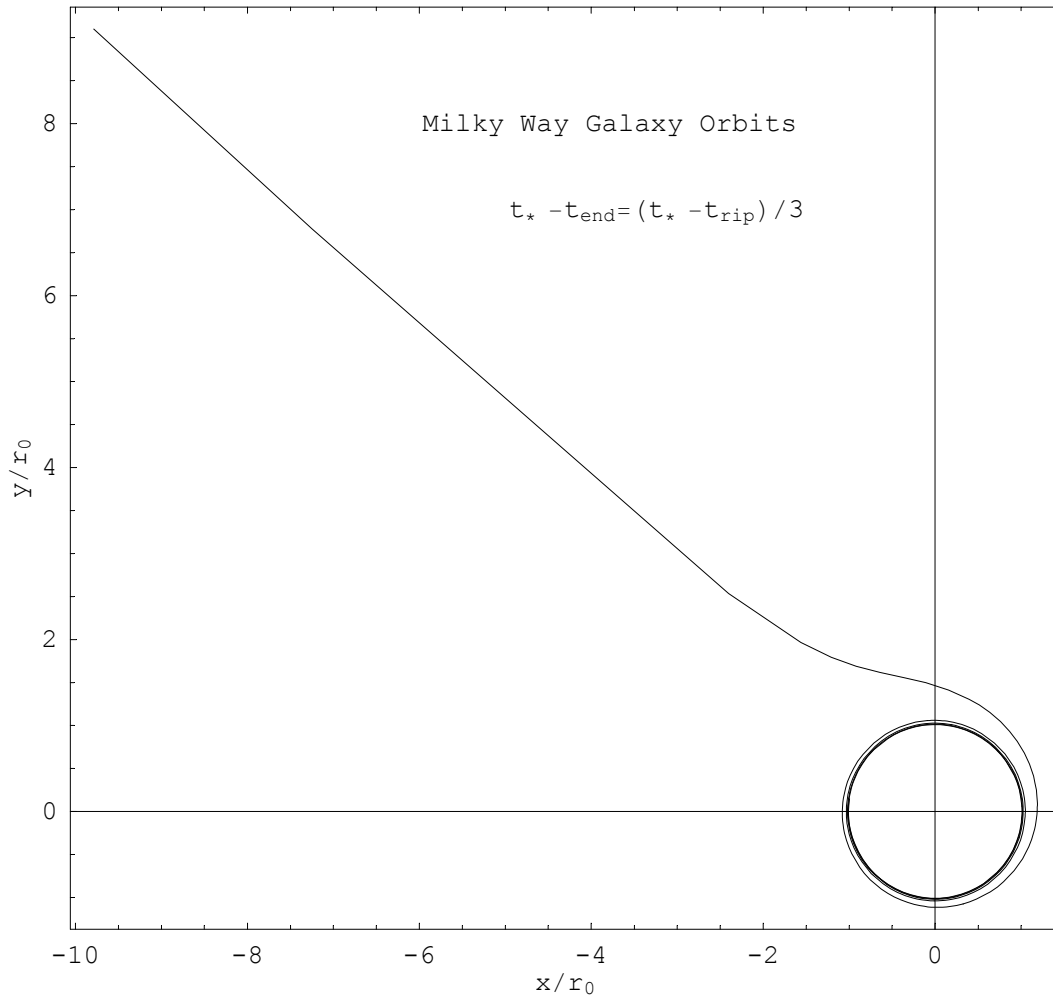
$$\ddot{h} = -2\pi G\sigma + \frac{3}{2}\frac{\ddot{a}}{a}h \quad (3.67)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.49) για τον παράγοντα κλίμακας παίρνουμε

$$t_m^2 \ddot{h} = -h_0 + \beta h \quad (3.68)$$

όπου η παράγωγος είναι ως προς $\frac{t}{t_m}$,

$$h_0 = 2\pi G\sigma t_m^2 \quad (3.69)$$



Σχήμα 3.7: Το ίδιο σύστημα με το προηγούμενο σχήμα αλλά η εξέλιξη διαρκεί μέχρι η Σκοτεινή Ενέργεια να αντισταθμίσει τη βαρυτική έλξη της μάζας.

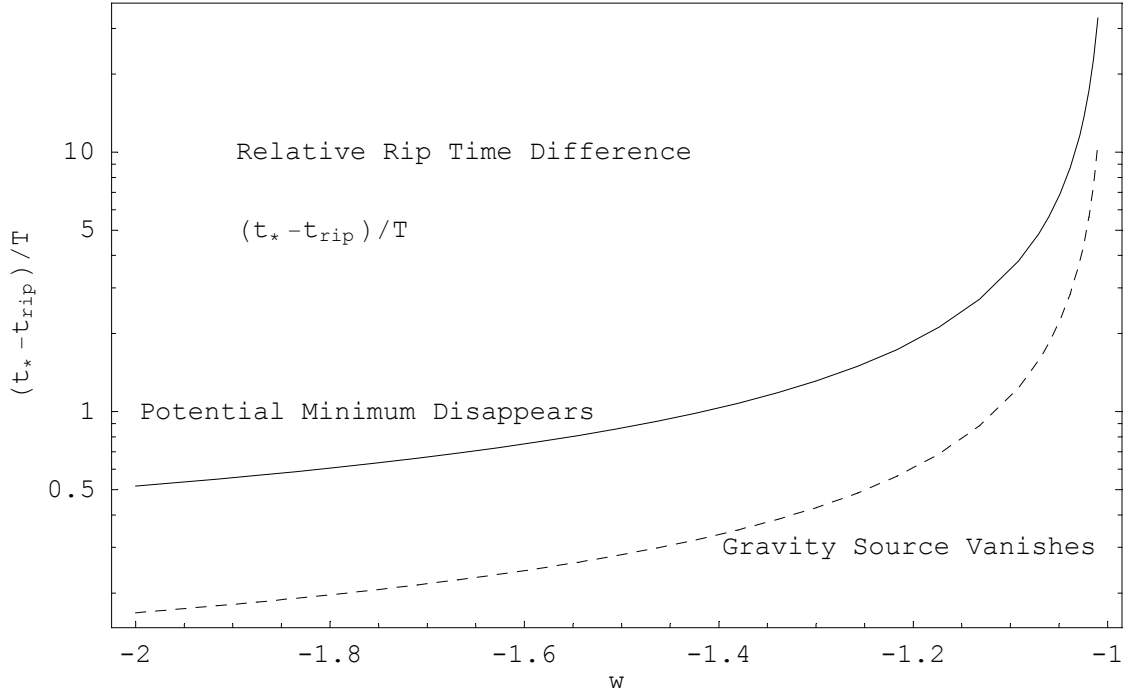
και

$$\beta(t) = \frac{|1 + 3w|}{3(-w + \frac{t}{t_m}(1 + w))^2} \quad (3.70)$$

Διαιρώντας με h_0 και θέτοντας $\frac{t}{t_m} \rightarrow t$, $\frac{h}{h_0} \rightarrow h$, η εξίσωση (3.68) μπορεί να γραφεί σε αδιάστατη μορφή ως

$$\ddot{h} = -1 + \beta h \quad (3.71)$$

Προφανώς το ενεργό δυναμικό που αντιστοιχεί σε αυτή την εξίσωση δεν έχει φυγόκεντρο όρο και διαφέρει σημαντικά από το αντίστοιχο ενεργό δυναμικό της περίπτωσης με σφαιρική



Σχήμα 3.8: Η εξάρτηση του σχετικού χρόνου αποσυσχέτισης στην παράμετρο w .

συμμετρία και είναι της μορφής (σχήμα 3.11)

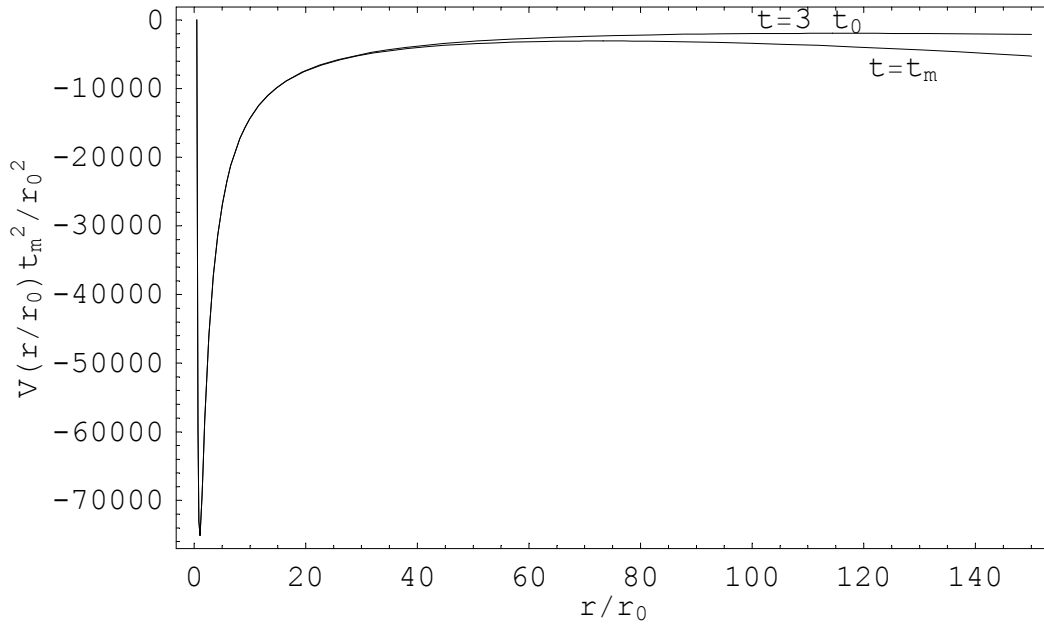
$$V_{eff} = -\frac{1}{2}\beta\left(h - \frac{1}{\beta}\right)^2 \quad (3.72)$$

Όπως φαίνεται είναι ένα ανεστραμμένο δυναμικό αρμονικού ταλαντωτή με ένα χρονικά εξαρτώμενο ασταθές σημείο στη θέση $h_{eq} = \frac{1}{\beta(t)}$. Για την περίπτωση της quintessence η παράμετρος $\beta(t)$ μειώνεται με τον χρόνο και συνεπώς η θέση του σημείου ισορροπίας αυξάνεται με τον χρόνο. Σημεία τα οποία αρχικά βρίσκονται αριστερά της θέσης ισορροπίας θα παραμείνουν δέσμια στην ελκτική πλευρά του πηγαδιού. Σημεία τα οποία βρίσκονται αρχικά δεξιά της θέσης ισορροπίας (ελεύθερα) μπορεί να παγιδευτούν αριστερά της θέσης ισορροπίας. Αυτό υπονοεί ότι η κλίμακα της ασταθούς θέσης ισορροπίας μειώνεται με τον χρόνο και συνεπώς όλα τα συστήματα σε όλες τις κλίμακες τελικά θα αποσυσχετιστούν. Η αδιάστατη κλίμακα αποσυσχέτισης $h_d(t_{rip})$ για την χρονική στιγμή t_{rip} βρίσκεται λύνοντας την εξίσωση

$$h_d = \frac{1}{\beta(t_{rip})} = -\frac{3(-w + t_{rip}(1+w))^2}{1+3w} \quad (3.73)$$

που έχει λύση

$$t_* - t_{rip} = \frac{T}{8\sqrt{3}} \frac{\sqrt{2|1+3w|}}{|1+w|} \quad (3.74)$$

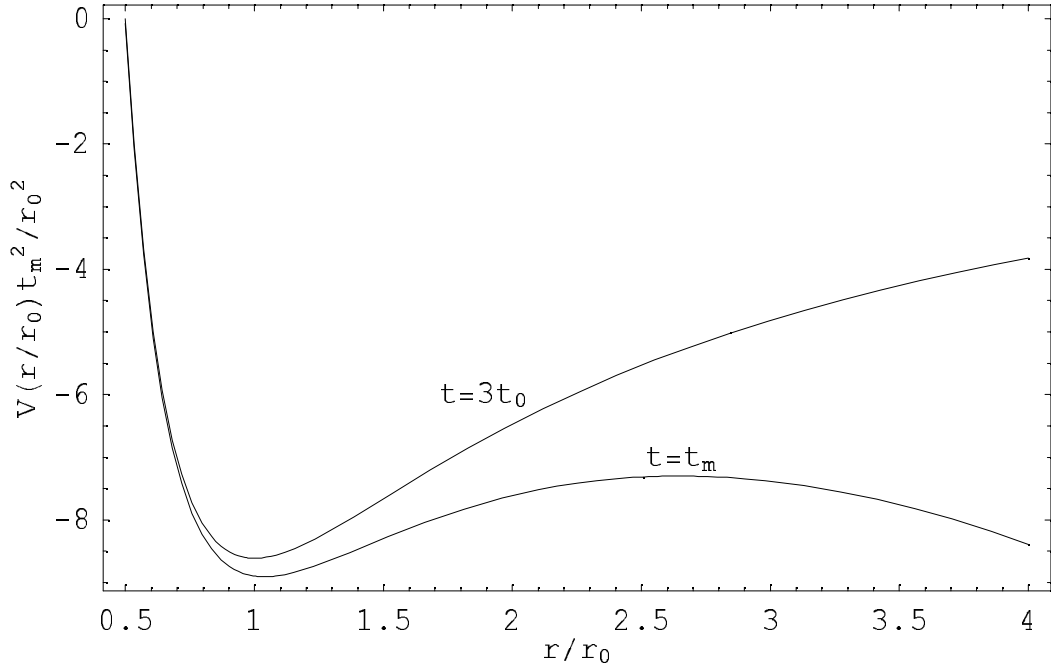


Σχήμα 3.9: Το ενεργό δυναμικό για ένα σύστημα της τάξης του Γαλαξία με $w = -0.9$ τις χρονικές στιγμές $t = t_m$ και $t = 3t_0$.

όπου $T = 4\sqrt{2h_d}$ είναι η περίοδος της ταλάντωσης του δοκιμαστικού σωματιδίου. Αξίζει να παρατηρηθεί η ομοιότητα αυτού του αποτελέσματος με το αντίστοιχο για σφαιρικά συμμετρικά συστήματα (3.63).

3.3.3 Άλλα μοντέλα και σύγκριση αυτών με χρήση των δεδομένων των υπερκαινοφανών αστέρων

Εκτός της quintessence, στην βιβλιογραφία έχουν χρησιμοποιηθεί κατά καιρούς πολλά άλλα θεωρητικά μοντέλα τα οποία προσπαθούν να εξηγήσουν την επιταχυνόμενη διαστολή του σύμπαντος. Έτσι, είναι απαραίτητο να συγκριθούν με τα δεδομένα για να βρεθεί ποια από αυτά είναι σε συμφωνία με τις παρατηρήσεις. Μία μέθοδος είναι να συγκριθεί η τιμή του ελαχίστου του χ^2 . Προφανώς όσο μικρότερη, τόσο καλύτερη η συμφωνία του μοντέλου με τα δεδομένα, και επειδή η τιμή του χ_{min}^2 εξαρτάται από το μοντέλο, η τιμή του χ_{min}^2 μπορεί να μειωθεί πάρα πολύ για μεγάλο αριθμό παραμέτρων n . Συνεπώς, το χ_{min}^2 από μόνο του δεν αντικατοπτρίζει την αληθινή ποιότητα του μοντέλου, και αυτό γιατί εν γένει μοντέλα με μεγάλο αριθμό παραμέτρων δίνουν και καλύτερα αποτελέσματα. Έτσι, το χ_{min}^2 είναι πρακτικά χρήσιμο μόνο για την σύγκριση μοντέλων με τον ίδιο αριθμό παραμέτρων n . Ωστόσο, πρέπει να παρατηρηθεί ότι το χ_{min}^2 ανά βαθμό ελευθερίας έχει ασθενή εξάρτηση στον αριθμό των παραμέτρων και μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εναλλακτικός δείκτης σύγκρισης μοντέλων με



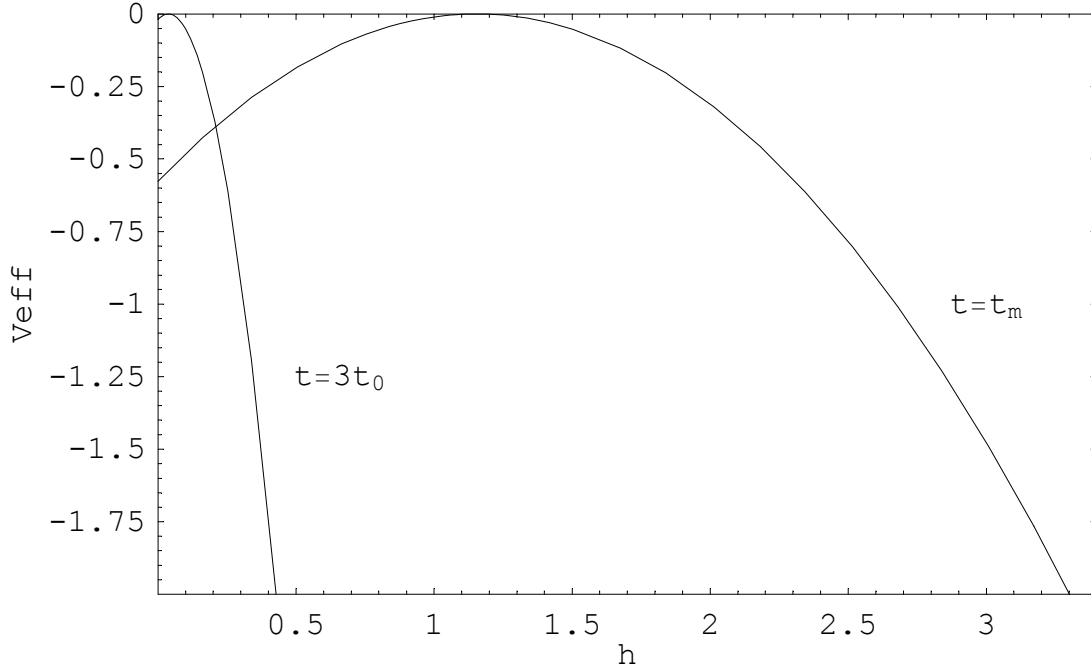
Σχήμα 3.10: Το ενεργό δυναμικό για ένα σύστημα της τάξης ενός σμήνους γαλαξιών με $w = -0.9$ τις χρονικές στιγμές $t = t_m$ και $t = 3t_0$.

διαφορετικούς αριθμούς παραμέτρων.

Έτσι προκύπτει η πολύ σημαντική ερώτηση, το πώς μπορούμε να συγκρίνουμε αποτελεσματικά μοντέλα με διαφορετικούς αριθμούς παραμέτρων; Αυτό μπορεί να γίνει με τον εξής τρόπο: Έστω δύο μοντέλα με διαφορετικούς αριθμούς παραμέτρων $H_1(z; a_1, \dots, a_n)$ και $H_2(z; b_1, \dots, b_m)$ και ότι για τις παραμέτρους a_1^L, \dots, a_n^L και b_1^L, \dots, b_m^L και τα δύο μοντέλα παίρνουν την ίδια μορφή, π.χ. του Λ CDM, δηλαδή:

$$\begin{aligned} H_1^2(z; a_1^L, \dots, a_n^L) &= H_2^2(z; b_1^L, \dots, b_m^L) = \\ &= H_L^2(z; \Omega_{0m}) \equiv H_0^2[\Omega_{0m}(1+z)^3 + (1 - \Omega_{0m})] \end{aligned} \quad (3.75)$$

Επίσης, έστω ότι τα χ_{1min}^2 και χ_{2min}^2 είναι οι ελάχιστες τιμές του χ^2 για κάθε μοντέλο και χ_L^2 είναι η τιμή του χ^2 που αντιστοιχεί στο Λ CDM. Εφόσον το H_L έχει μία και μοναδική παράμετρο (Ω_{0m}), η οποία μπορεί να βρεθεί από προηγούμενη πληροφορία (άλλες παρατηρήσεις), είναι αναμενόμενο το ότι τα χ_{1min}^2 και χ_{2min}^2 θα είναι μικρότερα από ότι το χ_L^2 . Ας ορίσουμε επίσης ότι $\Delta\chi_1^2 \equiv \chi_1^2 - \chi_{1min}^2$, $\Delta\chi_2^2 \equiv \chi_2^2 - \chi_{2min}^2$, $\Delta\chi_{1L}^2 \equiv \chi_L^2 - \chi_{1min}^2$ και $\Delta\chi_{2L}^2 \equiv \chi_L^2 - \chi_{2min}^2$. Έτσι, τα $\Delta\chi_1^2$ και $\Delta\chi_2^2$ είναι τυχαίες μεταβλητές που υπακούουν μια κατανομή πιθανότητας της μορφής χ^2 με n και m βαθμούς ελευθερίας αντίστοιχα. Συνεπώς,



Σχήμα 3.11: Το ενεργό δυναμικό για ένα δέσιμο σύστημα με επίπεδη γεωμετρία για $t = t_m$, $3t_0$ και $w = -1.2$.

η πιθανότητα ότι το $\Delta\chi_1^2$ δεν ξεπερνά την τιμή $\Delta\chi_{1L}^2$ είναι

$$\begin{aligned}
 P_{1<}(\Delta\chi_{1L}^2, n) &= \frac{1}{2\Gamma(n/2)} \int_0^{\Delta\chi_{1L}^2/2} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx = \\
 &= 1 - \frac{\Gamma(n/2, \Delta\chi_{1L}^2/2)}{\Gamma(n/2)}
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

και παρόμοια για το $\Delta\chi_2^2$. Στην εξίσωση (3.76) το $\Gamma(n/2, \Delta\chi_{1L}^2/2)$ είναι η ελλιπής συνάρτηση Γ (*Incomplete Γ Function*). Για $n = 1$ και $\Delta\chi_{1L}^2 = 1$ βρίσκουμε ότι $P_{1<}(1, 1) = 0.683$, το οποίο αντιστοιχεί στο 1σ όπως αναμένεται και από πολύ γνωστούς πίνακες [67].

Έτσι ο όρος $P_{1<}(\Delta\chi_{1L}^2, n)$ εκφράζει την πιθανότητα ότι δοθέντος του $H_1(z; a_1, \dots, a_n)$ μοντέλου με n παραμέτρους, οι αληθινές τιμές των παραμέτρων a_1, \dots, a_n δίνουν ένα χ_1^2 το οποίο είναι μικρότερο από την τιμή του χ_{1L}^2 που αντιστοιχεί στο Λ CDM και συνεπώς το Λ CDM δεν πραγματοποιείται στη φύση. Με άλλα λόγια, είναι το επίπεδο εμπιστοσύνης με το οποίο αποκλείεται το Λ CDM, από τη σκοπιά του μοντέλου $H_1(z; a_1, \dots, a_n)$. Είναι εύκολο κανείς να δει ότι το $P_{1<}(\Delta\chi_{1L}^2, n)$ αυξάνεται με το $\Delta\chi_{1L}^2$, αλλά μειώνεται με το n , δηλαδή ένα μοντέλο με πολλές παραμέτρους έχει μεγαλύτερη δυσκολία στο να αποκλείσει το Λ CDM, εκτός αν μπορεί να δώσει ένα πάρα πολύ μικρό χ_{1min}^2 (ή μεγάλο $\Delta\chi_{1L}^2$). Έτσι, το $P_{1<}(\Delta\chi_{1L}^2, n)$ παρέχει ένα ποσοτικό τρόπο μέτρησης της ποιότητας ενός δοθέντος μοντέλου $H_1(z; a_1, \dots, a_n)$, κάτι το οποίο επιτρέπει τη σύγκρισή του με ένα άλλο διαφορετικό μοντέλο

$H_2(z; b_1, \dots, b_m)$. Αυτό το τεστ έχει ονομαστεί 'p-test'[123] και θα το χρησιμοποιήσουμε για να συγκρίνουμε την ποιότητα διαφόρων θεωρητικών μοντέλων.

Ένας άλλος τρόπος για να συγκρίνουμε τα κοσμολογικά μοντέλα είναι με την χρήση της στατιστικού θεωρήματος *Bayes*. Συνοπτικά, αυτό γίνεται σχηματίζοντας τον παράγοντα Bayes[124] B_{ij} , που ορίζεται ως

$$B_{ij} \equiv \frac{L(M_i)}{L(M_j)} \quad (3.77)$$

και ο όρος $L(M_i)$ δηλώνει την πιθανότητα $p(D|M_i)$ (η οποία είναι η πιθανότητα για το μοντέλο M_i) να παρατηρηθούν τα δεδομένα D , εάν το μοντέλο M_i είναι το αληθινό. Γενικά, το $L(M_i)$ ορίζεται ως:

$$L(M_i) \equiv p(D|M_i) = \int da \cdot p(a|M_i) \mathcal{L}_i(a) \quad (3.78)$$

με μία ελεύθερη παράμετρο και όπου το $p(a|M_i)$ είναι η προγενέστερη πιθανότητα για την παράμετρο a . Επίσης, ο όρος $\mathcal{L}_i(a)$ είναι η πιθανότητα για την παράμετρο a στο μοντέλο και

$$\mathcal{L}_i(a) \equiv e^{-\chi^2(a)/2} \quad (3.79)$$

Στην περίπτωση που η παράμετρος a έχει σταθερή προγενέστερη πιθανότητα, δηλαδή δεν έχουμε προγενέστερη πληροφορία για το a πέρα από το ότι βρίσκεται στην περιοχή $[a, a+\Delta a]$ τότε $p(a|M_i) = \frac{1}{\Delta a}$ και

$$L(M_i) = \frac{1}{\Delta a} \int_a^{a+\Delta a} da e^{-\chi^2(a)/2} \quad (3.80)$$

Προφανώς, όλα αυτά μπορούν να γενικευτούν και για μοντέλα με περισσότερες από μία παραμέτρους.

Η ερμηνεία του παράγοντα Bayes B_{ij} είναι [124] ότι όταν $1 < B_{ij} < 3$ τότε υπάρχουν αποδείξεις εναντίον του M_j όταν συγκρίνεται με το M_i , αλλά δεν αξίζουν τίποτα παραπάνω από μία απλή αναφορά. Όταν $3 < B_{ij} < 20$ οι αποδείξεις εναντίον του M_j είναι σαφείς αλλά όχι ισχυρές. Για $20 < B_{ij} < 150$ οι αποδείξεις είναι ισχυρές και τέλος για $B_{ij} > 150$ είναι πολύ ισχυρές.

Στον Πίνακα 3.3 φαίνονται διάφορα αντιπροσωπευτικά μοντέλα τα οποία μελετήθηκαν στην αναφορά [123] με βάση το σετ δεδομένων *Gold04* από την ερευνητική ομάδα Riess et al. [50]. Η ομάδα αυτή συνέθεσε ένα κατάλογο από 157 SnIa με ερυθρή μετατόπιση z στο εύρος (0.01, 1.75) και οπτική απορρόφηση $A_V < 0.5$. Η κατάταξη στον Πίνακα 3.3 έγινε σύμφωνα με το p-test που φαίνεται στην τρίτη στήλη. Μία παρόμοια κατάταξη έγινε και με βάση το χ_{min}^2/dof (χ_{min}^2 ανά βαθμό ελευθερίας), το οποίο είναι αρκετά ευαίσθητο στον αριθμό των παραμέτρων και φαίνεται στην τελευταία στήλη. Ωστόσο, πρέπει να αναφερθεί ότι η κατάταξη σύμφωνα με το χ_{min}^2 (φαίνεται στην τέταρτη στήλη του Πίνακα) το οποίο δεν είναι ευαίσθητο στον αριθμό των παραμέτρων είναι κάπως διαφορετική. Τα αρχικά των μοντέλων της πρώτης στήλης αντιστοιχούν στα εξής: 'OA Var (1)' είναι ένα ταλαντευόμενο μοντέλο $H(z)$ με πλάτος μειούμενο με το χρόνο ως $(1+z)^3$. 'OA (2)' είναι ένα παρόμοιο μοντέλο αλλά με σταθερό πλάτος ταλάντωσης. 'LA (3)' είναι ένα μοντέλο το οποίο χρησιμοποιήθηκε

από τον Linder [125] (αλλά προτάθηκε νωρίτερα στην αναφορά [126]) και έχει καταστατική εξίσωση της μορφής

$$w(z) = w_0 + w_1 \frac{z}{1+z} \quad (3.81)$$

η οποία παρεμβάλλει μεταξύ δύο σταθερών τιμών $w(z=0)$ και $w(z \gg 1)$. Το ‘P2’ είναι ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού για το $H(z)$ και έχει μελετηθεί και στην αναφορά [127]. Το ‘Linear’ είναι ένα γραμμικό μοντέλο για την καταστατική εξίσωση

$$w(z) = w_0 + w_1 z \quad (3.82)$$

Επίσης, το ‘P3’ είναι ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού για το $H(z)$. Σε αυτή την ανάλυση παρουσιάζουμε το βαθύτερο ελάχιστο του χ^2 του μοντέλου ‘P3’, το οποίο παρουσιάζει ταλαντώσεις. Έχει βρεθεί και ένα άλλο ελάχιστο, όμως είναι παρόμοιο με αυτό του ‘P2’. Το ‘CA’ είναι ένα μοντέλο βασισμένο στη γενικευμένη κοσμολογία τύπου ‘Cardassian’ [128]. Περαιτέρω, το ‘Quiess’ αντιστοιχεί σε Σκοτεινή Ενέργεια με σταθερό w και τέλος το ‘MCG’ είναι μια τροποποιημένη μορφή [129] του μοντέλου Chaplygin [130] η οποία δίνει το ίδιο πρακτικά ελάχιστο με το Λ CDM. Τέλος, για λόγους σύγκρισης και πληρότητας έχει συμπεριληφθεί και το ‘Brane2’, το οποίο είναι ένα μοντέλο που προέρχεται από την κοσμολογική θεωρία των βρανών [131]. Το μοντέλο αυτό έχει δύο παραλλαγές οι οποίες αφορούν την αλλαγή του προσήμου που εμφανίζεται στο $H^2(z)$ αλλά δεν έχουν κάποια σημαντική διαφορά μεταξύ τους και είναι και τα δύο σχεδόν ολόιδια με το Λ CDM.

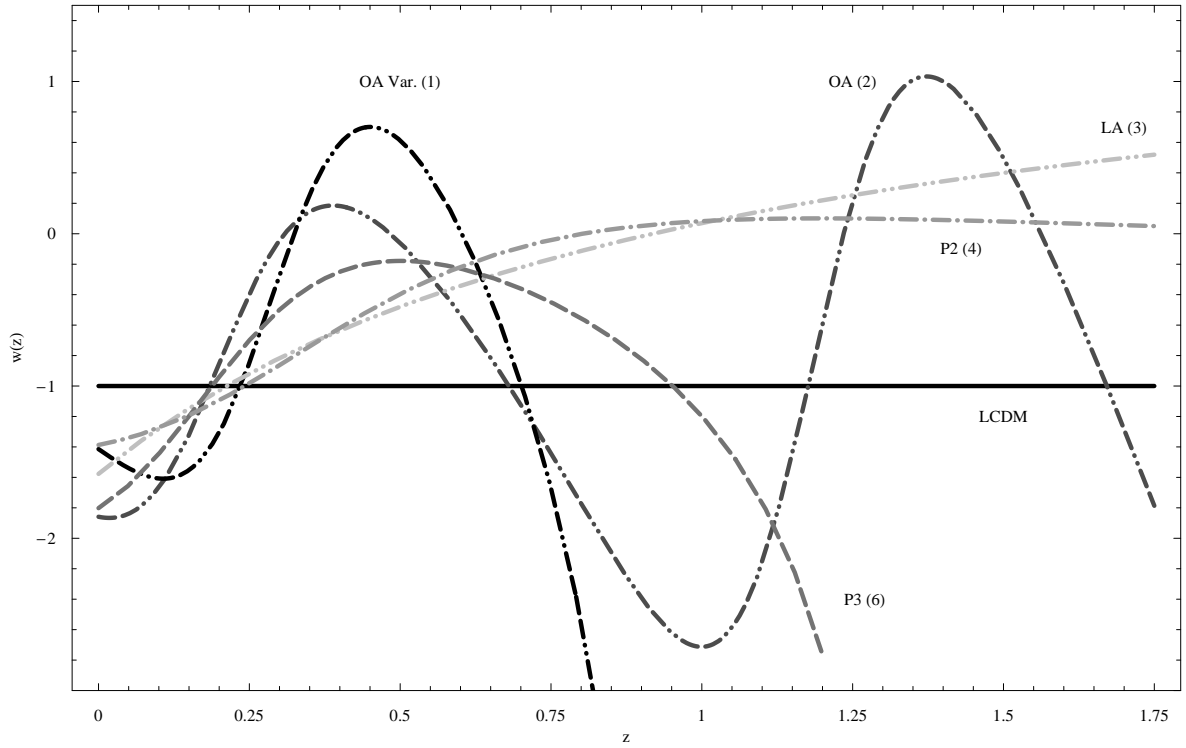
Για όλες τις περιπτώσεις έχουμε υποθέσει επιπεδότητα και $\Omega_{0m} = 0.3$. Για $\Omega_{0m} = 0.25$ δεν έχουμε σημαντικές αλλαγές στα αποτελέσματα του Πίνακα 3.3. Στον Πίνακα 3.3 παρατηρούμε ότι:

- Με βάση τα δεδομένα αυτά, το μοντέλο το οποίο είναι το πλέον συμβατό με αυτά είναι το OA Var στο οποίο το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται σύμφωνα με την τρίτη δύναμη του παράγοντα κλίμακας. Αυτού του τύπου οι ταλαντώσεις μπορεί να οφείλονται σε ένα ταλαντευόμενο βαθμωτό πεδίο όπως π.χ. το πεδίο radion [132],[133]. Έτσι, σύμφωνα με αυτό το μοντέλο το Λ CDM αποκλείεται με επίπεδο εμπιστοσύνης 85%. Προφανώς, όμως, αυτό το επίπεδο εμπιστοσύνης δεν είναι αρκετό για να αποκλειστεί πλήρως το Λ CDM, αλλά μπορεί να δώσει ενδείξεις για καλύτερα μοντέλα τα οποία θα είναι πιο συμβατά με τα δεδομένα.
- Το μοντέλο P3 με το κυβικό πολυώνυμο, το οποίο ταιριάζει σχετικά καλά με τα δεδομένα καθώς έχει το τρίτο καλύτερο χ_{min}^2 , επίσης παρουσιάζει ταλαντωτική συμπεριφορά του $H(z)$, παρόλο που το μοντέλο καθαυτό δεν έχει περιοδικές συναρτήσεις.
- Διάφορα μοντέλα τα οποία έχουν θεωρητική βάση, όπως είναι τα μοντέλα Chaplygin, βρανών και της Cardassian κοσμολογίας έχουν οριακά καλύτερα ελάχιστα από το Λ CDM, αλλά συνολικά δεν ευνοούνται από τα δεδομένα λόγω του μεγαλύτερού τους αριθμού παραμέτρων σε σχέση με το Λ CDM.
- Ένα πολύ σημαντικό συμπέρασμα είναι ότι μοντέλα τα οποία έχουν καταστατική εξίσωση $w(z=0) < -1$ και επιτρέπουν τη διάβαση της γραμμής $w = -1$ είναι τα πιο συμβατά με τα δεδομένα.

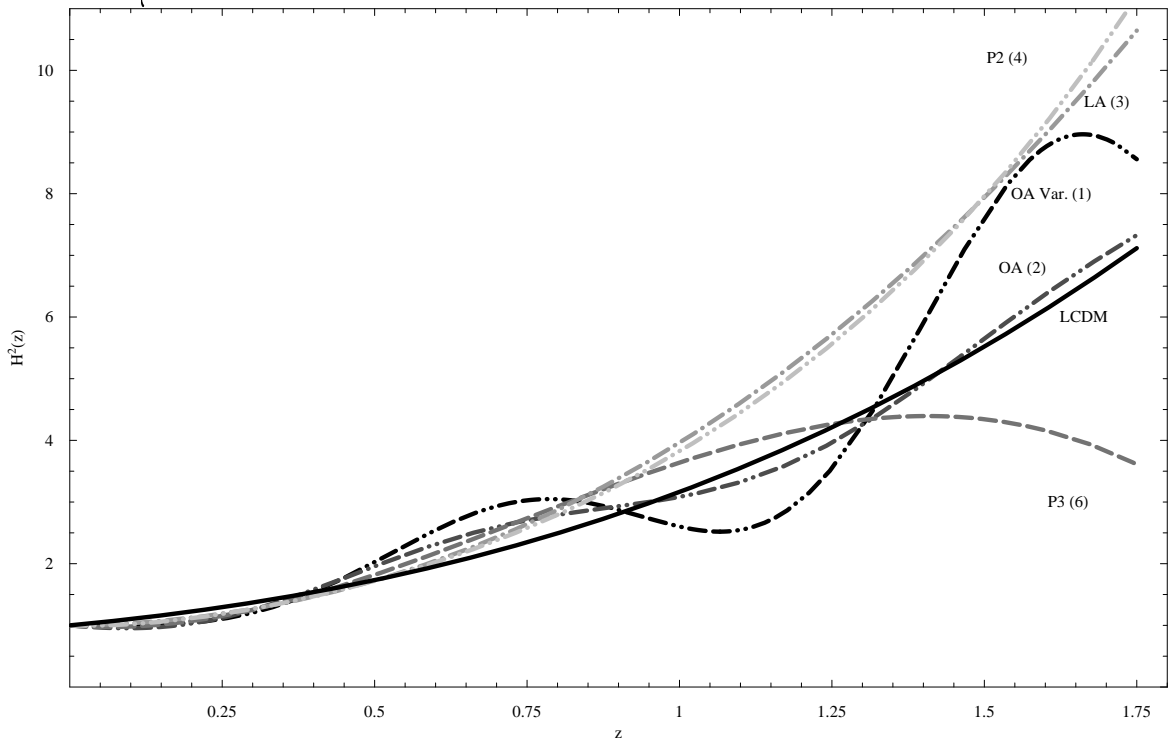
Πίνακας 3.3: Σύγκριση των μοντέλων που εμφανίζονται στην βιβλιογραφία. Σε όλες τις περιπτώσεις έχουμε θεωρήσει επιπεδότητα και $\Omega_{0m} = 0.3$.

Μοντέλο	$H^2(z)$, ($\Omega_{0m} = 0.3$)	p-test	χ^2_{\min}	Παράμετροι	$\frac{\chi^2_{\min}}{dof}$
OA Var. (1)	$H^2(z) = H_0^2 [\Omega_{0m}(1+z)^3 + 1 - \Omega_{0m} + a_1(1+z)^3[\cos(a_2z + a_3\pi) - \cos(a_3\pi)]]$	0.85	171.733	$a_1 = 0.13 \pm 0.07$ $a_2 = 6.83 \pm 1.61$ $a_3 = 4.57 \pm 0.07$	1.115
OA (2)	$H^2(z) = H_0^2 [\Omega_{0m}(1+z)^3 + a_1 \cos(a_2z + a_3\pi) + (1 - a_1 \cos(a_3\pi) - \Omega_{0m})]$	0.81	172.368	$a_1 = -0.30 \pm 0.17$, $a_2 = 6.34 \pm 3.19$ $a_3 = -0.37 \pm 0.14$	1.119
LA (3)	$H^2(z) = H_0^2[\Omega_{0m}(1+z)^3 + (1 - \Omega_{0m})(1+z)^{3(1+w_0+w_1)}e^{3w_1[1/(1+z)-1]}$	0.79	173.928	$w_0 = -1.58 \pm 0.33$ $w_1 = 3.29 \pm 1.76$	1.122
P2 (4)	$H^2(z) = H_0^2\{\Omega_{0m}(1+z)^3 + a_1(1+z) + a_2(1+z)^2 + (1 - \Omega_{0m} - a_1 - a_2)\}$	0.78	174.207	$a_1 = -4.16 \pm 2.53$ $a_2 = 1.67 \pm 1.03$	1.124
Linear (5)	$H^2(z) = H_0^2[\Omega_{0m}(1+z)^3 + (1 - \Omega_{0m})(1+z)^{3(1+w_0-w_1)}e^{3w_1z}]$	0.75	174.365	$w_0 = -1.40 \pm 0.25$ $w_1 = 1.66 \pm 0.92$	1.125
P3 (6)	$H^2(z) = H_0^2[\Omega_{0m}(1+z)^3 + a_1(1+z) + a_2(1+z)^2 + a_3(1+z)^3 + (1 - \Omega_{0m} - a_1 - a_2 - a_3)]$	0.74	173.155	$a_1 = -21.79 \pm 17.92$ $a_2 = 14.75 \pm 13.07$ $a_3 = -3.13 \pm 3.07$	1.124
CA (7)	$H^2(z) = H_0^2[\Omega_{0m}(1+z)^3 + \Omega_{0m}(1+z)^3((1 + (\Omega_{0m}^{-q} - 1)(1+z)^{3(n-q)})^{\frac{1}{q}} - 1)]$	0.50	175.758	$q = 0.0058 \pm 0.0014$ $n = -119 \pm 40$	1.134
Quiess (8)	$H^2(z) = H_0^2[\Omega_{0m}(1+z)^3 + (1 - \Omega_{0m})(1+z)^{3(1+w)}]$	0.15	177.091	$w = -1.02 \pm 0.11$	1.135
GCG (9)	$H^2(z) = H_0^2[\Omega_{0m}(1+z)^3 + (1 - \Omega_{0m})(a_1 + (1 - a_1)(1+z)^3)^w]$	0.031	177.064	$a_1 = 0.9992^{+0.0008}_{-0.0060}$ $w = 18.13 \pm 4.95$	1.142
Brane 2 (10)	$H^2(z) = H_0^2[\Omega_{0m}(1+z)^3 - \sqrt{a_1 + a_2(1+z)^3} + (1 - \Omega_{0m} + \sqrt{a_1 + a_2})]$	0.027	177.071	$a_1 = 29.08 \pm 7.30$ $a_2 = -0.097 \pm 0.459$	1.142
Λ CDM	$H^2(z) = H_0^2[\Omega_{0m}(1+z)^3 + 1 - \Omega_{0m}]$	-	177.072	$\Omega_{0m} = 0.31 \pm 0.04$	1.135

Στον Πίνακα 3.4 εξετάζουμε τα ίδια μοντέλα με πριν, αλλά αυτή τη φορά έχουμε περιθωριοποιήσει (marginalization) την παράμετρο Ω_m του χ^2 στην περιοχή $\Omega_m \in [0.20, 0.34]$. Επίσης, στον Πίνακα 3.4 φαίνεται και η παράμετρος Bayes για κάθε μοντέλο σε σχέση με το Λ CDM, υπολογισμένη με βάση τις τεχνικές που αναφέραμε πιο πριν και υποθέτοντας ομοιόμορφη κατανομή πιθανότητας των παραμέτρων μέσα στο 1σ εύρος τους. Επίσης, όπως αναμένεται λόγω του marginalization της παραμέτρου Ω_m , τα σφάλματα στις καλύτερες παραμέτρους στο ελάχιστο έχουν αυξηθεί. Για παράδειγμα, για το P2 μοντέλο και για $\Omega_m = 0.3$ είχε βρεθεί $a_1 = -4.16 \pm 2.53$ και $a_2 = 1.67 \pm 1.03$ πριν το marginalization ενώ μετά $a_1 = -4.45 \pm 2.81$ και $a_2 = 1.87 \pm 1.28$. Παρομοίως, για το μοντέλο LA πριν είχε βρεθεί $w_0 = -1.58 \pm 0.33$ και $w_1 = 3.29 \pm 1.76$ ενώ μετά $w_0 = -1.44 \pm 0.44$ και $w_1 = 3.09 \pm 1.87$. Στα σχήματα φαίνονται οι συναρτήσεις $w(z)$ και $H(z)$ για 6 αντιπροσωπευτικά μοντέλα του Πίνακα 3.3.



Σχήμα 3.12: Η γραφική παράσταση της καταστατικής εξίσωσης $w(z)$ για μερικά αντιπροσωπευτικά μοντέλα.



Σχήμα 3.13: Η γραφική παράσταση της παραμέτρου Hubble $H(z)$ για μερικά αντιπροσωπευτικά μοντέλα.

Πίνακας 3.4: Όπως και στον προηγούμενο Πίνακα, αλλά τώρα η παράμετρος Ω_m του χ^2 έχει περιθωριοποιηθεί στο εύρος $\in [0.20, 0.34]$. Επίσης, περιέχεται και ο παράγοντας Bayes B_{ij} , για κάθε μοντέλο σε σχέση με το Λ CDM. Ο παράγοντας Bayes δεν βρέθηκε για τα μοντέλα Brane 2 και P2, επειδή τα απαιτούμενα ολοκληρώματα δεν είναι καλά ορισμένα σε όλο τον παραμετρικό χώρο (το $H(z)$ γίνεται μιγαδικό για μερικές τιμές των παραμέτρων).

Μοντέλο	$H^2(z)$	B_{ij}	χ^2_{\min}	χ^2_{\min}/dof
OA Var. (1)	$H^2(z) = H_0^2 [\Omega_{0m}(1+z)^3 + 1 - \Omega_{0m} + a_1(1+z)^3[\cos(a_2z + a_3\pi) - \cos(a_3\pi)]]$	9.03	176.442	1.146
OA (2)	$H^2(z) = H_0^2 [\Omega_{0m}(1+z)^3 + a_1 \cos(a_2z + a_3\pi) + (1 - a_1 \cos(a_3\pi) - \Omega_{0m})]$	2.56	177.029	1.150
LA (3)	$H^2(z) = H_0^2[\Omega_{0m}(1+z)^3 + (1 - \Omega_{0m})(1+z)^{3(1+w_0+w_1)}e^{3w_1[1/(1+z)-1]}]$	2.63	178.676	1.153
P2 (4)	$H^2(z) = H_0^2\{\Omega_{0m}(1+z)^3 + a_1(1+z) + a_2(1+z)^2 + (1 - \Omega_{0m} - a_1 - a_2)\}$	-	178.874	1.154
Linear (5)	$H^2(z) = H_0^2[\Omega_{0m}(1+z)^3 + (1 - \Omega_{0m})(1+z)^{3(1+w_0-w_1)}e^{3w_1z}]$	2.50	179.173	1.156
P3 (6)	$H^2(z) = H_0^2[\Omega_{0m}(1+z)^3 + a_1(1+z) + a_2(1+z)^2 + a_3(1+z)^3 + (1 - \Omega_{0m} - a_1 - a_2 - a_3)]$	3.68	177.859	1.155
CA (7)	$H^2(z) = H_0^2[\Omega_{0m}(1+z)^3 + \Omega_{0m}(1+z)^3((1 + (\Omega_{0m}^{-q} - 1)(1+z)^{3(n-q)})^{\frac{1}{q}} - 1)]$	0.78	182.308	1.176
Quiess (8)	$H^2(z) = H_0^2[\Omega_{0m}(1+z)^3 + (1 - \Omega_{0m})(1+z)^{3(1+w)}]$	0.98	181.614	1.164
GCG (9)	$H^2(z) = H_0^2[\Omega_{0m}(1+z)^3 + (1 - \Omega_{0m})(a_1 + (1 - a_1)(1+z)^3)^w]$	1.26	181.394	1.177
Brane 2 (10)	$H^2(z) = H_0^2[\Omega_{0m}(1+z)^3 - \sqrt{a_1 + a_2(1+z)^3} + (1 - \Omega_{0m} + \sqrt{a_1 + a_2})]$	-	182.326	1.176
Λ CDM	$H^2(z) = H_0^2[\Omega_{0m}(1+z)^3 + 1 - \Omega_{0m}]$	1	182.326	1.161

3.4 Το πρόβλημα της PDL

3.4.1 Θεωρία και πιθανές λύσεις στα πλαίσια της Γενικής Σχετικότητας

Η απλούστερη ομάδα μοντέλων τα οποία έχουν στέρεη θεωρητική βάση, μπορούν να γενικεύσουν την κοσμολογική σταθερά και να εξηγήσουν σε ικανοποιητικό βαθμό την επιταχυνόμενη διαστολή του σύμπαντος είναι τα πεδία quintessence, η δυναμική των οποίων καθορίζεται πλήρως από το δυναμικό $U(\phi)$ και τον κινητικό τους όρο $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$. Είναι εύκολο όμως ναδειχθεί ότι η ομάδα αυτή μοντέλων δεν μπορεί να αναπαράγει μία καταστατική εξίσωση $w(z)$, η οποία να διασχίζει την γραμμή $w = -1$ (PDL) για οιοδήποτε δυναμικό $U(\phi)$. Όντως, όπως έχουμε δει η καταστατική εξίσωση w , για αυτά τα μοντέλα, έχει τη μορφή

$$w(z) = \frac{p_X}{\rho_X} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - U(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + U(\phi)} \quad (3.83)$$

η οποία τείνει στην τιμή $w = -1$ στο όριο που ο κινητικός όρος είναι αμελητέος, αλλά δεν διασχίζει την (PDL) εφόσον $\dot{\phi}^2 > 0$ για κάθε πρόσημο του $U(\phi)$. Το αποτέλεσμα αυτό έχει γενικευθεί από την αναφορά [134] στην οποία αποδείχθηκε ότι κάθε ελάχιστα συζευγμένο (minimally coupled) βαθμωτό πεδίο με ένα γενικευμένο κινητικό όρο δεν μπορεί να διασχίσει την PDL μέσω μιας σταθερής τροχιάς. Ωστόσο, στις αναφορές [135],[136] αναφέρεται μια ενδιαφέρουσα εξαίρεση, όμως η οποία περιέχει μια αυθαίρετη αλλαγή του προσήμου του κινητικού όρου.

Εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε ένα θεώρημα ‘αδυνατότητας’ (‘no go’ theorem) [137],[138] για ένα γενικό ιδανικό βαροτροπικό ρευστό (barotropic fluid) με διατηρητέο τανυστή ενέργειας ορμής του οποίου η καταστατική εξίσωση είναι της μορφής $p = p(\rho)$. Από τη διατήρηση της ενέργειας έχουμε ότι

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}(\rho + p(\rho)) \quad (3.84)$$

Από την εξίσωση αυτή προκύπτει ότι $\dot{\rho} \rightarrow 0$ καθώς το $p(\rho) \rightarrow -\rho$ ή καθώς $w = \frac{p}{\rho} \rightarrow -1$. Παραγωγίζοντας την εξίσωση (3.84) ως προς το χρόνο, εύκολα βλέπουμε ότι $\ddot{\rho} \rightarrow 0$ καθώς η $w \rightarrow -1$ και παρόμοια για όλες τις χρονικές παραγώγους της πυκνότητας ρ δηλαδή

$$\lim_{w \rightarrow -1} \frac{d^n \rho(t)}{dt^n} = 0 \quad (3.85)$$

για κάθε n . Συνεπώς, κάθε ρευστό με καταστατική εξίσωση της μορφής $p = p(\rho)$ δεν μπορεί να διασχίσει την PDL. Αντίθετα, τείνει ασυμπτωτικά προς μία σταθερή πυκνότητα ενέργειας ρ , μιμούμενο έτσι την κοσμολογική σταθερά. Θα πρέπει να τονίσουμε βέβαια ότι πολλά μοντέλα με βαθμωτά πεδία δεν συμπεριφέρονται ως βαροτροπικά ρευστά ($p = p(\rho)$) λόγω της εξάρτησης της πίεσης p και της πυκνότητας ρ στις δύο ανεξάρτητες μεταβλητές

ϕ και ϕ και συνεπώς η απόδειξη αυτή δεν είναι ισοδύναμη με την απόδειξη ότι ένα ελάχιστο συζευγμένο βαθμωτό πεδίο δεν μπορεί να διασχίσει την PDL.

Εφόσον αυτές οι θεωρητικές μέθοδοι δεν μπορούν να αναπαράγουν την διάσχιση της PDL, πρέπει να δούμε πιο πολύπλοκες μεθόδους οι οποίες μπορούν να το πετύχουν. Υπάρχουν δύο ομάδες τέτοιων μεθόδων: Είτε αυτές που θεωρούν μοντέλα Σκοτεινής Ενέργειας με πολλαπλά ρευστά όπως π.χ. κάνουν οι αναφορές [138],[139] και [140] (πρέπει ωστόσο να αναφερθεί ότι μοντέλα με ανώτερης τάξης παραγωγούς και πολλά μη-βαροτροπικά ρευστά είναι ισοδύναμα με μοντέλα με πολλαπλά ρευστά) με τουλάχιστον ένα phantom βαθμό ελευθερίας (δηλαδή ένα βαθμωτό πεδίο με αρνητικό κινητικό όρο), είτε αυτές που θεωρούν επεκτάσεις της Γενικής Σχετικότητας και τις οποίες θα μελετήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Τα phantom βαθμωτά πεδία της πρώτης ομάδας μεθόδων έχουν σοβαρά προβλήματα με τις καταστροφικές υπεριώδεις αστάθειες, αφού η ενέργειά τους δεν είναι από κάτω φραγμένη και επιτρέπει την αποσύνθεση του κενού μέσω της παραγωγής αληθινών σωματιδίων υψηλής ενέργειας και φαντασμάτων (ghosts) αρνητικής ενέργειας [141],[142],[143],[144]. Από την άλλη, όπως θα δούμε και στο επόμενο κεφάλαιο, οι επεκτάσεις της Γενικής Σχετικότητας περιορίζονται πάρα πολύ από τα τοπικά τεστ του ηλιακού συστήματος και από τις κοσμολογικές παρατηρήσεις αλλά έχουν πιο στέρεη θεωρητική βάση.

Για να επεξηγήσουμε τη μέθοδο με τα πολλαπλά ρευστά της Σκοτεινής Ενέργειας, τα οποία μπορούν να διασχίσουν την PDL με βαθμωτά πεδία, ας θεωρήσουμε ένα σετ από δύο συζευγμένα πραγματικά βαθμωτά πεδία, ένα τύπου quintessence ϕ_1 και ένα τύπου phantom ϕ_2 (το μοντέλο αυτό έχει αναφερθεί στη βιβλιογραφία ως quintom dark energy [145]) με Λαγκρανζιανή

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)^2 - \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)^2 - U(\phi_1, \phi_2) \quad (3.86)$$

Η ενεργός πίεση και η πυκνότητα ενέργειας για ένα ομογενές σύστημα είναι

$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi}_1^2 - \frac{1}{2}\dot{\phi}_2^2 - U(\phi_1, \phi_2) \quad (3.87)$$

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}_1^2 - \frac{1}{2}\dot{\phi}_2^2 + U(\phi_1, \phi_2) \quad (3.88)$$

τα οποία οδηγούν στην καταστατική εξίσωση

$$w = \frac{\dot{\phi}_1^2 - \dot{\phi}_2^2 - 2U(\phi_1, \phi_2)}{\dot{\phi}_1^2 - \dot{\phi}_2^2 + 2U(\phi_1, \phi_2)} \quad (3.89)$$

η οποία διασχίζει την PDL όταν ο όρος $\dot{\phi}_1^2 - \dot{\phi}_2^2$ αλλάζει πρόσημο. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί πιο εύκολα με τα κατάλληλα δυναμικά και τις κατάλληλες αρχικές συνθήκες.

Η ίδια μέθοδος μπορεί να επεξηγηθεί θεωρώντας ένα μείγμα από πολλαπλά ιδανικά ρευστά [139],[146],[140] αντί για βαθμωτά πεδία. Ας θεωρήσουμε ένα μείγμα από δύο μη-αλληλεπιδρώντα ρευστά (ρ_1, p_1, w_1) και (ρ_2, p_2, w_2) , τα οποία διατηρούν ξεχωριστά την ενέργειά τους, και τα οποία έχουν σταθερές καταστατικές εξισώσεις w_1, w_2 με $w_1 > -1$,

$w_2 < -1$. Τότε η καταστατική εξίσωση του μείγματος είναι [138]

$$w = \frac{p}{\rho} = \frac{p_1 + p_2}{\rho_1 + \rho_2} = \frac{w_1 \rho_{01} \alpha^{-3(1+w_1)} + w_2 \rho_{02} \alpha^{-3(1+w_2)}}{\rho_{01} \alpha^{-3(1+w_1)} + \rho_{02} \alpha^{-3(1+w_2)}} \quad (3.90)$$

το οποίο παρεμβάλει μεταξύ των τιμών $w = w_1$ (για $\alpha \ll 1$) και $w = w_2$ (για $\alpha \gg 1$) διασχίζοντας έτσι την γραμμή $w = -1$.

3.4.2 Χρήση των παρατηρησιακών δεδομένων - Αποτελέσματα

Όπως είδαμε και στην προηγούμενη ενότητα η μετάβαση της καταστατικής εξίσωσης από την περιοχή $w > -1$ στην περιοχή $w < -1$ (ή το αντίθετο) δεν μπορεί να γίνει από βαθμωτά πεδία ελάχιστης σύζευξης ή βαροτροπικά ρευστά. Συνεπώς είναι ιδιαίτερα σημαντικό να απαντήσουμε τις ακόλουθες ερωτήσεις:

- Υποστηρίζουν τα τρέχοντα κοσμολογικά δεδομένα την διάσχιση της PDL;
- Ποιές είναι οι βέλτιστες παρατηρησιακές στρατηγικές οι οποίες θα επιβεβαιώσουν ή θα απορρίψουν την διάσχιση της PDL με βάση μελλοντικές παρατηρήσεις;

Ο κύριος στόχος αυτής της ενότητας είναι να απαντηθεί η πρώτη ερώτηση χρησιμοποιώντας ένα μεγάλο δείγμα από κοσμολογικά δεδομένα. Προηγούμενες μελέτες [69] έχουν παρουσιάσει ενδείξεις ότι τα δεδομένα των υπερκαινοφανών αστερών δεν παρουσιάζουν μια κοινή τάση όσον αφορά τη διάσχιση της PDL. Συγκεκριμένα, πολλές μελέτες που έγιναν με τα δεδομένα τύπου Gold έχουν δείξει ότι ένα μοντέλο με $w(z)$ το οποίο διασχίζει την PDL προτιμάται από τα δεδομένα σε σχέση με το Λ CDM με σχεδόν 2σ [123],[127],[147]. Αντίθετα, τα δεδομένα SNLS δεν δείχνουν μια τέτοια τάση [70],[148],[149],[150] και μάλιστα οι τιμές των παραμέτρων του Λ CDM είναι εντός του 1σ από τις τιμές του καλύτερου ελαχίστου. Αυτό θέτει το ερώτημα αν αυτή η τάση φαίνεται και από άλλα δεδομένα. Αυτό το ερώτημα θα το απαντήσουμε χρησιμοποιώντας εκτός από τα 2 σετ δεδομένων των υπερκαινοφανών αστερών τύπου Ia : το Gold σετ [50] με 157 σημεία στο εύρος $0 < z < 1.75$ και το SNLS σετ με 115 σημεία στο εύρος $0 < z < 1$, και τα ακόλουθα κοσμολογικά δεδομένα:

- Την παράμετρο μετατόπισης R (εξίσωση (2.67)).
- Τις ακουστικές ταλαντώσεις των βαρυονίων στην κλίμακα $z_{BAO} = 0.35$, όπως βρέθηκε από την έρευνα SDSS [53] (εξίσωση (2.77)).
- Το ποσοστό της μάζας των βαρυονικών αερίων των σμηνών γαλαξιών $f_{gas} = \frac{M_{gas}}{M_{tot}}$, όπως φαίνεται από τις παρατηρήσεις των ακτίνων X [55],[54], το οποίο εξαρτάται ως $f_{gas} \sim d_A^{3/2}$, από την απόσταση γωνιακής διαμέτρου d_A ως το σμήνος.
- Την υπερπυκνότητα των διαταραχών της ύλης $\delta(\alpha)$ (εξίσωση (2.98)) όπως μετρήθηκε από την έρευνα ερυθρής μετατόπισης γαλαξιών 2dF [102],[87], ο οποίος μπορεί να περιορίσει την $H(z)$ χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.99) στα πλαίσια της Γενικής Σχετικότητας.

Με τα παραπάνω κοσμολογικά δεδομένα μπορούμε να προσδιορίσουμε τη βέλτιστη καταστατική εξίσωση $w(z)$ μαζί με τα 1σ σφάλματα, με βάση το μοντέλο CPL [126],[151]

$$w(\alpha) = w_0 + w_1(1 - \alpha) \quad (3.91)$$

$$w(z) = w_0 + w_1 \frac{z}{1+z} \quad (3.92)$$

Αυτό θα το κάνουμε και για τα δύο σετ δεδομένων των υπερκαινοφανών αστέρων τύπου Gold και SNLS, ώστε να εξακριβώσουμε ποια από τις δύο τάσεις για την διάσχιση της PDL προτιμάται από τα δεδομένα. Η σύγκριση αυτή θα γίνει για τιμές του Ω_{0m} στην περιοχή $0.2 - 0.3$.

Για να αναγνωρίσουμε πιο εύκολα ποια τάση υπάρχει στα κοσμολογικά δεδομένα όσον αφορά την εξέλιξη της Σκοτεινής Ενέργειας μπορούμε να χωρίσουμε τα δεδομένα σε τρεις κατηγορίες:

1. Τα δεδομένα των υπερκαινοφανών αστέρων Gold
2. Τα δεδομένα των υπερκαινοφανών αστέρων SNLS
3. και τέλος τα άλλα δεδομένα ή Other Dark Energy Probes (ODEP) που περιλαμβάνουν τα δεδομένα CMB, BAO, Cluster Baryon Fraction (CBF) και το Γραμμικό Ρυθμό Διαταραχών της ύλης ή Perturbations Growth Rate (PGR) στην ερυθρή μετατόπιση $z = 0.15$

Οι αντίστοιχοι όροι του χ^2 που πρέπει να ελαχιστοποιηθούν σε κάθε κατηγορία είναι

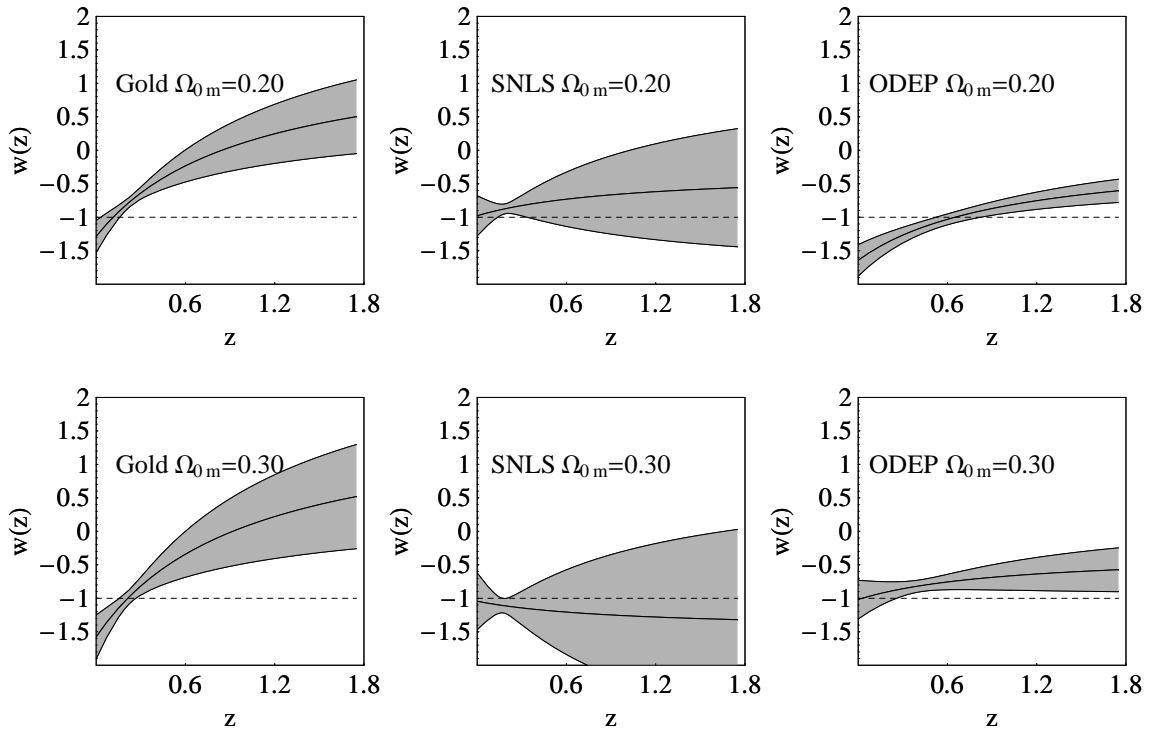
- $\chi_{Gold}^2(\Omega_{0m}, w_0, w_1)$ (εξίσωση (2.19))
- $\chi_{SNLS}^2(\Omega_{0m}, w_0, w_1)$ (εξίσωση (2.19))
- Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2.71), (2.78), (2.93) και (2.128) (για το σημείο με $z = 0.15$) έχουμε

$$\chi_{ODEP}^2 \equiv \chi_{CMB}^2 + \chi_{BAO}^2 + \chi_{CBF}^2 + \chi_{PGR}^2 \quad (3.93)$$

Για να αναγνωρίσουμε την εξάρτηση των αποτελεσμάτων στην τιμή του Ω_{0m} θεωρήσαμε δύο περιπτώσεις η καθεμιά με $\Omega_{0m} = 0.2$ και $\Omega_{0m} = 0.3$ αντίστοιχα[152]. Το εύρος αυτό περιλαμβάνει την τιμή του Ω_{0m} με βάση τις έρευνες WMAP και SDSS η οποία είναι [97] $\Omega_{0m} = 0.24 \pm 0.02$.

Τα σφάλματα της συνάρτησης $w(z)$ βρέθηκαν με τη χρήση του πίνακα συσχέτισης (covariance matrix) (για παράδειγμα [67],[153]) και τα σφάλματα στην καταστατική εξίσωση $w(z; p_i)$ δίνονται από τη σχέση

$$\sigma_w^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial w}{\partial p_i} \right)^2 C_{ii} + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \left(\frac{\partial w}{\partial p_i} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial p_j} \right) C_{ij} \quad (3.94)$$

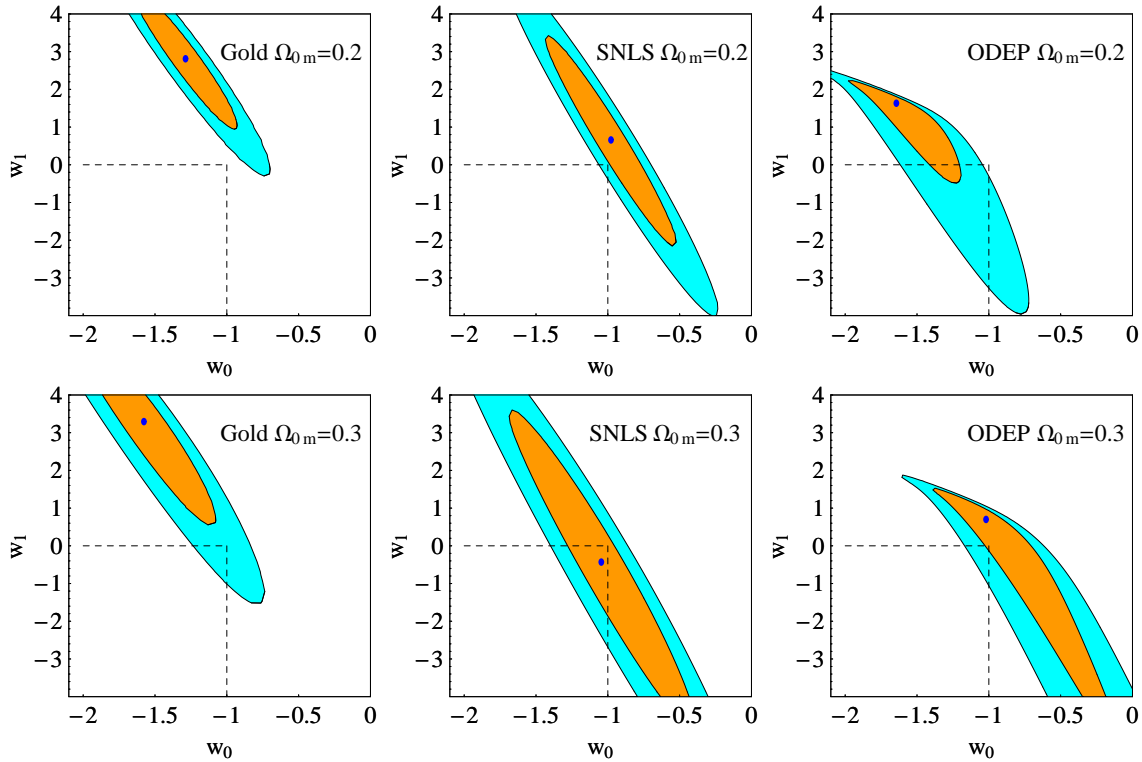


Σχήμα 3.14: Οι καλύτερες συναρτήσεις $w(z)$ για κάθε κατηγορία δεδομένων για $\Omega_{0m} = 0.2$ και $\Omega_{0m} = 0.3$ μαζί με τα 1σ σφάλματα (γκρίζα περιοχή). Οι κατηγορίες είναι: Gold σετ (στήλη 1), SNLS (στήλη 2) και τα άλλα σετ δεδομένων ODEP (στήλη 3).

όπου p_i είναι οι κοσμολογικές παράμετροι και C_{ij} είναι ο πίνακας συσχέτισης (*correlation matrix*) [153].

Οι συναρτήσεις $w(z)$ για την κάθε κατηγορία δεδομένων φαίνονται στο σχήμα 3.14 και για τις δύο τιμές $\Omega_{0m} = 0.2$ και $\Omega_{0m} = 0.3$. Οι αντίστοιχες ελλείψεις εμπιστοσύνης του χ^2 στον παραμετρικό χώρο $w_0 - w_1$ φαίνονται στο σχήμα 3.15. Με βάση αυτά τα δύο σχήματα μπορούμε να κάνουμε τα ακόλουθα σχόλια [152]:

- Το σετ δεδομένων Gold δείχνει μια προτίμηση για δυναμικά εξελισσόμενη Σκοτεινή Ενέργεια που διασχίζει την PDL στο σημείο $z \simeq 0.2$, σε σχέση με την κοσμολογική σταθερά, ενώ αυτό δεν γίνεται για το SNLS.
- Τα σετ δεδομένων, εκτός των υπερκαινοφανών αστέρων, δείχνουν μια προτίμηση για Σκοτεινή Ενέργεια που διασχίζει την PDL για μικρές τιμές του Ω_{0m} ($\Omega_{0m} \lesssim 0.25$), ενώ για $\Omega_{0m} \simeq 0.3$ η τάση αυτή είναι σημαντικά μειωμένη.
- Εκτός από τους υπερκαινοφανείς αστέρες, τα δεδομένα που ανιχνεύουν καλύτερα την Σκοτεινή Ενέργεια είναι η παράμετρος μετατόπισης και οι ακουστικές ταλαντώσεις των βαρυονίων.



Σχήμα 3.15: Οι ελλείψεις 68% και 95% εμπιστοσύνης του χ^2 στον παραμετρικό χώρο $w_0 - w_1$ για κάθε κατηγορία δεδομένων για $\Omega_{0m} = 0.2$ και $\Omega_{0m} = 0.3$. Ας παρατηρηθεί ότι για το SNLS το Λ CDM είναι εντός της 1σ περιοχής.

Το τελευταίο αυτό σημείο προκύπτει από το γεγονός ότι αν σχεδιάσουμε την τρίτη στήλη των σχημάτων 3.14 και 3.15, χρησιμοποιώντας μόνο την παράμετρο μετατόπισης και τις ακουστικές ταλαντώσεις των βαρυονίων, τότε αυτές θα είναι ταυτόσημες με αυτές των σχημάτων 3.14 και 3.15.

Ένα πολύ σημαντικό θέμα το οποίο πρέπει να απαντήσουμε σε αυτό το σημείο είναι το πιθανό σφάλμα που μπορεί να εισάγεται από την χρήση μιας συγκεκριμένης παραμετροποίησης του $w(z)$ για να βρεθεί η κοσμολογική εξέλιξη του σύμπαντος. Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι οι καλύτερες συναρτήσεις που ταιριάζουν στα δεδομένα μπορεί να αλλάζουν πολύ σημαντικά ανάμεσα σε διάφορα μοντέλα. Ωστόσο, η συγκεκριμένη ιδιότητα της διάσχισης της PDL έχει αποδειχθεί ότι είναι ένα σταθερό χαρακτηριστικό στα πλαίσια του Gold σετ με την προϋπόθεση ότι το επιτρέπει το εκάστοτε μοντέλο. Αυτό είχε δείχθει στην αναφορά [123] (σχήμα 1), όπου έγινε σύγκριση πάρα πολλών μοντέλων στα πλαίσια του Gold σετ.

Σε αυτή την αναφορά είχε αποδειχθεί ότι παρόλο που οι ιδιότητες των καλύτερων καμπυλών σε υψηλή ερυθρή μετατόπιση είναι διαφορετικές για κάθε μοντέλο, αντίθετα σε χαμηλές ερυθρές μετατοπίσεις όλα τα μοντέλα φαίνεται να διασχίζουν την PDL σε $z \simeq 0.2$. Το γε-

γονός αυτό μπορεί επίσης να ελεγχθεί και στα πλαίσια των δεδομένων ODEP. Δοκιμάσαμε [123] τρία διαφορετικά μοντέλα για το $H(z)$ με τα δεδομένα ODEP και το αποτέλεσμα ήταν ότι κάθε μοντέλο για χαμηλή τιμή της παραμέτρου Ω_{0m} φαίνεται να επιδέχεται τη διάσχιση της PDL, αλλά σε αυτή την περίπτωση υπάρχει μεγάλο εύρος στην ερυθρή μετατόπιση για την οποία συμβαίνει αυτό ($0.4 < z_{PDL} < 1.8$). Λαμβάνοντας υπόψη το ότι η παράμετρος μετατόπισης καλύπτει ένα πολύ μεγάλο εύρος ερυθρής μετατόπισης ($0 < z < 1089$), το παραπάνω γεγονός (δηλαδή ότι $0.4 < z_{PDL} < 1.8$) δεν παρέχει σημαντικές ενδείξεις για συστηματικά σφάλματα.

Έτσι, είναι ξεκάθαρο ότι αν και τα υπάρχοντα παρατηρησιακά δεδομένα για την Σκοτεινή Ενέργεια στα πλαίσια της Γενικής Σχετικότητας συμφωνούν στο ότι η καταστατική εξίσωση της Σκοτεινής Ενέργειας $w(z)$ είναι κοντά στο -1 , δεν υπάρχει κάποια γενική τάση σχετικά με την εξέλιξη της και ότι οι υπάρχουσες τάσεις επηρεάζονται πολύ από την τιμή της παραμέτρου Ω_{0m} που χρησιμοποιήθηκε στην εκάστοτε μελέτη.

3.5 Σύγκριση των σετ δεδομένων Gold και SNLS

3.5.1 Οι διαφορές των σετ δεδομένων Gold και SNLS

Όπως είδαμε και στην προηγούμενη ενότητα το σετ δεδομένων Gold δείχνει μια προτίμηση για δυναμικά εξελισσόμενη Σκοτεινή Ενέργεια που διασχίζει την PDL στο σημείο $z \simeq 0.2$, σε σχέση με την κοσμολογική σταθερά ενώ αυτό δεν γίνεται για το SNLS. Για να μελετήσουμε σε μεγαλύτερο βάθος τη διαφορά αυτή θα θεωρήσουμε τρία διαφορετικά μοντέλα για την $H(z)$ και θα ελαχιστοποιήσουμε το χ^2 της εξίσωσης (2.19) ως προς τις παραμέτρους των μοντέλων. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τα παρακάτω 3 σετ δεδομένων:

- Το σετ δεδομένων SNLS που περιέχει 115 δεδομένα και τα οποία βρίσκονται σε $z < 1$.
- Το ολόκληρο Gold04 σετ (Full Gold dataset - **FG**) με 157 δεδομένα και $0 < z < 1.7$.
- Το κομμένο Gold04 σετ (Truncated Gold dataset (**TG**)) με 140 σημεία και $z < 1$ το οποίο μπορεί να συγκριθεί πιο άμεσα με το SNLS

Τα τρία διαφορετικά μοντέλα για την $H(z)$ επιτρέπουν τη δυναμική εξέλιξη της Σκοτεινής Ενέργειας και έχουν από δύο παραμέτρους, ώστε να επιτρέπουν τη διάσχιση της PDL :

- Μοντέλο A (Par-A):

$$\begin{aligned} w(z) &= w_0 + w_1 z \\ H^2(z)/H_0^2 &= \Omega_{0m}(1+z)^3 + (1-\Omega_{0m})(1+z)^{3(1+w_0-w_1)} e^{3w_1 z} \end{aligned} \quad (3.95)$$

- Μοντέλο B (Par-B):

$$\begin{aligned} w(z) &= w_0 + w_1 \frac{z}{1+z} \\ H^2(z)/H_0^2 &= \Omega_{0m}(1+z)^3 + (1-\Omega_{0m})(1+z)^{3(1+w_0+w_1)} e^{3w_1[1/(1+z)-1]} \end{aligned} \quad (3.96)$$

- Μοντέλο C (Par-C):

$$\begin{aligned}
w(z) &= \frac{a_1 + 3(\Omega_{0m} - 1) - 2a_1z - a_2(-2 + 2z + z^2)}{3(1 - \Omega_{0m} + a_1z + 2a_2z + a_2z^2)} \\
H^2(z)/H_0^2 &= \Omega_{0m}(1+z)^3 + a_1(1+z) + a_2(1+z)^2 + \\
&+ (1 - \Omega_{0m} - a_1 - a_2)
\end{aligned} \tag{3.97}$$

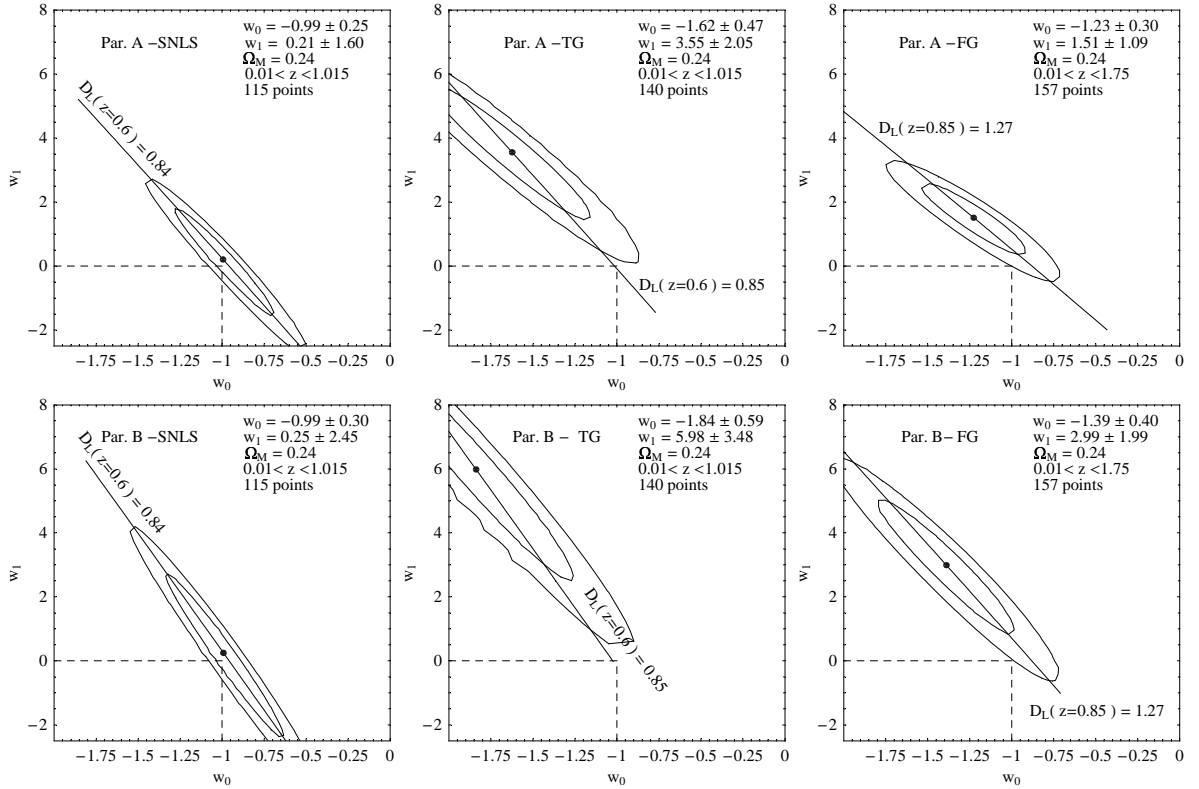
Το κίνητρο για την χρήση του τρίτου μοντέλου είναι ότι μιμείται μοντέλα με δύο τέλεια ρευστά Σκοτεινής Ενέργειας. Εναλλακτικά, μπορούμε να το δούμε ως τους δύο πρώτους όρους ενός αναπτύγματος της πυκνότητας ενέργειας της Σκοτεινής Ενέργειας.

Για να απαντήσουμε το προαναφερθέν ερώτημα χρησιμοποιήσαμε [70] τα τρία μοντέλα (A, B, C) των εξισώσεων (3.95) - (3.97) και υποθέτοντας επιπεδότητα βρήκαμε τις παραμέτρους τους με βάση τα τρία σετ δεδομένων. Εύκολα φαίνεται ότι τα μοντέλα A και B είναι ισοδύναμα με $w(z) = w_0$ στην ειδική περίπτωση που το w δεν εξελίσσεται με το χρόνο ($w_1 = 0$). Με βάση αυτά τα δεδομένα μπορούμε να κατασκευάσουμε τον Πίνακα 3.5 όπου φαίνονται οι τιμές του w_0 και τα 1σ σφάλματα για $w_1 = 0$ και για $\Omega_{0m} = 0.24 - 0.3$. Προφανώς, όλα τα σετ δεδομένων είναι συμβατά μεταξύ τους αποκλείοντας έτσι μοντέλα με $w > 1/3$ με περισσότερα από 10σ εμπιστοσύνης.

Για να επεκτείνουμε την ανάλυση στον πλήρη παραμετρικό χώρο κατασκευάσαμε τις ελλείψεις εμπιστοσύνης του χ^2 που φαίνονται στα σχήματα 3.16 και 3.17 υποθέτοντας επιπεδότητα. Για να διερευνήσουμε την εξάρτηση των αποτελεσμάτων μας στην πολύ σημαντική παράμετρο Ω_{0m} , δεν τη περιθωριοποιήσαμε (τεχνική marginalization) αλλά αντίθετα χρησιμοποιήσαμε τις τιμές $\Omega_{0m} = 0.24$ (σχήμα 3.16) και $\Omega_{0m} = 0.3$ (σχήμα 3.17). Επίσης το σημείο που αντιστοιχεί στο Λ CDM φαίνεται στις γραφικές αυτές. Για το μοντέλο C δεν παρουσιάζουμε τις ελλείψεις εμπιστοσύνης, επειδή το $H(z)$ γίνεται φανταστικό σε διάφορες περιοχές του παραμετρικού χώρου που συμπίπτει με τις ελλείψεις για 95% εμπιστοσύνη.

Πίνακας 3.5: Οι τιμές του w_0 και τα 1σ σφάλματα για $w_1 = 0$ και για $\Omega_{0m} = 0.24 - 0.3$.

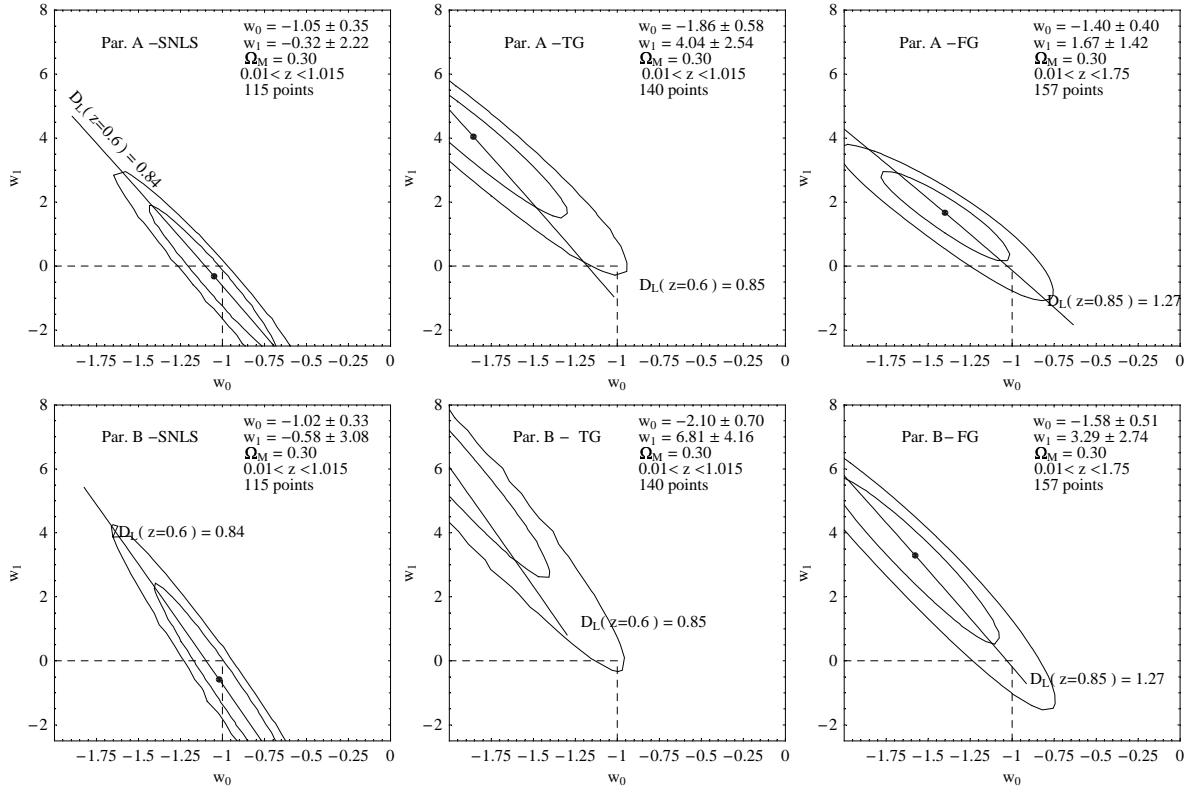
Ω_{0m}	SNLS	TG	FG
0.24	$w_0 = -0.95 \pm 0.09$	$w_0 = -0.89 \pm 0.10$	$w_0 = -0.86 \pm 0.09$
0.30	$w_0 = -1.11 \pm 0.11$	$w_0 = -1.04 \pm 0.12$	$w_0 = -1.02 \pm 0.11$



Σχήμα 3.16: Οι ελλείψεις εμπιστοσύνης 68.3% και 95.4% του χ^2 για τα μοντέλα A και B υποθέτοντας επιπεδότητα και χρησιμοποιώντας τα σετ δεδομένων SNLS, TG και FG. Χρησιμοποιήθηκε η τιμή $\Omega_{0m} = 0.24$. Οι διακεκομμένες γραμμές τέμνονται στις τιμές των παραμέτρων του Λ CDM. Πρέπει να αναφερθεί ότι για το SNLS το Λ CDM σχεδόν συμπίπτει με τα ελάχιστα και των δύο μοντέλων.

Για τα σχήματα 3.16 και 3.17 μπορούμε να κάνουμε τα ακόλουθα σχόλια:

- Το μοντέλο Λ CDM ($w_0 = -1, w_1 = 0$) είναι κοντά στις ελλείψεις σε 95.4% επίπεδο εμπιστοσύνης των σετ δεδομένων TG και FG. Ωστόσο για το SNLS, το επίπεδο Λ CDM μοντέλο είναι αρκετά εντός της έλλειψης για 68.3% εμπιστοσύνη και για $\Omega_{0m} = 0.24$ σχεδόν ταυτίζεται με τα ελάχιστα των μοντέλων A και B. Συνεπώς το Λ CDM φαίνεται πως έχει μεγαλύτερη πιθανότητα σε σχέση με μοντέλα δυναμικά εξελισσόμενης Σκοτεινής Ενέργειας στα πλαίσια του SNLS.
- Τα καλύτερα μοντέλα για το $w(z)$ στα πλαίσια των TG και FG (Gold) σετ δεδομένων, όχι μόνο είναι μακριά από το Λ CDM ($w_0 = -1, w_1 = 0$) (δες Σχήματα 3.16 και 3.17) αλλά και ξεκάθαρα διασχίζουν την PDL. Αυτό φαίνεται και στο σχήμα 3.18 όπου παρουσιάζονται οι καμπύλες του $w(z)$ για τις τιμές του ελαχίστου της εξίσωσης 2.19

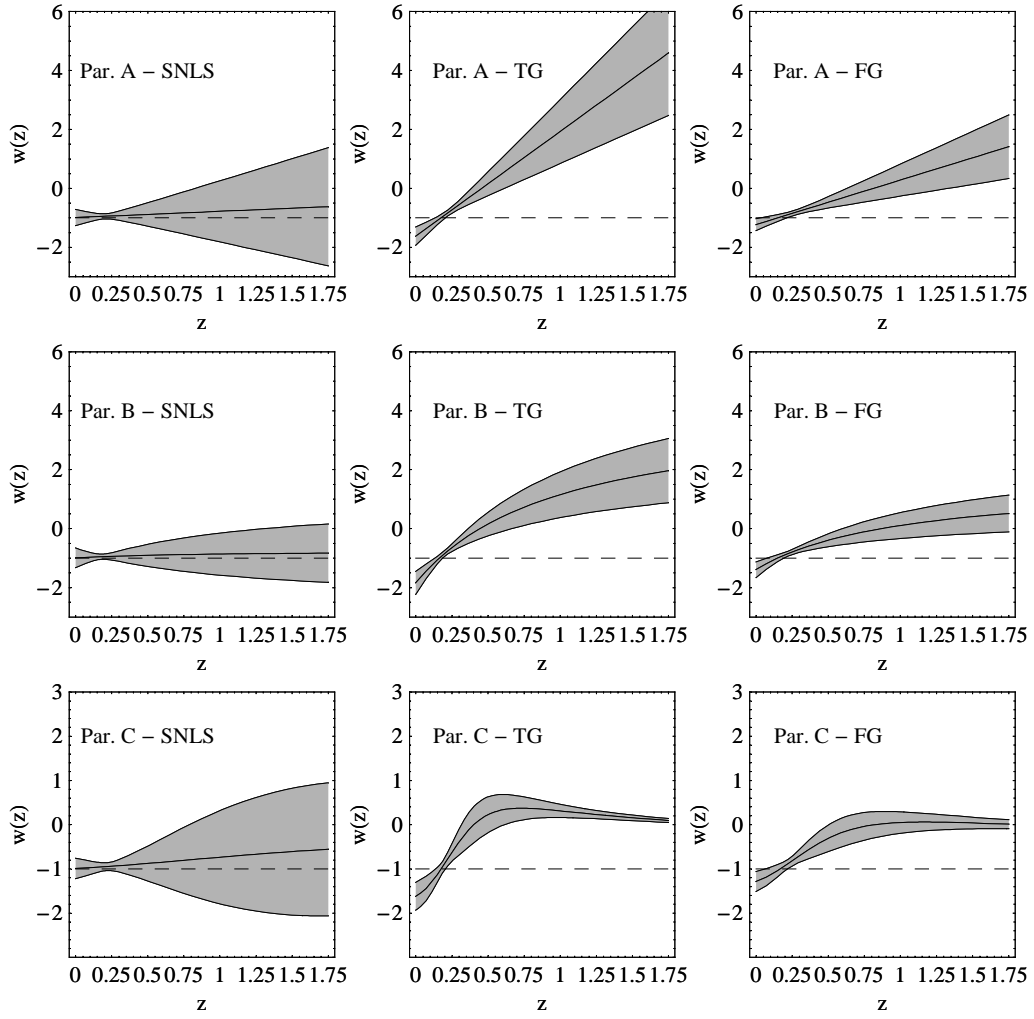


Σχήμα 3.17: Το ίδιο όπως στο σχήμα 3.16 αλλά με $\Omega_{0m} = 0.3$.

για κάθε σετ δεδομένων (SNLS, TG και FG) και κάθε μοντέλο (A, B και C) για την τιμή $\Omega_{0m} = 0.24$.

Η τάση αυτή για διάσχιση της PDL δεν εμφανίζεται για τα μοντέλα A, B και C στα πλαίσια του SNLS. Από την άλλη μεριά, φαίνεται πως στα πλαίσια του Gold[127] η τάση αυτή έχει μεγάλη πιθανότητα και αυτό έχει ωθήσει πολλούς ερευνητές, δες π.χ. [139] και [154], να εξερευνήσουν θεωρητικά μοντέλα τα οποία την επιτρέπουν. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η αποστολή αυτή δεν είναι τετριμμένη και δεν μπορεί να επιτευχθεί με ένα ελάχιστο συζευγμένο βαθμωτό πεδίο [134].

- Παρόλο που οι παράμετροι των μοντέλων στο ελάχιστο του χ^2 δεν είναι και πολύ ευαίσθητες στην τιμή του Ω_{0m} στην περιοχή $0.2 < \Omega_{0m} < 0.3$ τα σφάλματα των παραμέτρων αυτών γίνονται όλο και πιο μεγάλα καθώς το Ω_{0m} αυξάνεται, όπως φαίνεται και στα σχήματα 3.16 και 3.17 για τα μοντέλα A, B και C. Επίσης, και για τις δύο τιμές του Ω_{0m} τα σφάλματα του w_1 είναι πολύ μεγαλύτερα σε σχέση με αυτά του w_0 , αλλά αυτό το γενικό χαρακτηριστικό εξαρτάται από το μοντέλο που χρησιμοποιείται και δεν εξαρτάται από το συγκεκριμένο σετ δεδομένων.



Σχήμα 3.18: Η καταστατική εξίσωση $w(z)$ για κάθε σετ δεδομένων (SNLS, TG και FG) και κάθε μοντέλο (A, B και C) για την τιμή $\Omega_{0m} = 0.24$. Η συμπαγής γραμμή αντιστοιχεί στο ελάχιστο και η γκριζα περιοχή στην 1σ περιοχή εμπιστοσύνης γύρω από το ελάχιστο. Η διακεκομμένη οριζόντια γραμμή αντιστοιχεί στο Λ CDM. Πρέπει να αναφέρουμε ότι η καμπύλη που αντιστοιχεί στο ελάχιστο διασχίζει την PDL μόνο για τα TG και FG (Gold) σετ δεδομένων ενώ για το SNLS σχεδόν συμπίπτει με το Λ CDM.

3.5.2 Εξερευνώντας τη στατιστική ομοιογένεια του Gold σετ

Όπως είδαμε η προηγούμενη έκδοση του Gold σετ (Gold04) [50] φαίνεται πως είναι σε διαφωνία, περίπου στα 2σ , με το SNLS σετ [70],[155]. Η τάση για διάσχιση της γραμμής $w = -1$, γνωστή ως PDL, δεν μπορεί να εξηγηθεί από ένα ελάχιστα συζευγμένο βαθμωτό πεδίο και μπορεί να υποδεικνύει την ύπαρξη πιο εξωτικών μοντέλων. Εναλλακτικά, αυτή η διαφωνία

Πίνακας 3.6: Τα υποσύνολα του Gold06 σετ.

Υποσύνολο	Σύνολο	Εύρος z	Έτος ανακάλυψης	Αναφ..
SNLS	47	$0.25 \leq z \leq 0.96$	2003-2004	[51]
HST	30	$0.46 \leq z \leq 1.76$	1997-2005	[68]
HZSST	41	$0.28 \leq z \leq 1.20$	1995-2001	[157]
SCP	26	$0.17 \leq z \leq 0.86$	1995-2000	[158]
LR	38	$0.024 \leq z \leq 0.12$	1990-2000	[159]

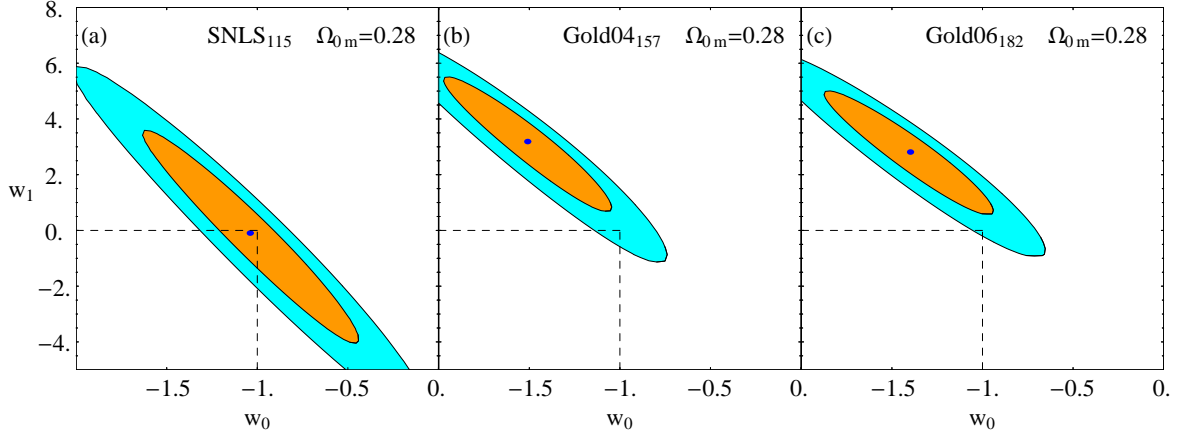
θα μπορούσε να αποδοθεί και σε συστηματικά σφάλματα, π.χ. λόγω του διαφορετικού αλγόριθμου που χρησιμοποιήθηκε κατά τη δημιουργία των δύο σετ από τις αντίστοιχες ερευνητικές ομάδες.

Για τη νέα έκδοση του Gold σετ (Gold06) ωστόσο, χρησιμοποιήθηκε μία βελτιωμένη ανάλυση και συμπεριλήφθηκε ένα μεγάλο μέρος του SNLS. Έτσι αναμενόταν ότι η διαφωνία του Gold σετ σε σχέση με το SNLS θα μειωνόταν ή και ακόμα θα εξαφανιζόταν. Όμως, όπως βλέπουμε στο σχήμα 3.19 αυτό δεν έγινε.

Στο νέο σετ κάποιοι υπερκαινοφανείς αστέρες αφαιρέθηκαν [68] λόγω των μεγάλων αβεβαιοτήτων τους στη μέτρηση του χρώματος, της μεγάλης απορρόφησης $A_V > 0.5$ και ενός ορίου στην ερυθρή μετατόπιση $cz < 7000 \text{ km/s}$ ή $z < 0.0233$, με σκοπό να αποφευχθεί η επίδραση μιας πιθανής τοπικής ‘Φυσαλίδας Hubble’, δηλαδή μιας περιοχής με μεγαλύτερη σταθερά Hubble H_0 , έτσι ώστε να οριστεί ένα υποσύνολο σημείων μεγάλης εμπιστοσύνης. Επιπλέον, χρησιμοποιήθηκε ένας και μοναδικός αλγόριθμος (MLCS2k2) για να υπολογιστούν οι αποστάσεις των υπερκαινοφανών αστέρων (συμπεριλαμβανομένων και εκείνων από το SNLS σετ) σε μια προσπάθεια να μειωθούν οι ανομοιογένειες του σετ.

Όπως φαίνεται, η 2^σ διαφωνία μεταξύ των δύο σετ Gold04 και SNLS (σχήματα 3.19a και 3.19b) δεν έχει ελαττωθεί χρησιμοποιώντας το Gold06 σετ (σχήμα 3.19c)! Το λόγο αυτής της διαφωνίας αλλά και την ενδεχόμενη στατιστική ομοιογένεια του νέου σετ θα την μελετήσουμε ακολούθως [156].

Τους 182 υπερκαινοφανείς αστέρες μπορούμε να τους ομαδοποιήσουμε σε πέντε υποσύνολα ανάλογα με την ερευνητική ομάδα ή και τα όργανα που χρησιμοποιήθηκαν για την ανακάλυψή τους. Τα υποσύνολα αυτά φαίνονται στον Πίνακα 3.6. Πρέπει να αναφερθεί ότι τα πρώιμα δεδομένα που περιέχονται στο Gold06 σετ βρέθηκαν κυρίως την δεκαετία του 90 και αποτελούνται από τα δεδομένα της ομάδας High z Supernova Search Team (HZSST), της έρευνας Supernova Cosmology Project (SCP) και το υποσύνολο Χαμηλής Ερυθρής μετατόπισης (Low Redshift - LR).



Σχήμα 3.19: Οι ελλείψεις εμπιστοσύνης του μοντέλου (3.98) για τα σεντ δεδομένων SNLS (a), Gold04 (b) και Gold06 (c). Η σχεδόν 2σ διαφωνία μεταξύ των Gold και SNLS παραμένει παρά την καλύτερη βαθμονόμηση και την προσθήκη νέων δεδομένων.

Το μοντέλο που χρησιμοποιήσαμε στην ανάλυσή μας [156] είναι το CPL [126],[151]

$$w(z) = w_0 + w_1 \frac{z}{1+z} \quad (3.98)$$

$$H^2(z)/H_0^2 = \Omega_{0m}(1+z)^3 + (1-\Omega_{0m})(1+z)^{3(1+w_0+w_1)} e^{\frac{-3w_1z}{1+z}} \quad (3.99)$$

και για την παράμετρο της πυκνότητας της ύλης θεωρήσαμε την τιμή $\Omega_{0m} = 0.28$ (όπως και στην αναφορά [68]) σύμφωνα με τις μεθόδους που αναφέραμε σε προηγούμενες ενότητες.

Οι 182 υπερκαινοφανείς αστέρες που περιλαμβάνονται στο Gold06 σεντ προέρχονται κυρίως από τις ερευνητικές ομάδες που φαίνονται στον Πίνακα 3.6. Το υποσύνολο χαμηλής ερυθρής μετατόπισης (LR) είναι ένα μείγμα από διάφορους πρώιμους υπερκαινοφανείς αστέρες προερχόμενα από διάφορες ομάδες αλλά εδώ θα το θεωρήσουμε ως ένα ενιαίο σεντ γιατί αλλιώς θα αυξάνονταν υπερβολικά ο αριθμός των υποσυνόλων. Για να διερευνήσουμε κατά πόσο είναι στατιστικά ομοιογενές το Gold06 σεντ αλλά και να βρούμε την πηγή της διαφωνίας με το SNLS, αποσυνθέσαμε το Gold06 στα υποσύνολα του Πίνακα 3.6 και κατασκευάσαμε νέα σεντ δεδομένων αφαιρώντας κάθε φορά ένα (ή δύο) από τα υποσύνολα του Gold06. Έτσι καταλήξαμε με τα ακόλουθα έξι υποσύνολα:

1. $182_{G06} - 47_{SNLS} - 30_{HST}$
2. $182_{G06} - 47_{SNLS}$
3. $182_{G06} - 30_{HST}$

4. $182_{G06} - 26_{SCP}$
5. $182_{G06} - 41_{HZSST}$
6. $182_{G06} - 41_{HZSST} - 26_{SCP}$

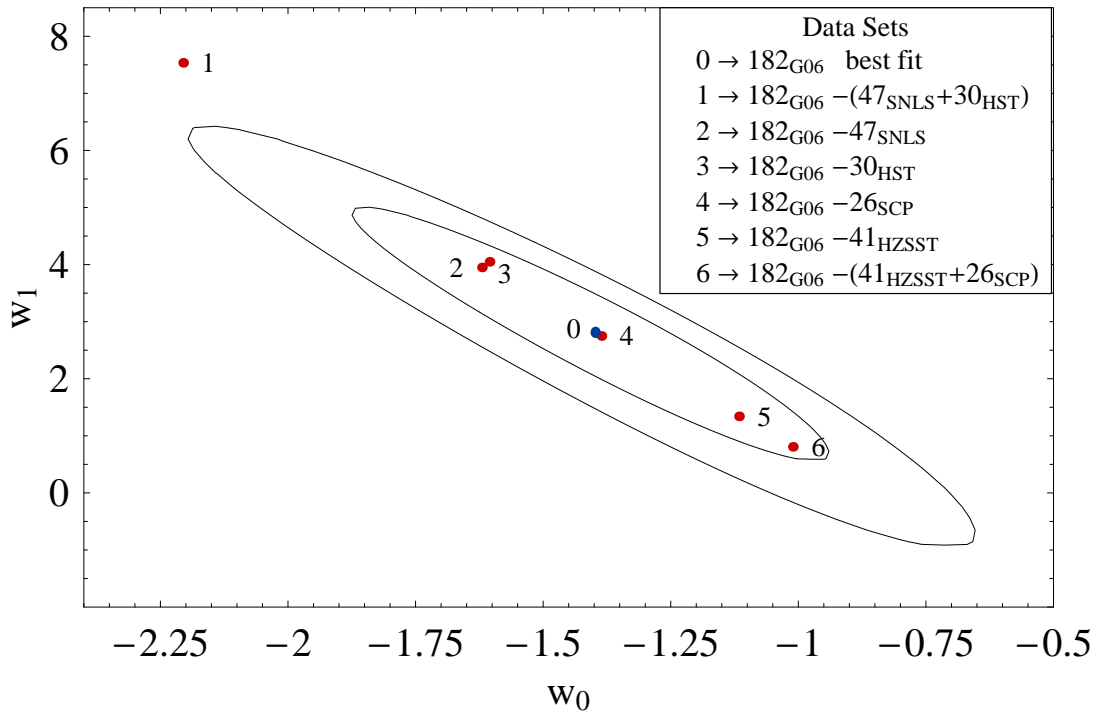
Δεν λάβαμε υπόψη το υποσύνολο $182_{G06} - 38_{LR}$, γιατί το σετ LR δεν είναι ομογενές και επειδή αν το αφαιρούσαμε δεν θα μπορούσε να συσχετιστεί με ένα τυχαίο τεμαχισμό στην ίδια χαμηλή ερυθρή μετατόπιση (το εύρος $z < 0.124$ καταλαμβάνεται εντελώς από το LR). Έτσι προκύπτουν δύο σημαντικές ερωτήσεις:

- Πώς σχετίζονται οι τιμές (w_0, w_1) από την προσαρμογή των δεδομένων, για κάθε ένα από τα έξι υποσύνολα με αυτές του πλήρους Gold06 σετ;
- Πώς σχετίζονται οι τιμές (w_0, w_1) από την προσαρμογή των δεδομένων για κάθε ένα από τα έξι υποσύνολα, με αυτές από ένα τυχαίο τεμαχισμό του Gold06 στο ίδιο εύρος ερυθρής μετατόπισης με το καθένα από τα έξι υποσύνολα;

Η απάντηση στην πρώτη ερώτηση φαίνεται στο σχήμα 3.20 όπου παρουσιάζονται [156] οι τιμές (w_0, w_1) από την προσαρμογή των δεδομένων για κάθε ένα από τα έξι υποσύνολα. Πρέπει να αναφερθεί ότι τα δύο υποσύνολα $182_{G06} - 41_{HZSST} - 26_{SCP}$ (σημείο 1) και $182_{G06} - 47_{SNLS} - 30_{HST}$ (σημείο 6) αντιστοιχούν στις πιο ακραίες τιμές των (w_0, w_1) . Η τιμή των (w_0, w_1) από την προσαρμογή των δεδομένων στο Gold06 σετ μαζί με τις 1σ και 2σ ελλείψεις εμπιστοσύνης φαίνονται στο σχήμα 3.20 (σημείο 0).

Τα ακόλουθα σχόλια μπορούν να γίνουν στο σχήμα 3.20:

- Το υποσύνολο $182_{G06} - 26_{SCP}$ έχει πρακτικά τις ίδιες τιμές (w_0, w_1) με αυτές του Gold06.
- Καμία αφαίρεση ενός υποσυνόλου δεν μπορεί να μετατοπίσει τις τιμές των παραμέτρων (w_0, w_1) πέρα από τις 1σ ελλείψεις εμπιστοσύνης του Gold06.
- Όλα τα υποσύνολα (εκτός από το $182_{G06} - 26_{SCP}$) μετατοπίζουν το σημείο (w_0, w_1) κατά μήκος του μεγάλου άξονα της έλλειψης του χ^2 . Συγκεκριμένα για τα $182_{G06} - 30_{HST}$ και $182_{G06} - 47_{SNLS}$ το ελάχιστο του χ^2 και συνεπώς το σημείο (w_0, w_1) , μένει υπό την επιρροή κυρίως του $HZSST$ και μετατοπίζεται κατά μήκος του μεγάλου άξονα, μακριά από το Λ CDM και προς ένα χρονικά εξελισσόμενο $w(z)$ το οποίο διασχίζει την γραμμή $w = -1$ ($w_0 < -1, w_1 > 0$). Από την άλλη για το $182_{G06} - 41_{HZSST}$ το σημείο (w_0, w_1) μένει υπό την επιρροή κυρίως των HST και $SNLS$ και μετατοπίζεται προς το Λ CDM. Αυτό σημαίνει ότι τα υποσύνολα HST και $SNLS$ δείχνουν μια προτίμηση προς το Λ CDM, ενώ το $HZSST$ δείχνει μια προτίμηση προς ένα εξελισσόμενο $w(z)$ το οποίο διασχίζει την γραμμή $w = -1$. Το φαινόμενο αυτό γίνεται εντονότερο από την συμπεριφορά του $182_{G06} - 41_{HZSST} - 26_{SCP}$ (μετατοπίζεται περισσότερο προς το Λ CDM) και του $182_{G06} - 47_{SNLS} - 30_{HST}$ (μετατοπίζεται πάρα πολύ προς ένα εξελισσόμενο $w(z)$ με περισσότερα από 2σ εμπιστοσύνης (δες σχήμα 3.20)).



Σχήμα 3.20: Οι $1\sigma - 2\sigma$ ελλείψεις εμπιστοσύνης του χ^2 στο επίπεδο $w_0 - w_1$ με βάση το μοντέλο (3.98) για το Gold06 σετ και $\Omega_{\text{om}} = 0.28$. Επίσης, φαίνονται και οι τιμές (w_0, w_1) από την προσαρμογή των 1-6 υποσυνόλων των δεδομένων του Gold06 σετ.

Με βάση τα παραπάνω σχόλια συμπεραίνουμε ότι η απάντηση στην πρώτη ερώτηση που αναφέραμε πιο πριν μπορεί να συνοψιστεί ως εξής[156]: Οι τιμές των (w_0, w_1) για καθένα από τα υποσύνολα 2 – 5 δεν διαφέρουν περισσότερο από 1σ από το ελάχιστο του Gold06 αλλά δείχνουν ξεκάθαρες τάσεις οι οποίες είναι χαρακτηριστικές για κάθε υποσύνολο.

Μια ξεχωριστή ερώτηση (η οποία σχετίζεται με την δεύτερη ερώτηση) είναι η στατιστική ομοιογένεια μεταξύ των υποσυνόλων και του Gold06 σετ. Για να απαντήσουμε αυτό το ερώτημα συγκρίναμε τα (w_0, w_1) για κάθε υποσύνολο με αυτά που προκύπτουν από ένα μεγάλο αριθμό (500) αντίστοιχων τυχαίων τεμαχισμών του Gold06 σετ. Οι τυχαίοι αυτοί τεμαχισμοί αφορούν τυχαίες αφαιρέσεις του ίδιου αριθμού υπερκαινοφανών αστερών και στο ίδιο εύρος ερυθρής μετατόπισης με τα αρχικά υποσύνολα. Αυτή η διαδικασία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρεθεί το 1σ εύρος των αναμενόμενων τιμών (w_0^r, w_1^r) που προκύπτουν από την προσαρμογή των τυχαίων υποσυνόλων του Gold06 σετ.

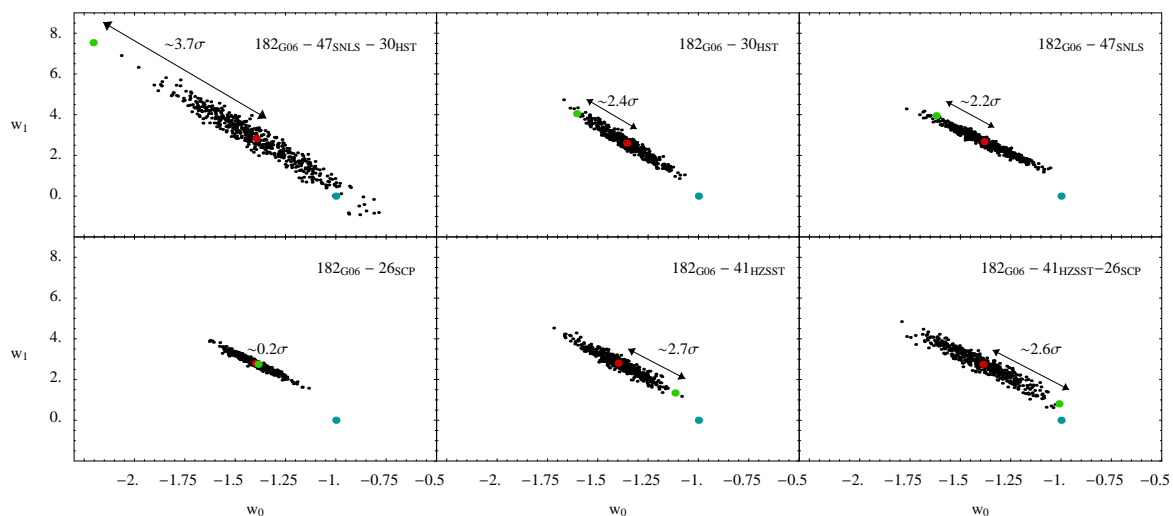
Αν οι τιμές των (w_0, w_1) του υποσυνόλου είναι μέσα στην 1σ περιοχή από τις τιμές (w_0^r, w_1^r) του αντίστοιχου τυχαίου υποσυνόλου, τότε το υπό μελέτη υποσύνολο είναι αντιπροσωπευτικό του Gold06 σετ και στατιστικά συνεπές με αυτό. Αν από την άλλη μεριά οι τιμές των (w_0, w_1) διαφέρουν κατά 2σ ή περισσότερο από το μέσο όρο $(\bar{w}_0^r, \bar{w}_1^r)$ των α-

Πίνακας 3.7: Τα έξι υποσύνολα του σχήματος 3.21.

Υποσύνολο	w_0 w_1	w_0^r w_1^r (MC)	$\frac{w-\bar{w}^r}{\sigma_{w^r}}$
$182 - 47_{SNLS} - 30_{HST}$	$w_0 = -2.21$ $w_1 = 7.53$	$w_0^r = -1.40 \pm 0.22$ $w_1^r = 2.83 \pm 1.30$	-3.7σ
$182 - 47_{SNLS}$	$w_0 = -1.62$ $w_1 = 3.95$	$w_0^r = -1.38 \pm 0.12$ $w_1^r = 2.67 \pm 0.57$	-2.2σ
$182 - 30_{HST}$	$w_0 = -1.60$ $w_1 = 4.05$	$w_0^r = -1.36 \pm 0.10$ $w_1^r = 2.60 \pm 0.64$	-2.4σ
$182 - 26_{SCP}$	$w_0 = -1.39$ $w_1 = 2.75$	$w_0^r = -1.40 \pm 0.08$ $w_1^r = 2.79 \pm 0.38$	$+0.2\sigma$
$182 - 41_{HZSST}$	$w_0 = -1.12$ $w_1 = 1.34$	$w_0^r = -1.40 \pm 0.11$ $w_1^r = 2.80 \pm 0.55$	$+2.7\sigma$
$182 - 41_{HZSST} - 26_{SCP}$	$w_0 = -1.01$ $w_1 = 0.81$	$w_0^r = -1.39 \pm 0.15$ $w_1^r = 2.75 \pm 0.73$	$+2.6\sigma$

ντίστοιχων τυχαίων υποσυνόλων, τότε μπορούμε να συμπεραίνουμε ότι το υποσύνολο είναι συστηματικά διαφορετικό από το πλήρες σετ. Τα αποτελέσματα αυτής της σύγκρισης που μόλις αναφέραμε, φαίνονται στον Πίνακα 3.7 και στο σχήμα 3.21, στα οποία παρατηρούμε τα εξής:

- Το *SCP* είναι ένα τυπικό, στατιστικά συμβατό υποσύνολο του Gold06 σετ, επειδή η αφαίρεση του δεν αλλάζει τις στατιστικές ιδιότητες του Gold06 σετ. Συγκεκριμένα, η τιμή των (w_0, w_1) για το υποσύνολο $182_{G06} - 26_{SCP}$ διαφέρει μόνο 0.2σ από τον αντίστοιχο μέσο όρο των τιμών $(\bar{w}_0^r, \bar{w}_1^r)$ που αφορά τυχαίες αφαιρέσεις των ίδιων αριθμών υπερκαινοφανών αστερών και στο ίδιο εύρος ερυθρής μετατόπισης όπως και το *SCP*.
- Τα άλλα πέντε υποσύνολα που θεωρήσαμε στο σχήμα 3.21 δεν είναι τυπικά υποσύνολα του Gold06 σετ. Οι τιμές των (w_0, w_1) που αναφέρονται στο σχήμα 3.21 διαφέρουν περισσότερο από 2σ από τις αντίστοιχες μέσες τιμές $(\bar{w}_0^r, \bar{w}_1^r)$ των τυχαίων υποσυνόλων.
- Μία ακραία περίπτωση είναι το υποσύνολο $182_{G06} - 47_{SNLS} - 30_{HST}$ του οποίου οι τιμές των (w_0, w_1) βρίσκονται 3.7σ μακριά από αυτές του μέσου όρου των αντίστοιχων τυχαίων υποσυνόλων! Αυτό σημαίνει ότι ο συνδυασμός $38_{LR} + 41_{HZSST} + 26_{SCP}$, ο οποίος απομένει από την αφαίρεση $182_{G06} - 47_{SNLS} - 30_{HST}$, δείχνει πολύ έντονη προτίμηση για ένα εξελισσόμενο $w(z)$ και είναι στατιστικά ασύμβατος με το Gold06 σετ. Το αποτέλεσμα αυτό είναι συμβατό και με το σχήμα 3.20 το οποίο δείχνει ότι οι τιμές των (w_0, w_1) του υποσυνόλου $182_{G06} - 47_{SNLS} - 30_{HST}$ είναι περίπου 3σ από το ελάχιστο του Gold06 σετ!

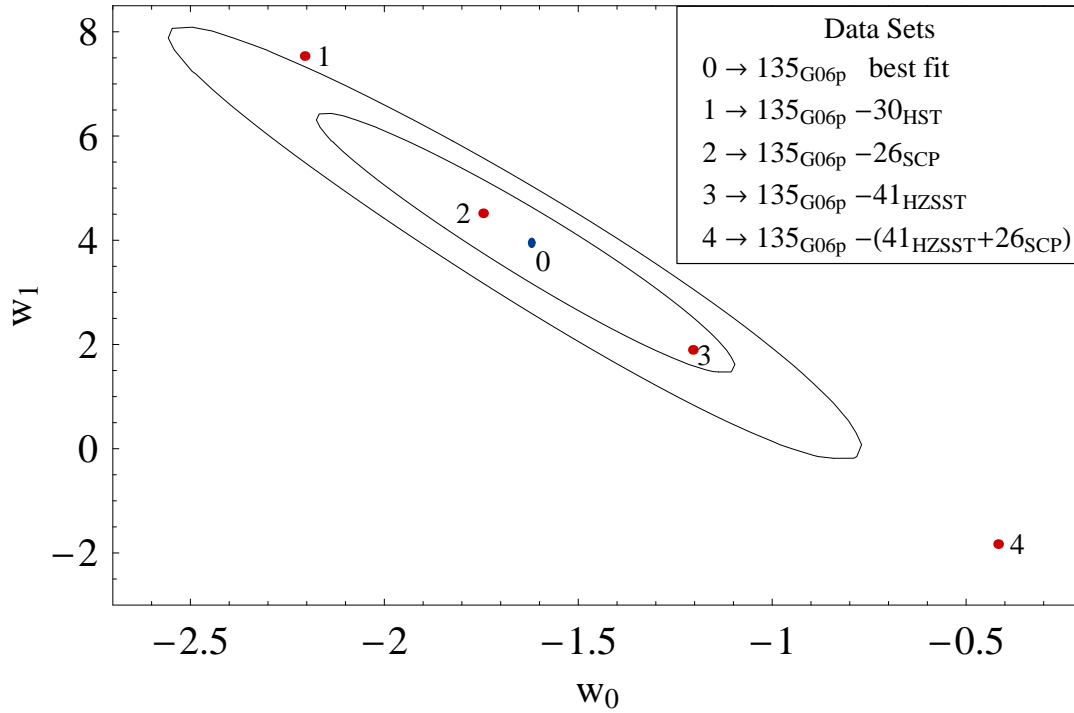


Σχήμα 3.21: Σύγκριση των παραμέτρων (w_0, w_1) από την προσαρμογή των υποσυνόλων 1-6 με τα αντίστοιχα τυχαία υποσύνολα του Gold06 σετ. Σε όλες τις περιπτώσεις (εκτός από το *SCP* υποσύνολο) οι παράμετροι (w_0, w_1) μετατοπίζονται κατά περισσότερο από 2σ από τις αντίστοιχες μέσες τιμές $(\bar{w}_0^r, \bar{w}_1^r)$ των τυχαίων υποσυνόλων. Φαίνεται επίσης και το σημείο που αντιστοιχεί στο Λ CDM ($w_0 = -1, w_1 = 0$).

- Τα υποσύνολα *SNLS* και *HST* είναι στατιστικά παρόμοια μεταξύ τους (με μια τάση προς το Λ CDM) παρόλο που είναι και τα δύο σημαντικά διαφορετικά (περισσότερα από 2σ) από τα τυχαία υποσύνολα του Gold06 (δες και το σχήμα 3.20).
- Τα σχήματα 3.20 και 3.21 δείχνουν [156] ότι η τάση προς το Λ CDM αυξάνει για πιο πρόσφατα (τα *HST* και *SNLS*) δεδομένα ενώ τα παλιότερα (*HZSST* και *SCP*) δείχνουν να ευνοούν μια εξελισσόμενη $w(z)$.

Τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούν να επιβεβαιωθούν χρησιμοποιώντας και μια ‘καθαρή’ έκδοση του Gold06, η οποία δεν περιλαμβάνει τους 47 υπερκαινοφανείς αστέρες του *SNLS*. Αυτό το σετ (Gold06p) περιλαμβάνει 135 υπερκαινοφανείς αστέρες και είναι πρακτικά μια ξεκαθαρισμένη και βελτιωμένη έκδοση του Gold04 με την προσθήκη 16 σημείων στο εύρος $0.46 < z < 1.39$ που ανακαλύφθηκαν πρόσφατα από το Hubble. Οι παράμετροι που βρέθηκαν από την προσαρμογή των δεδομένων του Gold06p είναι μετατοπισμένες προς την κατεύθυνση ενός εξελισσόμενου $w(z)$ σε σχέση με το πλήρες Gold06 (σύγκρισε τα σχήματα 3.20 και 3.22), όπως αναμένεται καθώς το *SNLS* προτιμά το Λ CDM. Όπως φαίνεται στο σχήμα 3.22 και στον Πίνακα 3.8, το αποτέλεσμα κάθε υποσυνόλου σε αυτή την περίπτωση είναι πιο εμφανές λόγω του μικρότερου αριθμού σημείων του Gold06p σετ.

Για παράδειγμα, το υποσύνολο $135_{\text{Gold06p}} - 41_{\text{HZSST}} - 26_{\text{SCP}}$ μετατοπίζει τις παραμέτρους του Gold06p κατά περίπου 3σ στη διεύθυνση του Λ CDM ενώ η μετατόπιση για τυχαίες

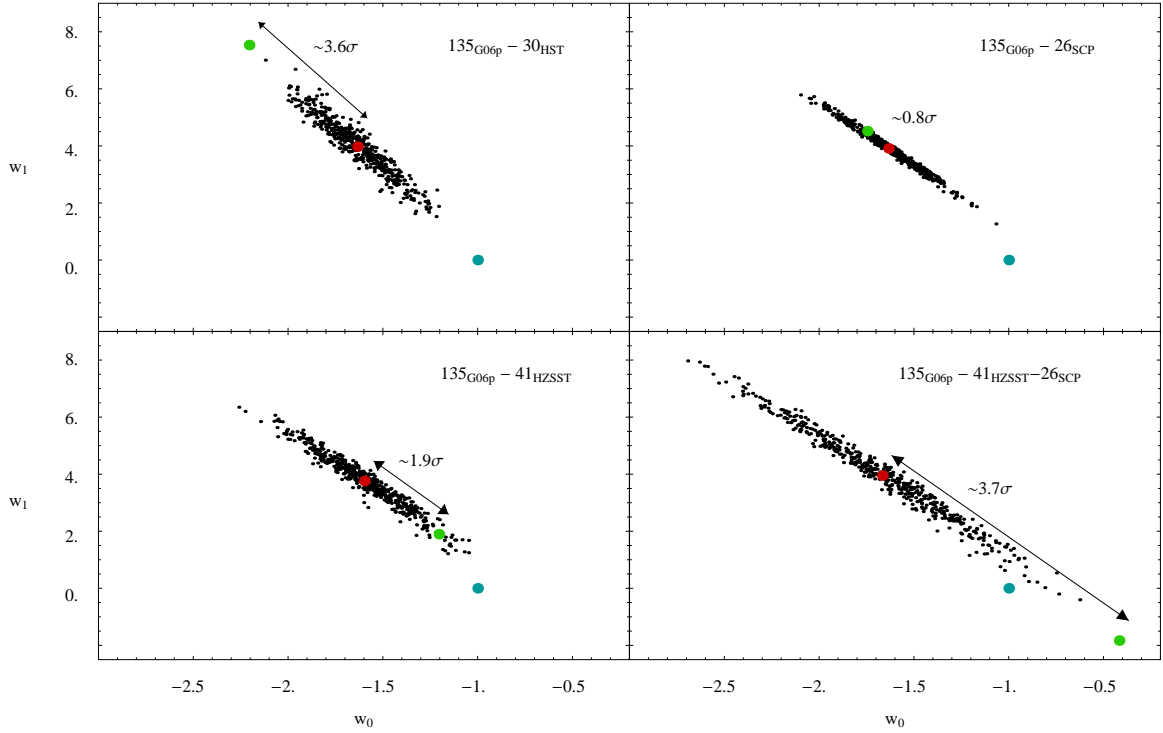


Σχήμα 3.22: Οι $1\sigma - 2\sigma$ ελλείψεις εμπιστοσύνης του χ^2 στο επίπεδο $w_0 - w_1$ με βάση το μοντέλο (3.98) για το Gold06p σετ και για $\Omega_{0m} = 0.28$. Επίσης φαίνονται και οι τιμές των παραμέτρων (w_0, w_1) της προσαρμογής για καθένα από τα τέσσερα υποσύνολα του Gold06p σετ. Οι παράμετροι για το υποσύνολο $135_{G06p} - 41_{HZSST} - 26_{SCP}$ είναι μετατοπισμένες κατά περίπου 3σ από αυτές του Gold06p προς την διεύθυνση του Λ CDM.

αφαιρέσεις του Gold06p είναι 3.7σ (σχήμα 3.23). Οι αντίστοιχες μετατοπίσεις για το Gold06 ήταν περίπου 1σ και 2.6σ αντίστοιχα (σχήματα 3.20 και 3.21).

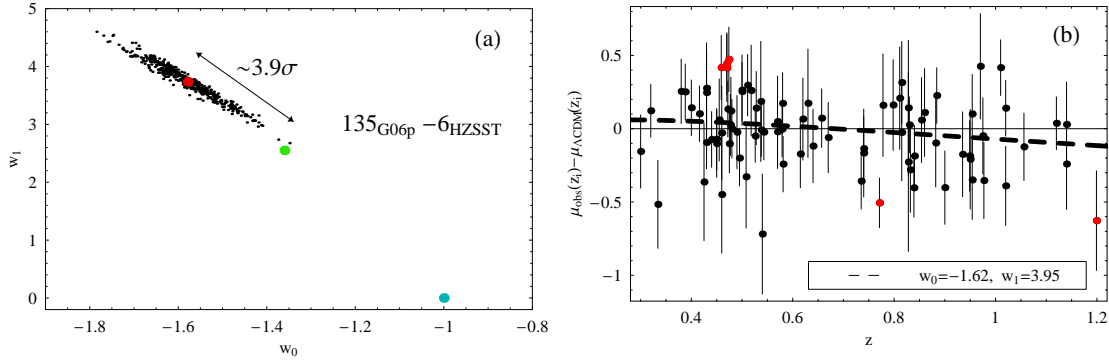
Πίνακας 3.8: Τα τέσσερα υποσύνολα του σχήματος 3.23.

Υποσύνολο	w_0 w_1	w_0^r w_1^r (MC)	$\frac{w-\bar{w}^r}{\sigma_{w^r}}$
135 - 30 _{HST}	$w_0 = -2.21$ $w_1 = 7.53$	$w_0^r = -1.63 \pm 0.17$ $w_1^r = 3.98 \pm 0.97$	-3.6σ
135 - 26 _{SCP}	$w_0 = -1.75$ $w_1 = 4.52$	$w_0^r = -1.63 \pm 0.17$ $w_1^r = 3.91 \pm 0.75$	-0.8σ
135 - 41 _{HZSST}	$w_0 = -1.20$ $w_1 = 1.90$	$w_0^r = -1.60 \pm 0.21$ $w_1^r = 3.76 \pm 0.95$	$+1.9\sigma$
135 - 41 _{HZSST} - 26 _{SCP}	$w_0 = -0.42$ $w_1 = -1.83$	$w_0^r = -1.67 \pm 0.37$ $w_1^r = 3.95 \pm 1.55$	$+3.7\sigma$



Σχήμα 3.23: Σύγκριση των παραμέτρων από την προσαρμογή των υποσυνόλων που φαίνονται στον Πίνακα 3.8 με αυτές των τυχαίων υποσυνόλων του Gold06p. Σε όλες τις περιπτώσεις (εκτός από το *SCP*) το ελάχιστο της προσαρμογής των δεδομένων μετατοπίζεται (σε διαφορετικές διευθύνσεις) κατά περισσότερο από 2σ από τις μέσες τιμές των υποσυνόλων. Η μετατόπιση για το $135_{G06p} - 41_{HZSST} - 26_{SCP}$ είναι 3.7σ σε σχέση με το μέσο όρο των τυχαίων υποσυνόλων. Φαίνεται επίσης και το σημείο που αντιστοιχεί στο Λ CDM ($w_0 = -1, w_1 = 0$).

Το γεγονός ότι πιο πρόσφατα δεδομένα (όπως αυτά των *HST* και *SNLS*) φαίνεται πως ευνοούν το Λ CDM περισσότερο από τα παλιότερα δεδομένα (*HZSST*) υποδεικνύει την πιθανότητα ότι τα παλιότερα δεδομένα είναι πιο επιρρεπή σε συστηματικά σφάλματα. Είναι συνεπώς ενδιαφέρον να εντοπίσουμε ένα μικρό αριθμό υπερκαινοφανών αστέρων του υποσυνόλου *HZSST* που να είναι τα κυρίως υπεύθυνα για την τάση του *HZSST* προς ένα εξελισσόμενο $w(z)$. Έχουμε απομονώσει την ομάδα από υπερκαινοφανείς αστέρες των οποίων ο συντελεστής απόστασης διαφέρει περισσότερο από 1.8σ από το Λ CDM με $\Omega_{0m} = 0.28$. Η ομάδα αυτή αποτελείται από έξι υπερκαινοφανείς αστέρες και είναι επίσης η κυρίως υπεύθυνη για την τάση του *HZSST* προς ένα εξελισσόμενο $w(z)$. Οι υπερκαινοφανείς αστέρες αυτοί είναι οι [156] (SN99Q2, SN00ee, SN00ec, SN99S, SN01fo, SN99fv). Οι μετατοπισμέ-



Σχήμα 3.24: a. Οι παράμετροι από την προσαρμογή του Gold06p για την αφαίρεση 6 τυχαίων σημείων του υποσυνόλου *HZSST*. Η μετατόπιση των παραμέτρων μεγιστοποιείται στα 3.9σ όταν αφαιρούνται τα ακόλουθα 6 σημεία: (SN99Q2, SN00ee, SN00ec, SN99S, SN01fo, SN99fv) (κόκκινη τελεία). Αυτά είναι επίσης και τα σημεία για τα οποία ο συντελεστής απόστασης διαφέρει κατά περισσότερα από 1.8σ από το Λ CDM. b. Ο συντελεστής απόστασης (διακεκομμένη γραμμή) σε σχέση με το Λ CDM και τα δεδομένα του Gold06 στο εύρος της ερυθρής μετατόπισης του υποσυνόλου *HZSST*. Τα έξι σημεία του *HZSST* τα οποία διαφέρουν από το Λ CDM περισσότερο από 1.8σ φαίνονται με κόκκινο χρώμα. Αυτά επίσης δείχνουν και τη μεγαλύτερη προτίμηση για ένα εξελισσόμενο $w(z)$.

νες παράμετροι (w_0, w_1) λόγω της αφαίρεσης αυτών των έξι σημείων φαίνονται στο σχήμα 3.24a μαζί και μια προσομοίωση *Monte-Carlo* για 6 αντίστοιχα και τυχαία αφαιρεθέντων σημείων του *HZSST*. Είναι αναμενόμενο ότι τα πιθανά συστηματικά σφάλματα που οδήγησαν σε αυτή την συμπεριφορά του υποσυνόλου *HZSST* να μεγιστοποιούνται για αυτά τα έξι σημεία και έτσι να είναι ευκολότερο να αναγνωριστούν και να διορθωθούν. Εναλλακτικά αυτά τα έξι σημεία μπορούν να αφαιρεθούν από το Gold06 σετ σε μια προσπάθεια να βελτιωθεί η στατιστική ομοιογένεια του σετ.

Στο σχήμα 3.24b φαίνονται τα έξι σημεία (τα κόκκινα σημεία) όπου επίσης φαίνεται και ο συντελεστής απόστασης σε σχέση με το Λ CDM για $\Omega_{0m} = 0.28$. Στην ίδια γραφική φαίνεται ο συντελεστής απόστασης για τις τιμές των παραμέτρων ($w_0 = -1.62, w_1 = 3.95$) που βρέθηκαν από την προσαρμογή του Gold06p (παχιά διακεκομμένη γραμμή) ο οποίος δείχνει ότι και τα έξι σημεία προτιμούν περισσότερο μια εξελισσόμενη $w(z)$ από το Λ CDM.

Συμπερασματικά, δείξαμε ότι παρά την βελτιωμένη ανάλυση και βαθμονόμηση, το Gold06 σετ περιέχει ακόμα στατιστικές ανομοιογένειες, πιθανώς λόγω συστηματικών σφαλμάτων. Δεδομένου του ότι τα νεώτερα δεδομένα *SNLS* και *HST* είναι στατιστικά συνεπή μεταξύ τους, αν και προέρχονται από τελείως διαφορετικές ερευνητικές ομάδες και είναι ομογενή, είναι πιθανό ότι η πηγή των συστηματικών σφαλμάτων βρίσκεται στα παλιότερα δεδομένα και μάλιστα στο υποσύνολο *HZSST*.

Κεφάλαιο 4

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

4.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε μερικές από τις πιο ενδιαφέρουσες γενικευμένες θεωρίες βαρύτητας και θα ελέγξουμε την συμβατότητα αυτών με τις υπάρχουσες κοσμολογικές παρατηρήσεις. Συγκεκριμένα, ένα μεγάλο μέρος του κεφαλαίου θα αφιερωθεί σε τετραδιάστατες θεωρίες βαρύτητας οι οποίες έχουν Λαγκρανζιανές γενικότερες της Γενικής Σχετικότητας, αλλά και βαθμωτά πεδία μη ελάχιστα συζευγμένα με το βαρυτικό πεδίο.

Η πιο γενική τετραδιάστατη δράση, η οποία περιλαμβάνει βαθμωτά πεδία μη ελάχιστα συζευγμένα με το βαρυτικό πεδίο, είναι η

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} f(R, \phi, X) + \mathcal{L}_m \right] \quad (4.1)$$

όπου g είναι η ορίζουσα της τετραδιάστατης μετρικής $g_{\mu\nu}$, η $f(R, \phi, X)$ είναι μια γενική συνάρτηση του βαθμωτού Ricci $R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, του πεδίου ϕ και του κινητικού όρου $X = -g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$ και \mathcal{L}_m είναι η Λαγκρανζιανή πυκνότητα ενός ιδανικού ρευστού με πυκνότητα ενέργειας ρ_m .

Οι βαρυτικές εξισώσεις πεδίου και οι εξισώσεις κίνησης του πεδίου ϕ είναι [160]

$$FG_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(f - R F)g_{\mu\nu} + F_{,\mu;\nu} - \square F g_{\mu\nu} + \frac{1}{2} f_{,X} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + T_{\mu\nu}^{(m)} \quad (4.2)$$

$$(f_{,X} \phi^{,c})_{;c} + f_{,\phi} = 0 \quad (4.3)$$

όπου $F = \partial f / \partial R$ και $\square = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$ είναι ο τελεστής D'Alambert.

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (4.2) και (4.3) και υποθέτοντας ένα επίπεδο χωροχρόνο

FRW με παράγοντα κλίμακας $\alpha(t)$ παίρνουμε τις ακόλουθες εξισώσεις για το υπόβαθρο:

$$3FH^2 = f_{,X}X + \frac{1}{2}(FR - f) - 3H\dot{F} + \rho_m \quad (4.4)$$

$$-2F\dot{H} = f_{,X}X + \ddot{F} - H\dot{F} + \rho_m \quad (4.5)$$

$$\frac{1}{\alpha^3} \left(\alpha^3 \dot{\phi} f_{,X} \right)' - f_{,\phi} = 0 \quad (4.6)$$

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = 0 \quad (4.7)$$

όπου $H = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}$ και $R = 6(2H^2 + \dot{H})$.

Οι βαθμωτές διαταραχές $\Phi(x^\mu)$ και $\Psi(x^\mu)$ της μετρικής μπορούν να περιγραφούν στη σύμμορφη Νευτώνεια βαθμίδα (conformal Newtonian gauge) ως εξής

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + \alpha^2(1 - 2\Psi)\delta_{ij}dx^i dx^j \quad (4.8)$$

Μπορούμε να διασπάσουμε το πεδίο ϕ σε δύο μέρη, αυτό του υποβάθρου, το οποίο είναι ομογενές και εξαρτάται μόνο από το χρόνο, και το ανομοιογενές μέρος ως εξής $\phi = \tilde{\phi}(t) + \delta\phi(t, \mathbf{x})$. Επίσης, ο τανυστής ενέργειας ορμής για μη σχετικιστική ύλη μπορεί να γραφεί ως $T_0^0 = -(\rho_m + \delta\rho_m)$ και $T_\alpha^0 = -\rho_m v_{m,\alpha}$, όπου v_m είναι το δυναμικό της ταχύτητας.

Οι μετασχηματισμένες κατά Fourier εξισώσεις των διαταραχών σε πρώτη τάξη, είναι [160],[161]:

$$\begin{aligned} 3H(\dot{\Psi} + H\Phi) + \frac{k^2}{\alpha^2}\Psi + \frac{1}{2F} \left[-\frac{1}{2}(f_{,\phi}\delta\phi + f_{,X}\delta X) + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2(f_{,X\phi}\delta\phi - 3H\delta\dot{F} + \right. \\ \left. + f_{,XX}\delta X) + f_{,X}\dot{\phi}\delta\dot{\phi} + \left(3H^2 + 3\dot{H} - \frac{k^2}{\alpha^2} \right) \delta F + \right. \\ \left. + 3\dot{F}(\dot{\Psi} + H\Phi) + (3H\dot{F} - f_{,X}\dot{\phi}^2)\Phi + \delta\rho_m \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} f_{,X} \left[\delta\ddot{\phi} + \left(3H + \frac{\dot{f}_{,X}}{f_{,X}} \right) \delta\dot{\phi} + \frac{k^2}{\alpha^2}\delta\phi - \dot{\phi}(3\dot{\Psi} + \dot{\Phi}) \right] - \\ - 2f_{,\phi}\Phi + \frac{1}{\alpha^3}(\alpha^3 \dot{\phi} \delta f_{,X})' - \delta f_{,\phi} = 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\Psi = \Phi + \frac{\delta F}{F} \quad (4.11)$$

$$\delta\dot{\rho}_m + 3H\delta\rho_m = \rho_m \left(3\dot{\Psi} - \frac{k^2}{\alpha}v_m \right), \quad (4.12)$$

$$\dot{v}_m + Hv_m = \frac{1}{\alpha}\Phi \quad (4.13)$$

όπου k είναι ο ομοκινούμενος κυματάρηθος. Μπορούμε να ορίσουμε την ανεξάρτητη από βαθμίδα (covariant) διαταραχή της ύλης δ_m ως

$$\delta_m \equiv \frac{\delta\rho_m}{\rho_m} + 3Hv, \quad \mu\varepsilon \quad v \equiv \alpha v_m \quad (4.14)$$

Τότε, οι εξισώσεις (4.12) και (4.13) δίνουν

$$\dot{\delta}_m = -\frac{k^2}{\alpha^2}v + 3(\Psi + Hv) \quad (4.15)$$

$$\dot{v} = \Phi \quad (4.16)$$

από όπου παίρνουμε

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m + \frac{k^2}{\alpha^2}\Phi = 3\ddot{B} + 6H\dot{B} \quad (4.17)$$

όπου $B \equiv \Psi + Hv$.

Όπως είδαμε και στην περίπτωση της εξίσωσης (2.99), μόνο οι τρόποι ταλάντωσης που βρίσκονται βαθιά εντός της ακτίνας *Hubble* ($k^2 \gg \alpha^2 H^2$) συνεισφέρουν και οι οποίοι αντιστοιχούν στους όρους που περιέχουν τα k^2 και δ_m (ή το $\delta\rho_m$) της εξίσωσης (4.17) καθώς και στις εξισώσεις (4.9) - (4.10). Βασικά, οι όροι του δεξιού μέλους της εξίσωσης (4.17) δίνουν μια συνεισφορά της τάξης του $H^2\Psi$, το οποίο σημαίνει ότι είναι αμελητέοι σε σχέση με τον όρο $(k^2/\alpha^2)\Phi$ για τρόπους ταλάντωσης εντός της ακτίνας *Hubble* ($k^2 \gg \alpha^2 H^2$).

Τότε, η εξίσωση (4.17) σε πολύ καλή προσέγγιση δίνεται από τη σχέση

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m + \frac{k^2}{\alpha^2}\Phi \simeq 0 \quad (4.18)$$

Το επόμενο βήμα είναι να εκφράσουμε το δυναμικό Φ συναρτήσει του δ_m μέσω των εξισώσεων (4.9 - 4.13), από τις οποίες βρίσκουμε ότι

$$\frac{k^2}{\alpha^2}\Phi \simeq -\frac{\rho_m}{2F} \frac{f_{,X} + 4 \left(f_{,X} \frac{k^2}{\alpha^2} \frac{F_{,R}}{F} + \frac{F_{,\phi}^2}{F} \right)}{f_{,X} + 3 \left(f_{,X} \frac{k^2}{\alpha^2} \frac{F_{,R}}{F} + \frac{F_{,\phi}^2}{F} \right)} \delta_m \quad (4.19)$$

Έτσι, η εξίσωση (4.18) των διαταραχών της ύλης δίνει

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m - 4\pi G_{\text{eff}}\rho_m\delta_m \simeq 0 \quad (4.20)$$

όπου η ενεργός 'σταθερά' της παγκόσμιας έλξης G_{eff} , σε κλίμακες εντός του ορίζοντα *Hubble*, δίνεται από τη σχέση:

$$G_{\text{eff}} \simeq \frac{1}{8\pi F} \frac{f_{,X} + 4 \left(f_{,X} \frac{k^2}{\alpha^2} \frac{F_{,R}}{F} + \frac{F_{,\phi}^2}{F} \right)}{f_{,X} + 3 \left(f_{,X} \frac{k^2}{\alpha^2} \frac{F_{,R}}{F} + \frac{F_{,\phi}^2}{F} \right)} \quad (4.21)$$

Από την εξίσωση (4.19) το βαρυτικό δυναμικό βρίσκεται ότι είναι

$$\Phi \simeq -4\pi G_{\text{eff}} \frac{\alpha^2}{k^2} \rho_m \delta_m \quad (4.22)$$

Η προηγούμενη εξίσωση αντιστοιχεί σε μια γενικευμένη εξίσωση Poisson σε ομοκινούμενες συντεταγμένες στο χώρο Fourier.

4.2 Μοντέλα με βαθμωτά πεδία τύπου Scalar - Tensor

4.2.1 Θεωρία

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε τα μοντέλα με βαθμωτά πεδία τύπου Scalar - Tensor τα οποία έχουν πυκνότητα Λαγκρανζιανής

$$f(R, \phi, X) = F(\phi)R + 2p(\phi, X) \quad (4.23)$$

όπου ο όρος $p(\phi, X)$ περιλαμβάνει το δυναμικό αλλά και τον κινητικό όρο του πεδίου.

Πρέπει να αναφερθεί ότι η περίπτωση αυτή περιλαμβάνει τα περισσότερα από τα μοντέλα Σκοτεινής Ενέργειας με βαθμωτά πεδία, όπως με πεδία τύπου quintessence [162], k-essence [163] και με ταχυόνια [164]. Σε αυτή την περίπτωση, η ενεργός 'σταθερά' της παγκόσμιας έλξης G_{eff} δίνεται από τη σχέση

$$G_{\text{eff}} = \frac{1}{8\pi F} \frac{2p_{,X} + 4F_{,\phi}^2/F}{2p_{,X} + 3F_{,\phi}^2/F} \quad (4.24)$$

Αξίζει όμως να δούμε με περισσότερη λεπτομέρεια την πυκνότητα Λαγκρανζιανής των μοντέλων Scalar - Tensor [41],[42],[43]:

$$\mathcal{L} = \frac{F(\phi)}{2} R - \frac{1}{2} \epsilon g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - U(\phi) + \mathcal{L}_m[\psi_m; g_{\mu\nu}] \quad (4.25)$$

όπου ο όρος $\mathcal{L}_m[\psi_m; g_{\mu\nu}]$ αντιστοιχεί στην Λαγκρανζιανή της ύλης. Έχουμε θέσει $8\pi G_0 = 1$ και $\epsilon = \pm 1$ για πεδία quintessence και phantom αντίστοιχα, δηλαδή πεδία με αρνητική κινητική ενέργεια. Πρέπει ωστόσο να αναφερθεί ότι παρόλο που για την ύπαρξη καταστάσεων αρνητικής ενέργειας χρειάζεται $\epsilon = -1$, υπάρχουν και καταστάσεις θετικής ενέργειας με $\epsilon = -1$. Αυτό συμβαίνει λόγω του ότι ο κινητικός όρος του βαθμωτού πεδίου (το πεδίο με σπιν 0) δεν προέρχεται μόνο από τον προφανή όρο $(\partial_\mu \phi)^2$, αλλά και από τον όρο $F(\phi)R$, επειδή το R περιέχει δεύτερες παραγώγους ως προς το χρόνο (δες την αναφορά [43] για λεπτομέρειες). Όπως θα δούμε και στην επόμενη ενότητα, για $\epsilon = 0$ και $\phi \rightarrow R$ η Λαγκρανζιανή (4.25) μπορεί να περιγράψει και τις γενικεύσεις της Γενικής Σχετικότητας τύπου $f(R)$.

Η συνάρτηση $F(\phi)$ παρατηρησιακά έχει τα εξής όρια:

- $F(\phi) > 0$ ώστε τα γκραβιτόνια να φέρουν θετική ενέργεια [43].
- $\frac{1}{F} \left(\frac{dF}{d\phi} \right)^2 \Big|_{z=0} < \frac{1}{4} 10^{-4}$ από τις παρατηρήσεις στο ηλιακό σύστημα [165].

Σε αυτό το μοντέλο η ενεργός σταθερά της παγκόσμιας έλξης για τη δύναμη δύο σωμάτων δίνεται από τη σχέση 4.24 και είναι συγκεκριμένα

$$G_{\text{eff}} = \frac{1}{F(\phi)} \frac{F(\phi) + 2 \left(\frac{dF}{d\phi} \right)^2}{F(\phi) + \frac{3}{2} \left(\frac{dF}{d\phi} \right)^2} \simeq \frac{1}{F(\phi)} \quad (4.26)$$

όπου η προσέγγιση της εξίσωσης (4.26) ισχύει για χαμηλές ερυθρές μετατοπίσεις.

Οι γενικευμένες εξισώσεις Friedmann και η εξίσωση κίνησης του βαθμωτού σε αυτή την περίπτωση δίνονται από τις εξισώσεις (4.4), (4.5) και (4.6) και είναι [43],[42]

$$3FH^2 = \rho_m + \rho_r + \frac{1}{2}\epsilon\dot{\phi}^2 - 3H\dot{F} + U \quad (4.27)$$

$$-2F\dot{H} = \rho_m + \frac{4}{3}\rho_r + \epsilon\dot{\phi}^2 + \ddot{F} - H\dot{F} \quad (4.28)$$

ενώ η γενικευμένη εξίσωση Klein-Gordon είναι:

$$\epsilon(\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi}) = 3F(\phi)_{,\phi}(\dot{H} + 2H^2) - U(\phi)_{,\phi} \quad (4.29)$$

όπου υποθέσαμε την ύπαρξη ιδανικών ρευστών και οι όροι ρ_m , ρ_r αντιστοιχούν στην πυκνότητα ενέργειας της ύλης και της ακτινοβολίας. Αυτές διατηρούνται σύμφωνα με τις σχέσεις

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = 0 \quad (4.30)$$

$$\dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 0 \quad (4.31)$$

Οι εξισώσεις του υποβάθρου (4.27) και (4.28) μπορούν να γραφούν σε μια πιο βολική μορφή, η οποία είναι πιο εύκολο να χρησιμοποιηθεί για τη σύγκριση με τις παρατηρήσεις (δες για παράδειγμα την αναφορά [160]):

$$3F_0H^2 = \rho_{DE} + \rho_m + \rho_r, \quad (4.32)$$

$$-2F_0\dot{H} = \rho_{DE} + p_{DE} + \rho_m + \frac{4}{3}\rho_r \quad (4.33)$$

όπου θέσαμε:

$$\rho_{DE} = \frac{1}{2}\epsilon\dot{\phi}^2 - 3H^2(F - F_0) - 3H\dot{F} + U \quad (4.34)$$

$$p_{DE} = \frac{\epsilon}{2}\dot{\phi}^2 + \ddot{F} + 2H\dot{F} - U - (2\dot{H} + 3H^2)(F_0 - F) \quad (4.35)$$

και ο δείκτης '0' υποδηλώνει την παρούσα χρονική στιγμή. Η συνάρτηση ρ_{DE} μπορεί να δειχθεί ότι ικανοποιεί τη συνήθη σχέση για τη διατήρηση της ενέργειας:

$$\dot{\rho}_{DE} + 3H(\rho_{DE} + p_{DE}) = 0 \quad (4.36)$$

όπου η καταστατική εξίσωση της Σκοτεινής Ενέργειας ορίζεται ως

$$w_{DE} \equiv \frac{p_{DE}}{\rho_{DE}} = -1 + \frac{\epsilon\dot{\phi}^2 + \ddot{F} - H\dot{F} - 2\dot{H}(F_0 - F)}{\frac{1}{2}\epsilon\dot{\phi}^2 - 3H^2(F - F_0) - 3H\dot{F} + U} \quad (4.37)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (4.32) και (4.33) μπορούμε να εκφράσουμε την καταστατική εξίσωση $w_{DE}(z)$ ως

$$w_{DE} = -\frac{3E(z) - (1+z)(dE(z)/dz)}{3E(z) - 3\Omega_m^{(0)}(1+z)^3} \quad (4.38)$$

όπου θέσαμε $E(z) \equiv H^2(z)/H_0^2$. Η σχέση αυτή είναι ακριβώς η ίδια με την αντίστοιχη της Γενικής Σχετικότητας [166] και συνεπώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί με τα δεδομένα των υπερκαινοφανών αστέρων με τον ίδιο τρόπο.

4.2.2 Το πρόβλημα της PDL στα πλαίσια Scalar - Tensor θεωριών και ενδείξεις για έξιτρα φυσική

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, αν και τα δεδομένα δείχνουν μια έντονη προτίμηση για διάσχιση της γραμμής $w = -1$, γνωστή στη βιβλιογραφία ως Phantom Divide Line - PDL, αυτό δεν εξηγείται με φυσικό τρόπο στα πλαίσια απλών επεκτάσεων της Γενικής Σχετικότητας. Αντίθετα, αυτό μπορεί να γίνει πολύ εύκολα στα πλαίσια των Scalar - Tensor θεωριών.

Αν εκφράσουμε τις χρονικές παραγώγους συναρτήσεϊ της ερυθρής μετατόπισης και απαλείψουμε το δυναμικό U από τις εξισώσεις (4.27) και (4.28) παίρνουμε [43],[154]

$$\begin{aligned} \phi'^2 = & -F'' - \left[(\ln H)' + \frac{2}{1+z} \right] F' + 2 \frac{(\ln H)'}{1+z} F - \\ & -3(1+z)\Omega_{0m} \left(\frac{H_0}{H} \right)^2 F_0 > 0 \end{aligned} \quad (4.39)$$

όπου το ' υποδηλώνει παραγωγή ως προς την ερυθρή μετατόπιση, το F_0 έχει την τιμή 1 σε μονάδες $\frac{1}{8\pi G_N}$ και αντιστοιχεί στην παρούσα τιμή της σύζευξης F . Στο όριο της ελάχιστης σύζευξης ($F = 1$) η εξίσωση (4.39) γίνεται

$$\phi'_{mc}{}^2(H) = 2 \frac{(\ln H)'}{1+z} - 3(1+z)\Omega_{0m} \left(\frac{H_0}{H} \right)^2 > 0 \quad (4.40)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.32) είναι εύκολο να δείξουμε ότι η ανισότητα (4.40) ισοδυναμεί με $w(z) > -1$, το οποίο επιβεβαιώνει το ότι ένα ελάχιστα συζευγμένο βαθμωτό πεδίο δεν μπορεί να διασχίσει την PDL. Ωστόσο, αυτό για τις Scalar - Tensor θεωρίες δεν ισχύει λόγω της δυναμικής εξέλιξης του F στην εξίσωση (4.39), η οποία μπορεί να γραφεί ως

$$\phi'^2(F, H) = \phi'_{mc}{}^2(H) - \Delta(F, H) > 0 \quad (4.41)$$

όπου

$$\Delta(F, H) = F'' + \left[(\ln H)' + \frac{2}{1+z} \right] F' + 2 \frac{(\ln H)'}{1+z} (1-F) \quad (4.42)$$

Συνεπώς, ο περιορισμός ότι $\phi'_{mc}{}^2(H) > 0$ αντικαθίσταται στις Scalar - Tensor θεωρίες με τον $\phi'_{mc}{}^2(H) > \Delta(F, H)$. Έτσι, με την κατάλληλη επιλογή του F ώστε να ισχύει $\Delta(F, H) < 0$ μπορούμε να έχουμε διάσχιση της PDL.

Όμως, προκύπτει η εξής σημαντική ερώτηση: ‘Αν τα παρατηρησιακά δεδομένα για την F επιτρέπουν το $\Delta(F, H) < 0$;' Η απάντηση σε αυτή την ερώτηση είναι θετική, όπως εύκολα μπορούμε να δούμε αν λάβουμε υπόψη το ότι οι παρατηρήσεις που γίνονται την παρούσα χρονική στιγμή ($z = 0$) [167] (και συγκεκριμένα αυτές του ηλιακού συστήματος[165]) είναι πολύ αυστηρές, απαιτώντας $F'(z) \simeq 0$, αλλά δεν θέτουν κάποιο όριο στην δεύτερη παράγωγο $F''(z = 0)$. Θέτοντας $z = 0$, $F = F_0 = 1$, $F' = 0$ στην εξίσωση (4.39) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \left(\frac{H^2}{H_0^2}\right)'(z = 0) &> 3\Omega_{0m} + F''(z = 0) \\ \implies w(z = 0) + 1 &> \frac{F''(z = 0)}{3(1 - \Omega_{0m})} \end{aligned} \quad (4.43)$$

όπου έγινε χρήση της εξίσωσης (3.32). Εφόσον δεν υπάρχει κάποιο όριο για το $F''(z = 0)$ μπορούμε να υποθέσουμε κάλλιστα ότι $F''(z = 0) < 0$, κάτι το οποίο επιτρέπει $w(z = 0) < -1$ και συνεπώς την διάσχιση της PDL.

Είναι εύκολο να γίνει κατανοητή η συμπεριφορά του F που απαιτείται για την διάσχιση της PDL. Η εξίσωση (4.42) υπονοεί ότι μπορούμε να ικανοποιήσουμε την ανισότητα $\Delta(H, F) < 0$ (και να έχουμε συνεπώς $w < -1$) αν ισχύει $F'' < 0$, $F' < 0$ και $F > 1$. Επειδή ισχύει $F \sim G_{eff}^{-1}$, η συμπεριφορά αυτή υποδηλώνει ότι η ενεργός σταθερά της παγκόσμιας έλξης αυξάνει με την ερυθρή μετατόπιση ($G''_{eff} > 0$, $G'_{eff} > 0$) και συνεπώς μειώνεται με τον χρόνο ($\ddot{G}_{eff} < 0$, $\dot{G}_{eff} < 0$, $G_{eff}(t) > G_{eff}(t_0)$) βοηθώντας έτσι την επιταχυνόμενη διαστολή που προκαλείται από το δυναμικό U . Αυτή η συγκεκριμένη συμπεριφορά είχε επιβεβαιωθεί και με ένα συγκεκριμένο παράδειγμα για τα $F(z)$, $U(z)$ στην αναφορά [154], τα οποία αντιστοιχούν σε συναρτήσεις $H(z) - w(z)$ που διασχίζουν την PDL. Θα πρέπει να τονίσουμε ωστόσο ότι μοντέλα του G_{eff} που είναι μονοτονικές συναρτήσεις του χρόνου, π.χ. $G_{eff}(t) \sim t^{-\alpha}$ όπου $\alpha > 0$, μπορεί να οδηγήσουν σε υπερβολικά αυστηρά όρια για τις παρούσες τιμές των G'_{eff} και G''_{eff} χρησιμοποιώντας τα όρια από την πυρηνοσύνθεση [168] (αν και στην αναφορά [169] περιγράφονται μερικοί τρόποι για την χαλάρωση αυτών των τόσο αυστηρών ορίων).

4.2.3 Χρονικά εξαρτώμενη σταθερά της παγκόσμιας έλξης G_N

Προσδιορισμός της $G_N(t)$ με χρήση των δεδομένων SNIa

Όπως είδαμε σε προηγούμενη ενότητα, μια πολύ σημαντική πρόβλεψη των Scalar - Tensor θεωριών είναι ότι η σταθερά της παγκόσμιας έλξης G_N είναι χρονικά εξαρτώμενη. Αυτή η χαρακτηριστική πρόβλεψη των θεωριών αυτών έχει με τη σειρά της ως συνέπεια το ότι οι υπερκαινοφανείς αστέρες τύπου Ia δεν μπορούν να θεωρηθούν ως καθιερωμένα κεριά. Ωστόσο, τα δεδομένα αυτά μπορούν ακόμα να είναι χρήσιμα. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ταυτόχρονη προσαρμογή των $H(z)$ και $G(z)$, με την προϋπόθεση βέβαια ότι και τα τοπικά όρια του $G(z)$ ικανοποιούνται, στα πλαίσια κατάλληλων μοντέλων. Στην ενότητα αυτή θα δούμε πως αυτή η μέθοδος είναι δυνατή, χρησιμοποιώντας τη στο Gold σετ. Επίσης, θα συγκρίνουμε την ενεργό καταστατική εξίσωση $w(z)$ από την προσαρμογή των δεδομένων, με αυτή που προκύπτει αν αγνοήσουμε την εξέλιξη του $G(z)$.

Η εξέλιξη της σταθεράς της παγκόσμιας έλξης μας αναγκάζει να δείξουμε ιδιαίτερη προσοχή κατά την σύγκριση των προβλέψεων των γενικευμένων θεωριών της βαρύτητας με τις παρατηρήσεις [170], καθώς η εξέλιξη αυτή αλλάζει αισθητά την φυσική των υπερκαινοφανών αστέρων [171],[172],[173],[174]. Η παρατηρούμενη σχέση μεταξύ του φαινομένου μεγέθους και της ερυθρής μετατόπισης μπορεί να μεταφραστεί στη σχέση της απόστασης λαμπρότητας και ερυθρής μετατόπισης (η οποία μπορεί να οδηγήσει στην εύρεση της $H(z)$) μόνο με την υπόθεση ότι οι υπερκαινοφανείς αστέρες μπορούν να θεωρηθούν ως καθιερωμένα κεριά. Η υπόθεση αυτή δικαιολογείται από το γεγονός ότι οι παρατηρούμενες καμπύλες φωτός των κοντινών υπερκαινοφανών αστέρων είναι πολύ καλά κατανοητές και οι όποιες διαφορές μεταξύ τους μπορούν εύκολα να εξηγηθούν. Παρόλα αυτά, καθώς η επιταχυνόμενη διαστολή του σύμπαντος βασίζεται στο γεγονός ότι η μέγιστη λαμπρότητα των μακρινών υπερκαινοφανών αστέρων φαίνεται πως είναι ~ 0.20 μεγέθη μικρότερη από την πρόβλεψη του μοντέλου του άδειου σύμπαντος και περίπου ~ 0.25 μεγέθη μικρότερη από ό,τι για ένα επιβραδυνόμενο σύμπαν με $\Omega_{0m} = 0.3$, είναι ξεκάθαρο ότι ακόμα και τα πιο μικρά αλλά ανεξήγητα φαινόμενα εξέλιξης των υπερκαινοφανών αστέρων μπορούν δραστικά να αλλάξουν την τρέχουσα αντίληψή μας για το επιταχυνόμενο σύμπαν. Οι πιθανές συνέπειες των φαινομένων εξέλιξης των υπερκαινοφανών αστέρων, λόγω της ποσότητας μετάλλων του προγονικού αστεριού (progenitor star), έχουν προηγουμένως μελετηθεί [175] και βρέθηκε ότι αλλαγές στον πληθυσμό των υπερκαινοφανών αστέρων μεταβάλλουν την μέγιστη φωτεινότητα κατά $0.1 - 0.2$ μεγέθη περίπου.

Τα αντίστοιχα φαινόμενα εξέλιξης, λόγω της εξέλιξης του G στις scalar tensor θεωρίες, έχουν επίσης μελετηθεί [174],[172]. Η μέγιστη λαμπρότητα του υπερκαινοφανούς αστέρα είναι ανάλογη [173] της μάζας του νικελίου που παράγεται στον αστέρα, το οποίο είναι ένα σταθερό ποσοστό της μάζας Chandrasekhar M_{Ch} , η οποία εξαρτάται από τη σταθερά της παγκόσμιας έλξης ως $M_{Ch} \sim G^{-3/2}$. Συνεπώς, η μέγιστη λαμπρότητα του υπερκαινοφανούς αστέρα εξαρτάται από την σταθερά της παγκόσμιας έλξης ως $L \sim G^{-3/2}$ και το αντίστοιχο απόλυτο μέγεθος εξελίσσεται ως

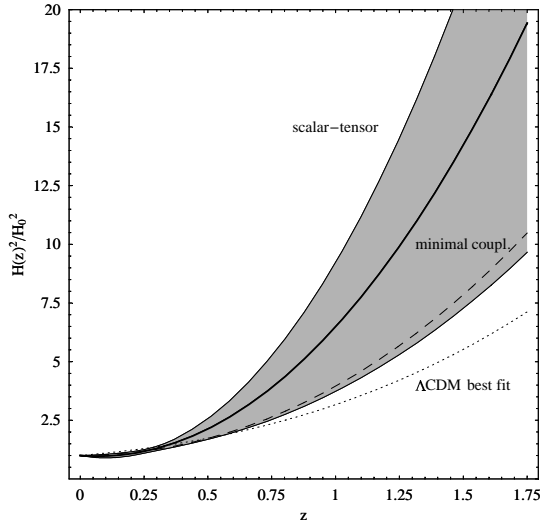
$$M - M_0 = \frac{15}{4} \log \frac{G}{G_0} \quad (4.44)$$

όπου ο δείκτης 0 υποδηλώνει τις τοπικές τιμές των M και G . Έτσι, η σχέση φαινομένου μεγέθους και ερυθρής μετατόπισης στα πλαίσια γενικευμένων θεωριών βαρύτητας συνδέεται με την απόσταση λαμπρότητας $d_L(z)$ ως

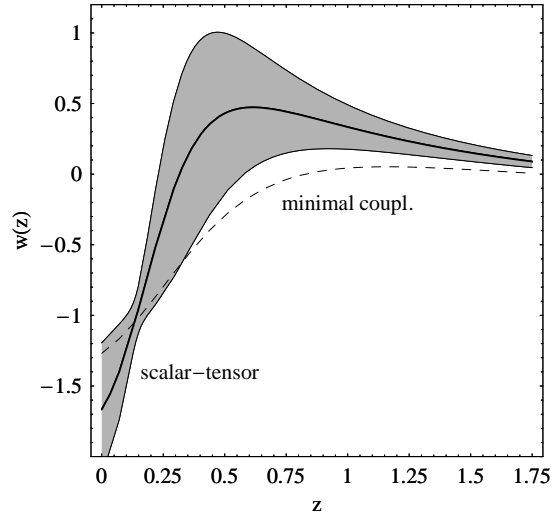
$$m_{th}(z) = M_0 + 5 \log d_L(z) + \frac{15}{4} \log \frac{G(z)}{G_0} \quad (4.45)$$

Στο όριο που το G είναι σταθερό, η (4.45) καταλήγει στη γνωστή της μορφή. Όμως, στις scalar tensor θεωρίες [43] ισχύει ότι

$$\frac{G(z)}{G_0} = \frac{1}{F} \frac{2F + 4(dF/d\phi)^2}{2F + 3(dF/d\phi)^2} \simeq \frac{1}{F} \quad (4.46)$$



Σχήμα 4.1: Η συνάρτηση $H(z)$ από την προσαρμογή των δεδομένων στις τρεις περιπτώσεις: τη scalar tensor θεωρία (συνεχής γραμμή), την ελάχιστα συζευγμένη περίπτωση (διακεκομμένη γραμμή) και για το Λ CDM μοντέλο (τελείες).



Σχήμα 4.2: Η καταστατική εξίσωση $w(z)$ για τη scalar tensor θεωρία (συνεχής γραμμή) και για την ελάχιστα συζευγμένη περίπτωση (διακεκομμένη γραμμή). Η γκριζα περιοχή αντιστοιχεί στην 1σ περιοχή.

με τις παρατηρήσεις στο ηλιακό σύστημα [176], [165] να υποδηλώνουν ότι $\frac{dF(\phi)}{d\phi} \sim \frac{dF(z)}{dz} \simeq 0$. Υποθέτοντας επιπεδότητα, η $H(z)$ μπορεί να βρεθεί από τη σχέση

$$d_L(z) = (1+z) \int_0^z dz' \sqrt{\frac{G_0}{G(z')} \frac{1}{H(z')}} \quad (4.47)$$

Έτσι, αν προσαρμόσουμε την m_{th} της σχέσης (4.45) στο Gold04 σετ [50] και χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (4.46) και (4.47), μπορούμε να βρούμε τις συναρτήσεις $H(z)$ και $G(z)$ υποθέτοντας τις κατάλληλες για αυτές παραμετροποιήσεις. Πρέπει να αναφέρουμε ότι αν και η γενικευμένη σχέση φαινομένου μεγέθους και ερυθρής μετατόπισης (4.45) είναι γνωστή εδώ και αρκετό καιρό [172], δεν είχε χρησιμοποιηθεί προηγουμένως σε μελέτες για τη σύγκριση των γενικευμένων θεωριών βαρύτητας με τα δεδομένα των υπερκαινοφανών αστέρων.

Για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε τα δεδομένα με τη σχέση (4.45) πρέπει να θεωρήσουμε κατάλληλες παραμετροποιήσεις των συναρτήσεων $H(z)$ και $G(z)$, τις οποίες επιλέγουμε να είναι της μορφής

$$H^2(z) = H_0^2 \{ \Omega_{0m} (1+z)^3 + a_1 (1+z) + a_2 (1+z)^2 + (1 - \Omega_{0m} - a_1 - a_2) \} \quad (4.48)$$

$$G(z) = G_0 (1 + a z^2) \quad (4.49)$$

όπου αγνοήθηκε ο γραμμικός όρος λόγω των παρατηρησιακών ορίων στο ηλιακό σύστημα [165]. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.48) και (4.49) ελαχιστοποιήσαμε το χ^2 της εξίσωσης (2.28) χρησιμοποιώντας τα 157 δεδομένα του Gold04 σετ και τις εξισώσεις (4.45), (4.47). Επίσης, χρησιμοποιήθηκε η τιμή $\Omega_{0m} = 0.23$ [29] και επιβεβαιώθηκε το ότι τα αποτελέσματα δεν επηρεάζονται πολύ από την τιμή του Ω_{0m} στο εύρος $0.18 < \Omega_{0m} < 0.32$. Το ελάχιστο είναι $\chi^2 = 173.045$ και βρίσκεται για $a_1 = -12.35 \pm 8.55$, $a_2 = 5.41 \pm 3.82$ και $a = 0.05 \pm 0.04$. Τα αποτελέσματα αυτά συγκρίθηκαν με την αντίστοιχη ελάχιστη συζευγμένη περίπτωση που ισοδυναμεί με $a = 0$, θέτοντας έτσι $G(z) = G_0$ για κάθε χρονική στιγμή. Το αντίστοιχο ελάχιστο είναι $\chi^2 = 174.168$ για $a_1 = -4.54 \pm 2.52$, $a_2 = 1.96 \pm 1.09$.

Οι συναρτήσεις $H(z)$, $w(z)$ και $F(z) = \frac{1}{G(z)}$ και για τις δύο περιπτώσεις, τη scalar tensor θεωρία (συνεχής γραμμή) και την ελάχιστη συζευγμένη περίπτωση (διακεκομμένη γραμμή) φαίνονται στα σχήματα 4.1, 4.2 και 4.3 μαζί με την 1σ (γκρίζα) περιοχή σφάλματος για την καμπύλη της scalar tensor θεωρίας.

Ένα ενδιαφέρον χαρακτηριστικό του σχήματος 4.3 είναι η σχετικά μεγάλη (περίπου 15%) κοσμολογική μεταβολή της σταθερά της παγκόσμιας έλξης. Στην αναφορά [167] έχει αποδειχθεί ότι τα όρια που βρέθηκαν από την Κοσμική Ακτινοβολία Μικροκυμάτων Υποβάθρου και από την έρευνα SDSS για την κατανομή της ύλης σε μεγάλη κλίμακα επιτρέπουν στην σταθερά της παγκόσμιας έλξης να μεταβάλλεται κατά ένα παράγοντα 2 σε κοσμολογικές κλίμακες. Η μεταβολή στην παράμετρο αυτή που βρέθηκε από τη μελέτη μας είναι περίπου 15% και είναι εντός των παραπάνω ορίων.

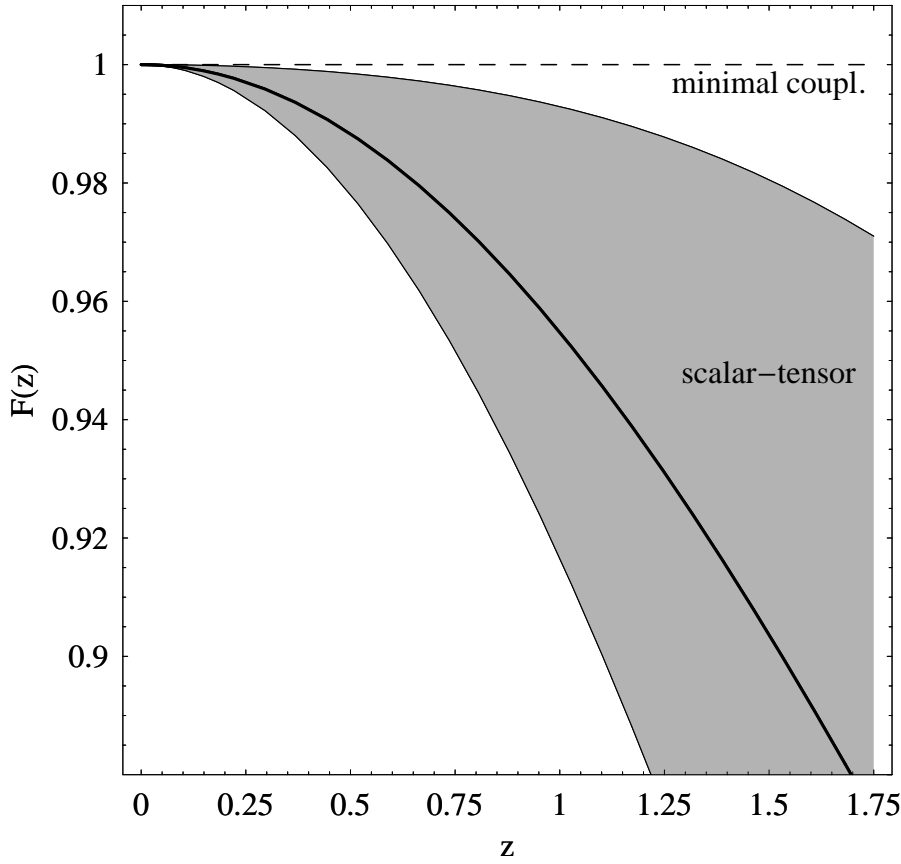
Επίσης, είναι ξεκάθαρο το ότι η καταστατική εξίσωση $w(z)$ διασχίζει την γραμμή $w = -1$ και στις δύο περιπτώσεις, της scalar tensor θεωρίας και της ελάχιστη συζευγμένης περίπτωσης, στη θέση $z \simeq 0.2$. Όπως έχουμε ήδη δει, η διάσχιση της PDL φαίνεται να προτιμάται από το Gold σετ [123] αλλά όχι από το SNLS. Ωστόσο, στην περίπτωση της scalar tensor θεωρίας η $w(z)$ δεν έχει τη συνήθη της ερμηνεία ως καταστατική εξίσωση της Σκοτεινής Ενέργειας, αλλά απλά είναι μια βοηθητική συνάρτηση ορισμένη συναρτήσει της $H(z)$, σύμφωνα με την εξίσωση (4.38). Έτσι, χρησιμοποιούμε την $w(z)$ ως ένα εναλλακτικό τρόπο απεικόνισης της $H(z)$ για ευκολία στη σύγκριση με άλλες μελέτες Σκοτεινής Ενέργειας.

Ακόμη, ένας επιπλέον λόγος για την φαινομενικά περίεργη συμπεριφορά της καταστατικής εξίσωσης είναι ότι το συγκεκριμένο μοντέλο (4.48), στην περίπτωση της ελάχιστης σύζευξης ($\alpha = 0$) μπορεί ναδειχθεί ότι ισοδυναμεί με το άθροισμα δύο ιδανικών ρευστών Σκοτεινής Ενέργειας. Σύμφωνα με την εξίσωση (3.90) η καταστατική εξίσωση φαίνεται ότι μπορεί να παρεμβάλει μεταξύ των τιμών $w = w_1$ (για $\alpha \ll 1$) και $w = w_2$ (για $\alpha \gg 1$), διασχίζοντας έτσι την γραμμή $w = -1$.

Οι συναρτήσεις $F(z)$ και $H(z)$ μπορούν τώρα να χρησιμοποιηθούν [154] (και αναφορές εκεί) με τις εξισώσεις πεδίου που βρέθηκαν από τη Λαγκρανζιανή (4.25) για να ανακατασκευαστούν το δυναμικό $U(z)$ και ο κινητικός όρος του πεδίου $\dot{\phi}(z)^2$. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (4.27), (4.28) και (4.29), με $\epsilon = 1$ και αγνοώντας την ακτινοβολία ρ_r , μπορούμε να απαλείψουμε τον όρο $\dot{\phi}^2$ από την (4.28). Θέτοντας

$$q(z) \equiv H(z)^2/H_0^2 \quad (4.50)$$

με $U \rightarrow U \cdot H_0^2$, ενώ ταυτόχρονα εκφράζουμε τις χρονικές παραγώγους συναρτήσεων της



Σχήμα 4.3: Η συνάρτηση $F(z) = 1/G(z)$ για τη scalar tensor θεωρία (συνεχής γραμμή) και την ελάχιστα συζευγμένη περίπτωση (διακεκομμένη γραμμή). Λόγω των παρατηρησιακών ορίων η $F(z)$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο την παρούσα χρονική στιγμή.

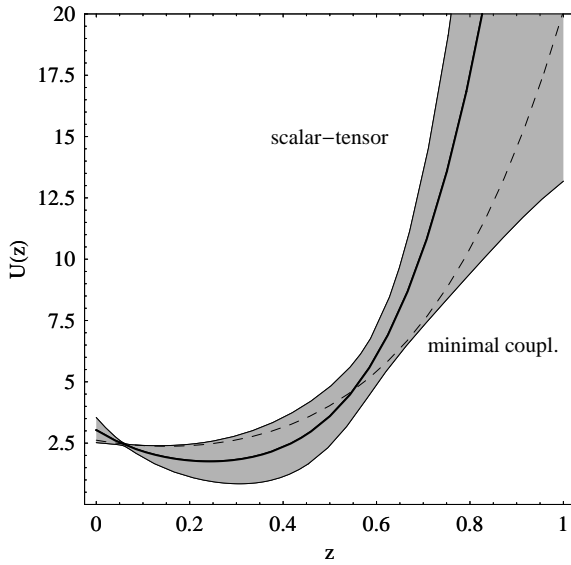
ερυθρής μετατόπισης z , προκύπτει ότι

$$F'' + \left[\frac{q'}{2q} - \frac{4}{1+z} \right] F' + \left[\frac{6}{(1+z)^2} - \frac{2}{(1+z)} \frac{q'}{2q} \right] F = \frac{2U}{(1+z)^2 q^2} + 3 \frac{1+z}{q^2} \Omega_{0m} \quad (4.51)$$

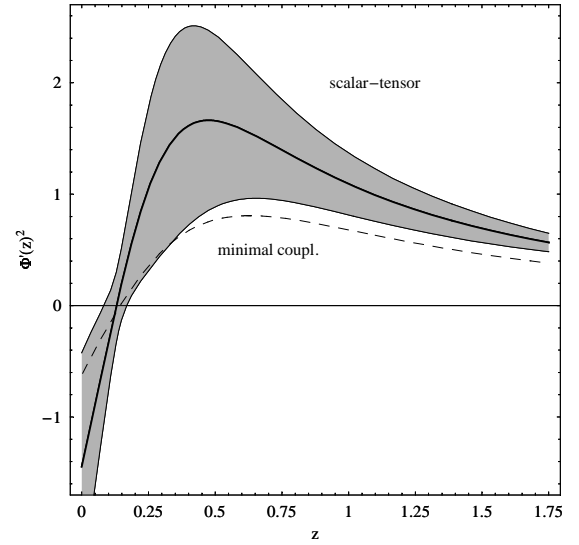
$$\phi'^2 = -\frac{6F'}{1+z} + \frac{6F}{(1+z)^2} - \frac{2U}{(1+z)^2 q^2} - 6 \frac{1+z}{q^2} \Omega_{0m} \quad (4.52)$$

όπου το ' αντιστοιχεί σε παραγωγή ως προς την ερυθρή μετατόπιση ($\frac{d}{dz}$) και για την ύλη έχουμε υποθέσει $p = 0$, $\Omega_{0m} = \frac{3\rho_{0m}}{H_0^2}$.

Έχοντας βρει τις $F(z)$ και $H(z)$ από τις παρατηρήσεις, οι εξισώσεις (4.51) και (4.52) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ανακατασκευή των $U(z)$ και $\phi'(z)^2$. Αυτές ισοδύναμα δίνουν τις συναρτήσεις $H(z)$ ($q(z)$) και $F(z)$ και για τις δύο περιπτώσεις, της scalar tensor



Σχήμα 4.4: Η εξέλιξη του δυναμικού με την ερυθρή μετατόπιση για τις συναρτήσεις $H(z)$ και $F(z)$ για τη scalar tensor θεωρία (συνεχής γραμμή) και την ελάχιστα συζευγμένη περίπτωση (διακεκομμένη γραμμή).



Σχήμα 4.5: Η εξέλιξη του κινητικού όρου με την ερυθρή μετατόπιση για τις συναρτήσεις $H(z)$ και $F(z)$ για τη scalar tensor θεωρία (συνεχής γραμμή) και την ελάχιστα συζευγμένη περίπτωση (διακεκομμένη γραμμή).

θεωρίας και της αντίστοιχης ελάχιστα συζευγμένης. Το δυναμικό και ο κινητικός όρος φαίνονται στα σχήματα 4.4 και 4.5 αντίστοιχα.

Ένα ενδιαφέρον χαρακτηριστικό του σχήματος 4.5 είναι η αλλαγή του προσήμου του κινητικού όρου $\dot{\phi}^2(z)$ που προβλέπεται και από τις δύο θεωρίες (για τις παραμέτρους από την προσαρμογή στα δεδομένα) στην ερυθρή μετατόπιση $z \simeq 0.2$ (στο ίδιο σημείο γίνεται και η διάσχιση της PDL). Αυτό δημιουργεί μια σημαντική πρόκληση και για τις δύο θεωρίες. Ενώ αυτό το πρόβλημα ήταν γνωστό για τις θεωρίες με ένα ελάχιστα συζευγμένο βαθμωτό πεδίο, αναμενόταν ότι οι scalar tensor θεωρίες, οι οποίες μπορούν να διασχίζουν την PDL με συνεπή τρόπο [154],[42], δεν θα έπασχαν από αυτό το πρόβλημα.

4.2.4 Όρια στην 2η χρονική παράγωγο του $G_N(t)$

Οι προσπάθειες για να αντικατασταθεί η κοσμολογική σταθερά από ένα ελάχιστα συζευγμένο βαθμωτό πεδίο (*Minimally Coupled Quintessence* ή *MCQ*) έχουν οδηγήσει σε μοντέλα με ένα πολύ μεγάλο αριθμό παραμέτρων κάτι το οποίο οφείλεται στην αυθαιρεσία του δυναμικού. Παρόλα αυτά, τα μοντέλα της quintessence προβλέπουν ένα μικρό αριθμό διαφορετικών μορφών για την $H(z)$ [42],[154]. Αυτό το γεγονός είναι ευπρόσδεκτο καθώς παρέχει τρόπους για να απορριφθεί ή να επιβεβαιωθεί αυτή η θεωρία. Μία γενίκευση αυτής της θεωρίας, όπως έχουμε δει, είναι οι scalar-tensor theories [43],[42],[154] γνωστές και

ως (*Extended Quintessence* ή *EXQ* [177]). Αν και αυτή η ομάδα θεωριών έχει ισχυρή θεωρητική βάση, καθώς προβλέπεται ως το όριο για χαμηλές ενέργειες από πολλές από τις θεωρίες που προσπαθούν να χβαντώσουν τη βαρύτητα και να την ενοποιήσουν με τις άλλες δυνάμεις, ο παραμετρικός της χώρος είναι ακόμα πιο μεγάλος από τον αντίστοιχο της *MCQ*, με τον τελευταίο να είναι μια ειδική περίπτωση της *EXQ*. Είδαμε ότι τοπικές, από το ηλιακό σύστημα, και κοσμολογικές παρατηρήσεις περιορίζουν τον επιτρεπόμενο παραμετρικό χώρο να είναι κοντά στη Γενική Σχετικότητα. Ωστόσο, οι επιτρεπόμενες συναρτησιακές μορφές που επιτρέπονται από την *EXQ* είναι σημαντικά πιο πολλές από αυτές που επιτρέπονται από την *MCQ*. Έτσι, η λεπτομερής αναγνώριση των απαγορευμένων συναρτησιακών μορφών του $H(z)$ και για τις δύο κατηγορίες θεωριών *MCQ* και *EXQ* είναι εξαιρετικά σημαντική, αφού θα μπορεί να επιτρέψει στις μελλοντικές παρατηρήσεις που προσδιορίζουν την $H(z)$ να αποκλείσουν μία ή και τις δύο από αυτές τις θεωρίες.

Προηγούμενες μελέτες [178] είχαν κυρίως εστιαστεί στα όρια του $H(z)$ της *MCQ* χρησιμοποιώντας ένα συνδυασμό από επιχειρήματα ρεαλιστικότητας και αριθμητικές προσομοιώσεις διαφόρων ομάδων δυναμικών. Ο παραμετρικός χώρος του $H(z)$ στην περιοχή της χαμηλής ερυθρής μετατόπισης είχε χωριστεί σε τρεις περιοχές: μια απαγορευμένη περιοχή που δεν μπορεί να αντιστοιχεί σε κανένα ρεαλιστικό μοντέλο, μια περιοχή που αντιστοιχεί στο σενάριο της *παγωμένης quintessence* και μια περιοχή που αντιστοιχεί στο σενάριο της *ξεπαγωμένης quintessence*. Στην περίπτωση της *παγωμένης quintessence*, το πεδίο ϕ , το οποίο ήδη κυλούσε προς το ελάχιστο του δυναμικού του πριν από την έναρξη της επιταχυνόμενης διαστολής, αρχίζει να επιβραδύνει ($\dot{\phi} < 0$) και τελικά σταματά (*παγώνει*) μιμούμενο την κοσμολογική σταθερά καθώς κυριαρχεί στο σύμπαν. Αντίθετα στην περίπτωση της *ξεπαγωμένης quintessence*, το πεδίο ϕ είχε αρχικά σταματήσει λόγω της τριβής Hubble, που αντιστοιχεί στον όρο $3H\dot{\phi}$ στην εξίσωση (4.29), σε μια τιμή μετατοπισμένη από το ελάχιστο μέχρι πρόσφατα, οπότε και *ξεπαγώνει* και αρχίζει να κυλά προς το ελάχιστο ($\dot{\phi} > 0$).

Σε αυτή την ενότητα θα επεκτείνουμε αυτή την ανάλυση στην περίπτωση της *EXQ*. Ωστόσο, αντί να χρησιμοποιήσουμε αριθμητικές προσομοιώσεις, οι οποίες εφαρμόζονται σε συγκεκριμένες ομάδες δυναμικών, θα χρησιμοποιήσουμε γενικά επιχειρήματα απαιτώντας την εσωτερική (μαθηματική και φυσική) συνέπεια της θεωρίας. Έτσι η απαγορευμένη περιοχή, όταν είμαστε στο όριο της *MCQ*, είναι μικρότερη αλλά πιο γενική (μπορεί να εφαρμοστεί σε μεγαλύτερη ομάδα μοντέλων) από αυτόν της αναφοράς [178].

Το μέγεθος και η θέση των περιοχών για χαμηλή ερυθρά μετατόπιση z του παραμετρικού χώρου της $H(z)$, εξαρτάται σημαντικά από τις χρονικές παραγώγους στην παρούσα χρονική στιγμή στην σταθερά της παγκόσμιας έλξης $G(t)$ και στο όριο της *MCQ*, δηλαδή για $G(t) = G_0 = \text{const}$, τείνει στα γνωστά αποτελέσματα. Συνεπώς, αναπτύσσεται μια ενδιαφέρουσα σχέση μεταξύ των τοπικών βαρυτικών ορίων στις χρονικές παραγώγους του $G(t)$ (π.χ. του $\frac{\dot{G}_0}{G_0}$ ή του $\frac{\ddot{G}_0}{G_0}$) και των κοσμολογικών παρατηρήσεων της $H(z)$ σε χαμηλές ερυθρές μετατοπίσεις. Για παράδειγμα, το όριο στις σχέσεις $\frac{\dot{G}_0}{G_0}$ και $\frac{\ddot{G}_0}{G_0}$ από τις τοπικές παρατηρήσεις (στο Ηλιακό σύστημα) ορίζει τον απαγορευμένο τομέα στις παραμέτρους του αναπτύγματος χαμηλής ερυθρής μετατόπισης του $H(z)$ ² στα πλαίσια της *EXQ*. Αν αυτές οι παράμετροι μετρηθούν και βρεθούν να είναι στην απαγορευμένη περιοχή τότε η *EXQ* μπορεί να απορριφθεί. Εναλλακτικά, αν οι παράμετροι αυτοί βρεθούν στην απαγορευμένη

περιοχή της MCQ αλλά στην επιτρεπόμενη της EXQ (είτε 'παγωμένης' ή 'ξεπαγωμένης'), τότε αυτό θα μπορούσε να αποκλείσει την MCQ υπέρ της EXQ . Όπως θα δείξουμε παρακάτω, τα υπάρχοντα παρατηρησιακά όρια της $H(z)$ δείχνουν μια σημαντική επικάλυψη μεταξύ των επιτρεπόμενων περιοχών των MCQ και EXQ . Αυτό ωστόσο μπορεί κάλλιστα να αλλάξει στο μέλλον καθώς θα υπάρχουν πιο ακριβή δεδομένα για την $H(z)$ και τις χρονικές παραγώγους του $G(t)$.

Εκφράζοντας τις παραγώγους συναρτήσεως της ερυθρής μετατόπισης και απαλείφοντας το δυναμικό U από τις εξισώσεις (4.27) και (4.28) βρίσκουμε [43],[154]

$$\phi'^2 = -F'' - \left[(\ln H)' + \frac{2}{1+z} \right] F' + 2 \frac{(\ln H)'}{1+z} F - 3(1+z)\Omega_{0m} \left(\frac{H_0}{H} \right)^2 F_0 \quad (4.53)$$

όπου το ' υποδηλώνει παράγωγο ως προς την ερυθρή μετατόπιση και το F_0 έχει την τιμή 1 σε μονάδες $\frac{1}{8\pi G_0}$ και αντιστοιχεί στην παρούσα τιμή του F . Εναλλακτικά, εκφράζοντας πάλι τις παραγώγους συναρτήσεως της ερυθρής μετατόπισης, αλλά αυτή τη φορά απαλείφοντας τον κινητικό όρο ϕ'^2 από τις εξισώσεις (4.27) και (4.28) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} U = & \frac{(1+z)^2 H^2}{2} \left[F'' + \left[(\ln H)' - \frac{4}{1+z} \right] F' + \right. \\ & + \left. \left[\frac{6}{(1+z)^2} - \frac{2}{1+z} (\ln H)' \right] F - \right. \\ & \left. - 3(1+z) \left(\frac{H_0}{H} \right)^2 F_0 \Omega_{m,0} \right] \end{aligned} \quad (4.54)$$

Σε τελείως καθαρά θεωρητικό επίπεδο ισχύουν οι ακόλουθες εντελώς γενικές ανισότητες:

$$\phi'(z)^2 > 0 \quad (4.55)$$

$$U'(z) > 0 \quad (4.56)$$

$$(\phi'(z)^2)' > 0 \quad (\text{παγωμένο}) \quad (4.57)$$

$$(\phi'(z)^2)' < 0 \quad (\text{ξεπαγωμένο}) \quad (4.58)$$

Η ανισότητα (4.55) είναι γενική και απλά υποδηλώνει ότι το βαθμωτό πεδίο στις scalar-tensor θεωρίες είναι πραγματικό, καθώς σχετίζεται άμεσα με μια παρατηρήσιμη ποσότητα (την σταθερά της παγκόσμιας έλξης). Η ανισότητα (4.56) είναι επίσης πολύ γενική, καθώς υποδηλώνει ότι το βαθμωτό πεδίο κατεβαίνει (και δεν ανεβαίνει) το δυναμικό του. Η ανισότητα αυτή δεν είναι τόσο ισχυρή όσο η (4.55) καθώς υπονοεί την ύπαρξη ενός μονοτονικού δυναμικού. Τέλος, η ανισότητα (4.57) (ή (4.58)) χαρακτηρίζει ένα βαθμωτό πεδίο το οποίο επιβραδύνει (ή επιταχύνει) καθώς κατεβαίνει το δυναμικό του, αντιστοιχώντας έτσι σε ένα παγωμένο (ή ξεπαγωμένο) μοντέλο quintessence.

Αφού μας ενδιαφέρουν οι παρατηρησιακές συνέπειες των εξισώσεων (4.55) - (4.58) σε χαμηλή ερυθρή μετατόπιση, θεωρούμε τα αναπτύγματα των εξισώσεων (4.53) και (4.54)

γύρω από το $z = 0$, αναπτύσσοντας τα $F(z)$, $H(z)^2$, $U(z)$ και $\phi(z)$ ως εξής [179]:

$$F(z) = 1 + F_1 z + F_2 z^2 + \dots \quad (4.59)$$

$$H(z)^2 = 1 + h_1 z + h_2 z^2 + \dots \quad (4.60)$$

$$U(z) = 1 + U_1 z + U_2 z^2 + \dots \quad (4.61)$$

$$\phi(z) = 1 + \phi_1 z + \phi_2 z^2 + \dots \quad (4.62)$$

όπου έχουμε κανονικοποιήσει στη μονάδα τις παραμέτρους F_0 , H_0 , U_0 και ϕ_0 .

Είναι εύκολο να συνδέσουμε τις παραμέτρους F_i του αναπτύγματος της εξίσωσης (4.59) με τις τωρινές χρονικές παραγώγους του $G(t)$ χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.46) και τη σχέση μεταξύ του χρόνου και της ερυθρής μετατόπισης

$$\frac{dt}{dz} = -\frac{1}{H(z)(1+z)} \quad (4.63)$$

Για παράδειγμα για το F_1 έχουμε

$$F_1 = \frac{1}{F_0} \frac{dF}{dz} \Big|_{z=0} = \frac{\dot{G}_0}{G_0 H_0} \equiv g_1 \quad (4.64)$$

όπου ο δείκτης $_0$ υποδηλώνει την παρούσα χρονική στιγμή και $H_0 \simeq 10^{-10} h \text{ yrs}^{-1}$. Παρόμοια για το F_2 βρίσκουμε

$$F_2 = g_1 \left(g_1 - \frac{h_1 + 2}{4} \right) - \frac{g_2}{2} \quad (4.65)$$

όπου ορίσαμε

$$g_n \equiv \frac{G_0^{(n)}}{G_0 H_0^n} \quad (4.66)$$

και με τον εκθέτη $^{(n)}$ υποδηλώνεται η $n^{\text{στη}}$ χρονική παράγωγος. Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε τα αναπτύγματα (4.59), (4.60), (4.62) στην εξίσωση (4.53), αντικαθιστώντας έτσι τις παραμέτρους F_i με τον κατάλληλο συνδυασμό των g_n . Εξισώνοντας όρους της ίδιας τάξης στο z και αγνοώντας τους όρους που είναι ανάλογοι του g_1 λόγω των παρατηρησιακών ορίων του ηλιακού συστήματος [180],[181]

$$|g_1| < 10^{-13} \text{ yrs}^{-1} H_0^{-1} \simeq 10^{-3} h^{-1} \ll 1 \quad (4.67)$$

βρίσκουμε για τους μηδενικής και πρώτης τάξης όρους του z

$$h_1 - 3\Omega_{0m} + g_2 = \phi_1^2 > 0 \quad (4.68)$$

$$\begin{aligned} & -h_1(1+h_1) + 2h_2 - 3\Omega_{0m}(1-h_1) - \\ & -g_2(1+h_1) - g_3 = 4\phi_1\phi_2 = (\phi'^2)'(z=0) \end{aligned} \quad (4.69)$$

Η ανισότητα (4.68) ορίζει την απαγορευμένη περιοχή για τις scalar tensor θεωρίες για κάθε τιμή του g_2 . Για $g_2 = 0$ δίνει το γνωστό αποτέλεσμα, ότι δηλαδή η *MCQ* δεν μπορεί

να διασχίσει την γραμμή $w = -1$ (δες και εξίσωση (4.85) παρακάτω). Η εξίσωση (4.69) μπορεί να χρησιμοποιηθεί [183] μαζί με τις (4.57) και (4.58) για να χωριστεί ο επιτρεπόμενος παραμετρικός χώρος (h_1, h_2) σε δύο τμήματα, το παγωμένο $(\phi'(z)^2)' > 0$ και το ξεπαγωμένο $(\phi'(z)^2)' < 0$, για κάθε ζεύγος των παραμέτρων (g_2, g_3) .

Δυστυχώς, οι παρατηρήσεις προς το παρόν έχουν δώσει όρια για το g_1 [180] (εξίσωση (4.67)) αλλά όχι και για τα g_i με $i \geq 2$. Η έλλειψη αυτή δεν οφείλεται στην ποιότητα των δεδομένων, αλλά στο γεγονός ότι στους υπάρχοντες αριθμητικούς κώδικες έχει παραμετροποιηθεί το $G(t)$ με τον απλούστερο δυνατό τρόπο, δηλαδή ως γραμμική συνάρτηση του t . Είναι συνεπώς δυνατό στο μέλλον να συμπεριληφθούν περισσότερες παράμετροι και έτσι να βρεθούν όρια και για τα g_i με $i \geq 2$.

Οι υπάρχουσες παρατηρήσεις στο ηλιακό σύστημα γίνονται με μετρήσεις της απόστασης της Σελήνης με χρήση laser [181] και υψηλής ακρίβειας δεδομένα ετήσιων αστρονομικών ημερολογίων των πλανητών [180], με σκοπό τη σύγκριση των τροχιών τους με αυτές που προβλέπονται από τη Γενική Σχετικότητα. Πιθανές αποκλίσεις από τις προβλέψεις της Γενικής Σχετικότητας παραμετροποιούνται [181] χρησιμοποιώντας τις παραμέτρους β και γ της μετα-Νευτώνειας ανάλυσης (parameterized post-Newtonian formalism ή PPN formalism) και της πρώτης χρονικής παραγώγου της σταθεράς της παγκόσμιας έλξης την παρούσα χρονική στιγμή $\frac{\dot{G}_0}{G_0}$. Τα πειράματα αυτά συγκεντρώνουν δεδομένα για ένα χρονικό διάστημα Δt που αντιστοιχεί σε πολλές δεκαετίες [181],[180] δηλαδή $\Delta t = \mathcal{O}(100yrs)$. Τα υπάρχοντα 1σ όρια [180]

$$\left| \frac{\dot{G}_0}{G_0} \right| = | -0.2 \pm 0.5 | \times 10^{-13} yrs^{-1} < 10^{-13} yrs^{-1} \quad (4.70)$$

υπονοούν ένα άνω όριο στην ολική μεταβολή $\frac{\Delta G}{G_0}$, κατά τη χρονική κλίμακα Δt , της τάξης

$$\left| \frac{\Delta G}{G_0} \right| \simeq \left| \frac{\dot{G}_0}{G_0} \right| \Delta t < 10^{-11} \quad (4.71)$$

Το ίδιο όριο βρίσκεται και αν θεωρήσουμε το σχετικό σφάλμα στις περιόδους περιφοράς T της Γης και άλλων πλανητών, το οποίο σε 1σ επίπεδο εμπιστοσύνης είναι [180]

$$\frac{\Delta T}{T} < 10^{-12} \quad (4.72)$$

Δεδομένου του ότι η περίοδος περιφοράς είναι

$$T_K = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{Gm}} \sim G^{-\frac{1}{2}} \quad (4.73)$$

προκύπτει ότι

$$\left| \frac{\Delta T}{T} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{\Delta G}{G_0} \right| < 10^{-12} \quad (4.74)$$

το οποίο είναι σε σχετικά καλή συμφωνία με την (4.71).

Χρησιμοποιώντας το άνω όριο (4.71) και αποδίδοντας κάθε μεταβολή του G σε τετραγωνικούς όρους του Δt , βρίσκουμε ότι

$$\left| \frac{\Delta G}{G_0} \right| \simeq \left| \frac{\ddot{G}_0}{G_0} \right| (\Delta t)^2 < 10^{-11} \quad (4.75)$$

το οποίο υπονοεί ότι

$$\left| \frac{\ddot{G}_0}{G_0} \right| < 10^{-15} \text{ yrs}^{-2} \implies |g_2| < 10^5 h^{-2} \quad (4.76)$$

δίνοντας έτσι μια χονδρική εκτίμηση της τάξης μεγέθους του g_2 .

Πρώιμα αποτελέσματα από την ανάλυση των δεδομένων του ηλιακού συστήματος έδειξαν ότι [182]

$$\frac{\ddot{G}_0}{G_0} \simeq (4 \pm 5) \cdot 10^{-15} \text{ yrs}^{-2} \quad (4.77)$$

κάτι το οποίο δεν είναι μακριά από την χονδρική εκτίμηση της εξίσωσης (4.76). Γενικεύοντας τα παραπάνω επιχειρήματα για τυχαία τάξη για το Δt βρίσκουμε ότι

$$|g_n| < 10^{8n-11} h^{-n} \quad (4.78)$$

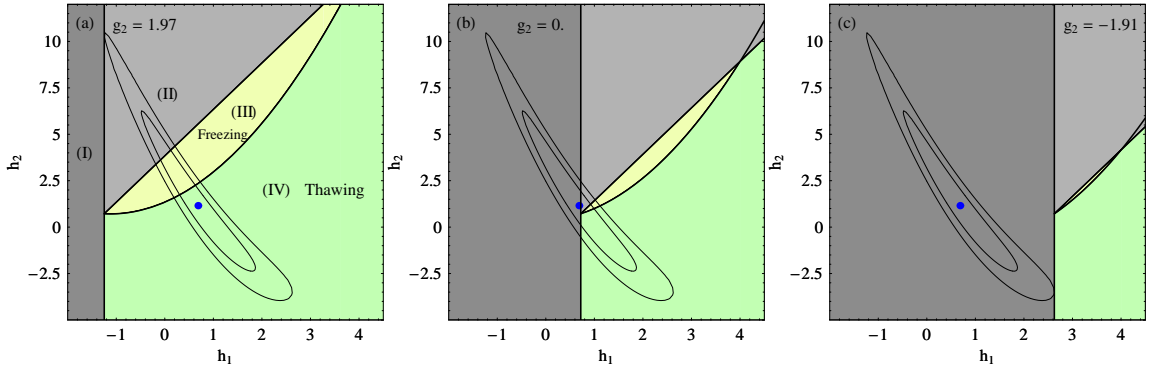
το οποίο υπονοεί ότι τα υπάρχοντα τεστ του ηλιακού συστήματος δεν μπορούν να δώσουν χρήσιμα κοσμολογικά όρια για τις παραμέτρους g_n για $n \geq 2$.

Μπορούμε τώρα να γυρίσουμε στις εξισώσεις (4.68) και (4.69) και να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα (4.56). Χρησιμοποιώντας τα αναπτύγματα [183] (4.59), (4.60) και (4.61) στην εξίσωση (4.54) και εξισώνοντας τους όρους πρώτης τάξης ως προς z βρίσκουμε

$$U_1 = U'(z=0) = \frac{1}{2}(5h_1 - 2h_2 - 9\Omega_{\text{om}} + 5g_2 + g_3) > 0 \quad (4.79)$$

όπου ως συνήθως αγνοήθηκαν οι όροι που είναι ανάλογοι του g_1 λόγω της σχέσης (4.67). Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε τις (4.68), (4.69) και (4.79) για να ορίσουμε τις ακόλουθες περιοχές στον παραμετρικό χώρο $h_1 - h_2$ για σταθερά g_1, g_2 :

- Η περιοχή I είναι απαγορευμένη καθώς η ανισότητα (4.68) παραβιάζεται.
- Η περιοχή II είναι επίσης απαγορευμένη, αφού η ανισότητα (4.79) παραβιάζεται αλλά όχι η (4.68).
- Η περιοχή III αντιστοιχεί σε 'παγωμένη' EXQ διότι οι ανισότητες (4.55), (4.56) και (4.57) ισχύουν, ενώ η (4.58) παραβιάζεται.
- Η περιοχή IV αντιστοιχεί σε 'ξεπαγωμένη' EXQ διότι οι ανισότητες (4.55), (4.56) και (4.58) ισχύουν, ενώ η (4.57) παραβιάζεται.



Σχήμα 4.6: Οι περιοχές $h_1 - h_2$ της EXQ : Η περιοχή I είναι απαγορευμένη καθώς το βαθμωτό πεδίο γίνεται φανταστικό. Η περιοχή II είναι επίσης απαγορευμένη καθώς αντιστοιχεί σε ένα βαθμωτό πεδίο το οποίο ανεβαίνει το δυναμικό του. Η περιοχή III αντιστοιχεί σε 'παγωμένη' EXQ διότι το πεδίο επιβραδύνεται καθώς κατεβαίνει το δυναμικό του. Η περιοχή IV αντιστοιχεί σε 'ξεπαγωμένη' EXQ , διότι το πεδίο επιταχύνεται καθώς κατεβαίνει το δυναμικό του. Ο απαγορευμένος τομέας I μειώνεται όταν η σταθερά της παγκόσμιας έλξης φθίνει με το χρόνο ($g_2 > 0$) ενώ η παγωμένη περιοχή διαστέλλεται (4.6a). Τα όρια των περιοχών βρίσκονται από τις (4.68), (4.69) και (4.79). Οι 1σ και 2σ ελλείψεις εμπιστοσύνης του χ^2 βρέθηκαν με χρήση του σετ SNLS για $\Omega_{0m} = 0.24$ με χρήση του μοντέλου CPL (3.92).

Οι περιοχές αυτές [183] φαίνονται στο σχήμα 4.6 για $\Omega_{0m} = 0.24$ [29], $g_3 = 0$ και τρεις τιμές του g_2 : $g_2 = 1.97$, $g_2 = 0$ και $g_2 = -1.91$. Επίσης, στο σχήμα 4.6 φαίνονται και οι 1σ και 2σ ελλείψεις εμπιστοσύνης του χ^2 στον παραμετρικό χώρο $h_1 - h_2$ χρησιμοποιώντας το μοντέλο των Chevalier-Polarski-Linder (CPL) της εξίσωσης (3.92) και μαζί με το ανάπτυγμα της εξίσωσης (4.60) είναι εύκολο ναδειχθεί ότι

$$h_1 = 3(1 + w_0 - \Omega_{0m}w_0) \quad (4.80)$$

$$h_2 = \frac{3}{2}(2 + 5w_0(1 - \Omega_{0m}) + (1 - \Omega_{0m})(3w_0^2 + w_1)) \quad (4.81)$$

έτσι ώστε οι γνώριμες ελλείψεις εμπιστοσύνης του χ^2 στον παραμετρικό χώρο $w_0 - w_1$ (δες π.χ. [70]) να μπορούν εύκολα να μετατραπούν στον παραμετρικό χώρο $h_1 - h_2$ του σχήματος 4.6.

Η παράμετρος $w(z)$ είναι ιδιαίτερα χρήσιμη και φυσικά σημαντική στο όριο της MCQ για $g_i \rightarrow 0$. Σε αυτό το όριο η $w(z)$ είναι η καταστατική εξίσωση της MCQ , δηλαδή

$$w(z) = \frac{p_{MCQ}}{\rho_{MCQ}} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - U(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + U(\phi)} \quad (4.82)$$

όπως εύκολα μπορεί ναδειχθεί από τις εξισώσεις Friedmann για την MCQ . Οι τιμές του g_2 που χρησιμοποιήθηκαν στα σχήματα 4.6a και 4.6c επιλέχθηκαν ώστε να υπάρχει ελάχιστη

και αντίστοιχα μέγιστη επικάλυψη του απαγορευμένου τομέα I και της 2σ ελλείψεως στο χώρο $h_1 - h_2$.

Σχετικά με το σχήμα 4.6 μπορούν να γίνουν τα ακόλουθα σχόλια:

- Για τιμές της παραμέτρου $g_2 < -1.91$, οι 2σ ελλείψεις εμπιστοσύνης που βρέθηκαν με χρήση του σετ SNLS βρίσκονται εντελώς στην απαγορευμένη περιοχή. Το όριο αυτό είναι εντελώς ανεξάρτητο του g_3 το οποίο δεν υπεισέρχεται στην ανισότητα (4.68). Συνεπώς, στα πλαίσια του *EXQ* το όριο το οποίο βρίσκουμε για την παράμετρο g_2 με χρήση των δεδομένων SNLS με 2σ εμπιστοσύνη είναι

$$g_2 = \frac{\ddot{G}_0}{G_0 H_0^2} > -1.91 \quad (4.83)$$

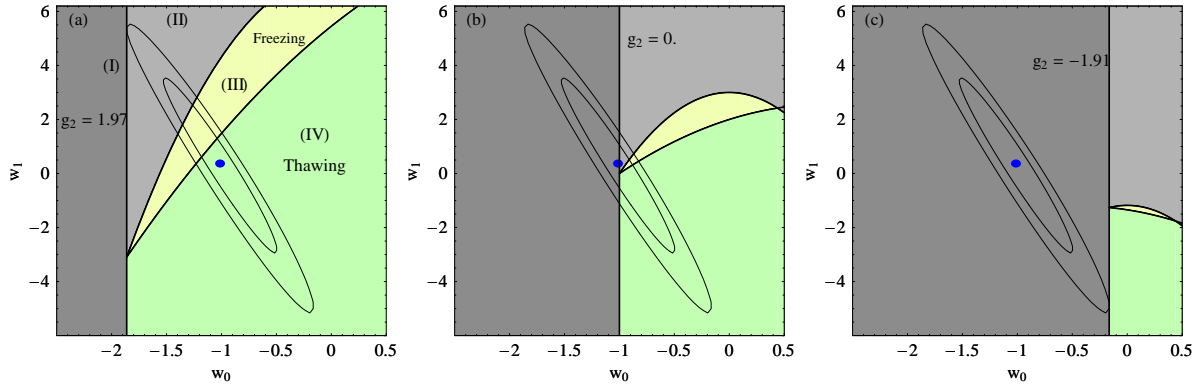
Αξίζει να σημειωθεί η δραματική βελτίωση αυτού του ορίου (σε σχέση με το κατώτερο όριο), συγκρινόμενο με το αναμενόμενο όριο $-10^5 < g_2 < 10^5$ από τις παρατηρήσεις στο ηλιακό σύστημα (εξίσωση (4.76))!

- Ο παραμετρικός χώρος III της παγωμένης quintessence είναι σημαντικά μικρότερος από την περιοχή IV της ξεπαγωμένης quintessence και η διαφορά αυτή φαίνεται εντονότερα για μικρό g_2 .
- Για $g_2 > 0$ ο επιτρεπόμενος παραμετρικός χώρος αυξάνεται σημαντικά σε σχέση με την *MCQ* ($g_2 = 0$). Συνεπώς, αν μελλοντικές κοσμολογικές παρατηρήσεις δείξουν μια προτίμηση για τους απαγορευμένους τομείς I ή II του σχήματος 4.6b (*MCQ*) αυτό θα μπορούσε να ερμηνευθεί ως ενδείξεις υπέρ των scalar tensor θεωριών με $g_2 > 0$ (δες και τα σχόλια στις αναφορές [154],[152],[179]).

Παρόλο που τα σχήματα 4.6 συλλαμβάνουν όλο το φυσικό περιεχόμενο των αποτελεσμάτων, είναι χρήσιμο να εκφράσουμε τις περιοχές I - IV συναρτήσει άλλων παραμέτρων που απαντούν συχνότερα στη βιβλιογραφία από τις $h_1 - h_2$. Τέτοιες είναι οι συντελεστές w_i του αναπτύγματος $w(z)$

$$w(z) = w_0 + w_1 z + w_2 z^2 + \dots \quad (4.84)$$

η οποία σχετίζεται με την $H(z)$ μέσω της εξίσωσης (3.32). Αναπτύσσοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης (3.32) και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (4.60) και (4.84) μπορούμε να εκφράσουμε τις παραμέτρους h_i συναρτήσει των w_i , ξαναβρίσκοντας έτσι τις σχέσεις (4.80) και (4.81) για $i = 0$ και $i = 1$. Το αποτέλεσμα είναι ταυτόσημο, καθώς οι παράμετροι w_0, w_1 του αναπτύγματος της εξίσωσης (4.84) συμπίπτουν με τις παραμέτρους w_0, w_1 του μοντέλου CPL με το $w(z)$ να δίνεται από την εξίσωση (3.92). Το πλεονέκτημα της χρήσης των παραμέτρων $w_0 - w_1$, αντί για τις $h_1 - h_2$, είναι ότι διευκολύνουν τη σύγκριση με προηγούμενες μελέτες και ότι με αυτές φαίνεται ευκολότερα το γεγονός ότι όταν $g_2 > 0$ μπορεί να ισχύει $w_0 < -1$ και να έχουμε διάσχιση της γραμμής $w = -1$ στα πλαίσια των *EXQ* μοντέλων.



Σχήμα 4.7: Οι περιοχές I - IV της σχέσης 4.6 στον παραμετρικό χώρο $w_0 - w_1$. Οι επιτρεπόμενες περιοχές επεκτείνονται στο $w_0 < -1$ για $g_2 > 0$.

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (4.80) και (4.81) μπορούμε να εκφράσουμε τις εξισώσεις (4.68), (4.69) και (4.79) που ορίζουν τις περιοχές I - IV στο σχήμα 4.6 συναρτήσει των $w_0 - w_1$. Έτσι παίρνουμε

$$3(1 - \Omega_{0m})(1 + w_0) + g_2 = \phi_1^2 > 0 \quad (4.85)$$

$$3(1 - \Omega_{0m})((1 + w_0)(3\Omega_{0m}w_0 - 2) + w_1) - g_2(4 + 3(1 - \Omega_{0m})w_0) - g_3 = (\phi'^2)'(z = 0) \quad (4.86)$$

$$\frac{3}{2}(1 - \Omega_{0m})(3(1 - w_0^2) - w_1) + \frac{5}{2}g_2 + \frac{g_3}{2} > 0 \quad (4.87)$$

Στο όριο της *MCQ* ($g_2 \rightarrow 0$, $g_3 \rightarrow 0$) η εξίσωση (4.87) έχει επίσης βρεθεί από την αναφορά [184] ως ένα γενικό όριο της *MCQ*. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.85)-(4.87) μαζί με τις ελλείψεις εμπιστοσύνης του χ^2 στον παραμετρικό χώρο $w_0 - w_1$ και χρησιμοποιώντας το SNLS σετ [51],[70] μπορούμε να κατασκευάσουμε το σχήμα 4.7. Ένα ενδιαφέρον σημείο του σχήματος 4.7 είναι ότι για $g_2 > 0$ (4.7α) η απαγορευμένη περιοχή I μειώνεται σημαντικά σε σχέση με την *MCQ* (4.7β) επιτρέποντας έτσι $w_0 < -1$.

Το τελευταίο ζεύγος παραμέτρων που θα μελετηθεί είναι οι συντελεστές του αναπτύγματος της απόστασης λαμπρότητας $d_L(z)$, η οποία σε ένα επίπεδο σύμπαν συνδέεται με την $H(z)$ ως

$$H(z)^{-1} = \frac{d}{dz} \left(\frac{d_L(z)}{1+z} \right) \quad (4.88)$$

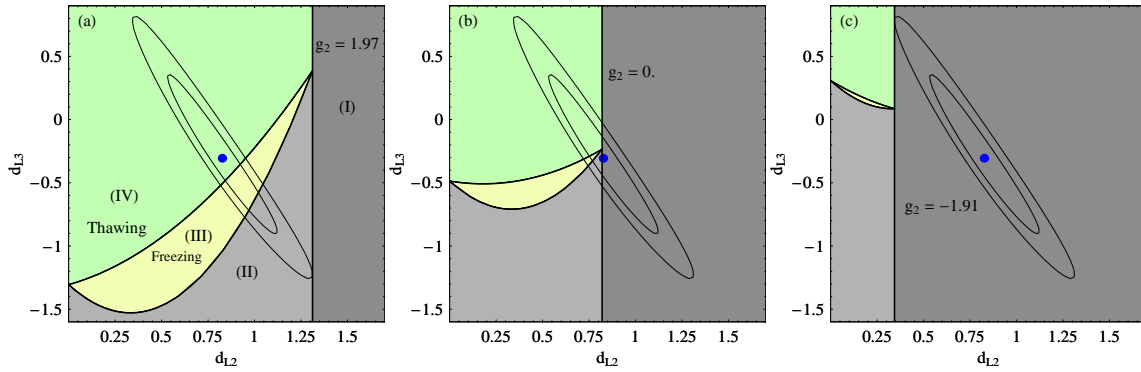
Αναπτύσσοντας την $d_L(z)$ ως

$$d_L(z) = z + d_{L2}z^2 + d_{L3}z^3 + \dots \quad (4.89)$$

και χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα (4.60) στην εξίσωση (4.88), μπορούμε να εκφράσουμε τους συντελεστές $h_1 - h_2$ συναρτήσει των $d_{L2} - d_{L3}$ ως εξής

$$h_1 = 4(1 - d_{L2}) \quad (4.90)$$

$$h_2 = 6(1 - 3d_{L2} + 2d_{L2}^2 - d_{L3}) \quad (4.91)$$



Σχήμα 4.8: Οι περιοχές I - IV του σχήματος 4.6 μεταφρασμένες στον $d_{L2} - d_{L3}$ παραμετρικό χώρο. Αξίζει να σημειωθεί ότι η απαγορευμένη περιοχή σε αυτή την περίπτωση είναι στα δεξιά (μεγάλο d_{L2}).

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (4.90), (4.91) στις (4.68), (4.69) και (4.79) παίρνουμε τις εξισώσεις των περιοχών στον παραμετρικό χώρο των $d_{L2} - d_{L3}$

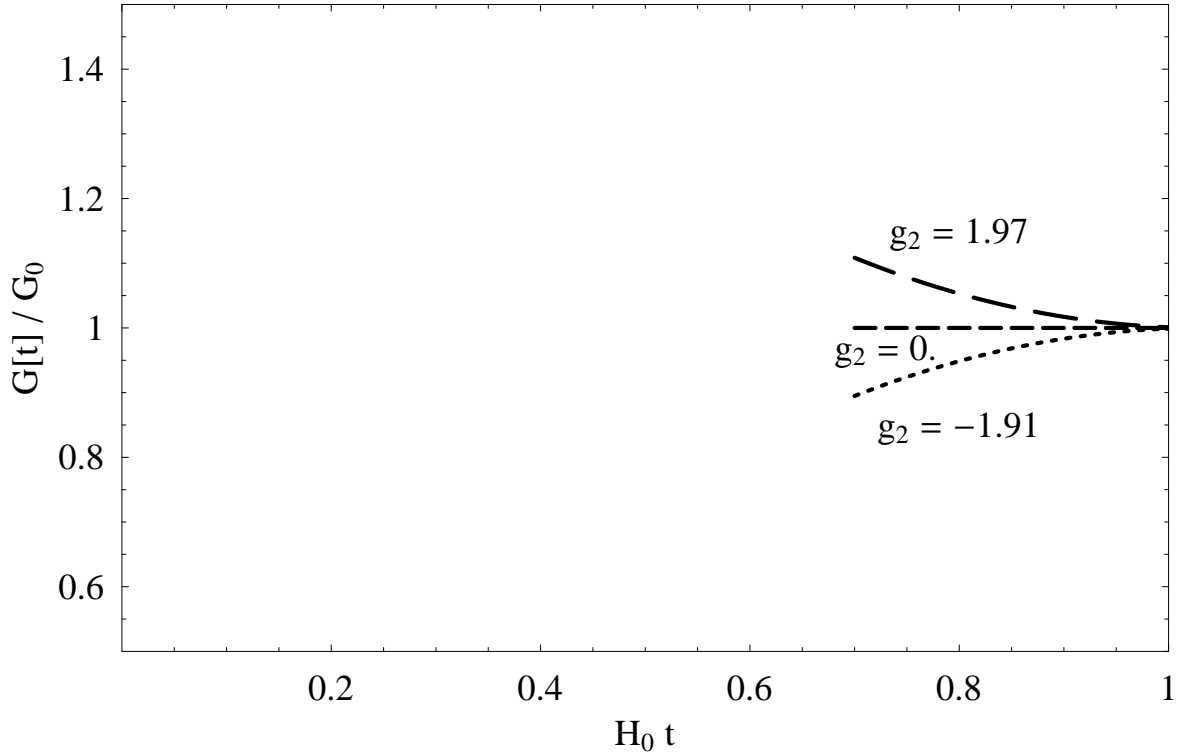
$$4(1 - d_{L2}) - 3\Omega_{0m} + g_2 = \phi_1^2 > 0 \quad (4.92)$$

$$4d_{L2}(2d_{L2} + g_2 - 3\Omega_{0m}) + 9\Omega_{0m} - 8 - 12d_{L3} - 5g_2 - g_3 = (\phi^2)'(z=0) \quad (4.93)$$

$$4 + 8d_{L2} - 12d_{L2}^2 + 6d_{L3} - \frac{9}{2}\Omega_{0m} + \frac{5}{2}g_2 + \frac{g_3}{2} > 0 \quad (4.94)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (4.90) και (4.91), για να μετατρέψουμε τις ελλείψεις εμπιστοσύνης του χ^2 από τον χώρο των $h_1 - h_2$ σε αυτό των $d_{L2} - d_{L3}$, και με τις εξισώσεις (4.92)-(4.94) για να κατασκευάσουμε τους τομείς I - IV, παίρνουμε το σχήμα 4.8. Το πλεονέκτημα του σχήματος 4.8 σε σχέση με τα 4.6 και 4.7 είναι ότι αναφέρεται στις παραμέτρους $d_{L2} - d_{L3}$, οι οποίες είναι άμεσα παρατηρήσιμες από τα δεδομένα των υπερκαινοφανών αστέρων.

Ένας σημαντικός λόγος που περιορίζει τον, συμβατό με τις *MCQ* και *EXQ*, παραμετρικό χώρο είναι το γεγονός ότι το δυναμικό του πεδίου μπορεί να προκαλέσει επιταχυνόμενη διαστολή, αλλά όχι πέρα από το όριο που αντιστοιχεί στην κοσμολογική σταθερά ($w(z) = -1$), η οποία αντιστοιχεί στη στιγμή που το πεδίο είναι παγωμένο. Επιπλέον επιτάχυνση μπορεί μόνο να υπάρξει στα πλαίσια της *EXQ* μέσω της χρονικής μεταβολής της σταθεράς της παγκόσμιας έλξης G . Όταν η $G(t)$ μειώνεται με το χρόνο, αυτό ευνοεί την επιπλέον επιταχυνόμενη διαστολή, κάτι που αντανακλάται και στα παραπάνω αποτελέσματα. Βρέθηκε ότι, δεδομένου του $\dot{G}_0 \simeq 0$ (αγνοώντας το g_1 καθώς $|g_1| < 10^{-4}$ από τις παρατηρήσεις του ηλιακού συστήματος) αν ισχύει $\ddot{G}_0 > 0$ ($g_2 > 0$) τότε ο απαγορευμένος τομέας μειώνεται και αυτό επιτρέπει phantom συμπεριφορά ($w_0 < -1$). Αλλά το γεγονός ότι $\dot{G}_0 \simeq 0$, με $\ddot{G}_0 > 0$, υπονοεί ότι βρισκόμαστε κοντά σε ένα ελάχιστο του $G(t)$, με το $G(t)$ να είναι μεγαλύτερο



Σχήμα 4.9: Αν ισχύει $g_2 > 0$ αυτό υπονοεί μια σταθερά της παγκόσμιας έλξης η οποία μειώνεται ($\frac{G(t)}{G_0} \simeq 1 + \frac{1}{2}g_2(H_0(t - t_0))^2$) τη στιγμή $t = t_0$).

στο παρελθόν, δηλαδή

$$\frac{G(t)}{G_0} \simeq 1 + \frac{1}{2}g_2(H_0(t - t_0))^2 \quad (4.95)$$

Επομένως, αν το $G(t)$ μειώνεται αυτό αντιστοιχεί σε $\ddot{G}_0 > 0$ ($g_2 > 0$) (δες και το σχήμα 4.9) το οποίο με τη σειρά του υπονοεί ότι οι απαγορευμένοι τομείς είναι μικρότεροι και έτσι επιτρέπεται η επιπλέον επιτάχυνση (phantom συμπεριφορά), σε συμφωνία με τα παραπάνω.

Ένα επιπλέον ενδιαφέρον σημείο είναι η κατασκευή των ελλείψεων εμπιστοσύνης του χ^2 των σχημάτων 4.6 - 4.8. Για την ανάλυση των δεδομένων SNLS δεν λήφθηκε υπόψη η πιθανή εξέλιξη των υπερκαινοφανών αστέρων λόγω της χρονικής εξάρτησης του $G(t)$. Η εξέλιξη του G μπορεί να ληφθεί άμεσα υπόψη σύμφωνα με αυτά που είπαμε στην προηγούμενη ενότητα[71]. Για να ελεγχθεί η ευαισθησία των ελλείψεων στην εξέλιξη του G επαναλάβαμε την κατασκευή τους χρησιμοποιώντας το μοντέλο

$$G(z) = G_0 \left(1 + \alpha \frac{z^2}{(1+z)^2} \right) \quad (4.96)$$

το οποίο παρεμβάλλεται ομαλά μεταξύ της σημερινής τιμής $G = G_0$ και της τιμής σε υψηλή

ερυθρή μετατόπιση $G = G_0(1 + \alpha)$ υπονοώντας ότι

$$\alpha = \frac{\Delta G}{G_0} \quad (4.97)$$

Το μοντέλο (4.96) είναι συνεπές και με τις παρατηρήσεις στο ηλιακό σύστημα [180] ($\frac{\dot{G}_0}{G_0} \simeq 0$) και με τα όρια από την πυρηνοσύνθεση[168]

$$\left| \frac{G_{nuc} - G_0}{G_0} \right| < 0.2 \quad (4.98)$$

σε επίπεδο εμπιστοσύνης 1σ , για $|\alpha| < 0.2$.

Οι παράμετροι g_1, g_2, g_3 μπορούν εύκολα να υπολογιστούν συναρτήσει του α χρησιμοποιώντας το μοντέλο της εξίσωσης (4.96) και την εξίσωση (4.63). Το αποτέλεσμα είναι

$$g_1 = 0 \quad (4.99)$$

$$g_2 = 2\alpha \quad (4.100)$$

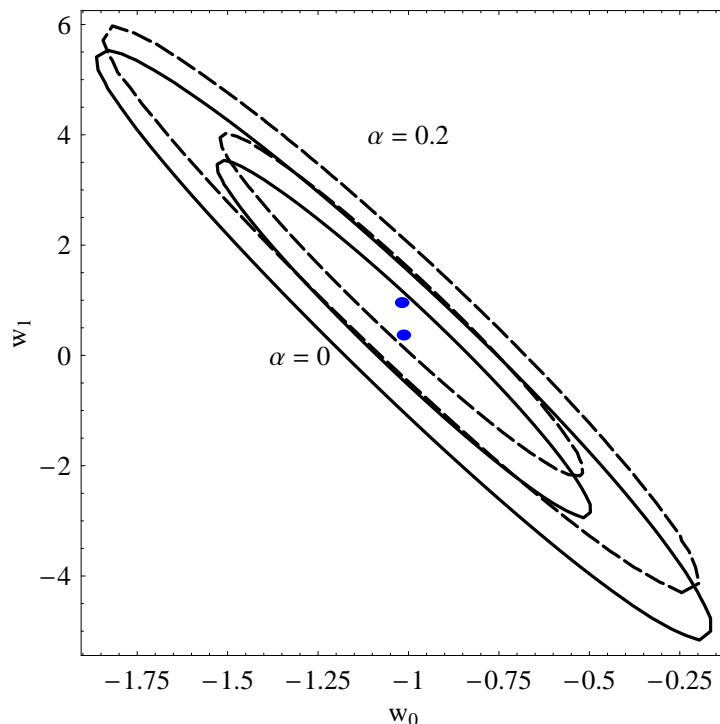
$$g_3 = 3\alpha(-1 + 3w_0(-1 + \Omega_{0m})) \quad (4.101)$$

Χρησιμοποιώντας την τιμή

$$\alpha = 0.2 \quad (4.102)$$

μπορούμε να επαναλάβουμε την ανάλυση των δεδομένων, λαμβάνοντας υπόψη την εξέλιξη του απολύτου μεγέθους των υπερκαινοφανών αστέρων M λόγω του εξελισσόμενου G [171],[71]. Οι ελλείψεις εμπιστοσύνης του χ^2 στον παραμετρικό χώρο των $w_0 - w_1$ φαίνονται στο σχήμα 4.10 (διακεκομμένη γραμμή) μαζί με τις αντίστοιχες ελλείψεις για σταθερό G (συνεχής γραμμή).

Η αλλαγή στις τιμές των $w_0 - w_1$ και τα αντίστοιχα σφάλματα δεν είναι αρκετά σημαντικές με βάση τα υπάρχοντα δεδομένα των υπερκαινοφανών αστέρων, και ειδικά στη διεύθυνση του w_0 . Συμπερασματικά, οι οριακές τιμές του g_2 δεν αλλάζουν σχεδόν καθόλου παρόλο που λάβαμε υπόψη την εξέλιξη του G , κάτι το οποίο δικαιολογεί το ότι αγνοήσαμε την εξέλιξη του G στην κατασκευή των ελλείψεων εμπιστοσύνης. Ωστόσο, καθώς η ποιότητα των δεδομένων των υπερκαινοφανών αστέρων αυξάνεται, φαίνεται ξεκάθαρα και από το σχήμα 4.10 ότι η επίδραση της εξέλιξης του G , *ακόμα και αν είναι συμβατή με τα όρια από την πυρηνοσύνθεση και τις παρατηρήσεις στο ηλιακό σύστημα*, θα είναι σημαντική! Το ενδεχόμενο αυτό θα είναι ακόμα πιο σημαντικό αν υπάρχουν επιπλέον επιδράσεις από την εξέλιξη του G στην ανάλυση των δεδομένων. Για παράδειγμα [185],[186] είναι πιθανό ότι ο παράγοντας ελαστικότητας s (σχήμα 2.1) μπορεί να εξαρτάται από την μάζα Chandrasekhar και συνεπώς και από την σταθερά της παγκόσμιας έλξης G . Ωστόσο, δείξαμε ότι ακόμα και τέτοια φαινόμενα να συμπεριληφθούν στην ανάλυση των υπερκαινοφανών αστέρων, τα αποτελέσματα του σχήματος 4.10 (διακεκομμένη γραμμή) δεν αλλάζουν περισσότερο από 10%.



Σχήμα 4.10: Αν λάβουμε υπόψη μια μεταβολή του G συμβατή με τα όρια από την πυρηνοσύνθεση και τις παρατηρήσεις στο ηλιακό σύστημα τότε μεταβάλλονται οι ελλείψεις εμπιστοσύνης του χ^2 στον παραμετρικό χώρο των $w_0 - w_1$ οι οποίες ωστόσο δεν είναι αρκετά σημαντικές με βάση τα υπάρχοντα δεδομένα των υπερκαινοφανών αστέρων (για τη διακεκομμένη γραμμή ισχύει $\alpha = 0.2$ και για τη συνεχή $\alpha = 0$).

4.2.5 Ανάλυση με χρήση δυναμικών συστημάτων

Σε αυτή την ενότητα, θα ανακατασκευάσουμε το δυναμικό $U(\phi)$ και τη σύζευξη $F(\phi)$ με ένα εντελώς διαφορετικό, αλλά πολύ ενδιαφέρον τρόπο. Αντί να καθορίσουμε διάφορες μορφές για τα $U(\phi)$ και $F(\phi)$ και μετά να προσδιορίσουμε την κοσμολογική εξέλιξη, θα υποθέσουμε ότι η κοσμολογική εξέλιξη περιγράφεται από το Λ CDM και θα προσδιορίσουμε τις αντίστοιχες μορφές των $U(\phi)$ και $F(\phi)$. Η αρχική μέθοδος για την ανακατασκευή των scalar-tensor θεωριών από μια δεδομένη $H(z)$, παρουσιάστηκε στην αναφορά [42] και εφαρμόστηκε σε διάφορες περιπτώσεις στις αναφορές [43],[154]. Ωστόσο, η μέθοδος που θα ακολουθήσουμε εδώ θα είναι διαφορετική για δύο λόγους:

- Θα χρησιμοποιήσουμε το φορμαλισμό των δυναμικών συστημάτων και θα βρούμε τα κρίσιμα σημεία τα οποία καθορίζουν τη γενική εξέλιξη του συστήματος.
- Θα ξεκινήσουμε την ανακατασκευή από την εποχή της ακτινοβολίας, αντί να εστιάσουμε την προσοχή μας μόνο στην εποχή κατά την οποία έχουμε επιτάχυνση.

Αφού η μέθοδος αυτή υποθέτει ότι η εξέλιξη του υποβάθρου είναι καθορισμένη, η σταθερότητα των κρίσιμων σημείων πρέπει να ερμηνευθεί με προσοχή και αυτό γιατί αν και το $H(z)$ είναι καθορισμένο, υπάρχουν διαταραχές στη σύζευξη $F(\phi)$ και στο δυναμικό $U(\phi)$. Στην κανονική μελέτη, δηλαδή με χρήση των δυναμικών συστημάτων, η σύζευξη $F(\phi)$ και το δυναμικό $U(\phi)$ είναι σταθερά, αλλά επιτρέπονται οι διαταραχές στη συνάρτηση $H(z)$ ώστε να προσδιοριστεί η σταθερότητα των τροχιών στο χώρο των φάσεων. Ωστόσο, αφού αυτή η μέθοδος είναι πιο φυσική, αλλά δεν οδηγεί στην ανακατασκευή των $F(\phi)$ και $U(\phi)$, θα ασχοληθούμε με τις τιμές των κρίσιμων σημείων και θα ερμηνεύσουμε τη σταθερότητα τους μόνο ως ένα τεστ της αντίστοιχης αριθμητικής εξέλιξης του συστήματος. Έτσι, όλα τα κρίσιμα σημεία είναι εξίσου σημαντικά, ανεξάρτητα από τη σταθερότητα τους.

Για να μελετήσουμε την κοσμολογική εξέλιξη που συνεπάγονται οι εξισώσεις (4.27), (4.28) και (4.29) θα τις εκφράσουμε ως ένα δυναμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης[187]. Για να το πετύχουμε αυτό, θα μετατρέψουμε την (4.27) σε αδιάστατη μορφή

$$1 = \frac{\rho_m}{3FH^2} + \frac{\rho_r}{3FH^2} + \epsilon \frac{\phi'^2}{6F} + \frac{U}{3FH^2} - \frac{F'}{F} \quad (4.103)$$

όπου

$$' = \frac{d}{d \ln a} \equiv \frac{d}{dN} = \frac{1}{H} \frac{d}{dt} \quad (4.104)$$

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε τις αδιάστατες μεταβλητές x_1, \dots, x_4 ως εξής

$$x_1 = -\frac{F'}{F}, \quad (4.105)$$

$$x_2 = \frac{U}{3FH^2}, \quad (4.106)$$

$$x_3^2 = \frac{\phi'^2}{6F}, \quad (4.107)$$

$$x_4 = \frac{\rho_r}{3FH^2} = \Omega_r. \quad (4.108)$$

όπου μπορούμε να συσχετίσουμε το x_4 με το Ω_r και τον όρο $x_1 + x_2 + \epsilon x_3^2 \equiv \Omega_{DE}$ με τη Σκοτεινή Ενέργεια. Επίσης, ορίζοντας $\Omega_m \equiv \frac{\rho_m}{3FH^2}$, μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση (4.103) ως

$$\Omega_m = 1 - x_1 - x_2 - \epsilon x_3^2 - x_4 \quad (4.109)$$

Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (4.104) για να εκφράσουμε την (4.28) ως

$$\frac{H'}{H} = -\frac{\rho_m}{2FH^2} - \frac{2}{3} \frac{\rho_r}{FH^2} - \epsilon \frac{\phi'^2}{2F} - \frac{F''}{2F} - \frac{H'F'}{2FH} + \frac{F'}{2F} \quad (4.110)$$

ή

$$x_1' = 3 - 2x_1 - 3x_2 + x_4 + 3\epsilon x_3^2 + x_1^2 + 2\frac{H'}{H} - x_1 \frac{H'}{H} \quad (4.111)$$

Παραγωγίζοντας τη μεταβλητή x_4 της εξίσωσης (4.108) ως προς N , έχουμε

$$x_4' = \frac{\rho_r'}{3FH^2} - \frac{\rho_r}{3FH^2} \frac{F'}{F} - \frac{2\rho_r}{3FH^2} \frac{H'}{H} \quad (4.112)$$

ή

$$x'_4 = -4x_4 + x_4x_1 - 2x_4\frac{H'}{H} \quad (4.113)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την (4.31). Παρόμοια, παραγωγίζοντας την (4.106) ως προς N , βρίσκουμε

$$x'_2 = x_2 \left[x_1(1 - m) - 2\frac{H'}{H} \right] \quad (4.114)$$

όπου

$$m \equiv \frac{U_{,\phi}/U}{F_{,\phi}/F} \quad (4.115)$$

και το $_{,\phi}$ δηλώνει την παράγωγο ως προς το πεδίο ϕ . Τέλος, παραγωγίζοντας την (4.107) ως προς N και χρησιμοποιώντας την (4.29), βρίσκουμε

$$\epsilon(x'_3)^2 = \epsilon x_3^2 x_1 - 6\epsilon x_3^2 - 2x_1 + mx_2x_1 - 2\epsilon x_3^2 \frac{H'}{H} - x_1 \frac{H'}{H} \quad (4.116)$$

Το σύστημα των εξισώσεων (4.111), (4.113), (4.114) και (4.116) περιγράφει τη δυναμική εξέλιξη των Scalar-Tensor θεωριών. Επίσης, το σύστημα αυτό εμπεριέχει [187] και τα αντίστοιχα δυναμικά συστήματα της Quintessence και των $f(R)$ θεωριών αντίστοιχα [188]. Ωστόσο, πρέπει να αναφερθεί ότι στις Scalar-Tensor θεωρίες, σε σχέση με τις $f(R)$, υπάρχει ένας επιπλέον βαθμός ελευθερίας αφού πλέον έχουμε δυο αυθαίρετες συναρτήσεις, δηλαδή τις $F(\phi)$ και $U(\phi)$. Έτσι, εν γένει, θα μπορούσαμε να προσθέσουμε μια επιπλέον παράμετρο n η οποία να σχετίζεται με τα $F_{,\phi}$ και $F_{,\phi\phi}$, εκτός από το m . Όμως, αν δεν προσπαθούμε να ανακατασκευάσουμε την $F(\phi)$, τότε αυτή η συνάρτηση μπορεί να καθοριστεί από πριν και η αντίστοιχη παράμετρος n θα μπορούσε να ισούται με $F_{,\phi}/F$.

Σε αυτή την περίπτωση η $H(N)$ δεν θα ήταν καθορισμένη, όπως στην περίπτωση μας, αλλά θα έπρεπε να καθοριστεί από το αυτόνομο σύστημα. Αυτή η μέθοδος ακολουθήθηκε στην αναφορά [189], όπου το $F_{,\phi}/F$ δεν υπήρχε ως μεταβλητή στο αυτόνομο σύστημα καθώς το $F(\phi)$ ήταν καθορισμένο από πριν. Οι παράμετροι στην αναφορά [189] είναι ο εκθέτης του δυναμικού n και το ξ , της σύζευξης $F(\phi) = \xi\phi^2$. Σε αυτή την περίπτωση, το $H(N)$ και οι διαταραχές του επιτρέπεται να μεταβάλλονται. Ωστόσο, στην περίπτωση που το $H(N)$ είναι προκαθορισμένο, ενώ το $F_{,\phi}/F$ (και οι διαταραχές του) επιτρέπεται να μεταβάλλονται, το $F(\phi)$ μπορεί να ανακατασκευαστεί από το αυτόνομο σύστημα. Τέλος, όπως θα δούμε και στην επόμενη ενότητα, οι $F(\phi)$ και $U(\phi)$ μπορούν να βρεθούν ανεξάρτητα και από πρώτες αρχές, απαιτώντας την ύπαρξη μιας συμμετρίας Noether. Αφού τα αποτελέσματα και από τις δύο μεθόδους συμπίπτουν (οι $F(\phi)$ και $U(\phi)$ είναι ίδιες και στις δύο περιπτώσεις), αυτό υποδεικνύει ότι η μέθοδος που ακολουθήθηκε είναι συνεπής.

Όπως θα δούμε και στην επόμενη ενότητα, θέτοντας $U = \frac{FR-f}{2}$ [190] και χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς

$$x_1 \rightarrow \tilde{x}_1 \quad (4.117)$$

$$x_2 \rightarrow \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 \quad (4.118)$$

$$x_4 \rightarrow \tilde{x}_4 \quad (4.119)$$

$$\frac{H'}{H} \rightarrow \tilde{x}_3 - 2 \quad (4.120)$$

$$\phi \rightarrow R \quad (4.121)$$

$$\epsilon \rightarrow 0 \quad (4.122)$$

παίρνουμε τις εξισώσεις του δυναμικού συστήματος για τις $f(R)$ θεωρίες (δες και τις εξισώσεις (2.15), (2.17) και (2.21) της αναφοράς [191]), όπου οι ποσότητες με $\tilde{}$ είναι αυτές των $f(R)$ θεωριών:

$$\tilde{x}'_1 = -1 - \tilde{x}_3 - 3\tilde{x}_2 + \tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_4 \quad (4.123)$$

$$\tilde{x}'_2 = -\tilde{x}'_3 - 2\tilde{x}_3(\tilde{x}_3 - 2) - \tilde{x}_2(2\tilde{x}_3 - \tilde{x}_1 - 4) \quad (4.124)$$

$$\tilde{x}'_4 = -2\tilde{x}_3 \tilde{x}_4 + \tilde{x}_1 \tilde{x}_4 \quad (4.125)$$

Επίσης, το ακόλουθο σετ μετασχηματισμών δίνει το αυτόνομο σύστημα για την περίπτωση της Quintessence (εξισώσεις (175) και (176) στην αναφορά [166]):

$$x_1 \rightarrow 0 \quad (4.126)$$

$$x_2 \rightarrow y^2 \quad (4.127)$$

$$x_3^2 \rightarrow x^2 \quad (4.128)$$

$$x_4 \rightarrow 0 \quad (4.129)$$

με τις εξισώσεις να είναι

$$x' = -3x + \frac{\sqrt{6}}{2}\epsilon\lambda y^2 + \frac{3}{2}x(\epsilon x^2 + 1 - y^2) \quad (4.130)$$

$$y' = -\frac{\sqrt{6}}{2}\lambda xy + \frac{3}{2}y(\epsilon x^2 + 1 - y^2) \quad (4.131)$$

και $\lambda = -U_{,\phi}/U$.

Αξίζει να αναφέρουμε ότι τα αποτελέσματα της ανάλυσής μας δεν εξαρτώνται από καμιά συγκεκριμένη μορφή για το $H(z)$. Η μόνη απαίτηση είναι ότι το σύμπαν περνά από τις τρεις εποχές, την εποχή της ακτινοβολίας (σε υψηλή ερυθρή μετατόπιση), την εποχή της ύλης (σε

Πίνακας 4.1: Τα κρίσιμα σημεία (Κ.Σ.) του συστήματος (4.111), (4.113), (4.114), (4.116) και οι ιδιοτιμές τους σε καθεμιά από τις τρεις εποχές (εποχή ακτινοβολίας $N < -\ln \frac{\Omega_{0m}}{\Omega_{0r}}$, εποχή ύλης $-\ln \frac{\Omega_{0m}}{\Omega_{0r}} < N < -\frac{1}{3} \ln \frac{\Omega_{\Lambda}}{\Omega_{0m}}$, εποχή deSitter $N > -\frac{1}{3} \ln \frac{\Omega_{\Lambda}}{\Omega_{0m}}$).

Εποχή	Κ.Σ.	x_1	x_2	x_3^2	x_4	Ω_m	Ω_{DE}	Ιδιοτιμές	
Ακτινοβ.	R_1	2	0	-1	0	0	1	(2,3,1,6-2m)	
	R_2	1	0	0	0	0	1	(1,2,-1,5-m)	
	R_3	-1	0	0	0	2	-1	(-1,-2,-3,3+m)	
	$w_{eff} = \frac{1}{3}$	R_4	$\frac{4}{-1+m}$	$\frac{15-8m+m^2}{3(m-1)^2}$	$\frac{2(m-5)m}{3(m-1)^2}$	0	0	1	($\frac{4}{m-1}, \frac{m+3}{m-1}$, δες [192])
	R_5	0	0	0	1	0	0	(1,-1,-2,4)	
Ύλης	M_1	2	0	-1	0	0	1	(1,2, $\frac{1}{2}$,5-2m)	
	M_2	3/2	0	-1/2	0	0	1	($\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}(m-3)$)	
	M_3	0	0	0	0	0	0	(-1,- $\frac{3}{2}$,-2,3)	
	$w_{eff} = 0$	M_4	$\frac{3}{m-1}$	$\frac{15-11m+2m^2}{4(m-1)^2}$	$\frac{1-9m+2m^2}{4(m-1)^2}$	0	0	1	($\frac{4-m}{m-1}, \frac{3}{m-1}$, δες [193])
	M_5	1	0	-1/4	1/4	0	3/4	(1,- $\frac{1}{2}$,-1,4-m)	
deSitter	Λ_1	2	0	-1	0	0	1	(-2,-1,-1,2-2m)	
	Λ_2	3	0	-2	0	0	1	(-1,0,1,3-3m)	
	Λ_3	3	0	-2	0	0	1	(-1,0,1,3-3m)	
	$w_{eff} = -1$	Λ_4	0	1	0	0	0	1	(-4,-3, δες [194])
	Λ_5	4	0	-4	1	0	0	(1,1,2,4-4m)	

ενδιάμεση ερυθρή μετατόπιση) και τέλος την εποχή της επιτάχυνσης (deSitter) (σε χαμηλή ερυθρή μετατόπιση). Η αντίστοιχη ενεργός καταστατική εξίσωση είναι

$$w_{eff} = -1 - \frac{2 H'(N)}{3 H(N)} \quad (4.132)$$

η οποία σε κάθε εποχή είναι σταθερή και ίση με

$$\begin{aligned} w_{eff} &= \frac{1}{3} \text{ εποχή ακτινοβολίας} \\ w_{eff} &= 0 \text{ εποχή ύλης} \\ w_{eff} &= -1 \text{ εποχή deSitter} \end{aligned} \quad (4.133)$$

Ωστόσο για χάρη της πληρότητας, θα υποθέσουμε μια συγκεκριμένη μορφή για το $H(z)$ η οποία αντιστοιχεί στο Λ CDM, και συναρτήσει του N είναι

$$H(N)^2 = H_0^2 [\Omega_{0m} e^{-3N} + \Omega_{0r} e^{-4N} + \Omega_{\Lambda}] \quad (4.134)$$

όπου $N \equiv \ln \alpha = -\ln(1+z)$ και $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_{0m} - \Omega_{0r}$. Επίσης, χρησιμοποιώντας την (4.134) μπορούμε να υπολογίσουμε την $\frac{H'(N)}{H(N)}$, μια ποσότητα η οποία χρειάζεται στη λύση του δυναμικού συστήματος, η οποία μπορεί να βρεθεί ότι είναι ίση με

$$\frac{H'(N)}{H(N)} = \frac{-3\Omega_{0m}e^{-3N} - 4\Omega_{0r}e^{-4N}}{2(1 - \Omega_{0m} - \Omega_{0r} + \Omega_{0m}e^{-3N} + \Omega_{0r}e^{-4N})} \quad (4.135)$$

Οι σημαντικές, αλλά γενικές, ιδιότητες της $\frac{H'(N)}{H(N)}$ είναι η τιμή της κατά την διάρκεια της κάθε εποχής:

$$\frac{H'(N)}{H(N)} = -2 \quad N < N_{rm} \quad (4.136)$$

$$\frac{H'(N)}{H(N)} = -\frac{3}{2} \quad N_{rm} < N < N_{m\Lambda} \quad (4.137)$$

$$\frac{H'(N)}{H(N)} = 0 \quad N > N_{m\Lambda} \quad (4.138)$$

όπου $N_{rm} \simeq -\ln \frac{\Omega_{0m}}{\Omega_{0r}}$ και $N_{m\Lambda} \simeq -\frac{1}{3} \ln \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_{0m}}$ είναι οι τιμές του N για τις μεταβάσεις από την εποχή της ακτινοβολίας στην εποχή της ύλης και από την εποχή της ύλης στην εποχή της επιτάχυνσης. Για $\Omega_{0m} = 0.3$, $\Omega_{0r} = 10^{-4}$ έχουμε $N_{rm} \simeq -8$, $N_{m\Lambda} \simeq -0.3$. Η ακριβής χρονική στιγμή για τις μεταβάσεις μεταξύ αυτών των εποχών εξαρτάται από το μοντέλο, αλλά επειδή είναι αρκετά σύντομες οι μεταβάσεις καθαυτές δεν παίζουν σημαντικό ρόλο στην ανάλυσή μας.

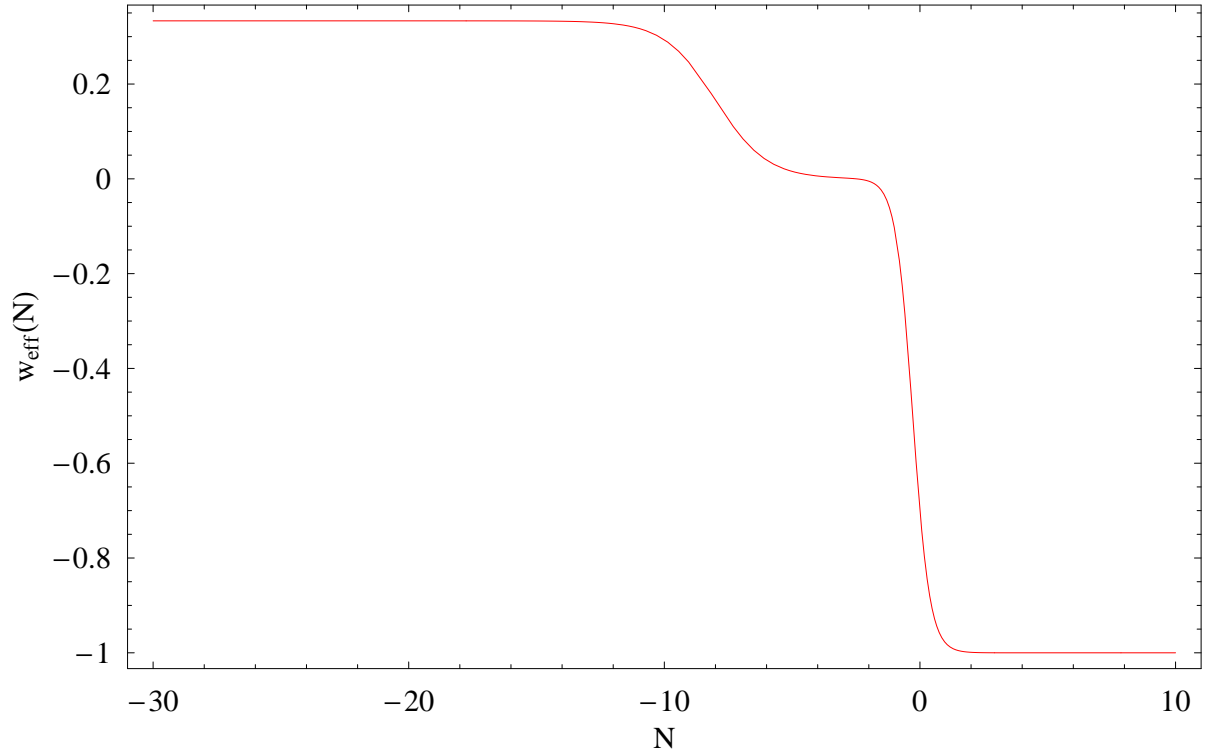
Μπορούμε εύκολα να μελετήσουμε τη δυναμική του συστήματος (4.111), (4.113), (4.114) και (4.116) βρίσκοντας τα κρίσιμα σημεία και μελετώντας την σταθερότητα τους σε καθεμιά από τρεις εποχές. Παρόλο που αυτό το δυναμικό σύστημα δεν είναι αυτόνομο (επειδή υπάρχει ρητή εξάρτηση του συστήματος από το χρόνο) μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι σε καθεμιά από τις τρεις εποχές όταν το $\frac{H'(N)}{H(N)}$ είναι σχεδόν σταθερό. Τα κρίσιμα σημεία και οι ιδιοτιμές τους φαίνονται στον Πίνακα 4.1. Ένα ενδιαφέρον σημείο του Πίνακα 4.1 είναι ότι σε κάθε εποχή υπάρχουν πέντε κρίσιμα σημεία, αλλά μόνο ένα από αυτά είναι σταθερός ελκυστής για δεδομένη τιμή του m . Επίσης, επειδή ο κινητικός όρος του βαθμωτού πεδίου πρέπει να είναι θετικός (δες την αναφορά [179]) και εκφράζεται ως

$$\Phi'^2 = \frac{3}{4} \left(\frac{F'}{F} \right)^2 + \frac{\epsilon \phi'^2}{2F} > 0 \quad (4.139)$$

, όπου Φ το πεδίο στο σύστημα Einstein (Einstein frame), τότε έχουμε συναρτήσεις των αδιάστατων μεταβλητών

$$\frac{x_1^2}{4} + x_3^2 > 0 \quad (4.140)$$

Όλα τα σημεία του Πίνακα 4.1 ικανοποιούν τη σχέση (4.140), εκτός από τα R_4 και M_4 . Για να μπορεί το R_4 να ικανοποιεί την (4.140), πρέπει να έχουμε $m < 2$ ή $m > 3$, ενώ για



Σχήμα 4.11: Η ενεργός καταστατική εξίσωση $w_{eff}(N)$ του δυναμικού συστήματος (βρέθηκε από τη σχέση (4.132) χρησιμοποιώντας την (4.134)).

το M_4 πρέπει να ισχύει $m < 2$ ή $m > 5/2$. Συνεπώς, η επιτρεπόμενη περιοχή του m , ώστε τα κρίσιμα σημεία να έχουν φυσικό περιεχόμενο ($x_1^2 + x_3^2 > 0$), είναι

$$m \leq 2 \quad or \quad m \geq 3 \quad (4.141)$$

Τώρα, σχετικά με την ‘ελκτική’ συμπεριφορά του συστήματος σε κάθε εποχή ξεχωριστά, βλέπουμε ότι

- Εποχή Ακτινοβολίας: Το R_3 είναι ελκυστής για $m < -3$ ενώ το R_4 είναι ελκυστής για $-3 < m < 1$.
- Εποχή Ύλης: Το M_4 είναι ελκυστής για $m < 1$.
- Εποχή deSitter: Το Λ_1 είναι ελκυστής για $m > 1$ και το Λ_4 είναι ελκυστής για $m < 1$.

Ένα ενδιαφέρον σημείο των κρίσιμων σημείων του Πίνακα 4.1 είναι ότι σε όλες τις περιπτώσεις, οι οποίες διαφέρουν από τη Γενική Σχετικότητα, ο ρυθμός διαστολής προκαλείται από τη Σκοτεινή Ενέργεια ($\Omega_{DE} = 1$), κάτι το οποίο υπονοεί ότι το βαθμωτό πεδίο ϕ θα μπορούσε επίσης να παίζει και το ρόλο της σκοτεινής ύλης αν οι διαταραχές του βρεθούν να έχουν την κατάλληλη μορφή. Για να επιβεβαιώσουμε την δυναμική εξέλιξη που περιγράφεται από τους ‘ελκυστές’ του Πίνακα 4.1, λύσαμε αριθμητικά το δυναμικό σύστημα (4.111),

(4.113), (4.114) και (4.116) χρησιμοποιώντας το μοντέλο (4.135) για να υπολογίσουμε τον όρο $\frac{H'(N)}{H(N)}$ με $\Omega_{0m} = 0.3$ και $\Omega_{0r} = 10^{-4}$. Το μοντέλο αυτό για τον όρο $\frac{H'(N)}{H(N)}$ οδηγεί στην ενεργό καταστατική εξίσωση $w_{eff}(N)$ η οποία φαίνεται στο σχήμα 4.11. Χρησιμοποιήθηκαν αρχικές συνθήκες τέτοιες ώστε το σύστημα να ξεκινήσει την εξέλιξή του από το σημείο R_4 με $m = -0.5$. Όπως φαίνεται και στα σχήματα 4.12 και 4.13 το σύστημα ακολουθεί την εξέλιξη του σημείου R_4 από την εποχή της ακτινοβολίας, στην εποχή της ύλης (M_4) και τελικά στην εποχή deSitter (Λ_4). Πρέπει να αναφερθεί ότι ελέγξαμε το ότι αν επιλεγθούν αρχικές συνθήκες που δεν συμπίπτουν ακριβώς με κάποιο από τα κρίσιμα σημεία τότε το σύστημα αιχμαλωτίζεται από τον ελκυστή R_4 και ακολουθεί την τροχιά που αναφέραμε πιο πριν, δηλαδή $(init) \rightarrow R_4 \rightarrow M_4 \rightarrow \Lambda_4$. Τέλος, αν οι αρχικές συνθήκες επιλεγθούν ώστε να συμπίπτουν ακριβώς με κάποιο από τα άλλα κρίσιμα σημεία τότε το σύστημα θα καταλήξει στο σημείο Λ_1 .

Η επιλογή ότι η παράμετρος m θα είναι σταθερά δικαιολογείται από το γεγονός ότι τα x_1 και x_3^2 είναι σταθερά σε κάθε εποχή (σχήμα 4.12). Επίσης, οι μορφές του δυναμικού $U(\phi)$ και της σύζευξης $F(\phi)$ που χρησιμοποιούνται περισσότερο στη βιβλιογραφία είναι εκθετικά, τα οποία προφανώς δίνουν σταθερό m (δες εξίσωση (4.115)).

Ανακατασκευή των $F(\phi)$ και $U(\phi)$

Σε αυτή την υποενότητα θα βρούμε τη μορφή του δυναμικού $U(\phi)$ και της σύζευξης $F(\phi)$ που αντιστοιχεί σε καθένα από τα κρίσιμα σημεία του Πίνακα 4.1. Ας θεωρήσουμε ένα κρίσιμο σημείο της μορφής $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3^2, \bar{x}_4)$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.105), βρίσκουμε

$$F = F_0 e^{-\bar{x}_1 N} \quad (4.142)$$

όπου $F_0 = F(N=0)$ είναι η τιμή του F την παρούσα χρονική στιγμή. Από την εξίσωση (4.107) βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \phi(N) &= -2\sqrt{6} \frac{\bar{x}_3}{\bar{x}_1} F_0^{1/2} e^{-\bar{x}_1 N/2} + C \\ &= 2\sqrt{6} \frac{\bar{x}_3}{\bar{x}_1} F_0^{1/2} (1 - e^{-\bar{x}_1 N/2}) + \phi_0 \end{aligned} \quad (4.143)$$

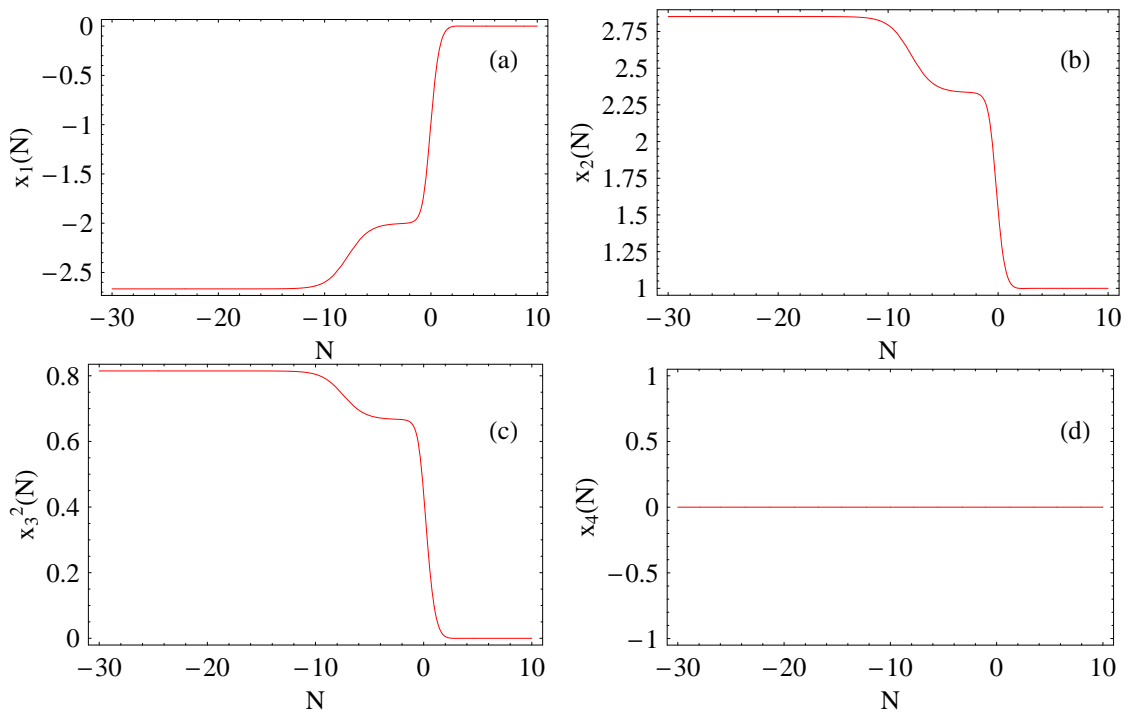
όπου

$$C = \phi_0 + 2\sqrt{6} \frac{\bar{x}_3}{\bar{x}_1} F_0^{1/2} \quad (4.144)$$

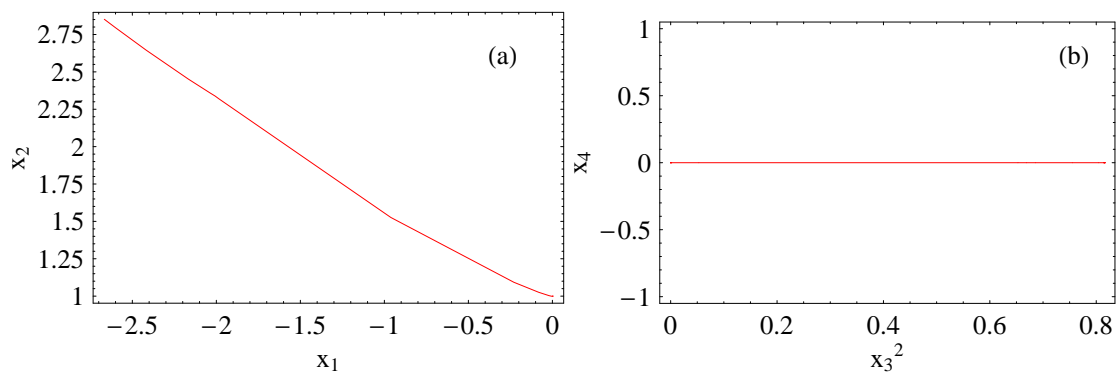
και $\phi_0 \equiv \phi(N=0)$. Οι εξισώσεις (4.142) και (4.143) μας επιτρέπουν να απαλείψουμε το N προς όφελος του πεδίου ϕ , και να δείξουμε ότι

$$F(\phi) = \frac{1}{24} \frac{\bar{x}_1^2}{\bar{x}_3^2} (\phi - C)^2 \equiv \xi (\phi - C)^2 \quad (4.145)$$

όπου $\xi \equiv \frac{1}{24} \frac{\bar{x}_1^2}{\bar{x}_3^2}$. Η μορφή αυτή του $F(\phi)$ θα δούμε στην επόμενη ενότητα ότι μπορεί να βρεθεί και με ένα τελείως διαφορετικό τρόπο, επιβάλλοντας μια Noether συμμετρία στη Λαγκρανζιανή της scalar-tensor θεωρίας.



Σχήμα 4.12: Η εξέλιξη των μεταβλητών $x_1(N)$, $x_2(N)$, $x_3^2(N)$ και $x_4(N)$. Το σύστημα ακολουθεί την εξέλιξη του ‘ελκυστή’ κατά τη διάρκεια των τριών εποχών.



Σχήμα 4.13: Οι τροχιές στους φασικούς χώρους $x_1 - x_2$ (σχήμα 4.13a) και $x_3^2 - x_4$ (σχήμα 4.13b).

Από την εξίσωση (4.106), έχουμε

$$U(N) = \bar{x}_2 \cdot 3F(N)H(N)^2 \quad (4.146)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την $H(N)$ (εξίσωση (4.134)), μπορούμε να βρούμε τον κυρίαρχο όρο του $H(N)$ σε κάθε εποχή:

$$H(N)^2/H_0^2 = \begin{cases} \Omega_{0r}e^{-4N}, & \text{εποχή ακτινοβολίας} \\ \Omega_{0m}e^{-3N}, & \text{εποχή ύλης} \\ 1 - \Omega_{0r} - \Omega_{0m}, & \text{εποχή deSitter} \end{cases}$$

Έτσι χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.143) μπορούμε να βρούμε το $H(\phi)$:

$$H(\phi)^2/H_0^2 = \begin{cases} \frac{\Omega_{0r}}{F_0^{4/\bar{x}_1}} [\xi(\phi - C)^2]^{4/\bar{x}_1}, & \text{εποχή ακτινοβολίας} \\ \frac{\Omega_{0m}}{F_0^{3/\bar{x}_1}} [\xi(\phi - C)^2]^{3/\bar{x}_1}, & \text{εποχή ύλης} \\ 1 - \Omega_{0r} - \Omega_{0m}, & \text{εποχή deSitter} \end{cases}$$

και να εκφράσουμε την (4.146) συναρτήσει του πεδίου ϕ για να βρούμε το δυναμικό

$$U(\phi) = \lambda(\phi - C)^{2+\alpha} \quad (4.147)$$

όπου,

$$\lambda = \begin{cases} 3\bar{x}_2 \frac{\Omega_{0r}}{F_0^{4/\bar{x}_1}} \xi^{1+4/\bar{x}_1}, & \text{εποχή ακτινοβολίας} \\ 3\bar{x}_2 \frac{\Omega_{0m}}{F_0^{3/\bar{x}_1}} \xi^{1+3/\bar{x}_1}, & \text{εποχή ύλης} \\ 3\bar{x}_2 \xi (1 - \Omega_{0r} - \Omega_{0m}), & \text{εποχή deSitter} \end{cases}$$

$$\text{και, } \alpha = \begin{cases} 8/\bar{x}_1, & \text{εποχή ακτινοβολίας} \\ 6/\bar{x}_1, & \text{εποχή ύλης} \\ 0, & \text{εποχή deSitter} \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (4.115), (4.145) και (4.147), είναι εύκολο να δείξουμε ότι

$$2 + \alpha = 2m \quad (4.148)$$

με την εξίσωση (4.147) να γράφεται

$$U(\phi) = \lambda(\phi - C)^{2m} \quad (4.149)$$

Πρέπει να αναφερθεί ότι παρόλο που η ιδιοτιμή \bar{x}_1 αλλάζει κατά τη μετάβαση $R_4 \rightarrow M_4$, ο εκθέτης $2 + \alpha$ παραμένει σταθερός.

Επίσης, αφού η παράμετρος m είναι σταθερή (δες την εξίσωση (4.148)) η εξίσωση (4.115) μας επιτρέπει να γράψουμε το δυναμικό U συναρτήσει της σύζευξης F , δηλαδή

$$U = cF^m \quad (4.150)$$

Η παραπάνω ανάλυση είναι συνεπής μόνο όταν οι ιδιοτιμές \bar{x}_1 , \bar{x}_2 και \bar{x}_3^2 είναι διαφορετικές του μηδενός, όπως για παράδειγμα ισχύει για το σημείο R_4 ή για την περίπτωση που έχουμε διαταράξει τις αρχικές συνθήκες γύρω από ένα κρίσιμο σημείο. Σε κάθε άλλη περίπτωση, ισχύει ότι αν

- $\bar{x}_2 = \bar{x}_3^2 = 0$, οπότε $\phi = \phi_0 = \text{σταθ.}$, και το $F = F(N)$ δίνεται από την εξίσωση (4.142) και $U = 0$, όπως π.χ. ισχύει για τα R_2 και R_3 .

- $\bar{x}_1 = \bar{x}_3^2 = 0$ και είμαστε στην εποχή deSitter, οπότε $\phi = \phi_0 = \text{σταθ.}$, $F = F_0$ και $U = U_0$, όπως π.χ. ισχύει για το Λ_4 .
- $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}_3^2 = 0$, οπότε $\phi = \phi_0 = \text{σταθ.}$, $F = F_0$ και $U = 0$, όπως π.χ. ισχύει για το R_5 .

Πρέπει να αναφερθεί ότι αν θεωρούσαμε άλλα (μη κρίσιμα) σημεία, όχι μόνο η μέθοδος αυτή θα περιείχε χρονική εξάρτηση, αλλά δεν θα μπορούσαμε να ανακατασκευάσουμε ταυτόχρονα τα $F(\phi)$ και $U(\phi)$ από τη συνάρτηση (4.134). Οι δύο αυθαίρετες συναρτήσεις προφανώς χρειάζονται δύο γνωστές συναρτήσεις για να ανακατασκευαστούν στη γενική περίπτωση (δες και τις αναφορές [154],[42],[43]). Στη δική μας περίπτωση όμως το γεγονός ότι η ανακατασκευή συμβαίνει πάνω στα κρίσιμα σημεία, σημαίνει ότι η παράμετρος m είναι σταθερή και έτσι το σύστημα των εξισώσεων (4.111), (4.113), (4.114) και (4.116) είναι κλειστό, επιτρέποντας μας έτσι να προχωρήσουμε με την ανακατασκευή αριθμητικά και αναλυτικά.

Επίσης, είναι εύκολο να δείχθει ότι οι ανακατασκευασμένες συναρτήσεις δεν είναι τίποτα περισσότερο από Brans-Dicke θεωρίες με δυναμικό. Αν θέσουμε $F = \beta\phi_{BD} = \xi\phi^2$ τότε $\phi = \sqrt{\frac{\beta}{\xi}\phi_{BD}}$ και η Λαγκρανζιανή (4.25) γίνεται

$$\mathcal{L} = \frac{\beta\phi_{BD}}{2} R - \frac{1}{2} \frac{\omega_{BD}}{\phi_{BD}} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi_{BD} \partial_\nu \phi_{BD} - U(\phi_{BD}) + \mathcal{L}_m \quad (4.151)$$

όπου $\omega_{BD} \equiv \epsilon \frac{\beta}{\xi} = \text{constant}$.

Ένα ενδιαφέρον χαρακτηριστικό της παραπάνω μεθόδου είναι ότι οι εξισώσεις (4.150) και (4.145) είναι ακριβώς οι ικανές συνθήκες για την ύπαρξη μιας Noether συμμετρίας των Scalar-Tensor θεωριών, όπως θα δούμε στην ενότητα που ακολουθεί.

4.2.6 Noether συμμετρίες και Scalar-Tensor θεωρίες

Γενικά για τη μέθοδο

Οι λύσεις της Λαγκρανζιανής (4.25) μπορούν επίσης να βρεθούν με τη μέθοδο της Noether συμμετρίας [195]. Αυτή μας επιτρέπει, τουλάχιστον στην θεωρία, να βρούμε κυκλικές μεταβλητές που σχετίζονται με διατηρήσιμες ποσότητες, επιτρέποντας να λυθεί επακριβώς η δυναμική του προβλήματος. Εξάλλου, η ύπαρξη συμμετριών καθορίζει τη σύζευξη $F(\phi)$, το δυναμικό $U(\phi)$ και δίνει τη μεταξύ τους σχέση. Προτού εφαρμόσουμε τη μέθοδο στο συγκεκριμένο πρόβλημα θα την περιγράψουμε σύντομα.

Ας είναι $\mathcal{L}(q^i, \dot{q}^i)$ μια κανονική και μη εκφυλισμένη σημειακή Λαγκρανζιανή δοσμένη συναρτήσεις των συντεταγμένων q^i (οι 'θέσεις'), όπου

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0; \quad \det H_{ij} \equiv \det \left\| \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right\| \neq 0 \quad (4.152)$$

και H_{ij} ο πίνακας Hessian που σχετίζεται με την \mathcal{L} .

Η τελεία συμβολίζει την παράγωγο ως προς τη μεταβλητή λ η οποία εν γένει αντιστοιχεί στο χρόνο t . Σε ό,τι ακολουθεί θα θεωρήσουμε μετασχηματισμούς οι οποίοι είναι σημειακοί. Κάθε αντιστρέψιμος και συνεχής μετασχηματισμός των 'θέσεων' $Q^i = Q^i(\mathbf{q})$ προκαλεί ένα μετασχηματισμό στις 'ταχύτητες' τέτοιες ώστε

$$\dot{Q}^i(\mathbf{q}) = \frac{\partial Q^i}{\partial q^j} \dot{q}^j. \quad (4.153)$$

Ο πίνακας $\mathcal{J} = \|\partial Q^i / \partial q^j\|$ είναι η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού των θέσεων και πρέπει να είναι μη μηδενικός. Για την Ιακωβιανή $\tilde{\mathcal{J}}$ του νέου μετασχηματισμού μπορεί εύκολα να βρεθεί ότι ισχύει $\mathcal{J} \neq 0 \rightarrow \tilde{\mathcal{J}} \neq 0$.

Συνήθως, η συνθήκη αυτή δεν ικανοποιείται σε όλο το χώρο αλλά στη γειτονιά ενός σημείου, οπότε λέγεται ότι είναι *σημειακός μετασχηματισμός*. Ένας τέτοιος μετασχηματισμός $Q^i = Q^i(\mathbf{q})$ μπορεί να εξαρτάται από μία ή περισσότερες παραμέτρους. Εν γένει, ένας απειροστός σημειακός μετασχηματισμός αναπαράσεται από ένα διανυσματικό πεδίο που δρα στο χώρο $\{q^i, \dot{q}^i\}$. Ο μετασχηματισμός που προκαλείται από την (4.153) αναπαράσεται από το διάνυσμα

$$\mathbf{X} = \alpha^i(\mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial q^i} + \left(\frac{d}{d\lambda} \alpha^i(\mathbf{q}) \right) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}. \quad (4.154)$$

όπου το \mathbf{X} είναι ο γεννήτορας του μετασχηματισμού. Μία συνάρτηση $f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ είναι αναλλοίωτη κάτω από το μετασχηματισμό \mathbf{X} , αν ισχύει

$$L_{\mathbf{X}} f \equiv \alpha^i(\mathbf{q}) \frac{\partial f}{\partial q^i} + \left(\frac{d}{d\lambda} \alpha^i(\mathbf{q}) \right) \frac{\partial f}{\partial \dot{q}^i} = 0, \quad (4.155)$$

όπου $L_{\mathbf{X}} f$ είναι η Lie παράγωγος της f . Συγκεκριμένα, αν

$$L_{\mathbf{X}} \mathcal{L} = 0, \quad (4.156)$$

τότε το \mathbf{X} εκφράζει μια *συμμετρία* της Λαγκρανζιανής \mathcal{L} .

Για να δούμε πως σχετίζονται το θεώρημα Noether και οι κυκλικές μεταβλητές, ας θεωρήσουμε μια Λαγκρανζιανή \mathcal{L} και τις αντίστοιχες εξισώσεις Euler-Lagrange

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^j} = 0. \quad (4.157)$$

Ας θεωρήσουμε και το διανυσματικό πεδίο της εξίσωσης (4.157) και μαζί με τους όρους α^i , παίρνουμε

$$\alpha^j \left(\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^j} \right) = 0. \quad (4.158)$$

Επειδή ισχύει ότι

$$\alpha^j \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j} = \frac{d}{d\lambda} \left(\alpha^j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j} \right) - \left(\frac{d\alpha^j}{d\lambda} \right) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j}, \quad (4.159)$$

από την (4.158) προκύπτει ότι

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\alpha^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \right) = L_{\mathbf{X}} \mathcal{L}. \quad (4.160)$$

Ως συνέπεια, το Θεώρημα Noether λέει ότι:

Αν ισχύει ότι $L_{\mathbf{X}} \mathcal{L} = 0$, τότε η συνάρτηση

$$\Sigma_0 = \alpha^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}, \quad (4.161)$$

είναι μια σταθερά της κίνησης.

Η περίπτωση της Scalar-Tensor

Η παραπάνω μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρεθούν λύσεις των εξισώσεων κίνησης της Λαγκρανζιανής (4.25). Συγκεκριμένα, η Λαγκρανζιανή (4.25) μπορεί να μετατραπεί σε σημειακή

$$\mathcal{L} = -3a\dot{a}^2 F - 3F_{,\phi} \dot{\phi} a^2 \dot{a} + a^3 \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - U(\phi) \right) - Da^{-3(\gamma-1)}, \quad (4.162)$$

όπου για χάρη της απλότητας, θεωρήσαμε μόνο την περίπτωση του βαθμωτού quintessence πεδίου (η γενίκευση στην phantom περίπτωση είναι προφανής). Η σταθερά D σχετίζεται με την πυκνότητα του ιδανικού ρευστού και είναι $\rho_m = D(a_0/a)^{3\gamma}$, όπου το εύρος $1 \leq \gamma \leq 2$ ορίζει την περιοχή Zel'dovich για την καταστατική εξίσωση της ύλης. Το δυναμικό σύστημα (4.27), (4.28), (4.29) μπορεί εύκολα να βρεθεί θεωρώντας τη συνθήκη της ενέργειας και τις εξισώσεις Euler-Lagrange για τη Λαγκρανζιανή (4.162). Στην περίπτωση της ύλης, $\gamma = 1$, ο τελευταίος όρος στην (4.162) γίνεται μια απλή σταθερά. Καθώς ο παραμετρικός χώρος του συστήματος είναι ο $\{a, \phi\}$, το πρόβλημα είναι δισδιάστατο και τότε ο απειροστός γεννήτορας της συμμετρίας Noether είναι ο:

$$\mathbf{X} = \alpha \frac{\partial}{\partial a} + \beta \frac{\partial}{\partial \phi} + \dot{\alpha} \frac{\partial}{\partial \dot{a}} + \dot{\beta} \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}}, \quad (4.163)$$

όπου α και β είναι συναρτήσεις που εξαρτώνται από τα a και ϕ , ενώ

$$\dot{\alpha} \equiv \frac{\partial \alpha}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} \dot{\phi} \quad ; \quad \dot{\beta} \equiv \frac{\partial \beta}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial \beta}{\partial \phi} \dot{\phi}. \quad (4.164)$$

Η συνθήκη για την ύπαρξη της συμμετρίας Noether είναι $L_{\mathbf{X}} \mathcal{L} = 0$. Αυτή δίνει ρητά μια εξίσωση δευτέρου βαθμού στα \dot{a} και $\dot{\phi}$, της οποίας οι συντελεστές πρέπει να είναι μηδέν λόγω του ότι θεωρούνται γραμμικώς ανεξάρτητοι. Τότε αυτό το σύστημα των συντελεστών δημιουργεί το ακόλουθο σύστημα διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους [195],

$$\alpha + 2a \frac{\partial \alpha}{\partial a} + a^2 \frac{\partial \beta}{\partial a} \frac{F_{,\phi}}{F} + a\beta \frac{F_{,\phi}}{F} = 0 \quad (4.165)$$

$$\left(2\alpha + a\frac{\partial\alpha}{\partial a} + a\frac{\partial\beta}{\partial\phi}\right)F_{,\phi} + aF_{,\phi\phi}\beta + 2F\frac{\partial\alpha}{\partial\phi} - \frac{a^2}{3}\frac{\partial\beta}{\partial a} = 0 \quad (4.166)$$

$$3\alpha - 6F_{,\phi}\frac{\partial\alpha}{\partial\phi} + 2a\frac{\partial\beta}{\partial\phi} = 0 \quad (4.167)$$

$$\frac{U_{,\phi}}{U} = -\frac{3\alpha}{a\beta} \quad (4.168)$$

Η εξίσωση (4.168) μπορεί να ξαναγραφτεί στην μορφή

$$\frac{U_{,\phi}}{U} = m \cdot \frac{F_{,\phi}}{F} \quad (4.169)$$

όπου

$$m \equiv -\frac{3\alpha}{a\beta} \frac{F}{F_{,\phi}} \quad (4.170)$$

Πρέπει να αναφέρουμε ότι η εξίσωση (4.169) είναι μια σχέση μεταξύ του δυναμικού και της σύζευξης και συμπίπτει ακριβώς με την (4.115). Λύση του παραπάνω συστήματος σημαίνει να βρεθούν οι συναρτήσεις $\{\alpha, \beta, F, U\}$ και για αυτό το σκοπό θεωρούμε τον εξής χωρισμό των μεταβλητών,

$$\alpha = A_1(a)A_2(\phi) \quad (4.171)$$

$$\beta = B_1(a)B_2(\phi) \quad (4.172)$$

Τότε από την εξίσωση (4.167) προκύπτει ότι

$$\frac{B_1a}{6A_1} = -\frac{A_2}{4B_2'} + \frac{A_2'F'}{2B_2'} = C \quad (4.173)$$

όπου η C είναι μια σταθερά ολοκλήρωσης. Η λύση της (4.173) είναι απλή και παίρνουμε

$$A_1 = \frac{B_1a}{6C} \quad (4.174)$$

και

$$B_2' = -\frac{A_2 - 2A_2'F'}{4C} \quad (4.175)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (4.171) και (4.172) στην (4.165) έπεται ότι

$$-\frac{a}{B_1} \frac{dB_1}{da} = \frac{3(A_2F + 2CB_2F')}{2(A_2F + 3CB_2F')} = -s \quad (4.176)$$

όπου s είναι μια σταθερά ολοκλήρωσης. Συνεπώς, από τις εξισώσεις (4.174) και (4.176) παίρνουμε

$$B_1 = Ba^s \quad (4.177)$$

και

$$A_1 = \frac{B}{6C} a^{s+1} \quad (4.178)$$

όπου η B είναι μια σταθερά ολοκλήρωσης. Επίσης, από την εξίσωση (4.176) έχουμε

$$\frac{F'}{F} = -\frac{2s+3}{6C(s+1)} \frac{A_2}{B_2} \quad (4.179)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (4.177), (4.178) και (4.167) προκύπτει η σχέση

$$2FA'_2 + (A_2(s+3) + 6CB'_2)F' - 2B_2C(s-3F'') = 0 \quad (4.180)$$

Έτσι, απέμειναν οι τρεις εξισώσεις (4.175), (4.179) και (4.180) για να λύσουμε για τις τρεις άγνωστες συναρτήσεις A_2 , B_2 και F . Χρησιμοποιώντας τις (4.175) και (4.179) για τα B_2 και B'_2 στην εξίσωση (4.180) παίρνουμε

$$FA'_2 + \frac{F'}{4} (A_2(2s+3) + 6A'_2F') + \frac{A_2F(2s+3)(s-3F'')}{6(s+1)F'} = 0 \quad (4.181)$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.179) στην (4.175) βρίσκεται η σχέση

$$\begin{aligned} & 2A'_2F' \left(3(s+1)(F')^2 + F(2s+3) \right) + \\ & + A_2 \left((s+3)(F')^2 - 2F(2s+3)F'' \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.182)$$

Επιπλέον, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις (4.181) και (4.182) για να απαλείψουμε τα A_2 και A'_2 προς όφελος του F ,

$$\begin{aligned} F'' &= \frac{3s(s+1)(s+2)F'^4}{(2s+3)F^2} + \\ &+ \frac{(s+1)(8s^2+16s+3)F'^2}{2(2s+3)F} + \frac{s(2s+3)}{3} \end{aligned} \quad (4.183)$$

Η εξίσωση (4.183) είναι μη γραμμική και η πλήρης λύση είναι ένα ελλειπτικό ολοκλήρωμα δευτέρου είδους, το οποίο είναι αρκετά πολύπλοκο. Ωστόσο, μια λύση μπορεί να βρεθεί ότι είναι η

$$F = \xi(\phi - \phi_0)^2 \quad (4.184)$$

Χρησιμοποιώντας την (4.184) στην (4.183) βρίσκουμε ότι $\xi = -\frac{(2s+3)^2}{24(s+1)(s+2)}$ ή $\xi = -\frac{1}{6}$, όπου το τελευταίο αντιστοιχεί στη σύμμορφη σύζευξη[196]. Η ελεύθερη παράμετρος s έχει

ξεκάθαρο φυσικό νόημα καθώς σχετίζεται με το λόγο των κρίσιμων σημείων \bar{x}_1 και \bar{x}_3 και της σύζευξης. Για αυτή τη μορφή του $F(\phi)$ μπορούμε να προσδιορίσουμε το A_2 από την (4.181) ή την (4.182) και το B_2 από την (4.179) και τελικά να βρούμε τη λύση για τις α και β . Για τις δύο τιμές του ξ και τις εξισώσεις (4.181) και (4.182) παίρνουμε τρεις εκφυλισμένες λύσεις για τα α και β , δηλαδή αντιστοιχούν στην ίδια μορφή του δυναμικού U (δες και την εξίσωση (4.168)). Οι λύσεις είναι:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{a^{s+1}AB(\phi - \phi_0)^{\frac{2s(s+2)}{2s+3}}}{6C} \\ \beta_1 &= \frac{a^sAB(2s+3)(\phi - \phi_0)^{\frac{2s(s+2)}{2s+3}+1}}{12C(s+1)} \\ \alpha_2 &= \frac{a^{s+1}AB(\phi - \phi_0)^{\frac{s(2s+3)}{2(s+1)}}}{12C(s+1)} \\ \beta_2 &= \frac{a^sAB(2s+3)(\phi - \phi_0)^{\frac{s(2s+3)}{2(s+1)}+1}}{12C(s+1)} \\ \alpha_3 &= \frac{a^{s+1}AB(\phi_0 - \phi)^s}{6C} \\ \beta_3 &= \frac{a^sAB(2s+3)(\phi_0 - \phi)^{s+1}}{12C(s+1)}\end{aligned}$$

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι και για τις τρεις περιπτώσεις έχουμε

$$m(s) = \frac{3(s+1)}{2s+3} \quad (4.185)$$

και από την εξίσωση (4.169) παίρνουμε

$$U(\phi) = U_0(\phi - \phi_0)^{\frac{6(s+1)}{2s+3}} = U_0(\phi - \phi_0)^{2m(s)} \quad (4.186)$$

όπου το U_0 είναι μια σταθερά η οποία καθορίζει την κλίμακα του δυναμικού και δεν είναι απευθείας μετρήσιμη, αλλά μπορεί να ξαναγραφτεί συναρτήσει των παρατηρήσιμων μεγεθών H_0 , q_0 , Ω_m . Ένα αξιοπρόσεκτο χαρακτηριστικό της εξίσωσης (4.186) είναι ότι συμπίπτει ακριβώς με την (4.149), υποδεικνύοντας ότι μπορεί να υπάρχει μη τετριμμένη φυσική σε αυτή την ομάδα θεωριών scalar-tensor.

Για να βρούμε τη λύση στις εξισώσεις κίνησης πρέπει να βρεθεί η τιμή της σταθεράς της κίνησης Σ_0 από την εξίσωση (4.161). Αυτή είναι,

$$\Sigma_0 = \frac{b(2s+3)^2}{(s+1)^2(s+2)(s+3)} \frac{d(a^{s+3}(\phi - \phi_0)^{\frac{2s(s+2)}{2s+3}+2})}{dt} \quad (4.187)$$

όπου $b = -\frac{AB}{48C}$. Ολοκλήρωση της (4.187) δίνει

$$\phi - \phi_0 = a^{-\frac{2s+3}{2s+2}} c^{1+\frac{3}{2s}} t^{\frac{2s+3}{2s^2+8s+6}} \quad (4.188)$$

$$\text{όπου } c = \left(\frac{(s+1)^2(s^2+5s+6)\Sigma_0}{b(2s+3)^2} \right)^{\frac{s}{(s+1)(s+3)}}.$$

Χρησιμοποιώντας τις (4.186) και (4.188) στην (4.27) μπορούμε να βρούμε τα $a(t)$ και $\phi(t)$:

$$a(t) = t^{\frac{s+2}{s+3}} \left(\frac{8cs(s+1)(s+2)(s+3)^2 U_0 t^{\frac{s+6}{s+3}}}{(s+6)(2s+3)^2} + a_0 \right)^{1+\frac{1}{s}} \quad (4.189)$$

και

$$\begin{aligned} (\phi(t) - \phi_0)^2 &= c^{2+\frac{3}{s}} t^{-\frac{2s+3}{s+3}} \cdot \\ &\left(\frac{8cs(s+1)(s+2)(s+3)^2 U_0 t^{\frac{s+6}{s+3}}}{(s+6)(2s+3)^2} + a_0 \right)^{-2-\frac{3}{s}} \end{aligned} \quad (4.190)$$

όπου το a_0 είναι σταθερά ολοκλήρωσης.

Λόγω της δομής της παραπάνω γενικής λύσης, οι περιπτώσεις $s=0, -1, -3/2, -2$ και $s=-3$ πρέπει να μελετηθούν ξεχωριστά. Οι λύσεις για $s=0$ και $s=-3$ αντιστοιχούν στην ελάχιστη σύζευξη, για την οποία $F = F_0$ και $U = \Lambda$, και στην περίπτωση όπου $F \sim \phi^2$ και $U \sim \phi^4$. Σε αυτές τις περιπτώσεις οι λύσεις είναι εκθετικές ή ταλαντωτικές.

Αριθμητικά αποτελέσματα

Συμπερασματικά, για να επιβεβαιώσουμε την ακρίβεια της ανάλυσης μας θα λύσουμε αριθμητικά το δυναμικό μας σύστημα για να συγκρίνουμε τη μορφή του δυναμικού U και τη σύζευξη F των εξισώσεων (4.145) και (4.149) (τα οποία βρέθηκαν επίσης και με τη μέθοδο της συμμετρίας Noether), με την αντίστοιχη από την αριθμητική ανάλυση. Τα βήματα που έγιναν για τη σύγκριση είναι τα ακόλουθα:

- Λύθηκε αριθμητικά το σύστημα (4.111), (4.113), (4.114) και (4.116) για να βρούμε τα $x_1(N)$, $x_2(N)$, $x_3^2(N)$ και $x_4(N)$. Ολοκληρώνοντας την (4.105) προκύπτει ότι

$$F(N) = F_0 e^{-\int_{N_{min}}^N x_1(N') dN'} \quad (4.191)$$

και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.107) στη μορφή

$$\phi'(N)^2 = 6x_3^2(N)F(N) \quad (4.192)$$

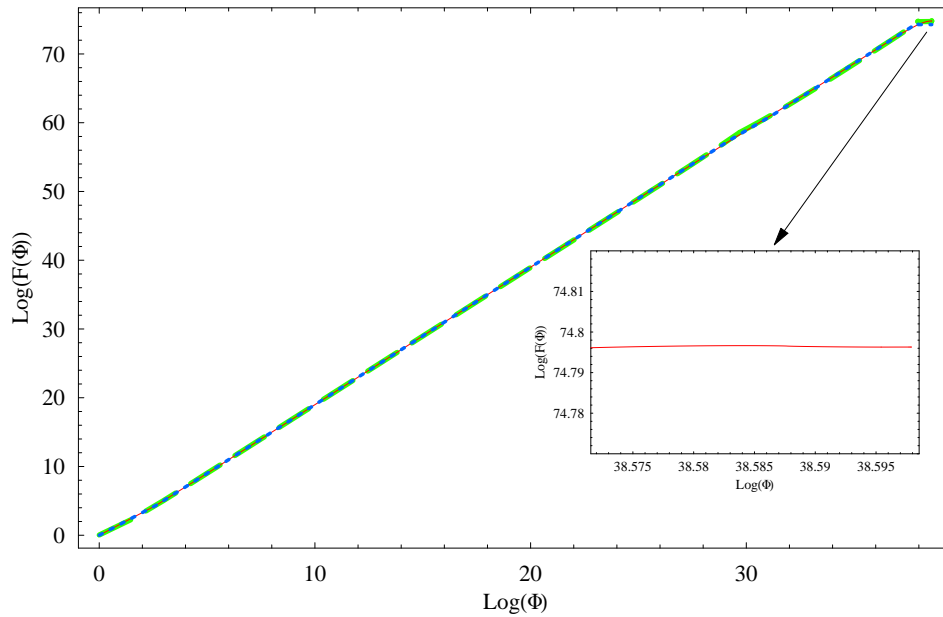
βρίσκουμε το $\phi(N)$. Η τελική μορφή του $F(\phi)$ υπολογισμένου αριθμητικά (κόκκινη συνεχής γραμμή) της εξίσωσης (4.191) και η αναλυτική προσέγγιση (μπλε τελείες) της εξίσωσης (4.145) φαίνονται στο σχήμα 4.14.

- Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.106) μπορούμε να βρούμε το δυναμικό $U(N)$ αριθμητικά (κόκκινη συνεχής γραμμή) ως

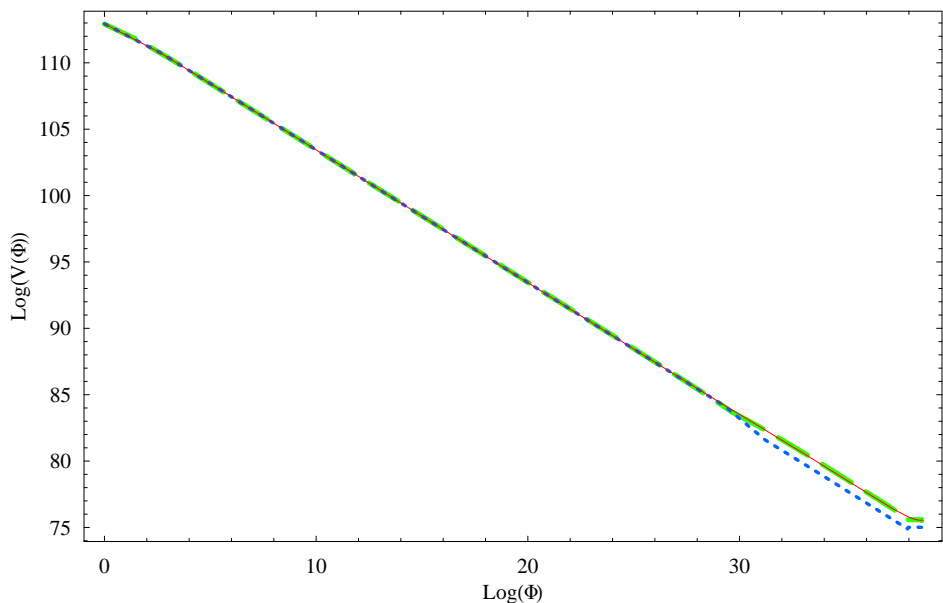
$$U(N) = 3x_2(N)F(N)H(N)^2 \quad (4.193)$$

και να συγκρίνουμε με την αναλυτική μορφή (μπλε τελείες) του σχήματος (4.149) όπως φαίνεται στο σχήμα 4.15.

Στη μέθοδο που αναφέραμε παραπάνω χρησιμοποιήσαμε τις ακριβείς τιμές των παραμέτρων \bar{x}_1 , \bar{x}_2 , \bar{x}_3^2 και \bar{x}_4 από τον Πίνακα 4.1 σε κάθε εποχή για τις αναλυτικές σχέσεις των εξισώσεων (4.145) και (4.149). Επίσης, οι αρχικές συνθήκες που χρησιμοποιήθηκαν στην αριθμητική εξέλιξη ήταν $F(N = -30) = \phi(N = -30) = 1$. Ως ένα άλλο παράδειγμα, προσαρμόσαμε τις $F(N)$ και $U(N)$ που βρέθηκαν αριθμητικά από τις εξισώσεις (4.191) και (4.193) αντίστοιχα για να βρούμε τις παραμέτρους των αναλυτικών σχέσεων (4.145) και (4.149) και βρήκαμε ότι τα αποτελέσματα είναι σε πολύ καλή συμφωνία (δες στα σχήματα 4.14 και 4.15 τις πράσινες διακεκομμένες γραμμές). Ένα αξιοσημείωτο χαρακτηριστικό των σχημάτων 4.14 και 4.15 είναι ένα μικρό επίπεδο το οποίο εμφανίζεται κατά την εποχή deSitter (δες τη μεγεθυσμένη περιοχή στο σχήμα 4.14). Ο λόγος για την ύπαρξη αυτού του επιπέδου είναι ότι καθώς ο σύστημα εξελίσσεται προς την εποχή deSitter η σύζευξη $F(\phi)$ 'παγώνει', καθώς $x_1(N_{ds}) \rightarrow 0$ (δες την εξίσωση (4.105) και το σχήμα 4.14a), πολύ πιο γρήγορα από το πεδίο ϕ .



Σχήμα 4.14: Η μορφή του $\log(F(\phi))$ στην αριθμητική ανακατασκευή (κόκκινη συνεχής γραμμή), η αναλυτική του προσέγγιση (μπλε τελείες) και μια προσαρμογή στην αριθμητική ανακατασκευή χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.191) (πράσινη διακεκομμένη γραμμή). Η συμφωνία μεταξύ των τριών μεθόδων είναι πολύ καλή. Ο λόγος για την ύπαρξη του μικρού επιπέδου είναι ότι καθώς το σύστημα εξελίσσεται προς την εποχή deSitter η σύζευξη $F(\phi)$ ‘παγώνει’ πιο γρήγορα από το πεδίο ϕ .



Σχήμα 4.15: Η μορφή του $\log(V(\phi))$ στην αριθμητική ανακατασκευή (κόκκινη συνεχής γραμμή), η αναλυτική προσέγγιση (μπλε τελείες) και μια προσαρμογή στην αριθμητική ανακατασκευή χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.191) (πράσινη διακεκομμένη γραμμή). Η συμφωνία μεταξύ των τριών μεθόδων είναι πολύ καλή. Το δυναμικό παρουσιάζει το μικρό επίπεδο στην εποχή deSitter για το ίδιο λόγο με το $F(\phi)$ (δες σχήμα 4.14).

4.3 Μοντέλα τύπου $f(R)$

4.3.1 Θεωρία

Μια ειδική αλλά πολύ ενδιαφέρουσα περίπτωση της Λαγκρανζιανής (4.1) είναι όταν η συνάρτηση f είναι μία γενική συνάρτηση του βαθμωτού Ricci, δηλαδή $f = f(R)$. Οι θεωρίες αυτές είναι γενικεύσεις της Γενικής Σχετικότητας (της οποίας η Λαγκρανζιανή είναι απλά $\mathcal{L} = R - 2\Lambda$) και η δράση τους μπορεί να γραφτεί ως

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} f(R) + \mathcal{L}_{\text{rad}} + \mathcal{L}_{\text{m}} \right] \quad (4.194)$$

όπου \mathcal{L}_{m} και \mathcal{L}_{rad} είναι οι Λαγκρανζιανές πυκνότητες της ύλης και της ακτινοβολίας, και έχουμε θέσει $8\pi G = 1$. Οι θεωρίες αυτές εμφανίζονται σε διάφορα θεωρητικά πλαίσια: Στην κβαντική θεωρία πεδίου σε καμπύλο χωρόχρονο [197], στο όριο χαμηλής ενέργειας της $D = 10$ θεωρίας υπερχορδών [198] και στην δράση του κενού στις Θεωρίες της Μεγάλης Ενοποίησης (GUTs).

Έχειδειχθεί ότι [199] για κατάλληλες μορφές της $f(R)$ η δράση (4.194) μπορεί με φυσικό τρόπο να εξηγήσει την επιταχυνόμενη διαστολή του σύμπαντος σε πρόσφατους χρόνους σε συμφωνία με τα δεδομένα των υπερκαινοφανών αστέρων [200]. Το πλεονέκτημα αυτών των θεωριών είναι ότι δεν εισάγουν καινούριους βαθμούς ελευθερίας και η επιταχυνόμενη διαστολή προκύπτει από το βαθμωτό Ricci (σκοτεινή βαρύτητα) του οποίου η φυσική προέλευση είναι καλά κατανοητή. Ωστόσο, το κύριο μειονέκτημα αυτών των θεωριών είναι ότι (όπως και οι περισσότερες γενικευμένες θεωρίες βαρύτητας) είναι σημαντικά περιορισμένες από τις τοπικές παρατηρήσεις της βαρύτητας [201],[202],[203]. Μάλιστα μπορεί ναδειχθεί [201] ότι οι $f(R)$ θεωρίες είναι ισοδύναμες με τις θεωρίες τύπου Brans-Dicke με $\omega = 0$ και ένα συγκεκριμένο τύπο δυναμικού. Αφού οι παρατηρήσεις στο ηλιακό σύστημα της Γενικής Σχετικότητας υποδηλώνουν ότι $\omega > 4 \times 10^4$ [180], αυτές οι θεωρίες μπορούν να είναι συμβατές με τις παρατηρήσεις μόνο αν το βαθμωτό R συσχετιστεί με μια πολύ μεγάλη (άπειρη) ενεργό μάζα. Όπως έχειδειχθεί [204] συγκεκριμένες μορφές της συνάρτησης $f(R)$ μπορούν να δώσουν την άπειρη ενεργό μάζα που απαιτείται ώστε να ικανοποιούνται οι περιορισμοί από το ηλιακό σύστημα αλλά και την απαραίτητη επιταχυνόμενη διαστολή σε πρόσφατους χρόνους.

Το ότι οι $f(R)$ θεωρίες μπορούν να θεωρηθούν μια υποπερίπτωση των scalar-tensor θεωριών σημαίνει ότι η ανακατασκευή της συνάρτησης $f(R)$ από μια συγκεκριμένη $H(z)$ μπορεί να γίνει με τρόπο παρόμοιο με τις scalar-tensor θεωρίες [42],[154]. Ωστόσο, η μη ύπαρξη μιας παραμέτρου Brans-Dicke απαιτεί κάποιες αλλαγές στη μέθοδο της ανακατασκευής και ειδικά όταν αυτή καλύπτει όλη την κοσμική ιστορία και συγκεκριμένα τις εποχές της ακτινοβολίας και της ύλης.

Η κατασκευή βιώσιμων κοσμολογικών μοντέλων, συμβατών δηλαδή με τις κοσμολογικές παρατηρήσεις, τα οποία προβλέπουν την επιταχυνόμενη διαστολή του σύμπαντος με βάση τις $f(R)$ θεωρίες, έλαβε μεγάλη προσοχή τα τελευταία χρόνια. Μια ενδιαφέρουσα συζήτηση ξεκίνησε από την αναφορά [205] στην οποία δείχθηκε ότι οι $f(R)$ που συμπεριφέρονται ως

δυνάμεις του R για μεγάλες ή μικρές τιμές του R , δεν είναι βιώσιμες κοσμολογικά γιατί προκαλούν λανθασμένο ρυθμό διαστολής κατά την εποχή της κυριαρχίας της ύλης ($\alpha \sim t^{1/2}$ αντί για $\alpha \sim t^{2/3}$). Το συμπέρασμα αυτό αντικρούστηκε στην αναφορά [188] όπου και υποστηρίχθηκε ότι πολλές ομάδες $f(R)$ μοντέλων που περιλαμβάνουν φάσεις όπου κυριαρχεί η ύλη, αλλά και φάσεις επιτάχυνσης μπορούν να ανακατασκευαστούν φαινομενολογικά από τα παρατηρησιακά δεδομένα. Η συζήτηση συνεχίστηκε στην αναφορά [190] όπου έγινε μια γενική και λεπτομερής δυναμική μελέτη της κοσμολογικής εξέλιξης των $f(R)$ θεωριών. Εκεί επίσης αποδείχθηκε ότι παρόλο που οι περισσότερες συναρτησιακές μορφές $f(R)$ δεν είναι κοσμολογικά βιώσιμες, λόγω της απουσίας της εποχής της κυριαρχίας της ύλης που απαιτείται από τα δεδομένα, υπάρχουν ειδικές μορφές της $f(R)$ οι οποίες είναι βιώσιμες (συνεπεί με τα δεδομένα) για τις κατάλληλες αρχικές συνθήκες.

Σε αυτή την ενότητα θα κάνουμε μια γενική και ανεξάρτητη από μοντέλα ανάλυση των $f(R)$ θεωριών. Αντί να καθορίσουμε διάφορες μορφές για την $f(R)$ και μετά να βρούμε την αντίστοιχη κοσμολογική εξέλιξη, θα απαιτήσουμε η εξέλιξη αυτή να περιγράφεται από το Λ CDM και θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε την μορφή της $f(R)$. Συνεπώς, και στο πνεύμα της προηγούμενης ενότητας, θα προσπαθήσουμε να ανακατασκευάσουμε την $f(R)$ από την κοσμολογική εξέλιξη του υποβάθρου.

4.3.2 Ανάλυση με χρήση δυναμικών συστημάτων

Ας θεωρήσουμε την δράση (4.194) η οποία περιγράφει τις $f(R)$ θεωρίες στο σύστημα Jordan. Οι γενικευμένες εξισώσεις Friedmann σε αυτή την περίπτωση δίνονται από τις εξισώσεις (4.4), (4.5) και είναι

$$3FH^2 = \rho_m + \rho_{\text{rad}} + \frac{1}{2}(FR - f) - 3H\dot{F} \quad (4.195)$$

$$-2F\dot{H} = \rho_m + \frac{4}{3}\rho_{\text{rad}} + \ddot{F} - H\dot{F} \quad (4.196)$$

όπου θέσαμε $F \equiv \frac{df}{dR}$ και οι όροι ρ_m , ρ_{rad} αναπαριστούν την πυκνότητα ενέργειας της ύλης και της ακτινοβολίας αντίστοιχα. Αυτές υπακούουν τις εξισώσεις διατήρησης

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = 0, \quad (4.197)$$

$$\dot{\rho}_{\text{rad}} + 4H\rho_{\text{rad}} = 0. \quad (4.198)$$

Για να μελετήσουμε την κοσμολογική εξέλιξη που περιγράφουν οι εξισώσεις (4.195) και (4.196) θα τις εκφράσουμε ως ένα αυτόνομο σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτου βαθμού [190]. Για να το πετύχουμε αυτό, πρώτα θα γράψουμε την (4.195) σε αδιάστατη μορφή ως

$$1 = \frac{\rho_m}{3FH^2} + \frac{\rho_{\text{rad}}}{3FH^2} + \frac{R}{6H^2} - \frac{f}{6FH^2} - \frac{F'}{F} \quad (4.199)$$

όπου

$$' = \frac{d}{d \ln \alpha} \equiv \frac{d}{dN} = \frac{1}{H} \frac{d}{dt} \quad (4.200)$$

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε τις αδιάστατες μεταβλητές x_1, \dots, x_4 ως

$$x_1 = -\frac{F'}{F}, \quad (4.201)$$

$$x_2 = -\frac{f}{6FH^2}, \quad (4.202)$$

$$x_3 = \frac{R}{6H^2} = \frac{H'}{H} + 2, \quad (4.203)$$

$$x_4 = \frac{\rho_{\text{rad}}}{3FH^2} = \Omega_r. \quad (4.204)$$

όπου στην (4.203) χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$R = 6(2H^2 + \dot{H}) = 6(2H^2 + H'H), \quad (4.205)$$

και συσχετίσαμε τη μεταβλητή x_4 με την Ω_r και τον όρο $x_1 + x_2 + x_3 \equiv \Omega_{DE}$ με τη Σκοτεινή Ενέργεια.

Επίσης, ορίζοντας $\Omega_m \equiv \frac{\rho_m}{3FH^2}$ μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση (4.199) ως

$$\Omega_m = 1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \quad (4.206)$$

Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε την (4.200) για να εκφράσουμε τη σχέση (4.196) ως

$$\frac{H'}{H} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\rho_m}{FH^2} + \frac{4}{3} \frac{\rho_{\text{rad}}}{FH^2} + \frac{F''}{F} + \frac{H'}{H} \frac{F'}{F} - \frac{F'}{F} \right) \quad (4.207)$$

ή

$$x'_1 = -1 - x_3 - 3x_2 + x_1^2 + x_4 \quad (4.208)$$

Επίσης, παραγωγίζοντας το x_4 της εξίσωσης (4.204) ως προς N προκύπτει ότι

$$x'_4 = \frac{\rho'_{\text{rad}}}{3FH^2} - \frac{\rho_{\text{rad}}}{3FH^2} \frac{F'}{F} - \frac{2\rho_{\text{rad}}}{3FH^2} \frac{H'}{H} \quad (4.209)$$

ή

$$x'_4 = -2x_3x_4 + x_1x_4 \quad (4.210)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την (4.198). Παρόμοια, παραγωγίζοντας την εξίσωση (4.202) ως προς N βρίσκεται ότι

$$x'_2 = \frac{x_1x_3}{m} - x_2(2x_3 - x_1 - 4) \quad (4.211)$$

όπου

$$m \equiv \frac{F'R}{f'} = \frac{f_{,RR}R}{f_{,R}} \quad (4.212)$$

και ο όρος $_{,R}$ υποδηλώνει παράγωγο ως προς R . Τέλος, παραγωγίζοντας την εξίσωση (4.203) ως προς N βρίσκουμε

$$x'_3 = -\frac{x_1x_3}{m} - 2x_3(x_3 - 2) \quad (4.213)$$

Οι εξισώσεις (4.208), (4.211), (4.213) και (4.210) αποτελούν το γενικό αυτόνομο σύστημα το οποίο περιγράφει την κοσμολογική εξέλιξη των $f(R)$ θεωριών. Σε αντίθεση με το δυναμικό σύστημα των scalar-tensor θεωριών (4.111), (4.114), (4.116) και (4.113), αυτό το σύστημα είναι *αυτόνομο*, δηλαδή δεν εξαρτάται ρητά από το χρόνο. Επίσης, αυτό το σύστημα έχει μελετηθεί εκτενώς στην αναφορά [190] για διάφορες $f(R)$ (ή ισοδύναμα διάφορες μορφές του m) και βρέθηκε ότι στις περισσότερες περιπτώσεις η δυναμική εξέλιξη την οποία περιγράφει είναι ασύμβατη με τις παρατηρήσεις αφού δεν περιλαμβάνει την κατάλληλη εποχή της κυριαρχίας της ύλης. Μερικές μορφές της $f(R)$ βρέθηκαν ότι οδηγούν σε κοσμολογική εξέλιξη που είναι συμβατή με τις παρατηρήσεις. Για να μελετήσουμε αυτές τις περιπτώσεις σε περισσότερη λεπτομέρεια θα ακολουθήσουμε μια διαφορετική μέθοδο. Αντί να μελετήσουμε το παραπάνω αυτόνομο σύστημα για διάφορα $m(f(R))$ θα *απαλείψουμε* την παράμετρο m από το σύστημα επιλέγοντας μια συγκεκριμένη μορφή για το $H(N)$, δηλαδή για την μεταβλητή $x_3(N)$ (δες τη σχέση (4.203)) η οποία είναι συμβατή με τις κοσμολογικές παρατηρήσεις. Από τη στιγμή που το $x_3(N)$ είναι γνωστό μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση (4.213) ως προς $\frac{x_1 x_3}{m}$ και αντικαθιστώντας στην (4.211) βρίσκουμε

$$x'_2 = -x'_3 - 2x_3(x_3 - 2) - x_2(2x_3 - x_1 - 4) \quad (4.214)$$

η οποία μαζί με τις (4.208) και (4.210) αποτελούν ένα νέο δυναμικό σύστημα το οποίο είναι ανεξάρτητο του m .

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης αυτής δεν εξαρτώνται από τη χρήση κάποιας συγκεκριμένης μορφής του $x_3(N)$ (δηλαδή του $H(z)$). Η μόνη απαίτηση είναι ότι το σύμπαν περνά από την εποχή της κυριαρχίας της ακτινοβολίας (σε μεγάλες ερυθρές μετατοπίσεις), την εποχή της κυριαρχίας της ύλης (σε ενδιάμεσες ερυθρές μετατοπίσεις) και τέλος την εποχή της επιτάχυνσης (σε μικρές ερυθρές μετατοπίσεις). Η αντίστοιχη ολική ενεργός καταστατική εξίσωση είναι εν γένει

$$w_{eff} = -1 - \frac{2}{3} \frac{H'(N)}{H(N)} \quad (4.215)$$

ενώ σε κάθε εποχή

$$\begin{aligned} w_{eff} &= \frac{1}{3} \quad \text{εποχή ακτινοβολίας} \\ w_{eff} &= 0 \quad \text{εποχή ύλης} \\ w_{eff} &= -1 \quad \text{εποχή deSitter} \end{aligned} \quad (4.216)$$

Ωστόσο, για χάρη πληρότητας, θα υποτεθεί μια συγκεκριμένη μορφή για την $H(z)$, η οποία αντιστοιχεί στο Λ CDM και συναρτήσει του N παίρνει τη μορφή

$$H(N)^2 = H_0^2 [\Omega_{0m} e^{-3N} + \Omega_{0r} e^{-4N} + \Omega_\Lambda] \quad (4.217)$$

όπου $N \equiv \ln a = -\ln(1+z)$ και $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_{0m} - \Omega_{0r}$. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (4.203) και (4.217) για να βρούμε το $x_3(N)$ ως

$$x_3(N) = 2 - \frac{3}{2} \frac{\Omega_{0m} e^{-3N} + \frac{4}{3} \Omega_{0r} e^{-4N}}{\Omega_{0m} e^{-3N} + \Omega_{0r} e^{-4N} + (1 - \Omega_{0m} - \Omega_{0r})} \quad (4.218)$$

Πίνακας 4.2: Τα κρίσιμα σημεία του συστήματος (4.210), (4.208) και (4.214) και η σταθερότητά τους σε καθεμιά από τις τρεις εποχές. Τα σταθερά σημεία (ελκυστές) έχουν μόνο αρνητικές ιδιοτιμές, τα σαμαροειδή σημεία έχουν ανάμεικτα πρόσημα στις ιδιοτιμές τους και τέλος τα ασταθή έχουν θετικές ιδιοτιμές.

Εποχή	Εύρος του N	x_1	x_2	x_3	x_4	Ιδιοτιμές
Ακτινοβολία $w_{eff} = \frac{1}{3}$	$N < -\ln \frac{\Omega_{0m}}{\Omega_{0r}}$	-1	0	0	0	(3,-2,-1)
		1	0	0	0	(5,2,1)
		-4	5	0	0	(-5,-4,-3)
		0	0	0	1	(4,-1,1)
Ύλη $w_{eff} = 0$	$-\ln \frac{\Omega_{0m}}{\Omega_{0r}} < N < -\frac{1}{3} \ln \frac{\Omega_{\Lambda}}{\Omega_{0m}}$	1	-3/8	1/2	-1/8	(4.386,1,0.114)
		0	-1/2	1/2	0	(3.386,-1,-0.886)
		0.886	-0.386	1/2	0	(4.272,0.886,-0.114)
		-3.386	3.886	1/2	0	(-4.386, -4.272, -3.386)
deSitter $w_{eff} = -1$	$N > -\frac{1}{3} \ln \frac{\Omega_{\Lambda}}{\Omega_{0m}}$	0	-1	2	0	(-4, -3, 1)
		-1	0	2	0	(-5, -4, -1)
		3	0	2	0	(4, 3, -1)
		4	0	2	-5	(5, 4, 1)

Οι τιμές του $x_3(N)$ στις εποχές της ακτινοβολίας, της ύλης και την deSitter είναι:

$$x_3(N) = 0 \quad N < N_{rm} \quad (4.219)$$

$$x_3(N) = \frac{1}{2} \quad N_{rm} < N < N_{m\Lambda} \quad (4.220)$$

$$x_3(N) = 2 \quad N > N_{m\Lambda} \quad (4.221)$$

όπου $N_{rm} \simeq -\ln \frac{\Omega_{0m}}{\Omega_{0r}}$ και $N_{m\Lambda} \simeq -\frac{1}{3} \ln \frac{\Omega_{\Lambda}}{\Omega_{0m}}$ είναι οι τιμές του N για τις μεταβάσεις από την εποχή της ακτινοβολίας σε αυτή της ύλης και από αυτή της ύλης στη deSitter. Για $\Omega_{0m} = 0.3$, $\Omega_{0r} = 10^{-4}$ έχουμε $N_{rm} \simeq -8$, $N_{m\Lambda} \simeq -0.3$. Η μετάβαση μεταξύ αυτών των περιόδων εξαρτάται από το εκάστοτε μοντέλο, αλλά είναι αρκετά σύντομη και δεν θα παίξει σημαντικό ρόλο στην ανάλυσή μας.

Για να μελετήσουμε τη δυναμική εξέλιξη του συστήματος (4.208), (4.214), (4.210) θέτουμε $x'_i = 0$ ώστε να βρούμε τα κρίσιμα σημεία και τη σταθερότητα τους σε καθεμιά από τις τρεις εποχές που αντιστοιχούν στις (4.219)-(4.221). Πρέπει να τονιστεί ότι παρόλο που αυτό το σύστημα είναι δυναμικό και όχι αυτόνομο, ανά πάσα χρονική στιγμή μπορεί να προσεγγιστεί ως αυτόνομο όταν το x_3 είναι κατά προσέγγιση σταθερό. Τα κρίσιμα σημεία και η σταθερότητά τους φαίνονται στον Πίνακα 4.2.

Πίνακας 4.3: Τα κρίσιμα σημεία τα οποία είναι ελκυστές σε κάθε εποχή.

Εποχή	Εύρος του N	x_1	x_2	x_3	x_4	w_{eff}	Ω_{0m}	Ω_{DE}	Ω_{rad}
Ακτινοβολία	$N < -\ln \frac{\Omega_{0m}}{\Omega_{0r}}$	-4	5	0	0	1/3	0	1	0
Ύλη	$-\ln \frac{\Omega_{0m}}{\Omega_{0r}} < N < -\ln \frac{\Omega_{\Lambda}}{\Omega_{0m}}$	-3.386	3.886	1/2	0	0	0	1	0
deSitter	$N > -\frac{1}{3} \ln \frac{\Omega_{\Lambda}}{\Omega_{0m}}$	-1	0	2	0	-1	0	1	0

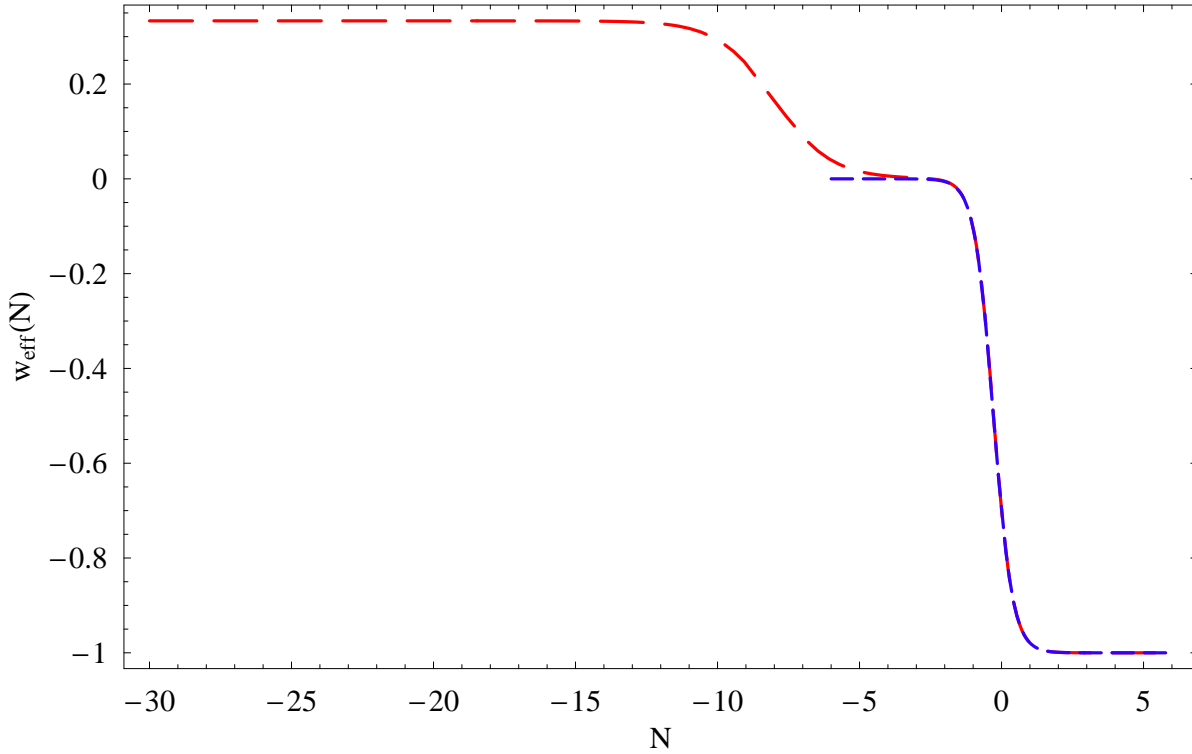
Πίνακας 4.4: Τα σαμαροειδή κρίσιμα σημεία σε κάθε εποχή. Αυτά είναι επίσης τα σημεία τα οποία αντιστοιχούν στη Γενική Σχετικότητα $f(R) = R - 2\Lambda$ (δες εξίσωση (4.234)).

Εποχή	Εύρος του N	x_1	x_2	x_3	x_4	w_{eff}	Ω_{0m}	Ω_{DE}	Ω_{rad}
Ακτινοβολία	$N < -\ln \frac{\Omega_{0m}}{\Omega_{0r}}$	0	0	0	1	1/3	0	0	1
Ύλη	$-\ln \frac{\Omega_{0m}}{\Omega_{0r}} < N < -\ln \frac{\Omega_{\Lambda}}{\Omega_{0m}}$	0	-1/2	1/2	0	0	1	0	0
deSitter	$N > -\frac{1}{3} \ln \frac{\Omega_{\Lambda}}{\Omega_{0m}}$	0	-1	2	0	-1	0	1	0

Για την ανάλυση του Πίνακα 4.2 υποτέθηκε ότι $x_3 = \text{σταθ.}$, με συνέπεια να μην είναι ίδια με την πλήρη ανάλυση σταθερότητας, στην οποία το x_3 θα μπορούσε να μεταβάλλεται. Η συνήθης ανάλυση σταθερότητας υποθέτει ένα συγκεκριμένο κοσμολογικό μοντέλο (π.χ. μια συγκεκριμένη $f(R)$ ή m) και στα πλαίσια αυτού του 'φυσικού νόμου', ερευνάται η σταθερότητα των $H(N)$.

Ωστόσο, στη μέθοδο της ανακατασκευής η ανάλυση της σταθερότητας των κρίσιμων σημείων έχει διαφορετικό νόημα. Σε αυτή τη μέθοδο, δεν επιλέγουμε το μοντέλο $f(R)$ ('φυσικός νόμος '), αλλά επιλέγουμε την κοσμική ιστορία $H(N)$ και επιτρέπουμε στο φυσικό νόμο $f(R)$ να μεταβάλλεται. Αφού ο φυσικός νόμος έχει επιλεχθεί ήδη από τη φύση, οι μεταβολές που βρίσκουμε δεν έχουν φυσικό νόημα, αλλά είναι μόνο χρήσιμες για την αναλυτική κατανόηση των τροχιών που ακολουθεί το σύστημα στο φασικό χώρο, οι οποίες βρέθηκαν αριθμητικά. Οι φυσικά σημαντικές ποσότητες είναι οι τιμές των κρίσιμων σημείων που βρήκαμε σε κάθε εποχή στα πλαίσια του Λ CDM. Αυτές μας παρέχουν τους πιθανούς φυσικούς νόμους που μπορούν να αναπαράγουν το Λ CDM. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.2, ένας από αυτούς είναι η Γενική Σχετικότητα, για την οποία $f(R) = R - 2\Lambda$.

Ένα σημαντικό σημείο του Πίνακα 4.2 είναι ότι σε κάθε εποχή υπάρχουν τέσσερα κρίσιμα σημεία ένα εκ των οποίων αντιστοιχεί στη Γενική Σχετικότητα, και ότι τρία από τα τέσσερα κρίσιμα σημεία σε κάθε εποχή δεν είναι σταθερά. Αυτό ωστόσο δεν σημαίνει ότι τα σημεία δεν είναι χρήσιμα κοσμολογικά. Τα κρίσιμα σημεία του Πίνακα 4.2, τα οποία είναι ελκυστές είναι χρήσιμα μόνο για τεχνικούς λόγους, καθώς επιτρέπουν τη σύγκριση μεταξύ της αριθ-

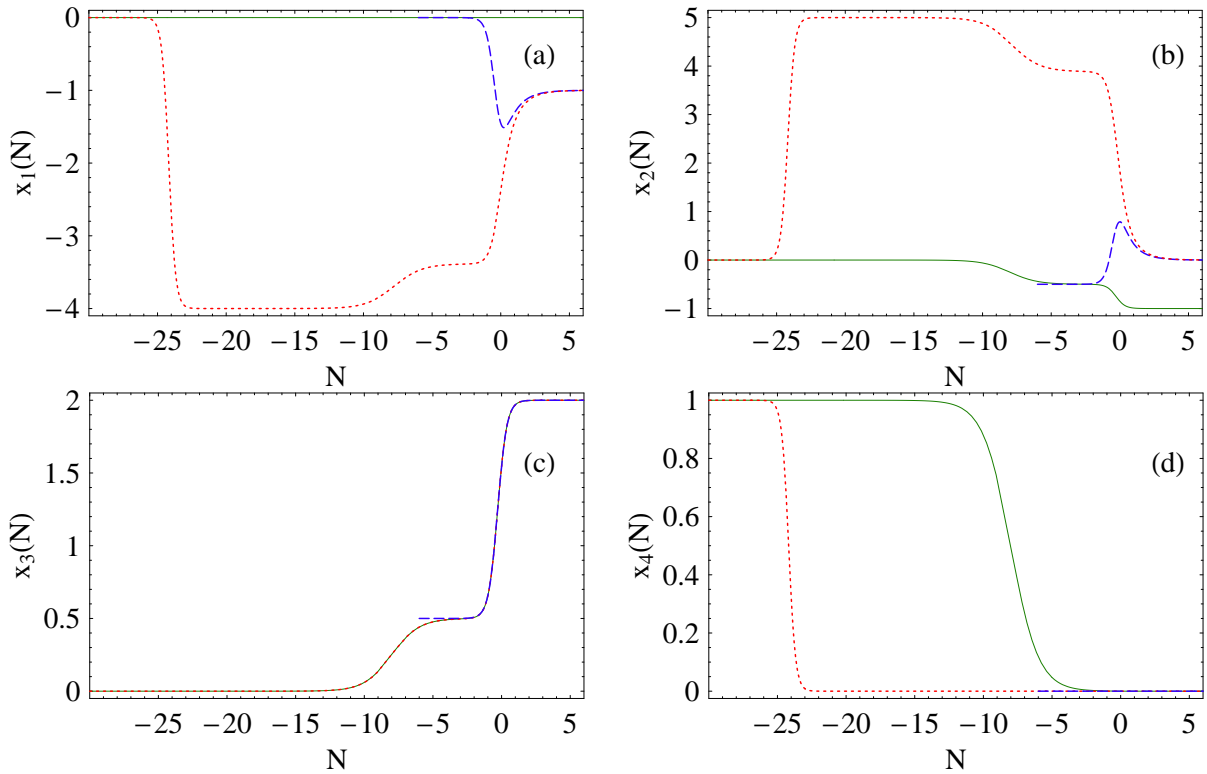


Σχήμα 4.16: Η ενεργός καταστατική εξίσωση $w_{eff}(N)$ του δυναμικού συστήματος με βάση τις εξισώσεις (4.215) και (4.217). Η παρατεταμένη διακεκομμένη κόκκινη γραμμή ξεκινά την εποχή της ακτινοβολίας ενώ η σύντομη μπλε γραμμή ξεκινά την εποχή της ύλης και αγνοεί την ακτινοβολία ($\Omega_{0r} = 0$).

μητικής εξέλιξης και της αναλυτικής πρόβλεψης για την εξέλιξη του συστήματος. Σε μια πιο ρεαλιστική κατάσταση όπου δεν θα υπήρχαν διαταραχές στο φυσικό νόμο $f(R)$, όλα τα κρίσιμα σημεία θα αντιστοιχούσαν σε μια συνεπή ανακατασκευή της κοσμικής ιστορίας του Λ CDM.

Αν επιτρέψουμε να υπάρχουν διαταραχές στην $f(R)$ (αλλά όχι στην $H(N)$), τότε το σύστημα ακολουθεί την εξέλιξη των ελκυστών του Πίνακα 4.2 στις τρεις εποχές και η οποία φαίνεται στον Πίνακα 4.3 στον οποίο παρουσιάζονται οι ελκυστές σε κάθε εποχή. Πρέπει να τονίσουμε ότι αυτή δεν είναι απαραίτητα η προτιμώμενη κοσμολογική τροχιά για τους λόγους που αναφέρθηκαν παραπάνω.

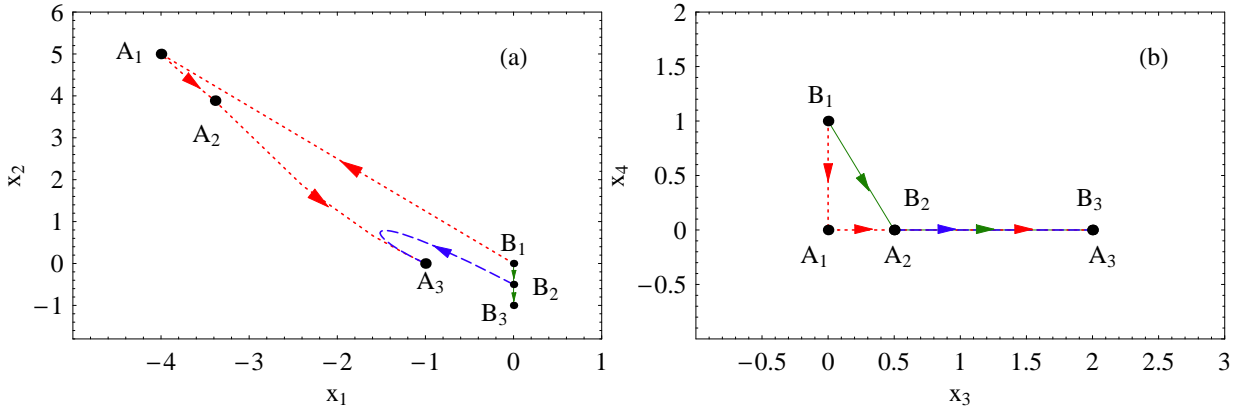
Τα κρίσιμα σημεία του Πίνακα 4.4 είναι τα μόνα τα οποία, εκτός από το ότι προβλέπουν την κατάλληλη εξέλιξη του σύμπαντος, έχουν και τις κατάλληλες τιμές για τις παραμέτρους $(\Omega_r, \Omega_m, \Omega_{DE})$ σε κάθε εποχή. Όπως θα δούμε παρακάτω, αυτά τα σαμαροειδή κρίσιμα σημεία αντιστοιχούν στη Γενική Σχετικότητα, δηλαδή $f(R) = R - 2\Lambda$. Είναι έτσι ξεκάθαρο ότι μη γραμμικές συναρτήσεις για τις $f(R)$ θεωρίες μπορούν να είναι παρατηρησιακά αποδεκτές, αλλά όχι με τις κατάλληλες τιμές των $(\Omega_r, \Omega_m, \Omega_{DE})$ σε κάθε εποχή. Πρέπει να τονίσουμε ότι στην ανάλυσή μας δεν έχουμε αποκλείσει την πιθανότητα οι παράμετροι $(\Omega_{0r}, \Omega_{0m}, \Omega_{DE})$ να έχουν τις κατάλληλες τιμές με τη χρήση μοντέλων που παρουσιάζουν



Σχήμα 4.17: Η εξέλιξη των μεταβλητών $x_1(N)$, $x_2(N)$, $x_3(N)$ και $x_4(N)$ για αρχικές συνθήκες που ξεκινούν την εποχή της ακτινοβολίας (κόκκινη γραμμή με τελείες) και την εποχή της ύλης (μπλε διακεκομμένη γραμμή). Τυχόν διαταραγμένες τροχιές γρήγορα παρασύρονται από τους ελκυστές της κάθε εποχής. Φαίνεται επίσης η αριθμητική εξέλιξη που βρέθηκε αριθμητικά με βάση τα σαμαροειδή σημεία του Πίνακα 4.2 (συνεχής πράσινη γραμμή). Οι αστάθειες αυτής της τροχιάς μπορούν να ξεπεραστούν χρησιμοποιώντας το σύστημα (4.223)-(4.224) αντί για το πλήρες σύστημα (4.208), (4.214) και (4.213).

ταλαντώσεις γύρω από την αναμενόμενη τιμή του w_{eff} σε κάθε εποχή ή ένα w_{eff} το οποίο εξελίσσεται συνεχώς. Ωστόσο, αυτές οι ειδικές περιπτώσεις ενδεχομένως να μπορούν να περιοριστούν παρατηρησιακά.

Για να περιγράψουμε την δυναμική εξέλιξη που περιγράφεται από τους ελκυστές του Πίνακα 4.2, λύσαμε αριθμητικά το δυναμικό σύστημα (4.208), (4.214) και (4.210) χρησιμοποιώντας το μοντέλο (4.218) για την μεταβλητή x_3 με $\Omega_{0m} = 0.3$ και $\Omega_{0r} = 10^{-4}$. Το μοντέλο αυτό για την $x_3(N)$ δίνει την καταστατική εξίσωση $w_{eff}(N)$ που φαίνεται στο σχήμα 4.16. Οι αρχικές συνθήκες που χρησιμοποιήσαμε ήταν στην στανταρντ εποχή της ακτινοβολίας, κοντά στο σαμαροειδές σημείο $(0, 0, 0, 1)$. Όπως φαίνεται στα σχήματα 4.17 και 4.18 πολύ προτού ξεκινήσει η εποχή της ύλης ($N \equiv N_{rr} \simeq -25 < -8 \simeq N_{rm}$) η μικρή (αλλά μη αμελητέα) εξέλιξη του $x_3(N)$ αναγκάζει την τροχιά στο χώρο των φάσεων να αποχωρήσει από το σαμαροειδές σημείο $(0, 0, 0, 1)$ και να κινηθεί προς τον ελκυστή της εποχής της ακτινοβολίας $(-4, 5, 0, 0)$, στον οποίο και παραμένει κατά τη διάρκεια αυτής της εποχής ($w_{eff} \simeq \frac{1}{3}$).



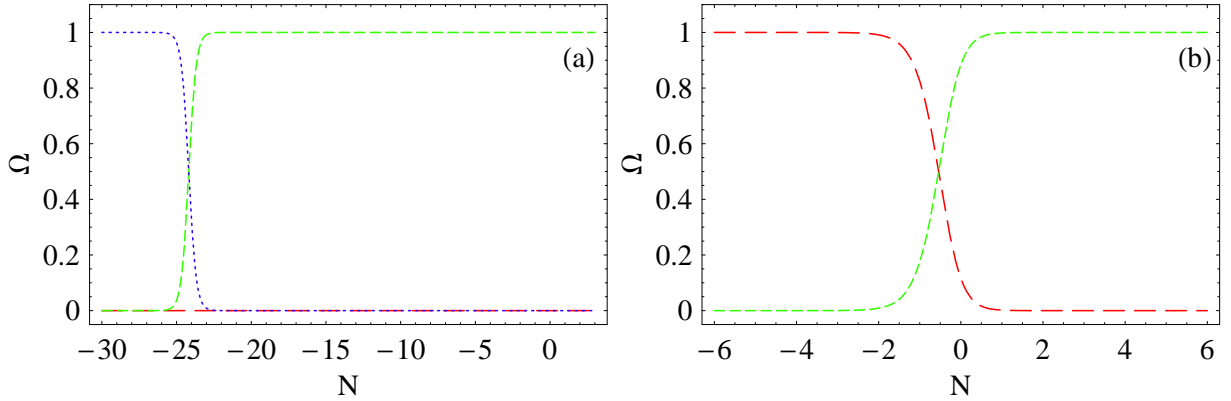
Σχήμα 4.18: Οι τροχιές του προηγούμενου σχήματος στο φασικό χώρο των $x_1 - x_2$ (σχήμα 4.18a) και των $x_3 - x_4$ (σχήμα 4.18b) για αρχικές συνθήκες που ξεκινούν την εποχή της ακτινοβολίας (κόκκινη γραμμή με τελείες) και την εποχή της ύλης (μπλε διακεκομμένη γραμμή). Φαίνεται επίσης η αριθμητική εξέλιξη που βρέθηκε αριθμητικά με βάση τα σαμαροειδή σημεία του Πίνακα 4.2 (συνεχής πράσινη γραμμή). Τα σημεία A_1, A_2 και A_3 αντιστοιχούν στους ελκυστές κάθε εποχής (ακτινοβολίας, ύλης και επιτάχυνσης αντίστοιχα) ενώ τα σημεία B_1, B_2, B_3 αντιστοιχούν στα σαμαροειδή σημεία της κάθε εποχής (δες τους Πίνακες 4.3 και 4.4). Πρέπει να αναφερθεί ότι στην προβολή του σχήματος 4.18b οι ελκυστές A_2, A_3 συμπίπτουν με τα σημεία B_2, B_3 .

Συνεπώς, όταν το $x_3(N)$ μπαίνει στην εποχή της ύλης ($w_{eff} = 0$) τη στιγμή $N_{rm} \simeq -8$, η τροχιά ακολουθεί την εξέλιξη του ελκυστή και κατευθύνεται προς τον ελκυστή της εποχής της ύλης $(-3.386, 3.886, 0.5, 0)$ αγνοώντας το σαμαροειδές σημείο $(0, -1/2, 1/2, 0)$ της εποχής της ύλης. Τελικά, μετά το τέλος της εποχής της ύλης, η τροχιά κατευθύνεται προς τον ελκυστή deSitter $(-1, 0, 2, 0)$ ο οποίος διαφέρει από το σαμαροειδές σημείο της εποχής deSitter $(0, -1, 2, 0)$. Ο ελκυστής deSitter δεν είναι συμβατός με τις παρατηρήσεις λόγω του ότι προκαλεί μεγάλη μεταβολή στην ενεργό σταθερά της παγκόσμιας έλξης $G(N) = \frac{1}{F(N)}$ παρόλο που το πρόβλημα αυτό μπορεί να διορθωθεί με διάφορους μηχανισμούς τύπου χαμαιλέοντα [206]. Η εξέλιξη των παραμέτρων $(\Omega_r, \Omega_m, \Omega_{DE})$ που αντιστοιχεί στις τροχιές των σχημάτων 4.17 και 4.18 φαίνεται στο σχήμα 4.19a. Πρέπει να αναφερθεί ότι έχουμε $\Omega_m = 0$ κατά τη διάρκεια που η εξέλιξη του συστήματος ακολουθεί τους ελκυστές.

Επίσης, δοκιμάσαμε διάφορες αρχικές συνθήκες στην εποχή της ύλης ξεκινώντας από το σαμαροειδές σημείο $(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ που αντιστοιχεί στη στανταρντ εποχή της ύλης. Σε αυτή την περίπτωση αγνοήσαμε την ακτινοβολία θέτοντας $\Omega_{0r} = 0$. Το σύστημα (δες τα σχήματα 4.17, 4.18 και 4.19b) ξεκινά από την στανταρντ εποχή της ύλης $\Omega_m = 1$ για περίπου $\delta N = 3$ πριν ξεκινήσει η εποχή της επιτάχυνσης και να παρασυρθεί από τον ελκυστή προς το κρίσιμο σημείο $(-1, 0, 2, 0)$.

Ακόμη, μπορούμε να αναπαράγουμε τροχιές που περνάνε από κρίσιμα σημεία τα οποία δεν είναι σταθερά, για παράδειγμα μπορούμε να πάρουμε την εξής τροχιά η οποία περνά από τα σαμαροειδή σημεία

$$(0, 0, 0, 1) \rightarrow (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) \rightarrow (0, -1, 2, 0) \quad (4.222)$$



Σχήμα 4.19: Η εξέλιξη των παραμέτρων Ω_m (παρατεταμένα διακεκομμένη γραμμή), Ω_{rad} (τελείες) και Ω_{DE} (σύντομα διακεκομμένη) για τις 'στάνταρντ' αρχικές συνθήκες της ακτινοβολίας (σχήμα 4.19a) και τις 'στάνταρντ' αρχικές συνθήκες της ύλης (σχήμα 4.19b). Και στις δύο περιπτώσεις οι ελκυστές του Πίνακα 4.3 πολύ σύντομα παρασέρνουν τις τροχιές.

θέτοντας $x_1 = 0$ στο σύστημα (4.208), (4.214) και (4.210) και μετατρέποντάς το στο σύστημα

$$-1 - x_3 - 3x_2 + x_4 = 0 \quad (4.223)$$

$$-2x_3x_4 = x'_4 \quad (4.224)$$

το οποίο μπορεί εύκολα να λυθεί χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.218) (δες και τα σχήματα 4.17 και 4.18). Η εναλλακτική προσέγγιση του να λύναμε το αποσυζευγμένο σύστημα (4.211) και (4.210) δεν δίνει τα σωστά αποτελέσματα γιατί οι διαταραχές της $f(R)$ δεν είναι απενεργοποιημένες και ο δεσμός (4.206) δεν ικανοποιείται.

Έτσι, είναι εύκολο να ανακατασκευάσουμε τις συναρτήσεις $f(R)$ οι οποίες αντιστοιχούν στην τροχιά της Γενικής Σχετικότητας (4.222) αλλά και των ελκυστών του Πίνακα 4.3. Οι συναρτησιακές μορφές του $f(R)$ μπορούν επίσης να ανακατασκευαστούν και σε οποιοδήποτε από τα κρίσιμα σημεία του Πίνακα 4.2.

4.3.3 Προσδιορισμός της συμβατής με τις παρατηρήσεις συνάρτησης $f(R)$

Σε αυτή την ενότητα θα ανακατασκευάσουμε τη συνάρτηση $f(R)$ που αντιστοιχεί σε καθένα από τα κρίσιμα σημεία του συστήματος, τα οποία φαίνονται στον Πίνακα 4.2. Η μέθοδος αυτή παρέχει βασικά μια προσέγγιση στην $f(R)$ στη γειτονιά του κρίσιμου σημείου. Είναι ιδιαίτερα χρήσιμη καθώς το μεγαλύτερο μέρος της δυναμικής εξέλιξης λαμβάνει χώρα κοντά στα κρίσιμα σημεία. Ας θεωρήσουμε ένα τέτοιο σημείο με συντεταγμένες $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4)$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.201) βρίσκουμε

$$F = F_0 e^{-\bar{x}_1 N} \quad (4.225)$$

όπου η F_0 είναι μια σταθερά ολοκλήρωσης. Μπορούμε να απαλείψουμε το N προς όφελος του R χρησιμοποιώντας τη σχέση για το $H(N)$ (εξίσωση (4.217) στην (4.205) από την οποία παίρνουμε (θέτοντας $H_0^2 = 1$)

$$R(N) = 3 [4\Omega_\Lambda + \Omega_{0m}e^{-3N}] \quad (4.226)$$

η οποία οδηγεί στη σχέση

$$F = F_0 \left(\frac{R - 12\Omega_\Lambda}{3\Omega_{0m}} \right)^{\frac{\bar{x}_1}{3}} \quad (4.227)$$

και μετά από ολοκλήρωση προκύπτει ότι

$$f(R) = \frac{3F_0(3\Omega_{0m})^{-\frac{\bar{x}_1}{3}} (R - 12\Omega_\Lambda)^{\frac{\bar{x}_1}{3}+1}}{\bar{x}_1 + 3} + f_0 \quad (4.228)$$

όπου η f_0 είναι σταθερά ολοκλήρωσης. Εκφράζοντας την (4.228) συναρτήσει του N , χρησιμοποιώντας την (4.226), βρίσκεται ότι

$$f(N) = \frac{9F_0\Omega_{0m}e^{-(\bar{x}_1+3)N}}{\bar{x}_1 + 3} + f_0 \quad (4.229)$$

Εύκολα τώρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις για τις $f(N)$, $R(N)$ και $H(N)$ για να υπολογίσουμε τις μεταβλητές $x_2(N)$ (εξίσωση (4.202)), $x_3(N)$ (εξίσωση (4.218)) και $x_4(N)$ (εξίσωση (4.204)). Έτσι, προκύπτει ότι

$$x_2(N) = -\frac{\left(\frac{3\Omega_{0m}}{2(\bar{x}_1+3)}e^{-3N} + \frac{f_0}{6F_0}e^{\bar{x}_1N} \right)}{\Omega_{0m}e^{-3N} + \Omega_{0r}e^{-4N} + \Omega_\Lambda} \quad (4.230)$$

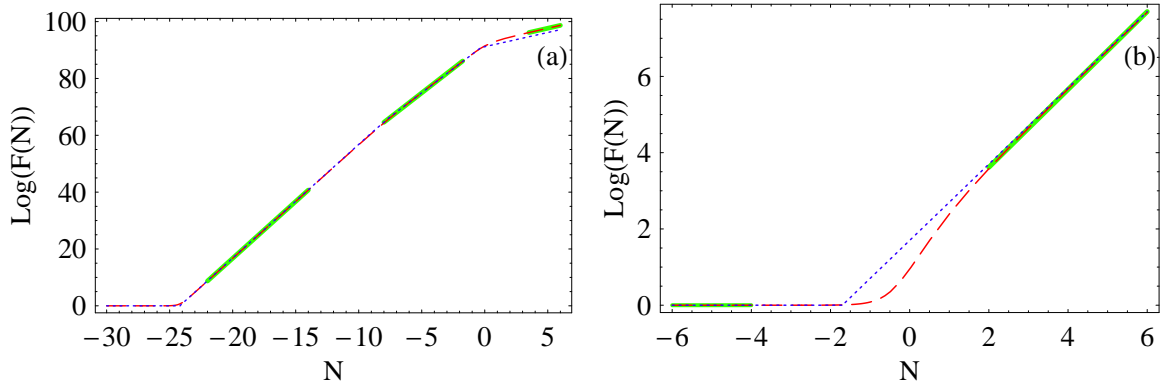
και

$$x_4(N) = \frac{\Omega_{0r}e^{(\bar{x}_1-4)N}}{F_0(\Omega_{0m}e^{-3N} + \Omega_{0r}e^{-4N} + \Omega_\Lambda)} \quad (4.231)$$

ενώ το $x_3(N)$ δίνεται από τη σχέση (4.218). Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.230), (4.218) και (4.231) μπορούμε να επιβεβαιώσουμε τις τιμές των \bar{x}_2 , \bar{x}_3 , \bar{x}_4 σε καθένα από τα κρίσιμα σημεία, λαμβάνοντας υπόψη το κατάλληλο εύρος του N σε κάθε εποχή και την κατάλληλη τιμή του \bar{x}_1 . Αν απαιτήσουμε να υπάρχει συνέπεια με τις τιμές του Πίνακα 4.2, μπορούμε να βρούμε τις τιμές των σταθερών f_0 και F_0 .

Ως παράδειγμα ας μελετήσουμε την τροχιά (4.222) που αντιστοιχεί στις 'στανταρντ' κοσμολογικές εποχές (Πίνακας 4.4). Εύκολα φαίνεται, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\bar{x}_1 = 0$ και το κατάλληλο εύρος για το N στις σχέσεις (4.230), (4.218) και (4.231), ότι παίρνουμε τις σωστές τιμές για τα \bar{x}_2 , \bar{x}_3 και \bar{x}_4 στις εποχές της ακτινοβολίας και της ύλης για κάθε F_0 , f_0 . Στην εποχή deSitter ($N \gg 1$) η τιμή του f_0 πρέπει να καθοριστεί ώστε να υπάρχει συμφωνία με την τιμή $\bar{x}_2 = -1$ του Πίνακα 4.2. Συγκεκριμένα, από τη σχέση (4.230) βρίσκουμε ότι

$$\bar{x}_2 = -\frac{f_0}{6F_0\Omega_\Lambda} = -1 \quad (4.232)$$



Σχήμα 4.20: Η μορφή της $\log(F(N))$ από την αριθμητική ανακατασκευή (διακεκομμένες γραμμές) και η αναλυτική της προσέγγιση χρησιμοποιώντας τα βήματα 1-3 (τελείες) και την αναλυτική σχέση (4.229) για κάθε εποχή (παχιές πράσινες γραμμές). Η συμφωνία μεταξύ των τριών μεθόδων είναι πολύ καλή. a: 'στάνταρντ' αρχικές συνθήκες για την εποχή της ακτινοβολίας, b: 'στάνταρντ' αρχικές συνθήκες για την εποχή της ύλης.

το οποίο συνεπάγεται ότι

$$f_0 = 6F_0\Omega_\Lambda \quad (4.233)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τη σχέση (4.233) και θέτοντας $\bar{x}_1 = 0$ στην (4.228) προκύπτει το αναμενόμενο αποτέλεσμα

$$f(R) = F_0(R - 6\Omega_\Lambda) \quad (4.234)$$

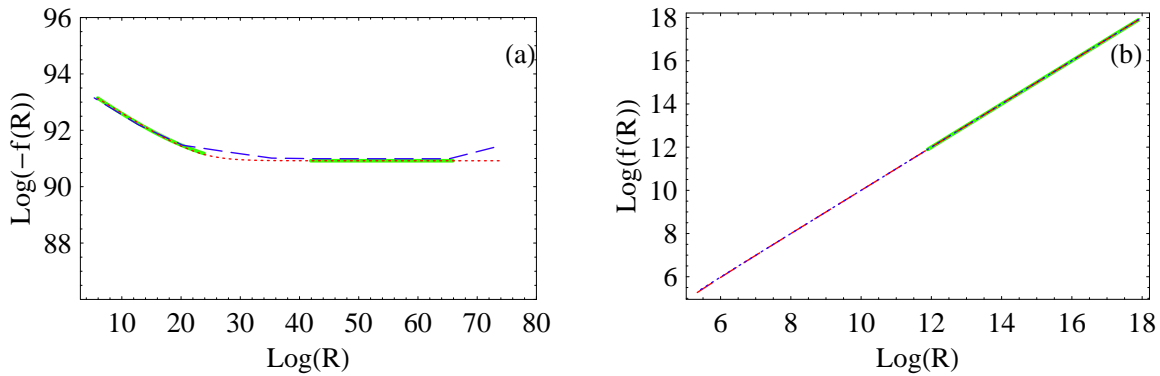
το οποίο ισχύει για κάθε μια από τις τρεις εποχές αφού σε αυτή την τροχιά η τιμή του \bar{x}_1 παραμένει σταθερή. Παρόμοια μπορούμε να ανακατασκευάσουμε την $f(R)$ για κάθε κρίσιμο σημείο των τριών εποχών.

Συμπερασματικά, δείξαμε ότι οι $f(R)$ θεωρίες μπορούν να είναι βιώσιμες μόνο σε πολύ ειδικές περιπτώσεις και ότι ακόμα και αυτές δεν μπορούν να αναπαράγουν το Λ CDM μοντέλο όταν το w_{eff} είναι σταθερό κατά τις εποχές της ακτινοβολίας και της ύλης και οι παράμετροι Ω_{0r} και Ω_m παίρνουν τις αναμενόμενες τους τιμές. Έτσι, είναι ξεκάθαρο ότι αν η επιταχυνόμενη διαστολή του σύμπαντος οφείλεται σε έξτρα φυσική όσον αφορά τη βαρύτητα, είναι πολύ πιθανό ότι αυτή η θεωρία θα πρέπει να είναι πιο γενική από την $f(R)$.

Αριθμητική ανάλυση

Στην περίπτωση των μεταβάσεων από κρίσιμα σημεία που αφορούν διαφορετικές τιμές του \bar{x}_1 , η ανακατασκευή μπορεί να γίνει είτε υπολογίζοντας αριθμητικά τη συνάρτηση $x_1(N)$ ή προσεγγίζοντας την με συναρτήσεις βήματος. Για παράδειγμα, τα βήματα τα οποία απαιτούνται για την ανακατασκευή της τροχιάς του ελκυστή, η οποία φαίνεται στα σχήματα 4.17 και 4.18 είναι τα ακόλουθα:

1. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.201) μαζί με την αριθμητική λύση $x_1(N)$ μπορεί να



Σχήμα 4.21: Η μορφή της $f(R)$ από την αριθμητική ανακατασκευή (διακεκομμένες γραμμές) και η αναλυτική της προσέγγιση χρησιμοποιώντας τα βήματα 1-3 (τελείες) και την αναλυτική σχέση (4.228) για κάθε εποχή (παχιές πράσινες γραμμές). a: 'στάνταρντ' αρχικές συνθήκες για την εποχή της ακτινοβολίας με τις συνεχείς πράσινες γραμμές να αντιστοιχούν στην εποχή της ακτινοβολίας (μεγαλύτερο R) και την εποχή της ύλης (μικρότερο R). b: 'στάνταρντ' αρχικές συνθήκες για την εποχή της ύλης με τις συνεχείς πράσινες γραμμές να αντιστοιχούν στην εποχή της ύλης. Και στις δύο περιπτώσεις η εποχή deSitter δεν φαίνεται καθώς αντιστοιχεί σε ένα και μόνο σημείο (σταθερό R).

βρεθεί η συνάρτηση $F(N) = f_{,R}(N)$ ως

$$F(N) = F_0 e^{-\int_{N_{min}}^N x_1(N') dN'} \quad (4.235)$$

Η αριθμητική λύση $x_1(N)$ του σχήματος 4.17a μπορεί να προσεγγιστεί χρησιμοποιώντας συναρτήσεις βήματος οι οποίες θα καθορίζονται από τους αντίστοιχους ελκυστές σε κάθε εποχή και τις αρχικές συνθήκες, δηλαδή

$$x_1(N) = 0 \quad -30 < N < N_{rr} \quad (4.236)$$

$$x_1(N) = -4 \quad N_{rr} < N < N_{rm} \quad (4.237)$$

$$x_1(N) = -3.386 \quad N_{rm} < N < N_{m\Delta} \quad (4.238)$$

$$x_1(N) \simeq -1 \quad N_{m\Delta} < N \quad (4.239)$$

(όπου $N_{rr} \simeq -25$) δίνοντας έτσι μια αναλυτική προσέγγιση για την $F(N)$. Η τελική μορφή της $\ln(F(N))$ στην αριθμητική ανακατασκευή και την αναλυτική προσέγγιση φαίνεται στο σχήμα 4.20 (4.20a: 'στάνταρντ' αρχικές συνθήκες για την εποχή της ακτινοβολίας, 4.20b: 'στάνταρντ' αρχικές συνθήκες για την εποχή της ύλης).

- Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.202) μπορούμε να υπολογίσουμε το $f(N)$ από το $F(N)$, δηλαδή

$$f(N) = -6x_2(N)F(N)H(N)^2 \quad (4.240)$$

Πίνακας 4.5: Οι παράμετροι F_0 , \bar{x}_1 και f_0 για την ανακατασκευασμένη $f(R)$ των σχημάτων 4.21a και 4.21b.

Αρχ. Συνθ. για την εποχή της ακτινοβολίας	\bar{x}_1	$Log(F_0)$	$Log(-f_0)$
Εποχή της ακτινοβολίας	-3.99	96.73	90.92
Εποχή της ύλης	-3.45	92.17	90.59
Εποχή deSitter	-1.01	92.62	94.03

Αρχ. Συνθ. για την εποχή της ύλης	\bar{x}_1	F_0	f_0
Εποχή της ύλης	0	1	-1.51
Εποχή deSitter	-1.02	4.83	-16.56

όπου το $H(N)$ δίνεται από την εξίσωση (4.217), το $x_2(N)$ βρίσκεται αριθμητικά και φαίνεται στο σχήμα 4.17b και το $F(N)$ έχει βρεθεί από το προηγούμενο βήμα. Παρόμοια με το $x_1(N)$, και το $x_2(N)$ μπορούμε να το προσεγγίσουμε αναλυτικά ως

$$x_2(N) = 0 \quad -30 < N < N_{rr} \quad (4.241)$$

$$x_2(N) = 5 \quad N_{rr} < N < N_{rm} \quad (4.242)$$

$$x_2(N) = 3.886 \quad N_{rm} < N < N_{m\Lambda} \quad (4.243)$$

$$x_2(N) \simeq 0 \quad N_{m\Lambda} < N \quad (4.244)$$

και χρησιμοποιώντας τους αντίστοιχους ελκυστές για να βρούμε μια αναλυτική έκφραση για το $f(N)$.

3. Η μορφή του $f(N)$ μπορεί τότε να συνδυαστεί με την εξίσωση (4.226) για το βαθμωτό Ricci $R(N)$ για να ανακατασκευάσουμε τη συνάρτηση $f(R)$. Η τελική μορφή του $f(R)$ φαίνεται στο σχήμα 4.21 για την αριθμητική ανακατασκευή και την αναλυτική της προσέγγιση (4.21a: αρχικές συνθήκες για την εποχή της ακτινοβολίας, 4.21b: αρχικές συνθήκες για την εποχή της ύλης).

Μπορούμε να προσαρμόσουμε την ανακατασκευασμένη $f(R)$ των σχημάτων 4.21a και 4.21b στην αναλυτική σχέση της εξίσωσης (4.228) για κάθε εποχή αντίστοιχα, έτσι ώστε να υπολογίσουμε τις παραμέτρους F_0 , \bar{x}_1 και f_0 . Τα αποτελέσματα φαίνονται στον Πίνακα 4.5.

Πρέπει να αναφερθεί ότι οι τιμές των \bar{x}_1 από την προσαρμογή της ανακατασκευασμένης $f(R)$ συμπίπτουν με τα αντίστοιχα κρίσιμα σημεία των ελκυστών του Πίνακα 4.3 όπως αναμένεται, κάτι το οποίο επιβεβαιώνει την ορθότητα των αποτελεσμάτων μας. Μια παρόμοια ανάλυση μπορεί να γίνει και για κάθε άλλη ακολουθία κρίσιμων σημείων από τα οποία περνά μια τροχιά. Όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη ενότητα, κάθε τέτοια ακολουθία σημείων είναι ενδιαφέρουσα κοσμολογικά καθώς η ύπαρξη των ελκυστών είναι καθαρά τεχνητή και οφείλεται στις διαταραχές της $f(R)$.

4.4 Μοντέλα με έξτρα διαστάσεις

4.4.1 Θεωρία

Μια ενδιαφέρουσα εναλλακτική των παραπάνω γενικεύσεων της Γενικής Σχετικότητας βασίζεται στην κοσμολογία βρανών, όπου η Σκοτεινή Ενέργεια είναι εκδήλωση των έξτρα διαστάσεων. Η βασική ιδέα αυτών των θεωριών είναι ότι το ορατό τετραδιάστατο σύμπαν και συνεπώς όλα τα σωματίδια του Καθιερωμένου Μοντέλου είναι περιορισμένα σε μια υπερπιφάνεια (brane), η οποία βρίσκεται μέσα σε ένα υπερχώρο (bulk) $4 + d$ διαστάσεων. Οι επιπλέον διαστάσεις μπορεί να είναι συμπαγείς (compact), στην οποία περίπτωση το παρατηρήσιμο σύμπαν περιέχει τις έξτρα διαστάσεις και σε αυτό το πλαίσιο η αναφορά του υπερχώρου δεν είναι απαραίτητη. Ένα ενδιαφέρον χαρακτηριστικό αυτών των θεωριών είναι ότι δίδεται μια εξήγηση του γιατί η βαρύτητα είναι πιο ασθενής σε σχέση με τις άλλες δυνάμεις, λύνοντας έτσι το λεγόμενο πρόβλημα της ιεραρχίας. Αυτό είναι δυνατό γιατί οι τρεις δυνάμεις του Καθιερωμένου Μοντέλου (ο ηλεκτρομαγνητισμός, η ασθενής και η ισχυρή δύναμη) είναι περιορισμένες στη βράνη, ενώ αντίθετα η βαρύτητα είναι ελεύθερη να διαδίδεται σε όλες τις διαστάσεις και έτσι μεγάλο μέρος της ελκτικής της δύναμης δραπετεύει στον υπερχώρο. Συνεπώς, η δύναμη της βαρύτητας θα πρέπει να φαίνεται σημαντικά πιο ισχυρή σε μικρές κλίμακες (υποατομικές ή το πολύ της τάξης μερικών μικρών).

Το μοντέλο που θα μελετήσουμε [207], το οποίο είχε αρχικά παρουσιαστεί στις αναφορές [208] και [209], λαμβάνει υπόψη την ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ της βράνης και του υπερχώρου. Έτσι, προκαλείται επιταχυνόμενη διαστολή σε πρόσφατους χρόνους αλλά και η καταστατική εξίσωση w_{eff} διασχίζει τη γραμμή $w_{eff} = -1$. Υποθέτοντας ότι το περιεχόμενο του υπερχώρου είναι αργά κινούμενο ιδανικό ρευστό είχεδειχθεί ότι μπορεί να γίνει διάσχιση της PDL χωρίς να παραβιάζεται η ασθενής ενεργειακή συνθήκη, αλλά με την προϋπόθεση ότι ο όρος της σκοτεινής ακτινοβολίας έχει αρνητικό πρόσημο. Ωστόσο, αυτή η απαίτηση μπορεί να παρακαμφθεί με τη χρήση κάποιας γενικότερης παραμετροποίησης. Όμως, εδώ θα κάνουμε την υπόθεση, που έγινε και στην αναφορά [209], ότι στο ρευστό του υπερχώρου οι κυρίαρχες συνεισφορές προέρχονται από την πίεση και την ανταλλαγή ενέργειας, ενώ η σκοτεινή ακτινοβολία είναι αμελητέα στην περιοχή $0 \leq z \leq 1$. Σκοπός μας σε αυτή την ενότητα είναι να κάνουμε μια λεπτομερή ανάλυση του επιτρεπόμενου παραμετρικού χώρου χρησιμοποιώντας το Gold σετ δεδομένων των υπερκαινοφανών αστερών για να διαπιστώσουμε αν οι τιμές των παραμέτρων του μοντέλου από την προσαρμογή των δεδομένων επιτρέπουν την επιταχυνόμενη διαστολή και τη διάσχιση της γραμμής $w = -1$, αντί να απαιτήσουμε αυτή τη συμπεριφορά από πριν.

Συγκεκριμένα, το μοντέλο το οποίο θα μελετήσουμε [208],[209],[207] αποτελείται από μία τετραδιάστατη βράνη ενσωματωμένη σε ένα πενταδιάστατο υπερχώρο (bulk). Επίσης, θεωρούμε ότι ο υπερχώρος, αλλά και η βράνη, μπορούν να φέρουν κάποιο ενεργειακό περιεχόμενο, ενώ είναι δυνατό να υπάρχει και ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ των δύο. Με βάση αυτά, οι εξισώσεις Einstein είναι

$$\mathcal{G}_{MN} \equiv R_{MN} - \frac{1}{2}G_{MN}R = \frac{1}{4M^3}T_{MN}. \quad (4.245)$$

όπου M είναι η $5D$ μάζα Planck, ενώ ο τανυστής ενέργειας ορμής T_{MN} είναι

$$T_{MN} = T_{MN}^{(B)} + T_{MN}^{(b)} - G_{MN}\Lambda - g_{\mu\nu} \sigma \delta(y) \delta_M^\mu \delta_N^\nu, \quad (4.246)$$

Ο πρώτος και ο δεύτερος όρος αντιστοιχούν στο περιεχόμενο του υπερχώρου και της βράνης αντίστοιχα, ενώ ο τρίτος προέρχεται από την κοσμολογική σταθερά του υπερχώρου και ο τέταρτος από την τάση της βράνης. Η υπόθεση που κάνουμε για την μετρική για να μελετήσουμε την κοσμολογία μιας Friedmann-Robertson-Walker βράνης είναι

$$G_{MN} = \begin{pmatrix} -n^2(y, t) & 0 & 0 \\ 0 & a^2(y, t)\gamma_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & b^2(y, t) \end{pmatrix}, \quad (4.247)$$

όπου γ_{ij} είναι η μετρική για ένα μέγιστα συμμετρικό τρισδιάστατο χώρο στη βράνη. Για τον τανυστή ενέργειας ορμής του υπερχώρου $T_{MN}^{(B)}$ θα θεωρήσουμε τη γενική μορφή

$$T^{(B)M}_N = \begin{pmatrix} -\rho_B & 0 & P_5 \\ 0 & P_B \delta^i_j & 0 \\ -\frac{n^2}{b^2} P_5 & 0 & \bar{P}_B \end{pmatrix}, \quad T_{MN}^{(B)} = \begin{pmatrix} \rho_B n^2 & 0 & -n^2 P_5 \\ 0 & P_B a^2 \gamma_{ij} & 0 \\ -n^2 P_5 & 0 & \bar{P}_B b^2 \end{pmatrix} \quad (4.248)$$

Ο μη διαγώνιος όρος $T_5^0 = P_5$ υποδηλώνει τη ροή ενέργειας προς ή από τη βράνη, ενώ πρέπει να τονίσουμε ότι εν γένει $\bar{P}_B \neq P_B$. Παρόμοια, για τον τανυστή ενέργειας ορμής της βράνης $T_{MN}^{(b)}$ θα θεωρήσουμε τη γενική μορφή

$$T^{(b)M}_N = \frac{\delta(y)}{b} \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 \\ 0 & p \delta^i_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_{MN}^{(b)} = \frac{\delta(y)}{b} \begin{pmatrix} \rho n^2 & 0 & 0 \\ 0 & p a^2 \gamma_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.249)$$

Ακολουθώντας τις [208],[210] (και αναφορές εκεί) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις συνθήκες σύνδεσης (junction conditions) στη βράνη ώστε να βρούμε την ενεργό εξίσωση Friedmann η οποία καθορίζει την κοσμολογική εξέλιξη στις τέσσερις διαστάσεις. Έπειτα, επιλέγοντας κατάλληλα μοντέλα για την πίεση του υπερχώρου και τον όρο ανταλλαγής ενέργειας και υποθέτοντας ότι η πυκνότητα ενέργειας στη βράνη είναι αρκετά μικρή, ώστε να μπορούμε να αγνοήσουμε τετραγωνικούς όρους του ρ , μπορούμε να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων και να βρούμε την ενεργό εξίσωση Friedmann. Η υπόθεση την οποία κάνουμε για τον τανυστή ενέργειας ορμής του υπερχώρου είναι

$$\bar{P}_B = D \alpha^\nu, \quad P_5 = F \left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \right) \alpha^\mu. \quad (4.250)$$

και την οποία μπορούμε να την δικαιολογήσουμε φυσικά με την υπόθεση ότι το περιεχόμενο του υπερχώρου είναι ένα αργά κινούμενο, κατά την πέμπτη διάσταση, ιδανικό ρευστό. Έτσι, η περίπτωση $\mu = \nu$ αντιστοιχεί σε ένα αργά κινούμενο ρευστό με καταστατική εξίσωση $w = -1 - \mu/3$ ενώ στην περίπτωση που πάνω από ένα ρευστά είναι παρόντα έχουμε, $\bar{P}_B =$

$\sum_j D_j \alpha^{\nu_j}$ και $P_5 = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \sum_j F_j \alpha^{\mu_j}$. Τότε είναι δυνατό να έχουμε $D_1 \gg D_i$, ενώ $F_1 \ll F_i$ ($i \neq 1$) και συνεπώς σε πρόσφατους χρόνους θα έχουμε $\bar{P}_B \approx D_1 \alpha^{\nu_1}$ και $P_5 \approx F_2 \left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right) \alpha^{\mu_2}$, το οποίο λαμβάνει υπόψη διάφορους εκθέτες.

Αντικαθιστώντας αυτές τις εκφράσεις, βρίσκουμε την ενεργό εξίσωση Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right)^2 + \frac{k}{\alpha^2} = \frac{8\pi}{3} G_N \rho_{eff}, \quad (4.251)$$

όπου $G_N = 3\gamma/4\pi = 3\sigma/4\pi(24M^3)^2$ είναι η $4D$ σταθερά της παγκόσμιας έλξης και η ενεργός πυκνότητα ενέργειας ρ_{eff} είναι ίση με

$$\rho_{eff} = \frac{\tilde{C}}{\alpha^{3(1+w)}} + \frac{C/2\gamma}{\alpha^4} - \frac{2\delta}{\gamma(\nu+4)} \alpha^\nu + \frac{2(3w-1)F}{(\mu+4)[3(1+w)+\mu]} \alpha^\mu. \quad (4.252)$$

όπου $\gamma \equiv \sigma(24M^3)^{-2}$ και έχουμε ορίσει $\delta \equiv D/24M^3$. Επίσης, υποθέσαμε ότι $p = w\rho$ για την ύλη στη βράνη. Η σταθερά \tilde{C} είναι απλά μια σταθερά ολοκλήρωσης για την πυκνότητα ενέργειας πάνω στη βράνη $\rho(\alpha)$. Η σταθερά ολοκλήρωσης C της σκοτεινής ακτινοβολίας σχετίζεται με τις ολικές ιδιότητες του υπερχώρου ενώ ο τρίτος και τέταρτος όρος στην ρ_{eff} προέρχονται από την πίεση στον υπερχώρο \bar{P}_B και τον όρο ανταλλαγής ενέργειας μεταξύ του υπερχώρου και της βράνης P_5 αντίστοιχα. Οι τιμές των παραμέτρων C, D, F, ν και μ , σχετίζονται με τον όρο της σκοτεινής ακτινοβολίας και τις συνεισφορές από τον υπερχώρο και είναι απαραίτητες για να διαπιστώσουμε το προφίλ της κοσμικής διαστολής.

Η γενικευμένη εξίσωση Friedmann μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_b \alpha^{-3(1+w)} + \Omega_{DR} \alpha^{-4} + \Omega_B \alpha^\nu + \Omega_5 \alpha^\mu, \quad (4.253)$$

όπου ορίσαμε τις παραμέτρους για την ύλη της βράνης, του υπερχώρου και για τη σκοτεινή ακτινοβολία ως

$$\Omega_m(\tilde{C}) \equiv \frac{8\pi G_N}{3H_0^2} \tilde{C}, \quad \Omega_{DR}(C) \equiv \frac{C}{H_0^2}, \quad (4.254)$$

$$\Omega_B(D, \nu) \equiv -\frac{4D}{24M^3 H_0^2 (\nu+4)}, \quad (4.255)$$

και

$$\Omega_5(F, \mu) \equiv \frac{8\pi G_N}{3H_0^2} \frac{2(3w-1)F}{(3(1+w)+\mu)(\mu+4)}. \quad (4.256)$$

Η παράμετρος της ύλης στη βράνη Ω_m αντιστοιχεί στην παρατηρήσιμη πυκνότητα ύλης και έχει τιμή $\Omega_m \simeq 0.27$ [29] και θα υποθέσουμε την τιμή $w = 0$ στις παραπάνω εκφράσεις. Οι τέσσερις παράμετροι πυκνότητας περιορίζονται από την απαίτηση να έχουμε επιπεδότητα, η οποία δίνει τη σχέση

$$\Omega_5 = 1 - \Omega_m - \Omega_{DR} - \Omega_B. \quad (4.257)$$

και έτσι, μπορούμε να απαλείψουμε την Ω_5 προς όφελος της Ω_B . Βλέπουμε ότι αυτή εξαρτάται από την παράμετρο D , η οποία χαρακτηρίζει την πίεση στον υπερχώρο, αλλά και στον

εκθέτη ν . Για να φαίνεται άμεσα η εξάρτηση από την παράμετρο ν μπορούμε να ξαναγράψουμε την παράμετρο ως $\Omega_B = \frac{\tilde{\Omega}_B}{\nu+4}$.

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω εκφράσεις, είμαστε πλέον σε θέση να προσαρμόσουμε το μοντέλο στα δεδομένα των υπερκαινοφανών αστέρων. Οι παράμετροι που πρέπει να βρεθούν είναι τέσσερις και είναι οι Ω_{DR} , $\tilde{\Omega}_B$, ν και μ . Έχοντας προσδιορίσει τις τιμές των παραμέτρων αυτών, είναι εύκολο να βρεθεί η χρονική εξάρτηση της παραμέτρου επιβράδυνσης q , αλλά και της ενεργού καταστατικής εξίσωσης w_{eff} . Ο λόγος για τον οποίο την αναφέρουμε ως *ενεργό* είναι ότι δεν είναι άμεσα σχετιζόμενη με κάποια μορφή ύλης, αλλά αντικατοπτρίζει τα συνολικά αποτελέσματα της ανταλλαγής ενέργειας μεταξύ του υπερχώρου και της βράνης, αλλά και του όρου της σκοτεινής ακτινοβολίας ο οποίος υπάρχει λόγω των έξτρα διαστάσεων. Η παράμετρος w_{eff} μπορεί να γραφτεί ως [211]

$$w_{eff}^{(D)} = -1 - \frac{1}{3} \frac{d \ln(\delta H^2)}{d \ln \alpha}, \quad (4.258)$$

όπου ο όρος $\delta H^2 = H^2/H_0^2 - \Omega_m a^{-3}$ λαμβάνει υπόψη όλους τους όρους στην εξίσωση Friedmann που δεν σχετίζονται με την ύλη στη βράνη. Αντικαθιστώντας στην παραπάνω έκφραση παίρνουμε

$$w_{eff}(\alpha) = -1 - \frac{1}{3} \left(\frac{-4\Omega_{DR} + \nu\Omega_B \alpha^{\nu+4} + \mu\Omega_5 \alpha^{\mu+4}}{\Omega_{DR} + \Omega_B \alpha^{\nu+4} + \Omega_5 \alpha^{\mu+4}} \right), \quad (4.259)$$

από όπου μπορούμε να προσδιορίσουμε την εξέλιξη της w_{eff} με το χρόνο και όπως φαίνεται όλη η χρονική εξάρτηση προέρχεται από τους όρους του υπερχώρου. Επίσης, ενδιαφέρον παρουσιάζει η παράμετρος επιβράδυνσης q , η οποία δίνεται από τη σχέση

$$q \equiv -\frac{1}{H^2} \frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} = \frac{\Omega_m \alpha^{-3} + 2\Omega_{DR} \alpha^{-4} - (\nu+2)\Omega_B \alpha^\nu - (\mu+2)\Omega_5 \alpha^\mu}{2(\Omega_m \alpha^{-3} + \Omega_{DR} \alpha^{-4} + \Omega_B \alpha^\nu + \Omega_5 \alpha^\mu)}. \quad (4.260)$$

Για τη μελέτη αυτή όμως, θα πρέπει να εκφράσουμε τις q και w_{eff} συναρτήσει της ερυθρής μετατόπισης z , αντί του παράγοντα κλίμακας α . Αυτές οι δύο ποσότητες σχετίζονται ως $\alpha = \frac{\alpha_0}{1+z}$, όπου α_0 είναι ο παράγοντας κλίμακας την παρούσα χρονική στιγμή στο τετραδιάστατο σύμπαν.

4.4.2 Χρήση των δεδομένων

Σε αυτή την ενότητα θα χρησιμοποιήσουμε το σετ δεδομένων Gold (Gold06) από την αναφορά Riess et al. [68], για να βρούμε τις παραμέτρους του μοντέλου (4.253). Χρησιμοποιήσαμε την τιμή $\Omega_{om} = 0.27$ και ακολουθήσαμε τις παρακάτω τρεις μεθόδους *Ελαχιστοποίηση*, *Περιοριστοποίηση - Ελαχιστοποίηση* και *Ελαχιστοποίηση - Μέσος Όρος*, με τα αποτελέσματα να είναι συνεπή μεταξύ των τριών μεθόδων. Λεπτομερώς, οι μέθοδοι αυτοί είναι [207]:

- **Ελαχιστοποίηση:** Ελαχιστοποιήσαμε την εξίσωση (2.19) ως προς όλες τις παραμέτρους (Ω_{DR} , $\tilde{\Omega}_B$, ν και μ). Τα βήματα που ακολουθήθηκαν για την ελαχιστοποίηση

της (2.19) περιγράφονται και στο κεφάλαιο 2. Το πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι συμπεριφέρεται με τον ίδιο τρόπο σε όλες τις παραμέτρους και δίνει άμεση πληροφορία και για τις τέσσερις. Ωστόσο, αυξάνεται σημαντικά ο αριθμός των παραμέτρων του συστήματος, προκαλώντας έτσι μεγάλα σφάλματα.

- **Περιθωριοποίηση-Ελαχιστοποίηση:** Σε αυτή τη μέθοδο, περιθωριοποιήσαμε τις παραμέτρους $\Omega_{DR} \in [-1.5, 5]$ και $\tilde{\Omega}_B \in [-10, 2]$ και ελαχιστοποιήσαμε ως προς ν και μ . Για να επιλέξουμε το εύρος στο οποίο θα γίνει η περιθωριοποίηση, εφόσον δεν υπάρχει προηγούμενη πληροφορία για τις δύο παραμέτρους, ελαχιστοποιήσαμε το χ^2 για αρκετά ζεύγη τιμών των ν και μ και βρήκαμε ένα εύρος αρκετά μεγάλο ώστε να περιέχονται όλες οι τιμές των Ω_{DR} και $\tilde{\Omega}_B$. Επίσης, ελέγξαμε ότι τα αποτελέσματά μας δεν επηρεάζονται από την επιλογή του εύρους. Το περιθωριοποιημένο $\tilde{\chi}^2$ ορίζεται ως:

$$\tilde{\chi}^2(\nu, \mu) = -2 \ln \int e^{-\chi^2/2} d\Omega_{DR} d\tilde{\Omega}_B, \quad (4.261)$$

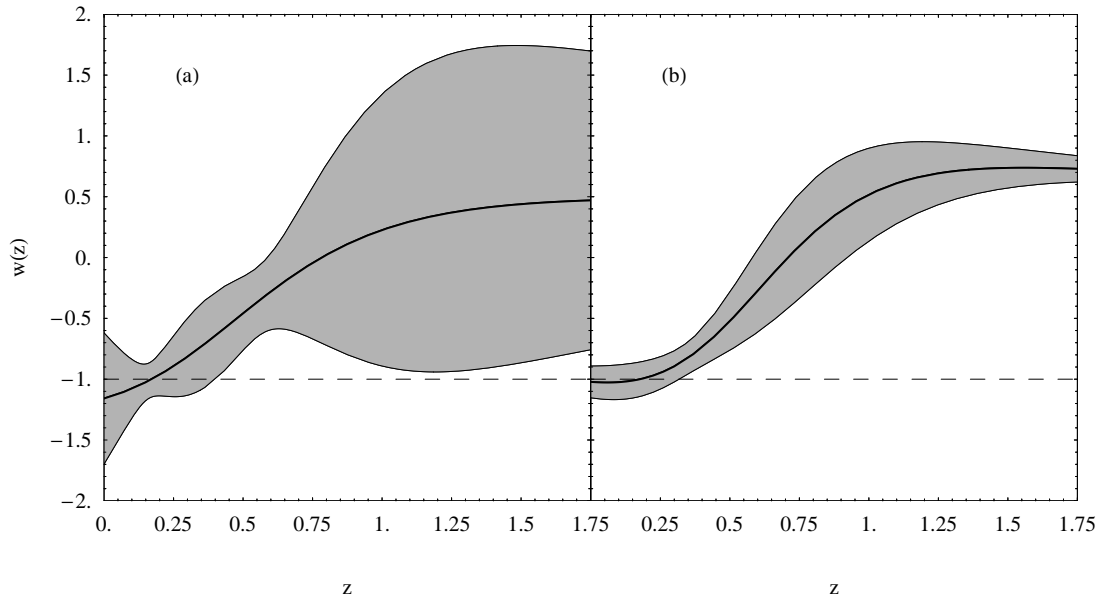
και ελαχιστοποιείται ως προς ν και μ , που σχετίζονται άμεσα με τις ποσότητες \bar{P}_B και P_5 . Αυτή η μέθοδος έχει λιγότερο εκφυλισμό σε σχέση με την προηγούμενη αλλά δεν παρέχει κάποια ένδειξη για τις τιμές των Ω_{DR} και $\tilde{\Omega}_B$. Ωστόσο, οι τιμές των παραμέτρων αυτών είναι απαραίτητες για τον προσδιορισμό της $w_{eff}(z)$, που ορίζεται από την εξίσωση (4.258). Έτσι, επιλέγουμε τις τιμές των παραμέτρων ν και μ σε αυτές που βρέθηκαν πριν και ελαχιστοποιούμε το χ^2 ως προς Ω_{DR} και $\tilde{\Omega}_B$.

- **Ελαχιστοποίηση-Μέσος Όρος:** Οι τιμές των Ω_{DR} και $\tilde{\Omega}_B$ που βρέθηκαν από την προηγούμενη μέθοδο επιβεβαιώθηκαν και διαφορετικά, και συγκεκριμένα παίρνοντας το μέσο όρο των τιμών των παραμέτρων που ελαχιστοποιούν το χ^2 . Έτσι, ορίζουμε τις μέσες τιμές των παραμέτρων ως:

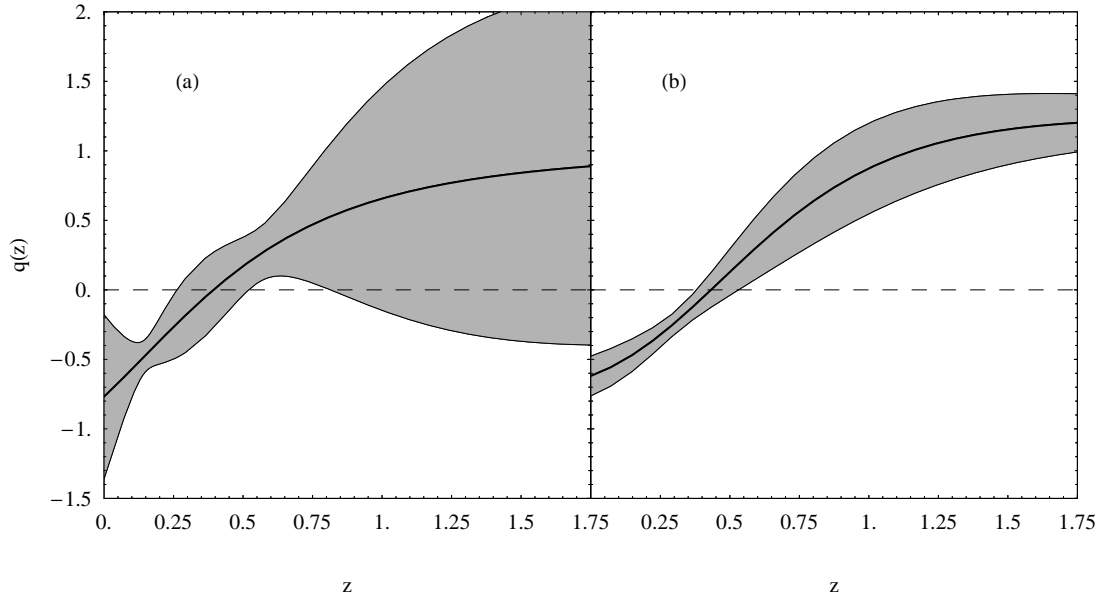
$$\langle \Omega_{par} \rangle = \frac{\int \Omega_{par} e^{-\chi^2/2} d\Omega_{DR} d\tilde{\Omega}_B}{\int e^{-\chi^2/2} d\Omega_{DR} d\tilde{\Omega}_B}, \quad (4.262)$$

όπου $par = \{\Omega_{DR}, \tilde{\Omega}_B\}$.

Οι τιμές των παραμέτρων που βρέθηκαν με τις παραπάνω μεθόδους φαίνονται στον Πίνακα 4.6. Η πρώτη μέθοδος δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για το σχηματισμό ασφαλών συμπερασμάτων σχετικά για το μοντέλο μας λόγω των μεγάλων σφαλμάτων των παραμέτρων. Ωστόσο, η μέθοδος της περιθωριοποίησης φαίνεται να υποδεικνύει ότι $\nu \sim -3$ και ότι η παράμετρος $\tilde{\Omega}_B$ είναι αρνητική, κάτι το οποίο αντιστοιχεί σε θετική πίεση στον υπερχώρο \bar{P}_B (δες εξισώσεις (4.250) και (4.254)). Επίσης, το ότι η παράμετρος Ω_5 είναι θετική αντιστοιχεί σε $P_5 < 0$, το οποίο σημαίνει ότι η ενέργεια ρέει από τον υπερχώρο προς τη βράνη. Αυτό είναι ένα διαισθητικά αναμενόμενο αποτέλεσμα το οποίο παρέχει ενδείξεις για την ύπαρξη ενός ιδανικού ρευστού ύλης στον υπερχώρο το οποίο κινείται με ταχύτητα v κατά την πέμπτη διάσταση [208, 209]. Ο όρος της σκοτεινής ακτινοβολίας έχει δείχθει ότι σχετίζεται με την γενικευμένη ομοκινούμενη μάζα \mathcal{M} του ρευστού στον υπερχώρο [212] και η παράμετρος της Ω_{DR} είναι θετική. Αυτό είναι ένα επιθυμητό αποτέλεσμα του μοντέλου, καθώς μια



Σχήμα 4.22: Η ενεργός καταστατική εξίσωση w_{eff} για τη μέθοδο της 'Ελαχιστοποίησης' (σχήμα 4.22a) και της 'Περιορισμένης - Ελαχιστοποίησης' (σχήμα 4.22b). Η μεγάλη περιοχή του σφάλματος στο σχήμα 4.22a οφείλεται στον μεγάλο εκφυλισμό του μοντέλου ενώ η μικρότερη περιοχή του σχήματος 4.22b στο ότι οι τιμές των ν και μ θεωρήθηκαν σταθερές κατά την ελαχιστοποίηση ως προς Ω_{DR} και $\tilde{\Omega}_B$.



Σχήμα 4.23: Η παράμετρος επιβράδυνσης q για τη μέθοδο της 'Ελαχιστοποίησης' (σχήμα 4.23a) και της 'Περιορισμένης - Ελαχιστοποίησης' (σχήμα 4.23b). Η μεγάλη περιοχή του σφάλματος στο σχήμα 4.23a οφείλεται στον μεγάλο εκφυλισμό του μοντέλου ενώ η μικρότερη περιοχή του σχήματος 4.23b στο ότι οι τιμές των ν και μ θεωρήθηκαν σταθερές κατά την ελαχιστοποίηση ως προς Ω_{DR} και $\tilde{\Omega}_B$.

Πίνακας 4.6: Οι τιμές των παραμέτρων από την προσαρμογή των δεδομένων με κάθε μια από τις τρεις μεθόδους. Πρέπει να αναφερθεί ότι οι ποσότητες που βρέθηκαν με την μέθοδο του μέσου όρου της εξίσωσης (4.262) δεν έχουν σφάλμα λόγω της φύσης της μεθόδου.

Μέθοδος	ν	μ	Ω_{DR}	$\tilde{\Omega}_B$	Ω_5
Ελαχιστοποίηση	0.75 ± 5.09	-3.55 ± 5.77	0.29 ± 2.45	3.39 ± 0.76	-0.27 ± 2.57
Περ.-Ελαχ.	-3.0 ± 1.1	-0.8 ± 0.3	0.49 ± 0.25	-1.00 ± 0.49	1.24 ± 1.23
Περ.-Μ.Ο.	-3.0 ± 1.1	-0.8 ± 0.3	0.52	-1.05	1.26

αρνητική τιμή θα αντιστοιχούσε και σε αρνητική μάζα \mathcal{M} . Τέλος, όπως φαίνεται και στον Πίνακα 4.6, οι δύο μέθοδοι 'Περιθωριοποίησης - Ελαχιστοποίησης' και 'Περιθωριοποίησης - Μέσος Όρος' είναι σε καλή συμφωνία.

Οι γραφικές παραστάσεις της καταστατικής εξίσωσης $w_{eff}(z)$ φαίνονται στα σχήματα 4.22 και 4.23 για τις δύο πρώτες μεθόδους ('Ελαχιστοποίησης' και 'Περιθωριοποίησης - Ελαχιστοποίησης'). Παρά τα μεγάλα σφάλματα, οι $w_{eff}(z)$ και $q(z)$ βρίσκονται σε καλή συμφωνία. Οι γραφικές που αντιστοιχούν στην τρίτη μέθοδο ('Περιθωριοποίησης - Μέσος Όρος') είναι πρακτικά ίδιες με αυτές των σχημάτων 4.22b και 4.23b της μεθόδου 'Περιθωριοποίησης - Ελαχιστοποίησης' (δες και τον Πίνακα 4.6).

Ένα ενδιαφέρον χαρακτηριστικό των σχημάτων 4.22a και 4.23a είναι η ύπαρξη των περιοχών με ελαττωμένα σφάλματα ("sweet-spots") στα σημεία $z \sim 0.2$ και $z \sim 0.55$. Η ύπαρξη των περιοχών αυτών σε διαφορετικές ερυθρές μετατοπίσεις και μοντέλα, κυρίως πολυώνυμα, έχει μελετηθεί προηγουμένως [153] και βρέθηκε ότι είναι καθαρά συνέπεια του μοντέλου που χρησιμοποιείται και όχι των δεδομένων. Ωστόσο, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της περιθωριοποίησης η περιοχή του σφάλματος του σχήματος 4.22b είναι πολύ πιο ομαλή από αυτή του 4.23a.

Κεφάλαιο 5

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα διδακτορική διατριβή εξετάστηκαν μερικές από τις πιο ενδιαφέρουσες λύσεις για το πρόβλημα της επιταχυνόμενης διαστολής του σύμπαντος, οι οποίες περιλαμβάνουν συγκεκριμένες γενικευμένες θεωρίες βαρύτητας αλλά και θεωρητικά μοντέλα στα πλαίσια της Γενικής Σχετικότητας. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιήθηκαν τα τρέχοντα κοσμολογικά δεδομένα, όπως για παράδειγμα είναι οι υπερκαινοφανείς αστέρες τύπου Ia και η Κοσμική Ακτινοβολία Μικροκυμάτων Υποβάθρου, για ελεγχθούν τόσο η συμβατότητα με τις παρατηρήσεις, όσο και οι ενδεχόμενες παρατηρησιακές υπογραφές των θεωριών αυτών.

Στο κεφάλαιο 2 παρουσιάσαμε αναλυτικά τα είδη των κοσμολογικών παρατηρήσεων τα οποία χρησιμοποιήθηκαν στη μελέτη αυτή, καθώς και τα σετ δεδομένων από τις διάφορες έρευνες που χρησιμοποιήθηκαν για την εύρεση παρατηρησιακών περιορισμών στα πλαίσια, αλλά κυρίως και πέρα από αυτά, της Γενικής Σχετικότητας. Αυτές οι παρατηρήσεις, όπως είδαμε, μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες [49] σύμφωνα με τις μεθόδους που χρησιμοποιήθηκαν για να βρεθεί η $H(z)$:

- Οι Γεωμετρικές παρατηρήσεις ανιχνεύουν την γεωμετρία του σύμπαντος σε μεγάλη κλίμακα μέσω της εξάρτησης των διάφορων κοσμολογικών αποστάσεων ($d_L(z)$ ή $d_A(z)$) στην ερυθρή μετατόπιση z . Συνεπώς, προσδιορίζουν την $H(z)$ ανεξάρτητα από το αν ισχύουν οι εξισώσεις Einstein.
- Οι Δυναμικές παρατηρήσεις προσδιορίζουν την συνάρτηση $H(z)$ μετρώντας την εξέλιξη της πυκνότητας ενέργειας (του υποβάθρου ή των διαταραχών) και χρησιμοποιώντας μια θεωρία βαρύτητας για να τα συσχετίσει με την γεωμετρία, δηλαδή την $H(z)$. Αυτές οι μέθοδοι βασίζονται στην γνώση των δυναμικών εξισώσεων που συνδέουν την γεωμετρία με την ενέργεια και συνεπώς μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε συνδυασμό με τις γεωμετρικές παρατηρήσεις για να ελεγχθούν οι δυναμικές εξισώσεις.

Παραδείγματα γεωμετρικών μεθόδων είναι:

1. Η μετρούμενη απόσταση λαμπρότητας $d_L(z)$ [31],[50],[51], η οποία για ένα επίπεδο σύμπαν σχετίζεται με την $H(z)$ ως εξής

$$d_L(z) = (1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad (5.1)$$

2. Η μετρούμενη γωνιακή διαμετρική απόσταση [29],[52] $d_A(z_{rec})$ ως τον ηχητικό ορίζοντα $r_s(z_{rec})$ την εποχή της επανασύνδεσης

$$d_A(z_{rec}) = \frac{1}{1 + z_{rec}} \int_0^{z_{rec}} \frac{dz'}{H(z')} \quad (5.2)$$

3. Η κλίμακα του ηχητικού ορίζοντα μετρούμενη σε πιο μικρές ερυθρές μετατοπίσεις (z_{BAO}) μέσω των συναρτήσεων συσχέτισης (correlation functions) από τις έρευνες ερυθρής μετατόπισης της δομής μεγάλης κλίμακας [53]

$$D_V(z) = \left[\left(\int_0^{z_{BAO}} \frac{dz}{H(z)} \right)^2 \frac{z_{BAO}}{H(z_{BAO})} \right]^{1/3} \quad (5.3)$$

4. Το ποσοστό της μάζας των βαρυονίων της ύλης σε σμήνη γαλαξιών με βάση τις έρευνες με ακτίνες X

$$f_{gas} = \frac{M_{gas}}{M_{tot}} \quad (5.4)$$

η οποία θεωρείται σταθερή για όλα τα σμήνη και ανάλογη της ποσότητας $\frac{\Omega_b}{\Omega_{0m}}$ η οποία ανιχνεύει την γωνιακή διαμετρική απόσταση [54],[55],[56] σε κάθε σμήνος.

Ένα παράδειγμα δυναμικής μεθόδου ανίχνευσης της γεωμετρίας είναι η υπερπυκνότητα των διαταραχών της ύλης $\delta(\alpha)$ (*matter overdensity* αλλά γνωστή και ως *growth factor*) που ορίζεται ως [22]

$$\delta(\alpha) \equiv \frac{\frac{\delta\rho}{\rho}(\alpha)}{\frac{\delta\rho}{\rho}(\alpha = 1)} \quad (5.5)$$

Στο κεφάλαιο 3 μελετήσαμε θεωρητικά μοντέλα και είδαμε τους παρατηρησιακούς περιορισμούς στα πλαίσια της Γενικής Σχετικότητας. Συγκεκριμένα, συγκεντρώσαμε ένα σετ από δεδομένα που αποτελείται από την παράμετρο παραμόρφωσης της ερυθρής μετατόπισης $\beta(z)$ (redshift distortion parameter) και την μέση διακύμανση της μάζας $\sigma_8(z)$ (rms mass fluctuation) σε μία σφαίρα ακτίνας $R = 8h^{-1}Mpc$ σε διάφορες ερυθρές μετατοπίσεις όπως βρέθηκαν από έρευνες παρατήρησης γαλαξιών και του φαινομένου $Ly-\alpha$. Χρησιμοποιώντας αυτό το σετ δεδομένων προσδιορίσαμε τη μορφή της υπερπυκνότητας των διαταραχών της ύλης $\delta(z)$ με βάση την παραμετροποίηση (2.105) και θεωρώντας $\Omega_{0m} = 0.3$. Η τιμή της παραμέτρου γ που βρέθηκε από την προσαρμογή των δεδομένων είναι $\gamma = 0.674_{-0.169}^{+0.195}$ και βρίσκειται σε καλή συμφωνία με την τιμή για το Λ CDM $\gamma = \frac{6}{11}$. Επίσης, το ίδιο συμπέρασμα βγήκε χρησιμοποιώντας και μια γενίκευση του τεστ της αναφοράς [106].

Ο συνδυασμός γεωμετρικών ($H(z)$) και δυναμικών ($\delta(z)$) παρατηρήσιμων ποσοτήτων που χρησιμοποιήθηκαν για τον έλεγχο του Λ CDM θα μπορούσαν επίσης να χρησιμοποιηθούν και για τον έλεγχο των γενικευμένων θεωριών βαρύτητας, κάτι το οποίο δεν είναι εύκολο χρησιμοποιώντας μόνο τα γεωμετρικά τεστ. Ωστόσο, σε αυτή την περίπτωση χρειάζεται προσοχή, καθώς πρέπει να ξαναγίνει η ανάλυση των φασμάτων δύναμης χρησιμοποιώντας την κατάλληλη μορφή του $H(z)$ για τη μετατροπή των ερυθρών μετατοπίσεων σε αποστάσεις.

Όμως, δεδομένης της αβεβαιότητας στις παρατηρήσεις του ρυθμού διαταραχών της ύλης, είναι βέβαιο ότι θα χρειαστούν δεδομένα πολύ καλύτερης ποιότητας για να είναι δυνατή η διάκριση μεταξύ του Λ CDM και των γενικευμένων θεωριών της βαρύτητας. Τα δεδομένα αυτά μπορούν να προέλθουν από έρευνες ασθενών βαρυτικών φακών μεγάλης κλίμακας όπως η έρευνα DUNE, η οποία αναμένεται να μετρήσει την καταστατική εξίσωση της Σκοτεινής Ενέργειας με ακρίβεια καλύτερη από 5% [109].

Επίσης, μελετήθηκε η εξέλιξη βαρυτικά δέσιμων συστημάτων σε διαστελλόμενα υπόβαθρα και ιδιαίτερα στην περίπτωση της επιταχυνόμενης διαστολής που οφείλεται σε phantom πεδία ($w < -1$). Συγκεκριμένα, βρέθηκε η χρονική εξάρτηση της ακτίνας των δέσιμων συστημάτων και προσδιορίστηκε ο χρόνος αποσύζευξης των συστημάτων αυτών λόγω των ακραίων απωστικών φαινομένων των phantom πεδίων. Ακόμη, σχεδιάζοντας την τροχιά του δέσιμου συστήματος κατά την εποχή της αποσύζευξης αποδείχθηκε ότι τα δέσιμα συστήματα εκρήγνυνται ακτινικά μετά την αποσύζευξη. Τα αποτελέσματά μας αυτά συγκρίθηκαν με προηγούμενα και βρέθηκαν σε ποιοτική αλλά όχι ποσοτική συμφωνία.

Ωστόσο, σε αυτή τη μελέτη θεωρήσαμε σταθερή καταστατική εξίσωση w . Η επέκταση των αποτελεσμάτων στην περίπτωση χρονικά εξελισσόμενης $w(z)$ είναι προφανής. Μια πιθανή βελτίωση στην ακρίβεια των αποτελεσμάτων μπορεί να επέλθει από τη χρήση πιο ακριβούς μετρικής για την παρεμβολή μεταξύ της μετρικής Schwarzschild και της μετρικής FRW[119]. Μια τέτοια βελτίωση θα ήταν σημαντική για ισχυρώς δέσιμα συστήματα, δηλαδή στην περίπτωση που δεν ισχύει η προσέγγιση των ασθενών πεδίων και μικρών ταχυτήτων.

Ένα άλλο σημαντικό σημείο που είδαμε σε αυτό το κεφάλαιο είναι και η χρήση των δεδομένων των υπερκαινοφανών αστέρων για την εύρεση των πιο συμβατών με τις παρατηρήσεις κοσμολογικών μοντέλων. Χρησιμοποιώντας το σετ δεδομένων Gold04, επιλέγοντας $\Omega_m = 0.3$ και υποθέτοντας επιπεδότητα, είδαμε ότι σε μικρές ερυθρές μετατοπίσεις ($z < 0.5$) όλα τα μοντέλα πλησιάζουν την τιμή $w(z) \simeq -1$, αλλά τα περισσότερα (όχι όμως όλα) προβλέπουν πως η τιμή αυτή είναι ελαφρά μικρότερη του -1 ως -1.3 για μικρές ερυθρές μετατοπίσεις στο εύρος $[0, 0.5]$. Υπάρχουν και μερικά πολύ καλά μοντέλα, τα οποία όμως έχουν χ^2_{min} το οποίο είναι μικρότερο από το μέσο όρο για τον οποίο $w(z) > -1$. Αυτό σημαίνει ότι η phantom ενέργεια [114] ($w < -1$) είναι συμβατή με τα δεδομένα, αλλά όχι απαραίτητα πιο πιθανή από την quintessence ($w > -1$).

Γενικότερα, όπως έχουμε αναφέρει, είναι πολύ σημαντικό να βρεθούν συγκεκριμένες παρατηρησιακές υπογραφές με τις οποίες θα ήταν δυνατό να γίνει διάκριση της Σκοτεινής Ενέργειας από τις γενικευμένες θεωρίες βαρύτητας ως πηγές της επιταχυνόμενης διαστολής του σύμπαντος. Η διάσχιση της PDL $w = -1$ μπορεί να θεωρηθεί ως μία τέτοια υπογραφή, η οποία βασίζεται στις γεωμετρικές παρατηρήσεις. Όπως είδαμε, οι απλούστερες θεωρητικά παρακινούμενες θεωρίες που είναι συμβατές με αυτή είναι οι γενικευμένες θεωρίες βαρύτητας και μια από τις πιο χαρακτηριστικές κλάσεις θεωριών είναι οι scalar-tensor θεωρίες.

Παρόλο που προς το παρόν δεν υπάρχουν απόλυτα ξεκάθαρους παρατηρησιακές ενδείξεις για τη διάσχιση της PDL, υπάρχουν αρκετά είδη παρατηρήσεων που δείχνουν μια προτίμηση για αυτή τη διάσχιση σε σχέση με μια σταθερή καταστατική εξίσωση για τη Σκοτεινή Ενέργεια. Αυτές οι παρατηρήσεις περιλαμβάνουν το σετ υπερκαινοφανών αστέρων τύπου Gold για σχεδόν οποιοδήποτε λογικό εύρος της παραμέτρου Ω_m , η παράμετρος μετατόπισης R

του φάσματος της Κοσμικής Ακτινοβολίας Μικροκυμάτων Υποβάθρου, οι ακουστικές ταλαντώσεις των βαρυονίων αλλά και η υπερπυκνότητα των διαταραχών της ύλης για μία σχετικά μικρή τιμή της παραμέτρου Ω_{0m} ($\Omega_{0m} \lesssim 0.25$). Αντίθετα, μια μη εξελισσόμενη $w \simeq -1$ φαίνεται να προτιμάται από τα δεδομένα των υπερκαινοφανών αστέρων του πρώτου έτους της έρευνας SNLS.

Μια άλλη, ίσως και πιο ενδιαφέρουσα, παρατηρησιακή υπογραφή, η οποία θα μπορούσε να απορρίψει την Σκοτεινή Ενέργεια προς όφελος των γενικευμένων θεωριών βαρύτητας, βρίσκεται χρησιμοποιώντας τη μέτρηση του γραμμικού ρυθμού των διαταραχών f της εξίσωσης (2.105) σε διάφορες ερυθρές μετατοπίσεις. Αυτό το τεστ χρησιμοποιεί δυναμικές (αντί για γεωμετρικές) παρατηρήσεις, και όπως είδαμε, εν γένει είναι σε θέση να ξεχωρίσει αυτές τις δύο ομάδες θεωριών. Επίσης, διαπιστώθηκε ότι τα τρέχοντα παρατηρησιακά δεδομένα 2dFGRS φαίνεται πως είναι συμβατά με το Λ CDM στα πλαίσια της Γενικής Σχετικότητας και δεν δείχνουν ότι υπάρχει ανάγκη για γενικευμένες θεωρίες βαρύτητας.

Συζητήθηκε επίσης το ολοκληρωτικό φαινόμενο *Sachs - Wolfe* (*ISW effect*), το οποίο είναι ευαίσθητο στην υπερπυκνότητα των διαταραχών της ύλης σε μικρές ερυθρές μετατοπίσεις, ως ένα εν δυνάμει χρήσιμο δυναμικό τεστ για την Σκοτεινή Ενέργεια. Δείξαμε ότι στα πλαίσια της Γενικής Σχετικότητας, για σταθερή παράμετρο μετατόπισης \bar{R} και σταθερή Ω_{0m} , το φαινόμενο ISW του φάσματος της Κοσμικής Ακτινοβολίας Μικροκυμάτων Υποβάθρου και η υπερπυκνότητα των διαταραχών της ύλης $D(\alpha)$ φαίνεται να μην εξαρτώνται από την καταστατική εξίσωση της Σκοτεινής Ενέργειας. Ο εκφυλισμός του φάσματος της Κοσμικής Ακτινοβολίας Μικροκυμάτων Υποβάθρου με σταθερή παράμετρο μετατόπισης \bar{R} έχει μελετηθεί και προηγουμένως [213], αλλά σε αυτή την περίπτωση η παράμετρος Ω_{0m} μεταβαλλόταν ταυτόχρονα με την $w(z) = w_0 = const$ ώστε να διατηρηθεί η \bar{R} σταθερή. Συνεπώς, το φάσμα της Κοσμικής Ακτινοβολίας Μικροκυμάτων Υποβάθρου σε μεγάλες κλίμακες (μικρά l) άλλαζε λόγω της μεταβολής του $D(\alpha)$ (φαινόμενο ISW).

Αξίζει να αναφερθεί ότι οι μετρήσεις του φάσματος για αρκετά μικρά l είναι εκ φύσεως δύσκολες και με μεγάλα σφάλματα καθώς υπάρχει ένα όριο [22] (*cosmic variance*) στην ακρίβεια με την οποία μπορούμε να μετρήσουμε το φάσμα ισχύος της Κοσμικής Ακτινοβολίας Μικροκυμάτων Υποβάθρου, δηλαδή τις παραμέτρους C_l που ορίζονται μέσω της σχέσης (2.52). Αυτό οφείλεται στο ότι οι παράμετροι α_{lm} που ορίζονται από την εξίσωση (2.51) είναι τυχαίες μεταβλητές και επειδή για οποιοδήποτε l υπάρχουν $2l + 1$ παράμετροι α_{lm} , η πληροφορία που παίρνουμε για τα C_l για πολύ μικρά l είναι περιορισμένη.

Ο εκφυλισμός που παρατηρήθηκε μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ένα επιπλέον εργαλείο για τη διάκριση μεταξύ της Γενικής Σχετικότητας και των γενικευμένων θεωριών βαρύτητας. Για παράδειγμα, αν το φαινόμενο ISW διαφέρει από την αναμενόμενη μορφή του που βρίσκεται από τη μετρούμενη παράμετρο μετατόπισης \bar{R} και της Ω_{0m} , τότε αυτό θα μπορούσε να θεωρηθεί ως ένδειξη για την ύπαρξη επεκτάσεων της Γενικής Σχετικότητας. Μεταβολές στο φαινόμενο ISW αναμένονται για παράδειγμα σε θεωρίες που προβλέπουν μια χρονικά εξαρτώμενη σταθερά της παγκόσμιας έλξης. Συγκεκριμένα, στην αναφορά [214] είχε δείχθει ότι στο μοντέλο DGP σε πρόσφατους χρόνους, οι διαταραχές υπεισέρχονται σε μια περιοχή όπου η ενεργός τιμή της σταθεράς της παγκόσμιας έλξης αυξάνεται καθώς η πυκνότητας της ύλης του υποβάθρου μειώνεται. Αυτό προκαλεί τη μείωση του φαινομένου ISW, με

αποτέλεσμα το μοντέλο DGP να βρίσκεται σε οριακά καλύτερη συμφωνία με τα δεδομένα WMAP από ότι το καθιερωμένο Λ CDM.

Η ύπαρξη των phantom βαθμών ελευθερίας που απαιτούνται για τη διάσχιση της PDL, η οποία είναι μια γεωμετρική υπογραφή, δημιουργεί αρκετά θεωρητικά προβλήματα. Τα phantom πεδία ($w < -1$) [122],[140] παραβιάζουν την Ισχυρή Συνθήκη Ενέργειας (Strong Energy Condition), την Κυρίαρχη Συνθήκη Ενέργειας (Dominant Energy Condition) και μπορεί να είναι φυσικά ασταθή αφού η ενέργειά τους δεν είναι από κάτω φραγμένη και επιτρέπει την αποσύνθεση του κενού μέσω της παραγωγής αληθινών σωματιδίων υψηλής ενέργειας και φαντασμάτων (ghosts) αρνητικής ενέργειας [141],[142],[143],[144]. Αντίθετα, οι γενικευμένες θεωρίες βαρύτητας δεν πάσχουν από κανένα από αυτά τα προβλήματα, έχουν πιο στέρεα θεωρητική βάση και η διάσχιση της PDL γίνεται πολύ εύκολα στα πλαίσια των θεωριών αυτών, με αποτέλεσμα να είναι έτσι πιο ελκυστικές από τα ελάχιστα συζευγμένα (*minimally coupled*) phantom πεδία.

Από την άλλη, η δυναμική υπογραφή (η υπερπυκνότητα των διαταραχών της ύλης) υποθέτει ότι οι διαταραχές της Σκοτεινής Ενέργειας μπορούν να αγνοηθούν σε κλίμακες μικρότερες του ορίζοντα και δεν μπορούν να μιμηθούν τα αποτελέσματα των γενικευμένων θεωριών βαρύτητας. Από αυτές τις υποθέσεις φαίνεται ότι είναι σημαντικό να αναγνωριστούν περαιτέρω είδη παρατηρησιακών υπογραφών που θα μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε συνδυασμό με τις παραπάνω και να δώσουν πιο ισχυρά τεστ που θα διακρίνουν τις δύο ομάδες των θεωριών.

Όπως είδαμε, το σετ δεδομένων Gold δείχνει μια προτίμηση για δυναμικά εξελισσόμενη Σκοτεινή Ενέργεια που διασχίζει την PDL στο σημείο $z \simeq 0.2$, σε σχέση με την κοσμολογική σταθερά ενώ αυτό δεν γίνεται για το SNLS. Για να μελετήσουμε σε μεγαλύτερο βάθος τη διαφορά αυτή χρησιμοποιήσαμε τρία σετ δεδομένων των υπερκαινοφανών αστέρων: το πλήρες Gold (FG) (157 σημεία στα εύρος $0 < z < 1.7$), το κομμένο Gold (TG) (140 σημεία στα εύρος $0 < z < 1$) και το SNLS (115 σημεία στο εύρος $0 < z < 1$). Χρησιμοποιώντας τρία διαφορετικά μοντέλα για την $H(z)$ τα οποία επιτρέπουν τη δυναμική εξέλιξη της Σκοτεινής Ενέργειας και έχουν από δύο παραμέτρους, ώστε να επιτρέπουν τη διάσχιση της PDL, εξετάσαμε τη συμβατότητα ανάμεσα στα τρία σετ σχετικά με το πόσο καλά μπορούν να περιορίζουν τις τιμές των παραμέτρων. Βρήκαμε ότι, παρόλο που τα τρία σετ είναι μεταξύ τους συμβατά σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95.4%, το σετ Gold δείχνει μια ξεκάθαρη προτίμηση για τη διάσχιση της PDL, η οποία δεν υπάρχει στα άλλα σετ δεδομένων των υπερκαινοφανών αστέρων. Συγκεκριμένα παρατηρήθηκε ότι:

- Η καταστατική εξίσωση $w(z)$ που βρίσκεται από την προσαρμογή των δεδομένων SNLS δεν διασχίζει την PDL $w = -1$ και παραμένει κοντά στη γραμμή $w = -1$ για όλο το εύρος της ερυθρής μετατόπισης $0 < z < 1$. Ακόμη, οι τιμές των παραμέτρων (w_0, w_1) των δυναμικά εξελισσόμενων $w(z)$ μοντέλων βρίσκονται πολύ κοντά στο παραμετρικό χώρο με το Λ CDM ($w_0 = -1, w_1 = 0$). Συνεπώς, τα δεδομένα δεν φαίνεται να απαιτούν ή και να χρησιμοποιούν τους έξτρα βαθμούς ελευθερίας των δυναμικών $w(z)$ μοντέλων. Αυτό είναι ένα ενδιαφέρον χαρακτηριστικό των δεδομένων το οποίο ευνοεί το Λ CDM μοντέλο. Αντίθετα, η καταστατική εξίσωση $w(z)$ η οποία βρίσκεται από την προσαρμογή των δεδομένων Gold (και το πλήρες και το κομμένο) ξεκάθαρα διασχίζει

την PDL και αποκλίνει σημαντικά από τη γραμμή $w = -1$. Σύμφωνα με τα παραπάνω τα σετ δεδομένων το Λ CDM μοντέλο είναι συμβατό με αυτά αλλά όχι προτιμώμενο καθώς είναι περίπου 2σ μακριά από το ελάχιστο.

- Οι τιμές των παραμέτρων $(\Omega_{0m}, \Omega_{\Lambda})$ από την προσαρμογή των δεδομένων για το Λ CDM μοντέλο λαμβάνοντας υπόψη την καμπυλότητας παρουσίασαν ενδιαφέρουσες διαφορές ανάμεσα στα σετ Gold και SNLS. Συγκεκριμένα, το SNLS έδειξε μια προτίμηση για επίπεδο σύμπαν περισσότερο από το Gold σετ. Ωστόσο, και τα τρία σετ παραμέτρων συμβατά με ένα επίπεδο Λ CDM σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95.4% ενώ το SCDM αποκλείεται από όλα με περισσότερα από 10σ εμπιστοσύνης.

Οι παραπάνω διαφορές μεταξύ των Gold και SNLS μπορούν να συνοψιστούν αναφέροντας ότι το SNLS παρέχει περισσότερες ενδείξεις υπέρ ενός επιπέδου Λ CDM από ότι το Gold.

Το γεγονός ότι τα πιο πρόσφατα δεδομένα των υπερκαινοφανών αστέρων των σετ HST και SNLS φαίνεται να υποστηρίζουν το Λ CDM, περισσότερο από τα παλιότερα δεδομένα HZSST, φαίνεται να υποδεικνύει ότι ίσως τα παλιότερα δεδομένα έχουν περισσότερα συστηματικά σφάλματα. Όπως είδαμε κατά τη μελέτη της ομοιογένειας του σετ Gold06, είναι δυνατό να απομονωθούν οι υπερκαινοφανείς αυτοί από το σετ HZSST, οι οποίοι είναι περισσότερο υπεύθυνοι για την προτίμηση του HZSST για δυναμικά εξελισσόμενη καταστατική εξίσωση $w(z)$, και βρέθηκε πως είναι τα SN99Q2, SN00ee, SN00ec, SN99S, SN01fo, SN99fv. Είναι λοιπόν αναμενόμενο πως τα συστηματικά σφάλματα τα οποία οδήγησαν στην συμπεριφορά αυτή του HZSST μεγιστοποιούνται για αυτούς τους έξι υπερκαινοφανείς αστέρες. Εναλλακτικά, οι έξι αυτοί υπερκαινοφανείς αστέρες μπορούν να απορριφθούν από το σετ Gold06 σε μια προσπάθεια να βελτιωθεί η ομοιογένεια του σετ και να γίνει πιο συμβατό με τις υπόλοιπες παρατηρήσεις.

Συμπερασματικά, είδαμε ότι παρά την βελτιωμένη ανάλυση και βαθμονόμηση, το Gold06 σετ περιέχει ακόμα στατιστικές ανομοιογένειες, όπως φαίνεται από την ύπαρξη των 6 προαναφερθέντων σημείων. Δεδομένου του ότι τα νεώτερα δεδομένα SNLS και HST είναι ομογενή και στατιστικά συνεπή μεταξύ τους, αν και προέρχονται από τελείως διαφορετικές ερευνητικές ομάδες, είναι πιθανό ότι η πηγή των συστηματικών σφαλμάτων βρίσκεται στα παλιότερα δεδομένα και μάλιστα στο υποσύνολο HZSST.

Στο κεφάλαιο 4 μελετήσαμε μια μεγάλη ομάδα γενικευμένων θεωριών βαρύτητας που περιλαμβάνει γενικεύσεις της Λαγκρανζιανής της Γενικής Σχετικότητας, όπως βαθμωτά πεδία μη ελάχιστα συζευγμένα (*non-minimally coupled*) με το βαρυτικό πεδίο, γνωστές ως scalar-tensor θεωρίες, αλλά και την ενδιαφέρουσα περίπτωση που η Λαγκρανζιανή αυτή είναι γενική συνάρτηση του βαθμωτού Ricci, δηλαδή $f = f(R)$. Επίσης, μελετήσαμε και μια ενδιαφέρουσα εναλλακτική των παραπάνω γενικεύσεων της Γενικής Σχετικότητας, η οποία βασίζεται στην κοσμολογία βρανών (branes) και περιλαμβάνει ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ της βράνης και του υπερχώρου (bulk).

Συγκεκριμένα, στα πλαίσια scalar-tensor θεωριών υποθέσαμε απλές παραμετροποιήσεις για τις συναρτήσεις $H(z)$ και $G(z)$ και χρησιμοποιώντας τα δεδομένα των υπερκαινοφανών αστέρων ελέγξαμε την συμβατότητα τους με τις παρατηρήσεις. Βρέθηκε ότι η $G(z)$ υποδεικνύει μια βραδέως φθίνουσα με το χρόνο σταθερά της παγκόσμιας έλξης ή αντίστοιχα

μια αύξουσα $F(z) = \frac{1}{G(z)}$ σε πρόσφατους χρόνους. Η αντίστοιχη συνάρτηση για την καταστατική εξίσωση, ορισμένη μέσω της εξίσωσης (4.38), βρέθηκε να διασχίζει τη γραμμή $w = -1$ και στις δύο περιπτώσεις όπου θεωρήθηκε σταθερή και χρονικά εξαρτώμενη G . Όμως, στην τελευταία περίπτωση η $w(z)$ βρέθηκε να μεταβάλλεται περισσότερο με την ερυθρά μετατόπιση.

Η ταυτόχρονη γνώση των $F(z)$ και $H(z)$ μας επιτρέπει την μονοσήμαντη ανακατασκευή της scalar-tensor θεωρίας λύνοντας τις γενικευμένες εξισώσεις Friedmann. Η συγκεκριμένη ανακατασκευασμένη από τα δεδομένα θεωρία βρέθηκε ότι πάσχει από το ίδιο πρόβλημα με τις ελάχιστα συζευγμένες θεωρίες, των οποίων ο κινητικός όρος αλλάζει πρόσημο σε πρόσφατες εποχές. Η χρήση πιο πολύπλοκων παραμετροποιήσεων για τις $G(z)$ και $H(z)$ όχι μόνο είχε μικρή επίδραση στα αποτελέσματα, αλλά ούτε έλυσε το προηγούμενο πρόβλημα.

Έτσι, αν οι συναρτήσεις $H(z)$ και $G(z)$ βρεθούν από μελλοντικές παρατηρήσεις υπερκαινοφανών αστέρων να έχουν την προαναφερθείσα μορφή, τότε αυτό θα υποδείκνυε ότι ούτε οι ελάχιστα συζευγμένες θεωρίες, ούτε και οι scalar-tensor πραγματοποιούνται στη φύση. Σε αυτή την περίπτωση τα δεδομένα των υπερκαινοφανών αστέρων μπορεί να είναι συμβατά είτε με επεκτάσεις της Γενικής Σχετικότητας, όπως π.χ. είναι τα μοντέλα των βρανών, ή με συνδυασμούς phantom και quintessence πεδίων, δεσ π.χ. [145] και για άλλες εναλλακτικές [140],[139].

Ως μια άλλη μέθοδος ανάλυσης αυτών των μοντέλων χρησιμοποιήθηκαν οι ανισότητες που προκύπτουν από την απαίτηση για εσωτερική συνέπεια των θεωριών αυτών για τη μελέτη του παραμετρικού χώρου που δίνει ελάχιστα συζευγμένες (*Minimally Coupled Quintessence - MCQ*) και μη ελάχιστα συζευγμένες ή scalar-tensor, γνωστές και ως (*Extended Quintessence - EXQ*), θεωρίες που είναι συνεπείς με τις παρατηρήσεις. Οι ανισότητες αυτές είναι εντελώς γενικές με την έννοια ότι είναι ανεξάρτητες από τα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά του δυναμικού, απαιτώντας μόνο την εσωτερική συνέπεια της θεωρίας. Οι ευρεθείσες απαγορευμένες περιοχές, αυτές δηλαδή που παραβιάζουν τις παραπάνω ανισότητες, έχουν σημαντική επικάλυψη με τον παραμετρικό χώρο που είναι συμβατός με τις παρατηρήσεις σε επίπεδο εμπιστοσύνης 2σ . Αυτή η επικάλυψη, η οποία εξαρτάται από τις χρονικές παραγώγους του G , έχει δώσει αυστηρούς περιορισμούς στη δεύτερη παράγωγο του G (εξίσωση (4.83)) που είναι πιο ενδιαφέροντες σε σχέση με τους αντίστοιχους (4.76) από τις παρατηρήσεις στο ηλιακό σύστημα.

Ένας σημαντικός λόγος που περιορίζει τον παρατηρήσιμο παραμετρικό χώρο που είναι συμβατός με τις *MCQ* και *EXQ* είναι το γεγονός ότι το δυναμικό μπορεί να προκαλέσει επιταχυνόμενη διαστολή, αλλά όχι πέρα από το όριο που αντιστοιχεί στην κοσμολογική σταθερά $w(z) = -1$, η οποία αντιστοιχεί στην περίπτωση που η εξέλιξη του πεδίου είναι παγωμένη. Επιπλέον επιτάχυνση μπορεί να παραχθεί μόνο στα πλαίσια των γενικευμένων θεωριών *EXQ* μέσω της χρονικής εξέλιξης της G . Μία φθίνουσα με το χρόνο $G(t)$ ευνοεί όχι μόνο την επιταχυνόμενη διαστολή αλλά και την επιπλέον επιτάχυνση που αναφέρθηκε προηγουμένως. Βρήκαμε ότι, δεδομένου $\dot{G}_0 \simeq 0$ (αγνοώντας το g_1 αφού $|g_1| < 10^{-4}$ από τις παρατηρήσεις του ηλιακού συστήματος) αν έχουμε $\ddot{G}_0 > 0$ ($g_2 > 0$), τότε ο απαγορευμένος χώρος μειώνεται και έτσι μπορούμε να έχουμε $w_0 < -1$. Αλλά το ότι $\dot{G}_0 \simeq 0$ με $\ddot{G}_0 > 0$ συνεπάγεται ότι είμαστε κοντά σε ένα ελάχιστο του $G(t)$, με το $G(t)$ να είναι μεγαλύτερο

στο παρελθόν, δηλαδή

$$\frac{G(t)}{G_0} \simeq 1 + \frac{1}{2}g_2(H_0(t - t_0))^2 \quad (5.6)$$

Συνεπώς, ένα φθίνων $G(t)$ αντιστοιχεί σε $\ddot{G}_0 > 0$ ($g_2 > 0$) που με τη σειρά του συνεπάγεται μικρότερες απαγορευμένες περιοχές επιτρέποντας έτσι την επιπλέον επιτάχυνση σε συμφωνία με το προηγούμενο επιχείρημα.

Επίσης, παρουσιάσαμε και μια ενδιαφέρουσα εναλλακτική μέθοδο για την ανακατασκευή της σύζευξης $F(\phi)$ και του δυναμικού $U(\phi)$ των scalar-tensor θεωριών. Αυτή στηρίζεται στην ανάλυση με τη χρήση δυναμικών συστημάτων και στην απαίτηση ότι η θεωρία αναπαράγει το Λ CDM εξελισσόμενο από την εποχή της ακτινοβολίας $w_{eff} = \frac{1}{3}$, στην εποχή της ύλης $w_{eff} = 0$ και τέλος στην εποχή deSitter $w_{eff} = -1$. Βρέθηκε ότι εκτός από τη συνήθη γενική σχετικιστική λύση, η οποία έχει σταθερή σύζευξη $F(\phi) = F_0$ και δυναμικό $U(\phi) = U_0$ (που αντιστοιχούν στις σταθερές της παγκόσμιας έλξης και την κοσμολογική σταθερά), υπάρχει άλλη μια συμβατή λύση η οποία αναπαράγει την ίδια κοσμολογική εξέλιξη. Σύμφωνα με αυτή τη λύση

$$F(\phi) = \xi(\phi - C)^2 \quad (5.7)$$

$$U(\phi) \sim F(\phi)^m \quad (5.8)$$

όπου οι m, C είναι αυθαίρετες σταθερές (το m ωστόσο είναι αρνητικό).

Θα πρέπει να αναφερθεί ότι, όχι μόνο οι ελκυστές, αλλά και τα κρίσιμα σημεία που υπολογίσαμε έχουν ενδιαφέρον, επειδή για μια πιο ρεαλιστική ανάλυση σταθερότητας θα επιλεγόταν η σύζευξη $F(N)$ και θα επιτρέπονταν στην $H(N)$ να μεταβάλλεται, εισάγοντας έτσι και καταστρέφοντας τρόπους αστάθειας. Επομένως, το φυσικά ενδιαφέρον μέρος της ανάλυσης μας είναι οι τιμές των κρίσιμων σημείων και όχι η σταθερότητα τους, η οποία θα μπορούσε να αλλάξει αν επιτρέπονταν στην $H(N)$ να μεταβάλλεται. Όσον αφορά τον αριθμό των παραμέτρων της μεταβλητής m , θα πρέπει να τονίσουμε ότι, αν είχαμε χρησιμοποιήσει την παράμετρο $n \sim F_{,\phi}/F$ στην ανάλυση μας (επιλέγοντας έτσι τη σύζευξη $F(\phi)$ και επιτρέποντας στην $H(N)$ να μεταβάλλεται), το αυτόνομο σύστημα θα ήταν διαφορετικό και αναλόγως με τις τιμές του n , η σταθερότητα και η μορφή του $H(N)$ θα άλλαζε αναλόγως. Μια ενδιαφέρουσα εναλλακτική θα ήταν να επιλέξουμε τις F και U , όπως στις εξισώσεις (5.7) και (5.8), και να επιτρέψουμε στην $H(N)$ να μεταβάλλεται κοντά στο Λ CDM, όπως στην αναφορά [189]. Ενδεχομένως, αυτή η μέθοδος θα παρείχε μια ενδελεχή ανάλυση της σταθερότητας του Λ CDM, αφού θα περιείχε και τις κατάλληλες διαταραχές του $H(N)$.

Ένα άλλο πολύ ενδιαφέρον σημείο είναι ότι στα πλαίσια αυτών των θεωριών πραγματοποιείται πολύ εύκολα phantom συμπεριφορά και αυτό είναι ένα ελκυστικό σημείο των θεωριών αυτών. Μάλιστα, θα μπορούσαμε να είχαμε επιλέξει διαφορετικές μορφές για την $H(N)$ οι οποίες δίνουν phantom συμπεριφορά σε πρόσφατους χρόνους παίρνοντας έτσι διαφορετικές μορφές για την $F(N)$ σε πρόσφατους χρόνους και διαφορετικά κρίσιμα σημεία. Αυτό το είδος της ανακατασκευής έγινε και στις αναφορές [152] και [215]. Ξεκάθαρα, η συμπεριφορά σε πρώιμους χρόνους της ανακατασκευασμένης από τα δεδομένα $F(N)$ δεν θα άλλαζε ακόμα και στην phantom περίπτωση.

Ένας εντελώς ανεξάρτητος τρόπος που θα μπορούσε να οδηγήσει και στη λύση που βρέθηκε εδώ, εξισώσεις (5.7) και (5.8), είναι η επιβολή μια συμμετρίας Noether στη Λαγκρανζιανή της scalar-tensor θεωρίας. Δείξαμε ότι επιβάλλοντας μια τέτοια συμμετρία οδηγεί μονοσήμαντα στην ίδια μορφή των (5.7) και (5.8). Επίσης, οδηγεί και σε ένα διατηρούμενο φορτίο Σ_0 το οποίο επιτρέπει την εύρεση της ακριβούς λύσης των εξισώσεων κίνησης για την παράγοντα κλίμακας $\alpha(t)$ και το βαθμωτό πεδίο $\phi(t)$. Αυτή η ενδιαφέρουσα σύμπτωση των δύο μεθόδων υποδεικνύει ότι υπάρχει μη τετριμμένο φυσικό περιεχόμενο σε αυτή την ομάδα scalar-tensor θεωριών.

Η άλλη μεγάλη ομάδα γενικευμένων θεωριών της βαρύτητας που μελετήθηκε είναι οι $f(R)$ θεωρίες. Δείξαμε αριθμητικά αλλά και αναλυτικά με την μέθοδο των αυτόνομων συστημάτων ότι μη γραμμικές $f(R)$ μπορούν να αναπαράγουν την $H(z)$ της εξέλιξης του υποβάθρου που υποδεικνύεται από τις παρατηρήσεις ακόμα και αν η $f(R)$ δεν τείνει στη Γενική Σχετικότητα σε πρώιμους χρόνους. Σε αυτή την περίπτωση το σύμπαν κυριαρχείται από σκοτεινή βαρύτητα αντί για ακτινοβολία ή ύλη. Το αποτέλεσμα αυτό βασίζεται στις τιμές των κρίσιμων σημείων που βρέθηκαν υποθέτοντας μόνο ότι η εποχή της ακτινοβολίας αντιστοιχεί σε σταθερή καταστατική εξίσωση $w_{eff} = \frac{1}{3}$ ενώ η εποχή της ύλης σε $w_{eff} = 0$.

Η ανάλυση αυτή υποδεικνύει ότι τα $f(R)$ μοντέλα μπορούν να είναι βιώσιμα (συμβατά με τις παρατηρήσεις) ακόμα και αν αποκλίνουν από τη Γενική Σχετικότητα σε πρώιμες εποχές. Συνεπώς μια βιώσιμη $f(R)$ θεωρία πρέπει να ικανοποιεί ένα από τα παρακάτω:

- Είτε η $f(R)$ να τείνει στη Γενική Σχετικότητα σε πρώιμες εποχές, αλλά να αποκλίνει από αυτή σε πρόσφατους χρόνους
- Η σκοτεινή βαρύτητα ($f(R)$) να μιμείται την εξέλιξη της ακτινοβολίας ή της ύλης όχι μόνο στο επίπεδο του υποβάθρου αλλά και των διαταραχών. Το τελευταίο προφανώς απαιτεί την ξεχωριστή μελέτη των διαταραχών της θεωρίας κάτι το οποίο είναι πέρα από τα όρια αυτή της μελέτης.

Τέλος, έγινε μελέτη και ενός μοντέλου που βασίζεται στην κοσμολογία βρανών και το οποίο περιλαμβάνει ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ της βράνης και του υπερχώρου, με τη χρήση του σετ δεδομένων των υπερκαινοφανών αστέρων Gold06 [68]. Σκοπός της μελέτης ήταν να γίνει μια εκτίμηση των προτιμητέων παραμέτρων του μοντέλου. Το πλεονέκτημα του μοντέλου αυτού είναι ότι έχει ξεκάθαρη φυσική προέλευση και, παρόλο που ο αριθμός των παραμέτρων είναι σχετικά μεγάλος και δημιουργούνται έτσι μεγάλα σφάλματα, ο συνδυασμός διαφορετικών μεθόδων έδωσε ενδιαφέροντα όρια στις παραμέτρους.

Λόγω του μεγάλου μεγάλου εκφυλισμού του μοντέλου που χρησιμοποιήθηκε, η πρώτη μέθοδος ελαχιστοποίησης έδωσε τις παραμέτρους από την προσαρμογή των δεδομένων με μεγάλα σφάλματα (δες τον Πίνακα 4.6) δεν επιτρέπει τη διεξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων. Αντίθετα, η μέθοδος της περιθωριοποίησης (marginalization) παρέχει ενδείξεις για την ύπαρξη ενός ιδανικού ρευστού στον υπερχώρο, το οποίο κινείται με ταχύτητα v κατά την πέμπτη διάσταση, ενώ η ανταλλαγή της ενέργειας μεταξύ της βράνης και του υπερχώρου αντιστοιχεί σε αρνητική πίεση που σημαίνει ότι ρέει ενέργεια από τον υπερχώρο προς τη βράνη. Παρά το γεγονός ότι βρέθηκαν οι αναμενόμενες τιμές των παραμέτρων, η ενεργός

καταστατική εξίσωση w_{eff} διασχίζει τη γραμμή $w = -1$. Επίσης, το μοντέλο αυτό αναπαράγει την επιταχυνόμενη διαστολή σε πρόσφατους χρόνους, με την μετάβαση από την επιταχυνόμενη φάση στην επιβραδυνόμενη σε $z \approx 0.5$, το οποίο είναι συνεπές με προηγούμενες μελέτες [51],[68]. Αυτό αποδεικνύει όχι μόνο την ικανότητα αυτής της ομάδας μοντέλων βρανών να διασχίσουν τη γραμμή $w = -1$, αλλά και ότι τα κοσμολογικά δεδομένα παρέχουν τις αναμενόμενες τιμές για τις παραμέτρους του μοντέλου.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Σε αυτό το παράρτημα θα παραθέσουμε ενδεικτικά ένα μέρος από τον κώδικα για την ανάλυση των δεδομένων των υπερκαινοφανών τύπου Ia. Ο κώδικας είναι γραμμένος σε *Mathematica 5.2*.

**Set the directory to where the data are ,
switch off the warning messages and load the add - ons**

```
SetDirectory["D:\comp_gold\fig1"];
TextStyle = {FontFamily -> "Times", FontSize -> 14};
Off[General::spell, General::spell1, NIntegrate::"inum", ContourGraphics::"ctprt",
  NIntegrate::"ncvb", NIntegrate::"slwoon"];
<< Graphics`Graphics` ; << Graphics`ImplicitPlot` ;
<< Graphics`FilledPlot` ;
```

Select the value of the parameter Ω_m

```
om0 = 0.28;
```

Read in the supernovae data

```
datanw = ReadList["R06goldnames.txt", {Number, Number, Number, Word, Word}];
ndat = Length[datanw];
zz = datanw[[#1, 1]] &;
ld = datanw[[#1, 2]] &;
sld = datanw[[#1, 3]] &;
```

Define the cosmological model and $w(z)$

```
H[a_, om_, w0_, w1_] := Sqrt[om * a^-3 + (1 - om) * a^(-3 (1 + w0 + w1)) Exp[3 w1 (a - 1)]];
ww[z_, om_, w0_, w1_] := (2 (1 + z) D[Log[H[1/(1 + z), om_, w0_, w1]], z] / (3 - 1)) /
  (1 - (1 / H[1/(1 + z), om_, w0_, w1])^2 om (1 + z)^3);
dw[z_, om_, w0_, w1_, k_] := D[ww[z, om_, w0_, w1], par[[k]];
sw[z_, om_, w0_, w1_, Ci_j_] :=
  Sqrt[(Sum[dw[z, om_, w0_, w1, i]^2 Ci_j[[i, i]], {i, 1, Length[par]}] +
    2 Sum[dw[z, om_, w0_, w1, i] dw[z, om_, w0_, w1, j] Ci_j[[i, j]], {i, 1, Length[par]}, {j, i + 1, Length[par]}]);
f[x_, om_, w0_, w1_] := 1 / H[1/(1 + x), om_, w0_, w1];
rr[xx_, om_, w0_, w1_] := NIntegrate[f[x, om_, w0_, w1], {x, 0, xx}];
```

Construct the χ^2

```

chi2fa[w0_, w1_] := Sum[(ld[i] - 5 Log[10, rr[zz[i], cm0, w0, w1] * (1 + zz[i])])^2 /
  (sld[i]^2 + (5*4/30.001 (1/(1+zz[i]) + f[zz[i], cm0, w0, w1]/rr[zz[i], cm0, w0, w1]))^2), {i, 1, ndat}];
chi2fb[w0_, w1_] := Sum[(ld[i] - 5 Log[10, rr[zz[i], cm0, w0, w1] * (1 + zz[i])]) /
  (sld[i]^2 + (5*4/30.001 (1/(1+zz[i]) + f[zz[i], cm0, w0, w1]/rr[zz[i], cm0, w0, w1]))^2), {i, 1, ndat}];
chi2fc[w0_, w1_] := Sum[1 / (sld[i]^2 + (5*4/30.001 (1/(1+zz[i]) + f[zz[i], cm0, w0, w1]/rr[zz[i], cm0, w0, w1]))^2), {i, 1, ndat}];
chi2total[w0_, w1_] := chi2fa[w0, w1] - chi2fb[w0, w1]^2 / chi2fc[w0, w1];
M[w0_, w1_] := chi2fb[w0, w1] / chi2fc[w0, w1]

```

Minimize χ^2

```

chmin = FindMinimum[chi2total[w0, w1], {w0, -1.9, -1.91}, {w1, 2, 2.1}, MaxIterations -> 100]
{151.254, {w0 -> -1.39721, w1 -> 2.81276}}

```

Error Calculation (see Numerical Recipes)

```

w0o = chmin[[2, 1, 2]]; w1o = chmin[[2, 2, 2]];
par = {w0, w1};
akl[w0_, w1_, k_, l_] := 1/2 D[D[chi2total[w0, w1], par[[k]]], par[[l]]];
aklo = Table[If[k <= 1, akl[w0, w1, k, l] /. w0 -> w0o /. w1 -> w1o, akl[w0, w1, l, k]
  /. w0 -> w0o /. w1 -> w1o], {k, 1, Length[par]}, {l, 1, Length[par]}]; cij = Inverse[aklo];
spar = Table[Sqrt[cij[[i, i]]], {i, 1, Length[par]}]; Print["{1s_w0, 1s_w1} = ", spar];
Print["Cij = ", cij];

```

```
{1s_w0, 1s_w1} = {0.306495, 1.45426}
```

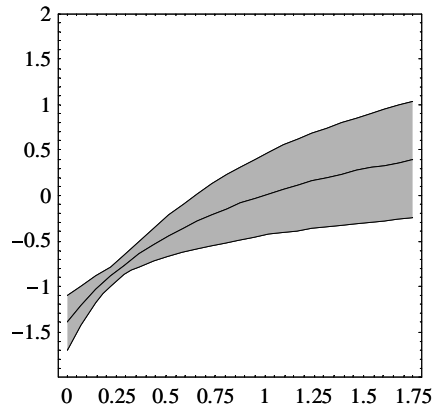
```
Cij = {{0.0939389, -0.4217}, {-0.4217, 2.11486}}
```

w(z) error plot

```

ws1 = ww[z, cm0, w0, w1] /. chmin[[2]];
ws2 = (ww[z, cm0, w0, w1] + sw[z, cm0, w0, w1, cij]) /. chmin[[2]];
ws3 = (ww[z, cm0, w0, w1] - sw[z, cm0, w0, w1, cij]) /. chmin[[2]];
plws = FilledPlot[{ws2, ws1, ws3}, {z, 0, 1.75}, Fills -> {{1, 2}, GrayLevel[0.7]},
  {{2, 3}, GrayLevel[0.7]}, Frame -> True, PlotRange -> {-2, 2},
  PlotStyle -> {{}, {Thickness[0.004]}, {}}, Axes -> False, AspectRatio -> 1, DisplayFunction -> Identity];
flnmwz = "wz_error_cm" <> ToString[100 cm0 // IntegerPart];
sh = Show[plws, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
Export[flnmwz <> ".m", sh];

```



Create the Contour plot

```
p1s1 = FindRoot[{chi2total[w0, w1] - chmin[[1]] - 2.3 == 0, D[chi2total[w0, w1], w1] == 0}, {{w0, -.2}, {w1, -4}}
p1s2 = FindRoot[{chi2total[w0, w1] - chmin[[1]] - 2.3 == 0, D[chi2total[w0, w1], w1] == 0}, {{w0, -1.7}, {w1, 5.}}
p2s1 = FindRoot[{chi2total[w0, w1] - chmin[[1]] - 6.17 == 0, D[chi2total[w0, w1], w1] == 0}, {{w0, -.2}, {w1, -4}}
p2s2 = FindRoot[{chi2total[w0, w1] - chmin[[1]] - 6.17 == 0, D[chi2total[w0, w1], w1] == 0}, {{w0, -1.7}, {w1, 5}}
```

```
{w0 → -0.940416, w1 → 0.698428}
```

```
{w0 → -1.87437, w1 → 4.90055}
```

```
{w0 → -0.654249, w1 → -0.704139}
```

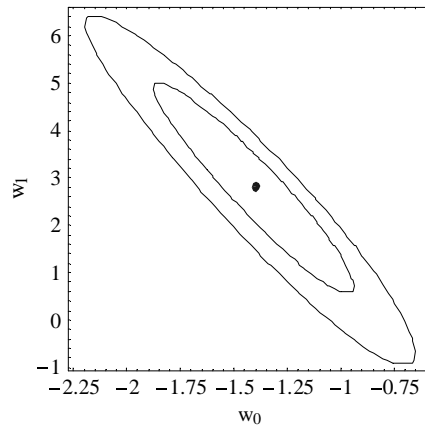
```
{w0 → -2.19596, w1 → 6.25811}
```

```
w01s = {p1s1[[1, 2]], p1s2[[1, 2]]};
w11s = {p1s1[[2, 2]], p1s2[[2, 2]]};
w02s = {p2s1[[1, 2]], p2s2[[1, 2]]};
w12s = {p2s1[[2, 2]], p2s2[[2, 2]]}; test[mm_] := 1 / ; mm == Max;
test[mm_] := -1 / ; mm == Min;
enh[bf_, set_, mm_, amount_] := bf + test[mm] Abs[amount ((set // mm) - bf)];
implswlimitsw0 = {w0, enh[w0o, w01s, Min, 1.1], enh[w0o, w01s, Max, 1.1]};
implswlimitsw1 = {w1, enh[w1o, w11s, Min, 1.1], enh[w1o, w11s, Max, 1.1]};
imp2swlimitsw0 = {w0, enh[w0o, w02s, Min, 1.1], enh[w0o, w02s, Max, 1.1]};
imp2swlimitsw1 = {w1, enh[w1o, w12s, Min, 1.1], enh[w1o, w12s, Max, 1.1]};

implsw = ImplicitPlot[chi2total[w0, w1] == chmin[[1]] + 2.30, implswlimitsw0, implswlimitsw1,
  AspectRatio → 1, PlotPoints → 39, DisplayFunction → Identity] // Timing
imp2sw = ImplicitPlot[chi2total[w0, w1] == chmin[[1]] + 6.17, imp2swlimitsw0, imp2swlimitsw1,
  AspectRatio → 1, PlotPoints → 39, DisplayFunction → Identity] // Timing
impw = Show[implsw[[2]], imp2sw[[2]], Graphics[{{RGBColor[0, 0, 1], Disk[{w0o, w1o}, {.02, 0.1}]}],
  PlotRange → {Delete[imp2swlimitsw0, 1], Delete[imp2swlimitsw1, 1]}, AspectRatio → 1, Frame → True,
  FrameLabel → {"w0", "w1"}, Axes → False, DisplayFunction → $DisplayFunction];
flnmwowl = "w0_w1_gold_182_contour_cm0_0" <> ToString[100 cm0 // IntegerPart];
Export[flnmwowl <> ".m", impw]
```

```
{713.375 Second, - ContourGraphics -}
```

```
{713.422 Second, - ContourGraphics -}
```

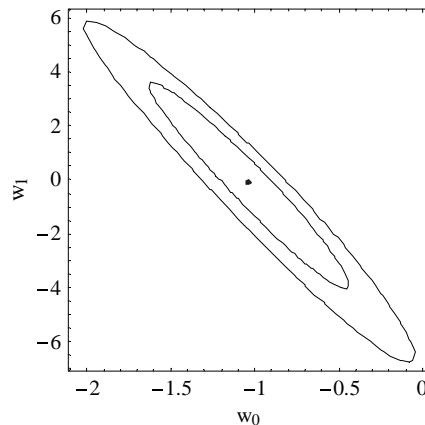


w0_w1_gold_182_contour_cm0_028.m

Check which .m files are in the current direcory and import the proper ones

```
FileNames["*.m"]
snls115 = Import["w0_w1_contour_snls_115_cm0_028.m"];
gold157 = Import["w0_w1_contour_gold_157_cm0_028.m"];
gold182 = Import["w0_w1_gold_182_contour_cm0_028.m"];
Show[snls115];
```

{w0_w1_contour_gold_157_cm0_028.m, w0_w1_contour_snls_115_cm0_028.m, w0_w1_gold_182_contour_cm0_028.m}



The following functions fill the contour with color

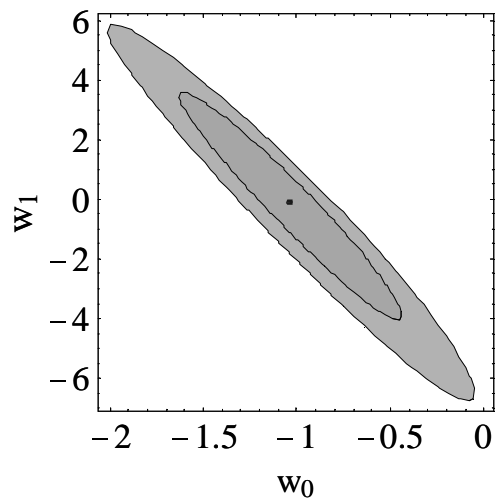
```
MyFilledContourPlot[inpplot_, inout_, col_[colind], opts___] :=
Module[{data, ldat, mx, mn, mxp, mnp, dup, ddn}, data = inpplot[[1, inout, 1, 3, 1]]; ldat = Length[data];
mx = Max[(data[[#, 1]] &) /@ Range[ldat]]; mn = Min[(data[[#, 1]] &) /@ Range[ldat]];
mxp = Position[data, mx][[1, 1]];
mnp = Position[data, mn][[1, 1]]; dup = Table[data[[mnp + 1 - i]], {i, 1, mnp}];
ddn = Table[data[[Mod[mnp - 1 + i, ldat, 1]]], {i, 1, mnp}];
FilledListPlot[dup, ddn, Fills -> {col[colind]}, Curves -> Front, Frame -> True, Axes -> False, opts];
```

```

MyContourPlot[implot_, col_[colind_], coll_[colind1_], opts___] :=
Module[{p11, p12}, p11 = MyFilledContourPlot[implot, 1, col[colind], DisplayFunction -> Identity];
p12 = MyFilledContourPlot[implot, 2, coll[colind1], DisplayFunction -> Identity];
Show[p12, p11, Graphics[implot[[1, 3]]], opts]];

MyContourPlot[snls115, Hue[0.1], Hue[0.5], DisplayFunction -> $DisplayFunction,
AspectRatio -> 1, FrameLabel -> {"w0", "w1"}];

```



Export the graphics to EPS

```
Export["fig1.eps", sh, "EPS", ImageSize -> 1000]
```

fig1.eps

Βιβλιογραφία

- [1] S.L. Jaki, *Olbers', Halley's, or whose Paradox?*, Am.J.Phys. 35, 200-210 (1967).
- [2] P. S. Wesson, *Astrophys. J.* **367**, 399 (1991).
- [3] A. Einstein, "Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogene Folgerungen," *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik* 4 (1907).
- [4] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *San Francisco 1973*, 1279p
- [5] A. Einstein, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* **1915**, 778 (1915) [Addendum-ibid. **1915**, 799 (1915)].
- [6] S. Weinberg, "Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity", John Wiley & Sons, (1972)
- [7] S. G. Turyshev, arXiv:0804.1127 [gr-qc].
- [8] A. E. Eddington, (1919). "The Total Eclipse of 1919 May 29 and the Influence of Gravitation on Light." *The Observatory* **42**, 119-122.
- [9] E. Hubble, *Proc Natl Acad Sci U S A.* 1929 Mar 15;15(3):168-73.
- [10] A. Friedmann, Alexander (1922), "Über die Krümmung des Raumes", *Zeitschrift für Physik A* **10**: 377 - 386
- [11] <http://www.astronomybuff.com/how-do-we-know-the-universe-is-flat/>
- [12] A. Friedmann (1924), "Über die Krümmung des Raumes", *Zeitschrift für Physik A* **21**: 326
- [13] G. Lemaitre, *Gen. Rel. Grav.* **29**, 641 (1997) [*Annales Soc. Sci. Brux. Ser. I Sci. Math. Astron. Phys. A* **53**, 51 (1933)].
- [14] A. Einstein, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* **1917**, 142 (1917).
- [15] W. L. Freedman *et al.* [HST Collaboration], *Astrophys. J.* **553**, 47 (2001) [arXiv:astro-ph/0012376].

- [16] <http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/cobe/>
- [17] Mitton, Simon, Fred Hoyle a life in science”, Aurum Press, 2005
- [18] A. A. Penzias and R. W. Wilson, *Astrophys. J.* **142**, 419 (1965).
- [19] R. A. Alpher, H. Bethe and G. Gamow, *Phys. Rev.* **73**, 803 (1948).
- [20] G. Gamow, *Phys. Rev.* **74**, 505 (1948).
- [21] C. P. Ma and E. Bertschinger, *Astrophys. J.* **455**, 7 (1995) [arXiv:astro-ph/9506072].
- [22] S. Dodelson, “Modern Cosmology,” *Amsterdam, Netherlands: Academic Pr. (2003) 440 p*
- [23] B. Ryden, *San Francisco, USA: Addison-Wesley (2003) 244 p*
- [24] J. Peacock, “Cosmological Physics”, Cambridge University Press, 1998
- [25] A. R. Liddle, “An Introduction to Modern Cosmology,” John Wiley & Sons, (2003)
- [26] T. W. B. Kibble, *J. Phys. A* **9**, 1387 (1976).
- [27] F. Zwicky, *Astrophys. J.* **86**, 217 (1937).
- [28] W. J. G. de Blok and A. Bosma, *Astron. Astrophys.* **385**, 816 (2002) [arXiv:astro-ph/0201276].
- [29] D. N. Spergel *et al.* [WMAP Collaboration], *Astrophys. J. Suppl.* **170**, 377 (2007) [arXiv:astro-ph/0603449].
- [30] A. Refregier, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **41**, 645 (2003) [arXiv:astro-ph/0307212].
- [31] Riess A *et al.*, 1998 *Astron. J.* **116** 1009; Perlmutter S J *et al.*, 1999 *Astroph. J.* **517** 565; *Bull.Am.Astron.Soc***29**,1351(1997); Tonry, J L *et al.*, 2003 *Astroph. J.* **594** 1; Barris, B *et al.*, 2004 *Astroph. J.* **602** 571; Knop R *et al.*, 2003 *Astroph. J.* **598** 102;
- [32] A. H. Guth and E. J. Weinberg, *Phys. Rev. D* **23**, 876 (1981).
- [33] D. Kazanas, *Astrophys. J.* **241**, L59 (1980).
- [34] K. A. Olive, arXiv:astro-ph/0301505.
- [35] R. D. Peccei and H. R. Quinn, *Phys. Rev. Lett.* **38**, 1440 (1977).
- [36] M. Milgrom, arXiv:0801.3133 [astro-ph].
- [37] D. Huterer and M. S. Turner, *Phys. Rev. D* **60**, 081301 (1999) [arXiv:astro-ph/9808133].

- [38] R. R. Caldwell, Phys. Lett. B **545**, 23 (2002) [arXiv:astro-ph/9908168].
- [39] C. Armendariz-Picon, V. F. Mukhanov and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. D **63**, 103510 (2001) [arXiv:astro-ph/0006373].
- [40] S. Nojiri and S. D. Odintsov, Gen. Rel. Grav. **36**, 1765 (2004); M. E. Soussa and R. P. Woodard, Gen. Rel. Grav. **36**, 855 (2004); G. Allemandi, A. Borowiec and M. Francaviglia, Phys. Rev. D **70**, 103503 (2004); D. A. Easson, Int. J. Mod. Phys. A **19**, 5343 (2004); S. M. Carroll, A. De Felice, V. Duvvuri, D. A. Easson, M. Trodden and M. S. Turner, Phys. Rev. D **71**, 063513 (2005); S. Carloni, P. K. S. Dunsby, S. Capozziello and A. Troisi, Class. Quant. Grav. **22**, 4839 (2005);
- [41] S. Capozziello and R. de Ritis, Phys. Lett. **A 177**, 1 (1993); S. Capozziello and R. de Ritis, Class. Quantum. Grav. **11**, 107 (1994).
- [42] B. Boisseau, G. Esposito-Farese, D. Polarski and A. A. Starobinsky, Phys. Rev. Lett. **85**, 2236 (2000) [arXiv:gr-qc/0001066].
- [43] G. Esposito-Farese and D. Polarski, Phys. Rev. **D 63**, 063504 (2001) [arXiv:gr-qc/0009034].
- [44] B. Li, J. D. Barrow and D. F. Mota, Phys. Rev. D **76**, 044027 (2007) [arXiv:0705.3795 [gr-qc]].
- [45] T. Kaluza, “*On the problem of unity in physics*”, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. (Math. Phys.) 966-972 (1921).
- [46] O. Klein, “*Quantum theory and five dimensional theory of relativity*”, Z. Phys. 37 895-906 (1926).
- [47] I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, Phys. Lett. B **436**, 257 (1998) [arXiv:hep-ph/9804398].
- [48] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, Phys. Lett. B **429**, 263 (1998) [arXiv:hep-ph/9803315].
- [49] E. Bertschinger, Astrophys. J. **648**, 797 (2006) [arXiv:astro-ph/0604485].
- [50] A. G. Riess *et al.* [Supernova Search Team Collaboration], Astrophys. J. **607**, 665 (2004) [arXiv:astro-ph/0402512].
- [51] P. Astier *et al.*, Astron. Astrophys. **447**, 31 (2006) [arXiv:astro-ph/0510447].
- [52] Y. Wang and P. Mukherjee, Astrophys. J. **650**, 1 (2006) [arXiv:astro-ph/0604051].
- [53] D. J. Eisenstein *et al.* [SDSS Collaboration], Astrophys. J. **633**, 560 (2005) [arXiv:astro-ph/0501171].

- [54] S. W. Allen, R. W. Schmidt and A. C. Fabian, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **334**, L11 (2002) [arXiv:astro-ph/0205007].
- [55] S. W. Allen, R. W. Schmidt, H. Ebeling, A. C. Fabian and L. van Speybroeck, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **353**, 457 (2004) [arXiv:astro-ph/0405340].
- [56] S. Sasaki, *PASJ*, **48**, L119 (1996).
- [57] P. A. Mazzali, F. K. Ropke, S. Benetti and W. Hillebrandt, *Science* **315**, 825 (2007) [arXiv:astro-ph/0702351].
- [58] E. H. Lieb and H. T. Yau, *Commun. Math. Phys.* **112**, 147 (1987).
- [59] F. K. Ropke and W. Hillebrandt, *Astron. Astrophys.* **420**, L1 (2004) [arXiv:astro-ph/0403509].
- [60] W. Hillebrandt and J. C. Niemeyer, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **38**, 191 (2000) [arXiv:astro-ph/0006305].
- [61] L. Perivolaropoulos, arXiv:astro-ph/0601014.
- [62] G. Goldhaber *et al.* [The Supernova Cosmology Project Collaboration], arXiv:astro-ph/0104382.
- [63] S. Perlmutter *et al.*, *Astrophys.J.* **483** 565 (1997).
- [64] A. Kim, A. Goobar and S. Perlmutter, *Publ. Astron. Soc. Pac.* **108**, 190 (1996) [arXiv:astro-ph/9505024].
- [65] D. W. Hogg, I. K. Baldry, M. R. Blanton and D. J. Eisenstein, arXiv:astro-ph/0210394.
- [66] Edward W. Kolb, Michael S. Turner: *The Early Universe*, (Frontiers in Physics 1990).
- [67] W. H. Press *et. al.*, ‘Numerical Recipes’, Cambridge University Press (1994).
- [68] A. G. Riess *et al.*, 2007 *AJ*, 659, 98; arXiv:astro-ph/0611572.
- [69] S. Nesseris and L. Perivolaropoulos, *Phys. Rev. D* **70**, 043531 (2004) [arXiv:astro-ph/0401556].
- [70] S. Nesseris and L. Perivolaropoulos, *Phys. Rev. D* **72**, 123519 (2005) [arXiv:astro-ph/0511040].
- [71] S. Nesseris and L. Perivolaropoulos, *Phys. Rev. D* **73**, 103511 (2006) [arXiv:astro-ph/0602053].

- [72] T. R. Choudhury and T. Padmanabhan, *Astron. Astrophys.* **429**, 807 (2005) [arXiv:astro-ph/0311622].
- [73] L. Perivolaropoulos, *Phys. Rev. D* **71**, 063503 (2005) [arXiv:astro-ph/0412308].
- [74] E. Di Pietro and J. F. Claeskens, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **341**, 1299 (2003) [arXiv:astro-ph/0207332].
- [75] A. Lewis, A. Challinor and A. Lasenby, *Astrophys. J.* **538**, 473 (2000) [arXiv:astro-ph/9911177].
- [76] M. J. Rees and D. W. Sciama, *Nature* **217** 511 (1968); R. G. Crittenden and N. Turok, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 575 (1996); L. Pogosian, P. S. Corasaniti, C. Stephan-Otto, R. Crittenden and R. Nichol, *Phys. Rev. D* **72**, 103519 (2005) [arXiv:astro-ph/0506396].
- [77] <http://background.uchicago.edu>
- [78] J. R. Bond, G. Efstathiou and M. Tegmark, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **291**, L33 (1997) [arXiv:astro-ph/9702100].
- [79] G. Efstathiou and J. R. Bond, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **304**, 75 (1999) [arXiv:astro-ph/9807103].
- [80] R. Trotta, arXiv:astro-ph/0410115.
- [81] A. Melchiorri and L. M. Griffiths, *New Astron. Rev.* **45**, 321 (2001) [arXiv:astro-ph/0011147].
- [82] W. Hu, M. Fukugita, M. Zaldarriaga and M. Tegmark, *Astrophys. J.* **549**, 669 (2001) [arXiv:astro-ph/0006436]; W. J. Percival *et al.* [The 2dFGRS Team Collaboration], *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **337**, 1068 (2002) [arXiv:astro-ph/0206256].
- [83] C. Blake and K. Glazebrook, *Astrophys. J.* **594**, 665 (2003) [arXiv:astro-ph/0301632].
- [84] C. Alcock and B. Paczynski, *Nature* **281** (1979) 358:359.
- [85] M. Arnaud, arXiv:astro-ph/0508159.
- [86] U. L. Pen, *Astrophys. J.* **498**, 60 (1998) [arXiv:astro-ph/9610147].
- [87] E. Hawkins *et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **346**, 78 (2003) [arXiv:astro-ph/0212375].
- [88] P. Fischer *et al.* [SDSS Collaboration], *Astron. J.* **120**, 1198 (2000) [arXiv:astro-ph/9912119].
- [89] S. Borgani and L. Guzzo, *Nature*, **409**, 39 (2001).

- [90] M. Tegmark *et al.* [SDSS Collaboration], Phys. Rev. D **69**, 103501 (2004) [arXiv:astro-ph/0310723].
- [91] M. Tegmark *et al.* [SDSS Collaboration], Astrophys. J. **606**, 702 (2004) [arXiv:astro-ph/0310725].
- [92] J. P. Uzan, Gen. Rel. Grav. **39**, 307 (2007) [arXiv:astro-ph/0605313].
- [93] L. M. Wang and P. J. Steinhardt, Astrophys. J. **508**, 483 (1998) [arXiv:astro-ph/9804015].
- [94] E. V. Linder and R. N. Cahn, arXiv:astro-ph/0701317;
- [95] A. J. S. Hamilton, arXiv:astro-ph/9708102; S. Dodelson, ‘Modern Cosmology’ pp. 270-281, Acad. Press (2003).
- [96] Y. Wang, arXiv:0710.3885 [astro-ph].
- [97] M. Tegmark *et al.*, Phys. Rev. D **74**, 123507 (2006) [arXiv:astro-ph/0608632].
- [98] N. P. Ross *et al.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **381**, 573 (2007) arXiv:astro-ph/0612400.
- [99] J. da Angela *et al.*, arXiv:astro-ph/0612401.
- [100] P. McDonald *et al.* [SDSS Collaboration], Astrophys. J. **635**, 761 (2005) [arXiv:astro-ph/0407377].
- [101] C. Di Porto and L. Amendola, arXiv:0707.2686 [astro-ph].
- [102] L. Verde *et al.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **335**, 432 (2002) [arXiv:astro-ph/0112161].
- [103] M. Viel, M. G. Haehnelt and V. Springel, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **354**, 684 (2004) [arXiv:astro-ph/0404600].
- [104] M. Viel and M. G. Haehnelt, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **365**, 231 (2006) [arXiv:astro-ph/0508177].
- [105] C. Marinoni *et al.*, A & A **442**, 801–825 (2005).
- [106] T. Chiba and T. Nakamura, Prog. Theor. Phys. **118**, 815 (2007) [arXiv:0708.3877 [astro-ph]]. Phys. Rev. D **75**, 101301 (2007) [arXiv:astro-ph/0703347].
- [107] S. Nesseris and L. Perivolaropoulos, Phys. Rev. D **77**, 023504 (2008) [arXiv:0710.1092 [astro-ph]].
- [108] A. A. Starobinsky, JETP Lett. **68**, 757 (1998) [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **68**, 721 (1998)] [arXiv:astro-ph/9810431].

- [109] A. Refregier *et al.*, arXiv:astro-ph/0610062.
- [110] B.Ratra and P.J.E.Peebles, Phys.Rev. D**37**,3406(1988); astro-ph/0207347; C.Wetterich, Nucl. Phys. B**302**,668(1988); P.G.Ferreira and M.Joyce, Phys. Rev. D.**58**,023503(1998); P.Brax and J.Martin, Phys. Rev. D.**61**,103502(2000); L.A.Urena-Lopez and T.Matos, Phys. Rev. D.**62**,081302(2000); T.Barreiro, E.J.Copeland and N.J.Nunes, Phys. Rev. D.**61**,127301(2000); D.Wands, E.J.Copeland and A.R.Liddle, Phys. Rev. D.**57**,4686 (1998); A.R. Liddle and R.J. Scherrer, Phys. Rev. D **59**, 023509 (1998); R.R. Caldwell, R. Dave and P. Steinhardt, Phys. Rev. Lett **80**, 1582 (1998); I. Zlatev, L. Wang and P. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **82**, 896 (1999); S. Dodelson, M. Kaplinghat and E. Stewart, Phys. Rev. Lett. **85**, 5276(2000); V.B.Johri, Phys. Rev. D.**63**,103504(2001); V.B.Johri, Class. Quant. Grav.**19**,5959 (2002); V.Sahni and L.Wang, Phys. Rev. D.**62**,103517(2000); M. Axenides and K. Dimopoulos, JCAP **0407**, 010 (2004)[arXiv:hep-ph/0401238].
- [111] R. R. Caldwell, Phys. Lett. B **545**, 23 (2002) [arXiv:astro-ph/9908168]; P. F. Gonzalez-Diaz, Phys. Lett. B **586**, 1 (2004) [arXiv:astro-ph/0312579]; P. Singh, M. Sami and N. Dadhich, Phys. Rev. D **68**, 023522 (2003) [arXiv:hep-th/0305110]; S. Hannestad and E. Mortsell, Phys. Rev. D**66**,063508(2002); S. M. Carroll, M. Hoffman and M. Trodden, Phys. Rev. D **68**, 023509 (2003) [arXiv:astro-ph/0301273]; P.H.Frampton, hep-th/0302007; P. F. Gonzalez-Diaz and C. L. Siguenza, Nucl. Phys. B **697**, 363 (2004) [arXiv:astro-ph/0407421]; G.W.Gibbons, hep-th/0302199;B.McInnes, astro-ph/0210321; L. P. Chimento and R. Lazkoz, Phys. Rev. Lett. **91**, 211301 (2003)[arXiv:gr-qc/0307111].
- [112] T. D. Saini, S. Raychaudhury, V. Sahni and A. A. Starobinsky, Phys. Rev. Lett. **85**, 1162 (2000) [arXiv:astro-ph/9910231]; D. Huterer and M. S. Turner, Phys. Rev. D **64**, 123527 (2001) [arXiv:astro-ph/0012510].
- [113] B. McInnes, JHEP **0208**, 029 (2002) [arXiv:hep-th/0112066].
- [114] R. R. Caldwell, M. Kamionkowski and N. N. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **91**, 071301 (2003) [arXiv:astro-ph/0302506].
- [115] S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Lett. B **595**, 1 (2004) [arXiv:hep-th/0405078]; E. Elizalde, S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Rev. D **70**, 043539 (2004) [arXiv:hep-th/0405034]; P. X. Wu and H. W. Yu, Nucl. Phys. B **727**, 355 (2005) [arXiv:astro-ph/0407424].
- [116] S. Nesseris and L. Perivolaropoulos, Phys. Rev. D **70**, 123529 (2004) [arXiv:astro-ph/0410309].
- [117] A. Einstein and E. G. Straus, Rev. Mod. Phys. **17**, 120 (1945); erratum **18**, 148 (1946).

- [118] C. Bona and J. Stela, Phys. Rev. D **36**, 2915 (1987).
- [119] G. A. Baker, [arXiv:astro-ph/0112320].
- [120] G. C. McVittie, M. N. R. A. S. **93**, 325 (1933).
- [121] F. I. Cooperstock, V. Faraoni and D. N. Vollick, Astrophys. J. **503**, 61 (1998) [arXiv:astro-ph/9803097].
- [122] V. B. Johri, Phys. Rev. D **70**, 041303 (2004) [arXiv:astro-ph/0311293].
- [123] R. Lazkoz, S. Nesseris and L. Perivolaropoulos, JCAP **0511**, 010 (2005) [arXiv:astro-ph/0503230].
- [124] M. V. John and J. V. Narlikar, Phys. Rev. D **65**, 043506 (2002) [arXiv:astro-ph/0111122].
- [125] E. V. Linder, Phys. Rev. D **68**, 083503 (2003) [arXiv:astro-ph/0212301].
- [126] M. Chevallier and D. Polarski, Int. J. Mod. Phys. D **10**, 213 (2001) [arXiv:gr-qc/0009008].
- [127] U. Alam, V. Sahni and A. A. Starobinsky, JCAP **0406**, 008 (2004) [arXiv:astro-ph/0403687].
- [128] K. Freese, New Astron. Rev. **49**, 103 (2005), arXiv:astro-ph/0501675;
- [129] L. P. Chimento, Phys. Rev. D **69** (2004) 123517 [arXiv:astro-ph/0311613].
- [130] J. C. Fabris, S. V. B. Goncalves and P. E. de Souza, Gen. Rel. Grav. **34**, 53 (2002) [arXiv:gr-qc/0103083];
- [131] V. Sahni and Y. Shtanov, JCAP **0311**, 014 (2003) [arXiv:astro-ph/0202346]; U. Alam and V. Sahni, arXiv:astro-ph/0209443.
- [132] L. Perivolaropoulos, Phys. Rev. D **67**, 123516 (2003) [arXiv:hep-ph/0301237].
- [133] L. Perivolaropoulos and C. Sourdis, Phys. Rev. D **66**, 084018 (2002) [arXiv:hep-ph/0204155].
- [134] A. Vikman, Phys. Rev. D **71**, 023515 (2005) [arXiv:astro-ph/0407107].
- [135] F. Cannata and A. Y. Kamenshchik, Int. J. Mod. Phys. D **16**, 1683 (2007) [arXiv:gr-qc/0603129].
- [136] A. A. Andrianov, F. Cannata and A. Y. Kamenshchik, Phys. Rev. D **72**, 043531 (2005) [arXiv:gr-qc/0505087].
- [137] L. Amendola, *Ιδιωτική επικοινωνία* (2006).

- [138] M. Kunz and D. Sapone, Phys. Rev. D **74**, 123503 (2006) [arXiv:astro-ph/0609040].
- [139] W. Hu, Phys. Rev. D **71**, 047301 (2005) [arXiv:astro-ph/0410680].
- [140] R. R. Caldwell and M. Doran, Phys. Rev. D **72**, 043527 (2005) [arXiv:astro-ph/0501104].
- [141] J. M. Cline, S. Jeon and G. D. Moore, Phys. Rev. D **70**, 043543 (2004) [arXiv:hep-ph/0311312].
- [142] R. V. Buniy and S. D. H. Hsu, Phys. Lett. B **632**, 543 (2006) [arXiv:hep-th/0502203].
- [143] S. Dubovsky, T. Gregoire, A. Nicolis and R. Rattazzi, JHEP **0603**, 025 (2006) [arXiv:hep-th/0512260].
- [144] A. De Felice, M. Hindmarsh and M. Trodden, JCAP **0608**, 005 (2006) [arXiv:astro-ph/0604154].
- [145] Z. K. Guo, Y. S. Piao, X. M. Zhang and Y. Z. Zhang, Phys. Lett. B **608**, 177 (2005) [arXiv:astro-ph/0410654]. Mod. Phys. Lett. A **21**, 231 (2006) [arXiv:astro-ph/0501652].
- [146] H. Stefancic, J. Phys. Conf. Ser. **39**, 182 (2006) [arXiv:astro-ph/0512023].
- [147] Y. Wang and P. Mukherjee, Astrophys. J. **606**, 654 (2004) [arXiv:astro-ph/0312192].
- [148] J. Santos, J. S. Alcaniz and M. J. Reboucas, Phys. Rev. D **74**, 067301 (2006) [arXiv:astro-ph/0608031].
- [149] H. K. Jassal, J. S. Bagla and T. Padmanabhan, arXiv:astro-ph/0601389.
- [150] J. Q. Xia, G. B. Zhao, B. Feng, H. Li and X. Zhang, Phys. Rev. D **73**, 063521 (2006) [arXiv:astro-ph/0511625].
- [151] E. V. Linder, Phys. Rev. Lett. **90**, 091301 (2003) [arXiv:astro-ph/0208512].
- [152] S. Nesseris and L. Perivolaropoulos, JCAP **0701**, 018 (2007) [arXiv:astro-ph/0610092].
- [153] U. Alam, V. Sahni, T. D. Saini and A. A. Starobinsky, arXiv:astro-ph/0406672.
- [154] L. Perivolaropoulos, JCAP **10**, 001 (2005), arXiv:astro-ph/0504582.
- [155] H. K. Jassal, J. S. Bagla and T. Padmanabhan, Phys. Rev. D **72**, 103503 (2005) [arXiv:astro-ph/0506748].
- [156] S. Nesseris and L. Perivolaropoulos, JCAP **0702**, 025 (2007) [arXiv:astro-ph/0612653].

- [157] Riess et al. 1998 AJ, 116, 1009; Clocchiatti et al. 2003, astro-ph/0310432; Riess et al. 2000, ApJ, 536, 62; Tonry et al. 2003, Astrophys.J.594:1-24,2003;
- [158] Perlmutter et al. 1999, ApJ, 517, 565;
- [159] Hamuy et al. 1996, AJ, 112, 2408; Riess et al. 1999, AJ, 117, 707; Jha 2002 (PhD thesis Harvard); Krisciunas 2001, AJ, 122, 1616;
- [160] S. Tsujikawa, Phys. Rev. D **76**, 023514 (2007) [arXiv:0705.1032 [astro-ph]].
- [161] J. c. Hwang and H. Noh, Phys. Rev. D **71**, 063536 (2005); Phys. Rev. D **66**, 084009 (2002).
- [162] Y. Fujii, Phys. Rev. D **26**, 2580 (1982); C. Wetterich, Nucl. Phys B. **302**, 668 (1988); B. Ratra and J. Peebles, Phys. Rev D **37**, 321 (1988); T. Chiba, N. Sugiyama and T. Nakamura, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **289**, L5 (1997); I. Zlatev, L. M. Wang and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **82**, 896 (1999).
- [163] T. Chiba, T. Okabe and M. Yamaguchi, Phys. Rev. D **62**, 023511 (2000); C. Armendáriz-Picón, V. Mukhanov, and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **85**, 4438 (2000).
- [164] A. Sen, JHEP **0204**, 048 (2002); T. Padmanabhan, Phys. Rev. D **66**, 021301 (2002); E. J. Copeland, M. R. Garousi, M. Sami and S. Tsujikawa, Phys. Rev. D **71**, 043003 (2005).
- [165] P.D. Scharre, C.M. Will, Phys. Rev. D **65** (2002); E. Poisson, C.M. Will, Phys. Rev. D **52**, 848 (1995).
- [166] E. J. Copeland, M. Sami and S. Tsujikawa, Int. J. Mod. Phys. D **15**, 1753 (2006) [arXiv:hep-th/0603057].
- [167] K. i. Umezumi, K. Ichiki and M. Yahiro, Phys. Rev. D **72**, 044010 (2005) [arXiv:astro-ph/0503578].
- [168] C. J. Copi, A. N. Davis and L. M. Krauss, Phys. Rev. Lett. **92**, 171301 (2004) [arXiv:astro-ph/0311334].
- [169] A. De Felice, G. Mangano, P. D. Serpico and M. Trodden, Phys. Rev. D **74**, 103005 (2006) [arXiv:astro-ph/0510359].
- [170] V. Acquaviva, C. Baccigalupi, S. M. Leach, A. R. Liddle and F. Perrotta, Phys. Rev. D **71**, 104025 (2005) [arXiv:astro-ph/0412052].
- [171] L. Amendola, P. S. Corasaniti and F. Occhionero, arXiv:astro-ph/9907222.
- [172] E. Garcia-Berro, E. Gaztanaga, J. Isern, O. Benvenuto and L. Althaus, arXiv:astro-ph/9907440.

- [173] E. Gaztanaga, E. Garcia-Berro, J. Isern, E. Bravo and I. Dominguez, Phys. Rev. D **65**, 023506 (2002) [arXiv:astro-ph/0109299].
- [174] A. Riazuelo and J. P. Uzan, Phys. Rev. D **66**, 023525 (2002) [arXiv:astro-ph/0107386].
- [175] I. Dominguez, P. Hoflich, O. Straniero, C. Wheeler and F. K. Thielemann, arXiv:astro-ph/9809292; P. Hoflich, K. Nomoto, H. Umeda and J. C. Wheeler, AJ, 528, 590-59,(2000) arXiv:astro-ph/9908226.
- [176] C. M. Will, Living Rev. Rel. **9**, 3 (2005) [arXiv:gr-qc/0510072].
- [177] F. Perrotta, C. Baccigalupi and S. Matarrese, Phys. Rev. D **61**, 023507 (2000) [arXiv:astro-ph/9906066].
- [178] R. R. Caldwell and E. V. Linder, Phys. Rev. Lett. **95**, 141301 (2005) [arXiv:astro-ph/0505494].
- [179] R. Gannouji, D. Polarski, A. Ranquet and A. A. Starobinsky, JCAP **0609**, 016 (2006) [arXiv:astro-ph/0606287].
- [180] E.V. Pitjeva, Astron. Lett. 31, 340 (2005); Sol. Sys. Res. 39, 176 (2005).
- [181] J. Muller, J. G. Williams and S. G. Turyshev, arXiv:gr-qc/0509114.
- [182] J. Muller, *Ιδιωτική επικοινωνία* (2006).
- [183] S. Nesseris and L. Perivolaropoulos, Phys. Rev. D **75**, 023517 (2007) [arXiv:astro-ph/0611238].
- [184] R. J. Scherrer, Phys. Rev. D **73**, 043502 (2006) [arXiv:astro-ph/0509890].
- [185] E. Linder, *Ιδιωτική επικοινωνία*, <http://supernova.lbl.gov/evlinder/gdotsn.pdf>.
- [186] A. Khokhlov, E. Muller and P. Hoflich, Astron. Astrophys. **270**, 223 (1993).
- [187] S. Capozziello, S. Nesseris and L. Perivolaropoulos, JCAP **0712**, 009 (2007) [arXiv:0705.3586 [astro-ph]].
- [188] S. Capozziello, S. Nojiri, S.D. Odintsov, Phys. Lett. **B 634**, 93 (2006); S. Capozziello, S. Nojiri, S.D. Odintsov, A. Troisi Phys. Lett. **B639**, 135 (2006).
- [189] S. Carloni, S. Capozziello, J. A. Leach and P. K. S. Dunsby, Class. Quant. Grav. **25**, 035008 (2008) [arXiv:gr-qc/0701009].
- [190] L. Amendola, R. Gannouji, D. Polarski and S. Tsujikawa, Phys. Rev. D **75**, 083504 (2007) [arXiv:gr-qc/0612180].

- [191] S. Fay, S. Nesseris and L. Perivolaropoulos, Phys. Rev. D **76**, 063504 (2007) [arXiv:gr-qc/0703006].
- [192] Οι άλλες δύο ιδιοτιμές είναι : $-\frac{3m+\sqrt{8m^3-63m^2+118m+1}-11}{2(m-1)}$, $\frac{-3m+\sqrt{8m^3-63m^2+118m+1}+11}{2m-2}$
- [193] Οι άλλες δύο ιδιοτιμές είναι : $-\frac{7m+\sqrt{48m^3-263m^2+358m+1}-19}{4(m-1)}$, $\frac{-7m+\sqrt{48m^3-263m^2+358m+1}+19}{4m-4}$
- [194] Οι άλλες δύο ιδιοτιμές είναι : $-\frac{\sqrt{24m+1}+5}{2}$, $\frac{\sqrt{24m+1}-5}{2}$
- [195] S. Capozziello, R. de Ritis, C. Rubano, and S. Scudellaro, Riv. Nuovo Cimento **19**, 4, 1 (1996); S. Kamilya, B. Modak and S. Biswas, Gen. Rel. Grav. **36** (2004) 661.
- [196] V. Faraoni, E. Gunzig and P. Nardone, Fund. Cosmic Phys. **20**, 121 (1999) [arXiv:gr-qc/9811047].
- [197] N. D. Birrell, P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge University Press, Cambridge (UK) (1982); I. L. Buchbinder, S. D. Odintsov and I. L. Shapiro, *Effective Action in Quantum Gravity*, IOP, Bristol/Philadelphia (1992).
- [198] S. D. Odintsov, S. Nojiri, Phys. Lett. B **576**, 5 (2003).
- [199] S. M. Carroll, V. Duvvuri, M. Trodden and M. S. Turner, Phys. Rev. D **70**, 043528 (2004).
- [200] S. Capozziello, S. Carloni, V. F. Cardone, A. Troisi, Int. J. Mod. Phys. D **12**, 1969 (2003).
- [201] T. Chiba, Phys. Lett. B **575**, 1 (2003).
- [202] A. D. Dolgov and M. Kawasaki, Phys. Lett. B **573**, 1 (2003).
- [203] V. Faraoni, Phys. Rev. D **74**, 023529 (2006); G. J. Olmo, Phys. Rev. Lett. **95**, 261102 (2005) [arXiv:gr-qc/0505101].
- [204] S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Rev. D **68**, 123512 (2003).
- [205] L. Amendola, D. Polarski and S. Tsujikawa, Phys. Rev. Lett. **98**, 131302 (2007) [arXiv:astro-ph/0603703].
- [206] J. Khoury and A. Weltman, Phys. Rev. D **69**, 044026 (2004) [arXiv:astro-ph/0309411]; gr-qc/0701111; D. F. Mota and J. D. Barrow, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **349**, 291 (2004) [arXiv:astro-ph/0309273].
- [207] C. Bogdanos, S. Nesseris, L. Perivolaropoulos and K. Tamvakis, Phys. Rev. D **76**, 083514 (2007) [arXiv:0705.3181 [hep-ph]].
- [208] C. Bogdanos and K. Tamvakis, Phys. Lett. B **646** (2007) 39 [arXiv:hep-th/0609100].

- [209] C. Bogdanos, A. Dimitriadis and K. Tamvakis, Phys. Rev. D **75** (2007) 087303 [arXiv:hep-th/0611094].
- [210] P. Binetruy, C. Deffayet and D. Langlois, Nucl. Phys. B **565** 269 (2000); P. Binetruy, C. Deffayet, U. Ellwanger and D. Langlois, Phys. Lett. B **447** 285 (2000).
- [211] E. V. Linder and A. Jenkins, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **346**, 573 (2003)
- [212] P. S. Apostolopoulos and N. Tetradis, Phys. Rev. D **71**, 043506 (2005) [arXiv:hep-th/0412246].
- [213] A. Melchiorri, L. Mersini-Houghton, C. J. Odman and M. Trodden, Phys. Rev. D **68**, 043509 (2003) [arXiv:astro-ph/0211522].
- [214] I. Sawicki and S. M. Carroll, arXiv:astro-ph/0510364.
- [215] S. Tsujikawa, Phys. Rev. D **72**, 083512 (2005) [arXiv:astro-ph/0508542].