

U.A.M.  
Facultad de Ciencias  
Departamento de Física Teórica

MEMORIA DE TESIS

ESTUDIO DEL  
COMPORTAMIENTO CRITICO DE  
LAS  
TEORIAS DE CUERDAS A TODO  
ORDEN  
EN TEORIA DE  
PERTURBACIONES

Octubre de 1990

Memoria que presenta D. Tomás Ortín Miguel para acceder al grado de Doctor en Ciencias Físicas.

Trabajo dirigido por D. Enrique Alvarez Vázquez, Catedrático del Departamento de Física Teórica de la Universidad Autónoma de Madrid.

*A mis padres*  
*A María del Mar*

# Agradecimientos

Debo agradecer a Enrique Alvarez, en primer lugar, el haberme dado mi oportunidad de trabajar en Física teórica. También el haberme dado los medios y haber puesto a mi disposición su inestimable intuición y experiencia, así como su gran humanidad. Me ha enseñado muchas cosas y me ha apoyado siempre.

Miguel Angel Ramos Osorio me ha ayudado muchísimo, sobre todo en los difíciles comienzos.

Quisiera expresar mi más sincero agradecimiento a Luis Alvarez Gaumé por el mucho tiempo que dedicó a enseñarme y por los ánimos y muestras de apoyo recibidas. Me gustaría hacer esto extensivo a cuantos conocí en el C.E.R.N.

Agradezco a la Fundación Banco Exterior el haberme financiado con una beca de su programa "Ayudas a la investigación en Física de Altas Energías" en el último y definitivo año de este trabajo, y a la Comunidad Autónoma de Madrid por contribuir económicamente a una estancia en el C.E.R.N.

También quisiera expresar mi agradecimiento a J. L. Sánchez Gómez y a A. Poves, y a todos los miembros y compañeros del Departamento de Física Teórica de la Universidad Autónoma de Madrid.

# Indice

	<u>Página</u>
<i>Prólogo</i>	v
<b>Capítulo 1</b> La teoría de cuerdas tratada perturbativamente	
Introducción	1
1.1 La cuerda bosónica cerrada	2
1.1.1 Teorema de Belavin-Knizhnik	5
1.1.2 Determinantes quirales	9
1.2 Supercuerdas	14
1.2.1 La cuerda fermiónica	14
1.2.2 La supercuerda heterótica	21
Género $g = 1$	26
Género $g = 2$	28
<b>Capítulo 2</b> Temperatura finita	
Introducción	35
2.1 La cuerda bosónica	36
2.2 La cuerda heterótica	40
<b>Capítulo 3</b> Comportamiento crítico	
Introducción	45
3.1 Comportamiento crítico de la energía libre	46
3.2 La cuerda bosónica	47
3.3 La cuerda heterótica	48
<b>Capítulo 4</b> Conclusiones	
Introducción	50
4.1 Temperatura crítica	50
4.2 Constantes cosmológicas	53

	<u>Página</u>
<b>Apéndice A</b> Superficies de Riemann	
Introducción	54
A.1 La matriz periodo	57
A.2 El grupo modular	59
A.3 Estructuras de espín, divisores etc.	61
A.4 Superficies hiperelípticas	68
A.5 Identidades de Riemann	76
 <b>Apéndice B</b> Degeneración de superficies de Riemann	
Introducción	78
B.1 Degeneración de un ciclo no trivial	79
B.1.1 Diferenciales abelianos y matriz periodo	81
B.1.2 Thetas de Riemann	83
B.1.3 Identidades de Riemann	83
B.1.4 Thetas térmicas	84
Cuerda bosónica	87
Cuerda heterótica	91
 <b>Bibliografía</b>	 93

# Prólogo

*"Los nombres no son signos arbitrarios, sino una parte esencial de lo que definen"*

Jorge Luis Borges

La creación del llamado "modelo estándar" de las interacciones fundamentales ha sido uno de los grandes logros de la ciencia de este siglo. Describe de forma óptima tres de las cuatro interacciones fundamentales conocidas con un mismo esquema: la teoría cuántica de campos gauge, junto con la relatividad general, constituye nuestra forma de ver y entender el Universo. Cada fenómeno observado en él es leído en términos de partículas elementales, secciones eficaces, curvatura, energía etc., e interpretado de acuerdo con uno de ambos modelos, de forma altamente satisfactoria hasta el momento. Cabe, pues, preguntarse qué necesidad hay de ir más allá del modelo estándar hacia esquemas de gran unificación, y cabe preguntarse por la razón de ser de la teoría de cuerdas, como paradigma y "non plus ultra" de teoría de gran unificación muy difícil de cotejar con el experimento y que especula con lo que puede ser la física en regiones de energía inaccesibles, rompiendo con conceptos anclados en el subconsciente de los físicos, como las partículas puntuales, el espacio continuo tetradimensional...

Respondiendo a estas preguntas intentaré justificar el por qué de un estudio sobre las propiedades críticas de las teorías de cuerdas.

Es sabido que el marco conceptual formado por el modelo estándar y la relatividad general es, al menos aparentemente, inconsistente. No se sabe

cómo aplicar las ideas de la relatividad general a escalas microscópicas. Aunque sus efectos no sean medibles, deben existir (si no, habría que fijar una escala por debajo de la cual la gravitación no existe), pero parecen incompatibles con la descripción cuántica del mundo microscópico. Construir una teoría cuántica del campo gravitatorio, en la que éste describiera una interacción transmitida por "gravitones" cuyo efecto coherente corresponda a la curvatura del espacio-tiempo, sería una posible forma de reconciliar ambos esquemas, que no se ha sabido llevar a cabo hasta ahora.

Quisiera señalar aquí que la necesidad de un marco autoconsistente que incluya las cuatro interacciones fundamentales es algo más que una simple necesidad estética. La física no puede ser un mero catálogo de fenómenos y leyes particulares que los describen, pero incluso si así fuera, habría que crear nuevos conceptos para describir los fenómenos, habría que abstraer y universalizar. La propia estructura del pensamiento humano así lo impone. Y este camino lleva inevitablemente a la visión unificada de muchos fenómenos, primero muy similares, y luego aparentemente muy distintos, y así a la formulación de leyes universales. Probablemente la historia del concepto de energía y de la ley de su conservación sean un buen ejemplo. Creemos que entendemos mejor y de forma más profunda el Universo cuando tenemos un conjunto menor de conceptos fundamentales y de leyes, más abstractas y universales.

Así, renunciar a crear modelos y teorías nuevas que nos den una visión unificada de las "partículas" e "interacciones" fundamentales sería renunciar a entender mejor el Universo, aunque es verdad que no es ésta la necesidad más acuciante de nuestro mundo.

La mayor o menor ruptura (que hasta ahora siempre ha sido necesaria en todas las grandes revoluciones científicas) con los paradigmas establecidos (algunos son claramente prejuicios) estarán justificados no sólo por su éxito en la descripción de la realidad (que sería el mayor éxito, al menos para un físico), sino por su contribución intrínseca al conocimiento humano, que quizá sea útil en el futuro para construir y estudiar otras teorías mejores. En nuestro Universo, habrá más fenómenos que teorías posibles...?

La teoría de cuerdas es una teoría nueva, con una gran riqueza estructural. Solo esto justificaría ya su estudio, pero además es la primera visión unificada del Universo que (que sepamos) no es inconsistente, y eso la hace de un interés indudable. A cambio es muy compleja, y quizá no describa lo que esperamos. Estudiarla en todos sus aspectos es la forma de averiguar si es

inconsistente, si describe alguna porción del mundo real, y nosotros hemos estudiado en concreto su comportamiento crítico a orden arbitrario en teoría de perturbaciones, y hemos encontrado una temperatura crítica común a todos los órdenes, tanto para la cuerda bosónica como para la heterótica, los dos casos que hemos estudiado por su mayor interés.

Las consecuencias posibles que este hecho tiene y su posible significado están descritas en el capítulo cuarto de la memoria, que contiene las conclusiones. A su vez se plantean preguntas que quedan, por el momento, sin respuesta.

El tercer capítulo es el núcleo central de la memoria. En él se obtienen los resultados ya citados. Primeramente estudiamos los casos más sencillos, ya conocidos, de la heterótica y la bosónica a un loop, reobteniendo las temperaturas críticas correspondientes. Luego estudiamos por separado los límites de las funciones de partición, y de las contribuciones de los solitones térmicos, los dos ingredientes principales de la energía libre térmica. La función de partición de la cuerda bosónica tiene un comportamiento conocido perfectamente en el límite de degeneración, (vease el primer capítulo), pero no ocurre lo mismo en el caso heterótico, que hemos calculado y discutido en dicho capítulo, aunque no a nuestra completa satisfacción. Aún hay muchos problemas que resolver en este campo antes de obtener una respuesta definitiva. Finalmente obtenemos las temperaturas críticas a todo género.

Los objetos matemáticos y las propiedades que de ellos utilizamos en el tercer capítulo están en los dos apéndices.

He intentado en todo momento ceñirme lo más posible al resultado principal de la tesis y a los elementos necesarios para su comprensión, lo cual hará necesario en ocasiones acudir a las referencias generales reseñadas al principio de cada capítulo, pero he decidido incluir en los dos primeros breves introducciones a la teoría de perturbaciones y temperatura finita en cuerdas, por completitud, autoconsistencia y para fijar la notación.

Tomás Ortín



# Chapter 1

## La teoría de cuerdas tratada perturbativamente

### Introducción

La teoría de cuerdas (dos referencias generales son [1] y [2]) es una teoría cuántica de objetos unidimensionales (cuerdas) con la topología de un segmento de recta o de una circunferencia  $S^1$  (cuerdas abiertas o cerradas, respectivamente) cuyos distintos estados corresponderían a las distintas partículas fundamentales que, así, reciben una descripción unificada, válida, según se espera, a energías del orden de la escala de Planck  $m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$ . Las cuerdas cerradas pueden estar en un estado de masa cero y espín 2, que se suele identificar con el gravitón.

Las cuerdas interactúan uniéndose y separándose, y hay una única constante de acoplamiento en la teoría, que llamaremos  $\kappa$ . Todas las interacciones conocidas (incluida la gravedad en las cuerdas cerradas) serían manifestaciones distintas de esta singular interacción geométrica.

Al desplazarse e interactuar, las cuerdas barren superficies bidimensionales (superficies de Riemann [3]), con "asas" ("loops") que son la manifestación de la creación y destrucción de pares virtuales. Un proceso elemental vendrá representado por una superficie de Riemann con un número de "bordes" igual al número de cuerdas inicial y final y con un determinado número de asas. Los estados iniciales y finales de las cuerdas determinan la posición de los bordes de la superficie.

La prescripción correspondiente a la de Feynman para calcular la amplitud de un suceso con un número determinado de estados externos sería sumar sobre todas las superficies de Riemann con los bordes correspondientes a esos estados, pesados con una acción adecuada. La integral funcional propuesta por Polyakov [4] es el origen del formalismo funcional en teoría de cuerdas. Lamentablemente, sólo sabemos realizar los cálculos para estados externos en la capa de masas y en el infinito: integrando únicamente sobre superficies compactas con operadores vértice que contienen la información sobre los estados externos insertados en ellas. Y sólo sabemos integrar de una vez sobre superficies de la misma clase topológica. Cada una de estas integrales es del mismo orden en la constante de acoplamiento, y este desarrollo topológico da lugar a la serie perturbativa.

La serie perturbativa diverge, y no es ni siquiera Borel-sumable [5] para la amplitud vacío-vacío, pero sus términos son lo único que nos es dado calcular por el momento.

Existe otro formalismo, el de operadores, desarrollado más recientemente [6] [7], pero, de momento no se han conseguido resultados nuevos con él. Su relación con la "grassmaniana" permite albergar la esperanza de que se puedan llegar a realizar cálculos no perturbativos con el mismo.

En este capítulo vamos a ver la cuantización funcional de las cuerdas bosónica y fermiónica, y la construcción de la heterótica, de forma perturbativa. La referencia general es [8]. Nos interesará particularmente el cálculo de las amplitudes de transición vacío-vacío, que nos dan la constante cosmológica. El teorema de Belavin-Knizhnik es un resultado fundamental. Estudiaremos su posible generalización para la cuerda heterótica y haremos hincapié en el problema de la "ambigüedad" en la definición del integrando en el espacio de moduli para la función de partición de la supercuerda.

## 1.1 La cuerda bosónica cerrada

La amplitud de dispersión de  $n$  cuerdas cerradas "on shell" en los estados  $e_i$ ,  $i = 1 \dots n$  se define como [4] [8]:

$$\mathcal{A}(1, 2 \dots n) \stackrel{\text{def}}{=} \kappa^n \int \mathcal{D}X^\mu \mathcal{D}g_{\alpha\beta} \mathcal{V}(e_1) \dots \mathcal{V}(e_n) e^{-S - \frac{\log \kappa}{4\pi} \int d^2\xi \sqrt{g} \mathcal{R}^{(2)}} \quad (1.1)$$

donde integramos sobre todas las métricas  $g_{\alpha\beta}$  de superficies bidimensio-

nales compactas y sobre todas las inmersiones de cada superficie en el espacio euclídeo 26-dimensional  $X^\mu(\xi^1, \xi^2)$ ,  $\mu = 1 \dots 26$ .  $\xi^1$  y  $\xi^2$  son coordenadas sobre cada superficie, y en ciertos casos se puede suponer que parametrizan la longitud sobre la cuerda y el tiempo propio. Los  $\mathcal{V}(e_i)$  son funcionales de los campos (campos sobre las superficies de Riemann  $\Sigma$ )  $X^\mu$  y  $g_{\alpha\beta}$  que contienen la información sobre los estados  $e_i$ : masa, espín, polarización...

$$\mathcal{V}(e_i) = \int_{\Sigma} d^2\xi_i \mathcal{V}_i(X, g) \quad (1.2)$$

$\mathcal{S}$  es la acción de Polyakov en el caso de la cuerda bosónica:

$$\mathcal{S} = \int_{\Sigma} d^2\xi \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu \quad (1.3)$$

Dado que

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} d^2\xi \sqrt{g} \mathcal{R}^{(2)} = \chi(\Sigma) = 2(1 - g) \quad (1.4)$$

donde  $\chi$  es la característica de Euler,  $g$  el género (número de asas), un invariante topológico, parece natural desglosar la integral (1.1) en una suma de integrales sobre superficies de Riemann de la misma clase topológica, del mismo género:

$$\mathcal{A}(1, 2, \dots, n) = \kappa^n \sum_g \kappa^{2(g-1)} \int_{\Sigma_{s \text{ genero } g}} \mathcal{D}X^\mu \mathcal{D}g_{\alpha\beta} \mathcal{V}(e_1) \dots \mathcal{V}(e_n) e^{-\mathcal{S}} \quad (1.5)$$

o expresado de forma diagramática en Fig. 1.1.

Observemos que el orden de un diagrama dado en  $\kappa$  es igual al número de "vértices" de interacción como se ve en Fig. 1.2.

Cualquiera de las integrales funcionales de (1.5) tiene los siguientes grupos de invariancias locales ("gauge") actuando en el espacio de las métricas en 26 dimensiones espaciotemporales:

- Difeomorfismos (**Diff**)

1. Conexos con la identidad (**Diff**<sub>0</sub>)

- a. Generados por vectores de Killing conformes (**CKV**) (Isometrías continuas)

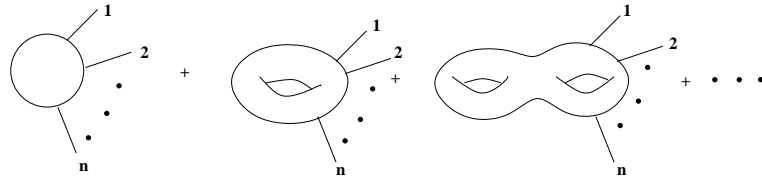


Figure 1.1: Suma perturbativa de diagramas de cuerdas.

- b. El complemento ortogonal de los anteriores ( $\mathbf{CKV}^\perp$ )
- 2. No conexos con la identidad:  $\mathbf{Diff}/\mathbf{Diff}_0$  ("Mapping Class Group",  $\mathbf{MCG}$ )
  - a. "Twists" de Dehn<sup>1</sup> sobre ciclos de homología triviales, "grupo de Torelli".
  - b. Twists de Dehn sobre ciclos de homología no triviales, "transformaciones modulares".
- Transformaciones de Weyl ( $\mathbf{W}$ )

de forma que hemos de redefinir la medida dividiendo por el volumen de dichos grupos:

$$\mathcal{D}g_{\alpha\beta} \longrightarrow \frac{\mathcal{D}g_{\alpha\beta}}{(\text{Vol}\mathbf{Diff})(\text{Vol}\mathbf{W})} \quad (1.6)$$

---

<sup>1</sup>La noción de twist de Dehn es explicada en el Apéndice A

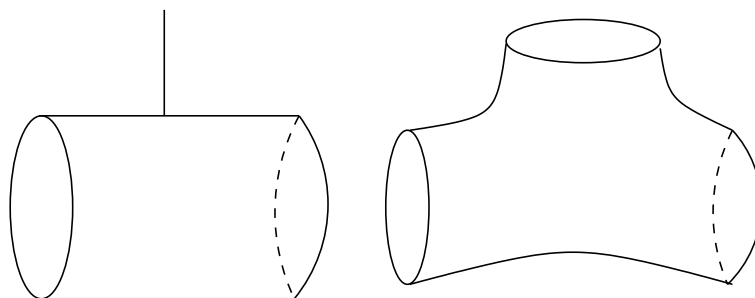


Figure 1.2: Vértice de interacción en dos versiones distintas.

y fijando un "gauge" determinado, que escogemos sea el gauge conforme:

$$ds^2 = g_{z\bar{z}} dz d\bar{z} \quad (1.7)$$

donde  $z$  es una coordenada compleja, en el que la acción de Polyakov toma la forma:

$$\mathcal{S} = \int_{\Sigma_g} d^2z \partial_z X^\mu \partial_{\bar{z}} X_\mu \quad (1.8)$$

Finalmente la integral funcional ha de quedar reducida a una integral sobre el cociente del espacio de métricas de variedades compactas bidimensionales de género  $g$  por el grupo gauge total, una integral sobre el espacio de superficies de Riemann propiamente dichas (vease el Apéndice A), sobre el espacio modular  $\mathcal{M}_g$ . Este espacio es de dimensión finita.

En la práctica el espacio modular se suele realizar como una región fundamental del **MCG** en  $\mathcal{T}_g$ . Cualquier región fundamental es buena, y como todas ellas están relacionadas por difeomorfismos discretos, (transformaciones modulares en particular), la consecuencia es que el integrando debe ser invariante bajo transformaciones modulares. Este es un requisito de primordial importancia en teoría de cuerdas.

### 1.1.1 Teorema de Belavin-Knizhnik

$\mathcal{M}_g$  es de forma natural una variedad compleja. El teorema de Belavin-Knizhnik [9] (una exposición más amplia y detallada se encuentra en [10]) describe propiedades analíticas del integrando de la constante cosmológica (la amplitud vacío-vacío) a un determinado orden  $g$ . Fijado el gauge, hallado el jacobiano etc. tenemos (para  $g > 1$ ):

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_g &= \int_{\Sigma_s \text{ genero } g} \mathcal{D}X^\mu \mathcal{D}g_{\alpha\beta} e^{-S} \\ &= \int_{\mathcal{M}_g} \prod_{i=1}^{3(g-1)} dm_i \wedge d\bar{m}_i \frac{|\det \langle \mu_i | b_j \rangle|^2}{(\det N_1)^{13}} \times \\ &\quad \times \left( \frac{\det' \Delta_{-1}}{\det N_{-1} \det N_2} \right) \left( \frac{\det' \Delta_0}{\det N_0 \det N_1} \right)^{-13} \end{aligned} \quad (1.9)$$

donde

$$\Delta_\lambda = g_{z\bar{z}}^{\lambda-1} \partial g_{z\bar{z}}^{-\lambda} \bar{\partial} \quad (1.10)$$

es el operador de Laplace actuando sobre el espacio de  $\lambda$ -diferenciales, y la prima en  $\det'$  indica que en el cálculo de los determinantes ignoramos los modos cero, que en el caso de  $\Delta_\lambda$  son los  $\lambda$ -diferenciales globalmente holomorfos en  $\Sigma_g$  (modos cero de  $\bar{\partial}$ ). Si una base de estos es  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, n_\lambda$  ( $n_\lambda$  viene dado por el teorema de Riemann-Roch en general (Apéndice A)), entonces

$$(N_\lambda)_{ij} = \langle f_i | f_j \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Sigma_g} g_{z\bar{z}}^{1-\lambda} \bar{f}_i f_j dz \wedge d\bar{z} \quad (1.11)$$

es la matriz de sus productos escalares. Para  $\lambda = 2$  tomamos la base  $\{b_i = b_i(z)(dz)^2\}$ . Las  $m_i$  son coordenadas complejas en  $\mathcal{M}_g$  asociadas a los diferenciales de Beltrami  $\mu_i$  como se explica en el Apéndice A.

Belavin y Knizhnik hallaron que toda expresión de la forma

$$\prod_\lambda \left( \frac{\det' \Delta_\lambda}{\det N_\lambda \det N_{1-\lambda}} \right)^{n_\lambda}, \quad n_\lambda \in \mathcal{Z} \quad (1.12)$$

es el módulo al cuadrado de una función holomorfa en  $\mathcal{M}_g$  siempre que  $\sum_\lambda n_\lambda C_\lambda = 0$ , donde  $C_\lambda = 6\lambda^2 - 6\lambda + 1$  es la anomalía conforme, es decir: tres

anomalías (gravitacional, conforme y analítica) se cancelan simultáneamente en (1.12).

Podemos entonces escribir

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_g &= \int_{\mathcal{M}_g} (\det N_1)^{-13} \mathcal{W} \wedge \overline{\mathcal{W}} \\ \mathcal{W} &= \mathcal{W}(m) dm_1 \wedge dm_2 \wedge \dots \wedge dm_{3(g-1)} \end{aligned} \quad (1.13)$$

$\mathcal{W}$  no tiene ni ceros ni polos en  $\mathcal{M}_g$ , pero sí puede tenerlos en su frontera,  $\mathcal{D} = \bigcup_{p=0}^{g/2} \mathcal{D}_p$  ( $\overline{\mathcal{M}_g}$  es una variedad algebraica compacta). Si  $\delta$  es la coordenada compleja transversal a  $\mathcal{D}$ , entonces siempre en el límite  $\delta \rightarrow 0$

$$\mathcal{W} \sim \frac{d\delta}{\delta^2} \quad (1.14)$$

El origen de estos polos está en el taquión de masas  $m^2 = -2$  que se propaga por el cilindro que contraemos. Así pues, no esperamos que estén presentes en el caso de las teorías, supersimétricas o no, en que el taquión es proyectado fuera del espectro (proyección GSO u otra). También debe haber polos de orden menor, debidas al dilatón y a los modos sin masa en general.

Por otra parte, con la normalización habitual de los diferenciales abelianos, tenemos que

$$(N_1)_{ij} = \Im m(\tau)_{ij} \quad (1.15)$$

de forma que, ante una transformación modular

$$\tau' = (A\tau + B)(C\tau + D)^{-1} \Rightarrow \det \Im m(\tau') = |C\tau + D|^{-2} \det \Im m(\tau) \quad (1.16)$$

Esto implica que  $\mathcal{W}$  debe transformarse como una "forma modular de peso 13":

$$\mathcal{W}' = \det(C\tau + D)^{13} \mathcal{W} \quad (1.17)$$

Todas estas propiedades nos permiten calcular  $\mathcal{W}$ , salvo por una constante multiplicativa.

A género  $g = 1$  (no hay contribución de orden cero) la expresión de la constante cosmológica ha sido calculada a partir de primeros principios y es bien conocida:

$$\mathcal{Z}_{g=1}^{(Bos)} = \int_{\mathcal{M}_1} (\Im m\tau)^{-14} |\eta(\tau)|^{-48} \quad (1.18)$$

donde  $\eta(\tau)$  es la función eta de Dedekind, que verifica:

$$\eta^3(\tau) = \frac{1}{2} \prod_{e \text{ pares}} \vartheta[e](0|\tau) \quad (1.19)$$

Como vemos, el integrando tiene la propiedad de factorización holomorfa, siendo en esta caso la obstrucción  $(\Im m\tau)^{-14}$  (en muchas cosas,  $g = 1$  constituye una excepción). Aquí,

$$\mathcal{W} = \eta^{-24} d\tau \quad (1.20)$$

es una forma modular de peso 14, pero el comportamiento en la frontera de  $\mathcal{M}_1$  es el esperado: a partir de los desarrollos del Apéndice B, tenemos

$$\vartheta^4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (0|\tau) = 1 + 8q + 24q^2 + 32q^3 + \dots \quad (1.21)$$

$$\vartheta^4 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} (0|\tau) = 16q + 64q^3 + 96q^5 \dots \quad (1.22)$$

$$\vartheta^4 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} (0|\tau) = 1 - 8q + 24q^2 - 32q^3 + \dots \quad (1.23)$$

de forma que, desarrollando en  $q = e^{\pi i\tau} = \delta^{\frac{1}{2}} \stackrel{def}{=} |\delta|^{\frac{1}{2}} e^{\pi i\tau_1}$  obtenemos

$$\eta^{-24} = q^{-2} [1 + 24q^2 + \dots] \quad (1.24)$$

y, finalmente

$$\mathcal{W}(g=1) \sim \frac{d\delta}{\delta^2} [1 + \mathcal{O}(\delta)] \quad (1.25)$$

En base a los principios que emanan del teorema de Belavin-Knizhnik se han propuesto distintas expresiones para la contribución a la constante cosmológica de  $g = 2, 3$  y  $4$  [11] [12] [13]. En el caso de género dos, el mismo resultado ha sido obtenido de forma independiente [14] con el formalismo de superficies hiperelípticas. Básicamente es una generalización del resultado



de  $g = 1$  en que  $\mathcal{W}$  es un producto de todas las thetas de Riemann pares elevadas a una potencia determinada

$$\mathcal{W}(g = 2) = \left[ \prod_{\text{pares}} \vartheta^2(\vec{\sigma}|\tau) \right]^{-1} \prod_{i \leq j} d\tau_{ij} \quad (1.26)$$

En concreto[14]

$$\mathcal{Z}_{g=2}^{(Bos)} = \int \frac{\prod_{i=1}^6 d^2 a_i}{d^2 V_{pr}} T^{-13} \left| \prod_{i < j} a_{ij}^{-3} \right|^2 \quad (1.27)$$

$$dV_{pr} = da_4 da_5 da_6 (a_{45} a_{46} a_{56})^{-1} \quad (1.28)$$

$$T = \int d^2 z_1 d^2 z_2 \left| z_{12} y^{-1}(z_1) y^{-1}(z_2) \right|^2 \quad (1.29)$$

$$y(z) = \prod_{i=1}^6 (z - a_i) \quad (1.30)$$

$$x_{ij} = x_i - x_j \quad (1.31)$$

En el límite en que un ciclo homológicamente no trivial degenera, como podemos ver utilizando los resultados del Apéndice B, ambas expresiones tienen el comportamiento esperado (realmente son iguales). (De paso comprobamos que el parámetro  $\delta$  que utilizamos en ambos casos es el mismo.)

A género  $g = 3$  tenemos lo mismo (aquí ya no es posible una expresión completa en términos de superficies hiperelípticas):

$$\mathcal{W}(g = 3) = \left[ \prod_{\text{pares}} \vartheta^2(\vec{\sigma}|\tau) \right]^{-1} \prod_{i \leq j} d\tau_{ij} \quad (1.32)$$

Existen expresiones de la función de partición de la cuerda para todo género, por ejemplo en [15], [16] y [17], en las dos últimas referencias, obtenidas a partir de determinantes quirales de los que hablaremos enseguida, y el comportamiento en  $\mathcal{D}$  es el previsto, incluso aunque las expresiones a géneros  $g = 2, 3$  y  $4$  sean aparentemente muy distintas. La parte esencial reside en el determinante de los diferenciales cuadráticos holomorfos, como veremos más adelante.

Se conjetura que el teorema es válido para amplitudes arbitrarias y también para la cuerda fermiónica<sup>2</sup> la factorización holomorfa, lo que permite

---

<sup>2</sup>Con la excepción de  $g = 1$  en que el exponente de  $\Im m \tau$  será distinto.

la construcción de la supercuerda heterótica, cuya función de partición es básicamente una combinación del tipo de (1.12) y sus raíces cuadradas holomorfas.

### 1.1.2 Determinantes quirales

El teorema de Belavin-Knizhnik sugiere entender  $\mathcal{W}$  como la contribución de los modos "right" y  $\overline{\mathcal{W}}$  como la de los modos "left" de la cuerda bosónica y escribir:

$$\mathcal{W} = \det \overline{\partial}_{-1} (\det \overline{\partial}_0)^{-13} \quad (1.33)$$

donde  $\det \overline{\partial}_\lambda$  es el determinante del operador  $\overline{\partial}$  actuando sobre  $\lambda$ -diferenciales y entendemos que la prima que indica que ignoramos los modos cero está implícita. Sería una "raíz cuadrada holomorfa" de

$$\frac{\det' \Delta_\lambda}{\det N_\lambda \det N_{1-\lambda}} \quad (1.34)$$

si ignoramos la anomalía.  $\det \overline{\partial}_\lambda$  se puede definir formalmente a partir de la integral funcional de una teoría con un sistema de campos fermiónicos  $b, c$  que sean  $(\lambda, 1 - \lambda)$ -diferenciales en  $\Sigma_g$  con la acción

$$\mathcal{S}_\lambda = \int_{\Sigma_g} c \overline{\partial}_\lambda b \quad (1.35)$$

El operador  $\overline{\partial}_\lambda$  tiene, para  $g > 1$ ,  $I_\lambda$  modos cero ( $I_\lambda = Q_\lambda(g - 1) = (2\lambda - 1)(g - 1)$  para  $\lambda > 1$ ,  $I_1 = g$ ,  $I_0 = 1$  e  $I_\lambda = 0$  en los demás casos en que  $\lambda$  es entero, si no lo es, habrá que tener en cuenta las estructuras de espín), de acuerdo con el teorema de Riemann-Roch, y la integral

$$\int \mathcal{D}b \mathcal{D}c e^{-\mathcal{S}_\lambda} \quad (1.36)$$

se anula. Para obtener una respuesta no nula debemos calcular valores esperados de  $I_\lambda$  campos  $b$  más que  $c$ , y tenemos entonces una dependencia en los puntos de cada  $\Sigma_g$  donde están definidos los campos. Se ha propuesto entonces la definición [16]

$$\det \overline{\partial}_\lambda = \frac{\langle b(z_1), \dots, b(z_{I_\lambda}) \rangle}{\det f_i(z_j)} \quad (1.37)$$

donde los  $f_i$  son una base de  $\lambda$ -diferenciales holomorfos. La expresión no depende ahora de los puntos  $z_i$ , pero sí, a través del determinante del denominador, de la elección particular de base  $\{f_i\}$ . La idea es, entonces, sustituir combinaciones libres de anomalías como (1.12) por

$$\prod_{\lambda} |det \bar{\partial}_{\lambda}|^{2n_{\lambda}} \quad (1.38)$$

Dos observaciones son oportunas aquí: la raíz cuadrada holomorfa de (1.12) es definida ahora como

$$\prod_{\lambda} (det \bar{\partial}_{\lambda})^{n_{\lambda}} \quad (1.39)$$

y no debe sufrir la triple anomalía local. Sin embargo, pueden aparecer anomalías globales en (1.39) bajo la forma de fases que aparecen tras transformaciones modulares (difeomorfismos no conexos con la identidad, de ahí el adjetivo global aplicado a anomalía) [18]. A ello nos referiremos más tarde al hablar de la construcción de la cuerda heterótica.

Por otra parte, es obvio que el integrando de cualquier amplitud no debería depender de las bases de modos cero elegidas. En (1.9) es fácil ver que así ocurre. A veces es útil, sin embargo la siguiente definición formal de determinante quirral [17] como sección del fibrado lineal  $\ell_{\lambda}$  sobre  $\mathcal{M}_g$  generado por  $b_1 \wedge b_2 \wedge \dots \wedge b_{I_{\lambda}}$ , la cual no depende de la base de modos cero escogida:

$$det \nabla_{\lambda}^z = det \bar{\partial}_{\lambda} b_1 \wedge \dots \wedge b_{I_{\lambda}} \quad (1.40)$$

Con esta definición podemos estudiar propiedades de los determinantes en el integrando de amplitudes, por ejemplo su comportamiento bajo transformaciones modulares, que veremos más adelante.

Los determinantes quirales han sido calculados por diversos métodos. De la última referencia tomamos las expresiones de los correladores que aparecen en los determinantes quirales en función de la matriz periodo:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{\lambda,e}(z_1, \dots, z_{I_{\lambda}+M}, w_1, \dots, w_M) &\stackrel{def}{=} \left\langle \prod_{i=1}^{I_{\lambda}+M} b(z_i) \prod_{j=1}^M c(w_j) \right\rangle_e \\ &= \mathcal{Z}_1^{-\frac{1}{2}} \vartheta[e] \left( \sum_i z_i - \sum_j w_j - Q_{\lambda} \Delta_g \right) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{\prod_{i < k} E(z_i, z_k) \prod_{j < l} E(w_j, w_l)}{\prod_{i, j} E(z_i, w_j)} \times \\ & \times \frac{\prod_i \sigma^{Q_\lambda}(z_i)}{\prod_j \sigma^{Q_\lambda}(w_j)} \end{aligned} \quad (1.41)$$

$$\mathcal{Z}_1 = \frac{\mathcal{Z}_1(z_1, \dots, z_g, w)}{\det w_i(z_j)} \quad (1.42)$$

$e$  es la estructura de espín y  $\sigma(z)$  es un  $\frac{1}{2}g$ -diferencial holomorfo sin ceros o polos en  $\Sigma_g$ . Es el portador de la anomalía, que sólo se cancela cuando en una expresión aparecen productos de tantas  $\sigma$ s en el numerador como en el denominador, cosa que automáticamente ocurre en la cuerda bosónica en 26 dimensiones y en las fermiónicas en 10. De forma que únicamente nos interesa el cociente de dos  $\sigma$ s:

$$\frac{\sigma(z)}{\sigma(w)} = \frac{\vartheta(z - \sum_i p_i + \Delta_g)}{\vartheta(w - \sum_i p_i + \Delta_g)} \prod_i \frac{E(w, p_i)}{E(z, p_i)} \quad (1.43)$$

Los  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, g$  son puntos arbitrarios de  $\Sigma_g$ .

A partir de (1.41) y (1.42) podemos construir inmediatamente el integrando de la constante cosmológica para  $g > 1$ . Tomando diferenciales cuadráticos duales a los diferenciales de Beltrami en (1.9), tenemos [17]

$$\mathcal{W}_g(m) = \frac{\mathcal{Z}_2(x_1, \dots, x_{3(g-1)})}{\det b_i(x_j)} \mathcal{Z}_1^{-13} \quad (1.44)$$

Utilizando los resultados del Apéndice B es fácil ver que en el límite en que un ciclo de homología no trivial tiende a cero, esta expresión verifica el teorema de Belavin-Knizhnik con  $\mathcal{W}_{g-1}$  como coeficiente del término en  $\frac{d\delta}{\delta^2}$ , y que es fundamental el comportamiento de los diferenciales cuadráticos holomorfos. Para  $\mathcal{D}_i$  con  $i \neq 0$  ("límite de factorización") lo mismo ha sido comprobado en la referencia [17]. En este caso, el coeficiente de  $\frac{d\delta}{\delta^2}$  es  $\mathcal{W}_i \wedge \mathcal{W}_{g-i}$ .

Bajo la transformación modular (A.11), los determinantes quirales (1.40) se transforman de acuerdo con [17]:

$$\det \nabla_\lambda^z(\tau') = \epsilon(T)^{2/3} \det \nabla_\lambda^z(\tau), \quad (\lambda \in \mathcal{Z}) \quad (1.45)$$

$$\det_{e'} \nabla_{\lambda}^z(\tau') = \epsilon(T)^{2/3} e^{i\pi\varphi(e,\lambda)} \det_e \nabla_{\lambda}^z(\tau), \quad (\lambda \in \mathcal{Z} + \frac{1}{2}) \quad (1.46)$$

$$\varphi(e, \lambda) = \varphi(T, e) + (2\lambda - 1)(\vec{\alpha}^t, \text{Diag} AB^t + \vec{\beta}^t, \text{Diag} CD^t) \quad (1.47)$$

$$\epsilon(T)^8 = 1 \quad (1.48)$$

con  $e = \begin{bmatrix} \vec{\alpha} \\ \vec{\beta} \end{bmatrix}$  y  $\tau'$ ,  $e'$  y  $\varphi(T, e)$  dadas por (A.14), (A.17) y (A.22), respectivamente.

También podemos definir los determinantes quirales a partir de integrales funcionales de teorías de  $\lambda - (1 - \lambda)$ -diferenciales conmutantes, que denotaremos por sistemas  $\beta\gamma$ , y con la acción:

$$\mathcal{S}[\beta\gamma] = \int_{\Sigma_g} \gamma \bar{\partial}_{\lambda} \beta \quad (1.49)$$

El número de modos cero es el mismo que en las teorías  $bc$  (anticommutantes), pero ahora la integral funcional se hace infinita en vez de anularse, y debemos introducir tantas funciones delta de Dirac como modos cero haya.

Tenemos entonces las relaciones [19]:

$$\langle \prod_{a=1}^{I_\lambda} \delta(\beta(z_a)) \rangle = (\langle \prod_{i=1}^{I_\lambda} b(z_i) \rangle)^{-1} \quad (1.50)$$

$$\frac{\langle \prod_{a=1}^{I_\lambda} \delta(\beta(z_a)) \beta(z) \gamma(w) \rangle}{\langle \prod_{a=1}^{I_\lambda} \delta(\beta(z_a)) \rangle} = \frac{\langle \prod_{i=1}^{I_\lambda} b(z_i) b(z) c(w) \rangle}{\langle \prod_{i=1}^{I_\lambda} b(z_i) \rangle} \quad (1.51)$$

$$\langle \Theta \rangle \equiv \int \mathcal{D} \dots \Theta e^{-S[\dots]} \quad (1.52)$$

Las funciones de correlación de las teorías  $\beta - \gamma$  se han calculado a través de las reglas de "bosonización" [20] [21]:

$$\beta = e^{-\phi} \partial \xi \quad (1.53)$$

$$\gamma = e^{\phi} \eta \quad (1.54)$$

$$\delta(\beta) = e^{\phi} \quad (1.55)$$

$$\delta(\gamma) = e^{-\phi} \quad (1.56)$$

donde  $\phi$  es un campo escalar, bosónico, con la carga en el infinito apropiada y el par  $\eta\xi$  forma una teoría  $bc$  con el resultado para la amplitud más general en el caso  $\lambda = \frac{3}{2}$  que nos interesa:

$$\langle \prod_{i=0}^n \xi(x_i) \prod_{j=1}^n \eta(y_j) \prod_k e^{q_k \phi(z_k)} \rangle_e = \frac{\prod_{j=1}^n \mathcal{Z}_{e, \frac{3}{2}}(-y_j + \sum(x-y) + \sum qz)}{\prod_{i=0}^n \mathcal{Z}_{e, \frac{3}{2}}(-x_i + \sum(x-y) + \sum qz)} \quad (1.57)$$

$$\sum_k q_k = 2(g-1) \quad (1.58)$$

Observemos que el caso  $n = 0$  obedece (1.50), o sea, es el inverso de una función de correlación fermiónica, y que, en general, el denominador contiene siempre un factor más que el denominador.

Ahora podemos construir teorías, como combinaciones invariantes modulares de estos determinantes, libres de anomalías locales (teorema de Belavin-Knizhnik) y globales. Así podemos enfocar la construcción de la supercuerda heterótica.

## 1.2 Supercuerdas

### 1.2.1 La cuerda fermiónica

La (super-) cuerda fermiónica es la generalización supersimétrica (es decir, con supergravedad bidimensional) de la cuerda bosónica [22] [19] [8]. Se basa en la acción en el superespacio (vease, por ejemplo [23])

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} \int d^2x d^2\theta \mathcal{L} \quad (1.59)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} E D_\alpha \mathbf{X}^\mu D^\alpha \mathbf{X}^\mu \quad (1.60)$$

que es la (super-) generalización natural de la acción de Polyakov (pasamos de los campos  $X^\mu$  a los supercampos  $\mathbf{X}^\mu$  y de la métrica  $g_{\alpha\beta}$  sobre las superficies que barren las cuerdas a los "super-vierbein"  $E^M$  (cuyo superdeterminante es  $E$ ) sobre "super-superficies"<sup>3</sup>) y que se reduce a la acción de Brink-di Vecchia-Howe [24] en el espacio ordinario, al adoptar el gauge de Wess-Zumino. Que el modelo descrito por esta acción tiene un espectro espacio-temporal ("índices  $\mu$ ") también supersimétrico no es, ni mucho menos, obvio en esta formulación. Es más: la supersimetría espacio-temporal se alcanza sólo después de truncar de forma conveniente el espectro. La truncación del espectro que elimina además los taquiones es la "proyección GSO" [25][26]. Hay otras "proyecciones" como por ejemplo la que conduce a la cuerda heterótica  $O(16) \times O(16)$  [27], una teoría sin taquiones en el espectro, pero sin supersimetría.

Otra posibilidad sería utilizar la acción de la supercuerda de Green y Schwarz, más difícil de cuantizar (su cuantización exige infinitos "fantasmas" de "fantasmas", pero expresamente supersimétrica en el espacio-tiempo desde el principio. Nosotros hemos optado por la primera opción, más desarrollada hasta el momento en cálculos a más de un loop.

En la cuantización de (1.60) aparecen conceptos que son los (super-) análogos de los que encontramos al cuantizar la acción de Polyakov, como gauge superconforme, "super-superficies" de Riemann, espacio supermodular  $s\mathcal{M}_g$ , etc. Destacaremos aquí varios aspectos que nos interesarán más tarde.

---

<sup>3</sup>El término es extremadamente desafortunado en castellano, pero creo que no viviré para ver que la Real Academia busca uno más apropiado.

$s\mathcal{M}_g$  es una supervariiedad con  $3(g - 1)$  dimensiones complejas pares y  $2(g - 1)$  dimensiones impares, que se corresponden, respectivamente, con el número de diferenciales cuadráticos (que son los antifantasma de Fadeev-Popov anticonmutantes,  $b$ , correspondientes a las reparametrizaciones) holomorfos y con el número de  $\frac{3}{2}$ -diferenciales (que son los antifantasma conmutantes,  $\beta$ , correspondientes a la parte impar de las super-reparametrizaciones) holomorfos. Los fantasmas correspondientes son los campos conmutante y anticonmutante  $c$  y  $\gamma$ . El papel que los diferenciales de Beltrami  $\mu_i$  juegan respecto de los diferenciales cuadráticos holomorfos  $b_i$ , y las coordenadas de  $\mathcal{M}_g$  lo juegan aquí  $(-\frac{1}{2}, 1)$ -diferenciales  $\chi_a$  (gravitinos) respecto de los  $\frac{3}{2}$ -diferenciales holomorfos  $\beta_a$  y las coordenadas anticonmutantes de  $s\mathcal{M}_g$ .

$s\mathcal{M}_g$  juega aquí el papel análogo al de  $\mathcal{M}_g$  para la cuerda bosónica: las integrales funcionales sobre los supercampos de la cuerda fermiónica han de reducirse a integrales de superdeterminantes de operadores que actúan sobre los supercampos sobre  $s\mathcal{M}_g$ . Sólo sabemos hacer integrales sobre supervariiedades en dos pasos: integrando primero sobre las coordenadas anticonmutantes y luego sobre las conmutantes (que serían las de una variedad ordinaria). Podríamos esperar así obtener integrales sobre  $\mathcal{M}_g$  de determinantes de operadores actuando sobre los campos componentes<sup>4</sup>. Sin embargo, este proceso sólo es plenamente satisfactorio cuando la estructura de la supervariiedad es trivial: las coordenadas anticonmutantes se comportan como una fibra sobre el espacio base que sería la variedad ordinaria que obtenemos al hacer cero el "alma" de todas las coordenadas (al anular todas las componentes nilpotentes de éstos). En este caso, (supervariiedad "split") la respuesta que obtenemos al integrar es única e independiente de las coordenadas anticonmutantes escogidas. En caso contrario, las integrales sobre dos conjuntos distintos de coordenadas anticonmutantes cambian los límites de la integral ordinaria resultante por un supernúmero que sólo tiene alma, y el integrando por una derivada total. Hay que anular las almas de los límites para integrar, de forma que el resultado final es distinto. En este momento no sabemos, en general, si  $s\mathcal{M}_g$  es split o no, salvo para  $g = 1$ , caso en que

---

<sup>4</sup>En realidad, en el paso de  $s\mathcal{M}_g$  a  $\mathcal{M}_g$  aparecen las distintas estructuras de espín posibles. Como ninguna de ellas es invariante modular por separado, el integrando habrá de ser una combinación lineal de productos de determinantes para una determinada estructura de espín. Los coeficientes han de ser tales que la combinación sea invariante modular. (La proyección GSO, y la que produce la teoría  $O(16) \times O(16)$  son equivalentes a elecciones particulares de estos coeficientes [28][29][27]).



sí lo es.

Esto implica que, hasta donde sabemos, el integrando sobre  $\mathcal{M}_g$  de la constante cosmológica de la cuerda fermiónica está ambiguamente definido: dos elecciones distintas de base de  $\frac{3}{2}$ -diferenciales holomorfos o de gravitinos conducen a constantes cosmológicas que se diferencian por la integral de una derivada total en  $\mathcal{M}_g$  [21] que no sabemos si es nula o no. La misma constante cosmológica es una derivada total en  $\mathcal{M}_g$ , y no está claro si su cancelación, esperable por supersimetría espacio-temporal<sup>5</sup> [32] se produce tras la integración o bien antes de integrar, punto a punto en  $\mathcal{M}_g$ , como ocurre a un loop. Lograr una cancelación punto a punto en  $\mathcal{M}_g$  es el objetivo de los llamados "gauges unitarios" (véanse [33], [34], [35], [36], y, especialmente [37] y [38] donde se aduce que estos gauges no rompen invariancia modular, dan una cancelación punto a punto en  $\mathcal{M}_g$  y proporcionan amplitudes que factorizan correctamente), basados directa o indirectamente en las identidades de Riemann (A.67). Posteriormente discutiremos estos gauges.

La constante cosmológica de la supercuerda se descompone sobre  $s\mathcal{M}_g$  en una parte superholomorfa por otra antiperholomorfa<sup>6</sup> [39]. Tratando cada una por separado tenemos también factorización holomorfa en  $\mathcal{M}_g$ . El análogo, pues, del teorema de Belavin-Knizhnik nos dice que

$$\mathcal{Z}_g^{(Ferm)} = \int_{\mathcal{M}_g} (det \Im m \tau)^{-5} \mathcal{U} \wedge \bar{\mathcal{U}} \quad (1.61)$$

donde  $\mathcal{U}$  está definida salvo por una derivada total y es la suma

$$\mathcal{U} = \sum_e \phi(e) \mathcal{U}_e \quad (1.62)$$

$\mathcal{U}_e$  es la contribución de la estructura de espín  $e$  y  $\phi(e)$  es una fase que fija la normalización relativa de estas contribuciones que debe que dar completamente fijada por invariancia modular y unitariedad [28]. Para ello es necesario que las contribuciones  $\mathcal{U}_e$  estén libres de anomalías globales [18] pues,

---

<sup>5</sup>Por ejemplo, los argumentos de este artículo, que invoca la cancelación de la constante cosmológica a todo orden, están completamente invalidados por la existencia de polos espúeos en las funciones de correlación de las corrientes de supersimetría encontradas en [21], estrechamente relacionadas, probablemente, con los términos de contacto de la referencia [30] y de [31], en que se presenta una posible solución al problema de la ambigüedad.

<sup>6</sup>O superantiholomorfa?

de lo contrario, tal construcción es imposible. Posteriormente veremos cómo determinar estas fases de forma constructiva para la supercuerda heterótica.

En cuanto al comportamiento en la frontera de  $\mathcal{M}_g$  de  $\mathcal{U}$ , nos es, por el momento, desconocido. Sin embargo, además de cálculos con las expresiones existentes, que veremos más adelante, podemos conjeturar cuál será este comportamiento, por analogía con la cuerda bosónica, a través de un estudio del espectro de la cuerda fermiónica antes y después de truncarlo con la proyección GSO. Además podemos estudiar la expresión de la constante cosmológica a un loop, bien conocida. Los resultados no tendrán, quizá, el valor de un teorema, pero hemos de esperar que los cálculos directos sobre los determinantes y funciones de correlación los confirmen, si es que la suma sobre estructuras de espín propuesta en [28] se refiere a la misma teoría que tenemos a un loop.

Los estados de menor masa del espectro de una mitad quirral de la cuerda fermiónica son un taquión de masa  $m^2 = -\frac{1}{2}$  y estados de masa cero (vectores etc.) en el sector Neveu-Schwarz y estados de masa cero en el sector de Ramond (condiciones de contorno antiperiódicas y periódicas a lo largo de la cuerda (dirección "espacial" en la superficie de Riemann), respectivamente). La proyección GSO, a este nivel del espectro, simplemente elimina el taquión del sector de Neveu-Schwarz. Traspasando esto a estructuras de espín, si hacemos degenerar el ciclo  $A_1$  (tomamos este ciclo como dirección espacial, de forma que los distintos estados de la cuerda se propagan a su través), esperamos que el siguiente desarrollo (salvo signos!) en la coordenada en  $\mathcal{M}_g$   $\delta$  sea válido:

Sector Ramond

$$e = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & - \\ - & - \end{bmatrix}, \quad \mathcal{U}_e \sim \frac{d\delta}{\delta} \{C(e) + \mathcal{O}(\delta)\} \quad (1.63)$$

## Sector Neveu-Schwarz

$$e = \begin{bmatrix} 0 & - \\ - & - \end{bmatrix}, \quad \mathcal{U}_e \sim \frac{d\delta}{\delta} \{A(e)\delta^{-\frac{1}{2}} + B(e) + \mathcal{O}(\delta)\} \quad (1.64)$$

Los signos dependerán de la estructura de espín concreta y se combinarán con  $\phi(e)$  de forma que desaparezca el término en  $\delta^{-\frac{3}{2}}$  del sector Neveu-Schwarz:

$$\begin{aligned} e = \begin{bmatrix} 0 & \vec{\alpha}_{(g-1)} \\ 0 & \vec{\beta}_{(g-1)} \end{bmatrix}, \quad \phi(e)\mathcal{U}_e &= \frac{d\delta}{\delta} \left\{ A \begin{bmatrix} \vec{\alpha}_{(g-1)} \\ \vec{\beta}_{(g-1)} \end{bmatrix} \delta^{-\frac{1}{2}} + B(e) + \mathcal{O}(\delta) \right\} \\ e = \begin{bmatrix} 0 & \vec{\alpha}_{(g-1)} \\ \frac{1}{2} & \vec{\beta}_{(g-1)} \end{bmatrix}, \quad \phi(e)\mathcal{U}_e &= \frac{d\delta}{\delta} \left\{ -A \begin{bmatrix} \vec{\alpha}_{(g-1)} \\ \vec{\beta}_{(g-1)} \end{bmatrix} \delta^{-\frac{1}{2}} + B(d) + \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{O}(\delta) \right\} \end{aligned} \quad (1.65)$$

Veamos que esto es exactamente así a primer orden en teoría de perturbaciones. En  $g = 1$  tenemos (salvo constantes numéricas tipo 2,  $\pi$ ,  $i$ ):

$$\mathcal{U}_e = \eta^{-12} \vartheta^4 [e](0|\tau) \quad (1.66)$$

$$e = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \phi(e) = e^{2\pi i(a+b)} \quad (1.67)$$

de forma que

$$\mathcal{U} = \sum_{e \text{ pares}} \phi(e)\mathcal{U}_e = \eta^{-12} \left\{ \vartheta^4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \vartheta^4 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} - \vartheta^4 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\} d\tau \quad (1.68)$$

es proporcional a la (única) identidad de Riemann de género 1 y se anula.  $\eta$  es la función eta de Dedekind. Los signos que aparecen en la función de partición<sup>7</sup>

---

<sup>7</sup>Los exponentes de la obstrucción a la factorización holomorfa completa,  $\Im m\tau$ , son diferentes a género  $g = 1$  tanto para la cuerda bosónica disminuyen en una unidad.

$$\mathcal{Z}^{(Ferm)} = \int_{\mathcal{M}_{(g=1)}} (\Im m \tau)^{-6} \mathcal{U} \wedge \bar{\mathcal{U}} \quad (1.69)$$

cuando la desarrollemos en el parámetro  $\delta$ , podemos entenderlos como signos de estadística espacio-temporal, y podemos interpretar la cancelación de la función de partición como la cancelación de contribuciones de fermiones y bosones espacio-temporales.

El comportamiento de  $\mathcal{U}_e$  en el límite de degeneración (que, por otra parte, es único en  $g = 1$ : no hay límite de factorización) se obtiene fácilmente a partir de la propiedad (1.19) y los desarrollos (1.23). Tenemos

$$\eta^{-12} = q^{-1}(1 + 12q + \dots) \quad (1.70)$$

y, finalmente

Sector Neveu-Schwarz

$$\begin{aligned} e &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \phi(e)\mathcal{U}_e &= 16\vartheta^{-4} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \vartheta^{-4} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = q^{-1}(1 + 8q + \dots)d\tau = \\ &= \delta^{-\frac{1}{2}}(1 + 8\delta^{\frac{1}{2}} + \dots) \frac{d\delta}{2\pi i \delta} \sim \frac{d\delta}{\delta^{\frac{3}{2}}}(1 + 8\delta^{\frac{1}{2}} + \dots) \quad (1.71) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ \phi(e)\mathcal{U}_e &= 16\vartheta^{-4} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \vartheta^{-4} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \sim \frac{d\delta}{\delta^{\frac{3}{2}}}(1 - 8\delta^{\frac{1}{2}} + \dots) \quad (1.72) \end{aligned}$$

Sector Ramond

$$\begin{aligned} e &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \phi(e)\mathcal{U}_e &= 16\vartheta^{-4} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \vartheta^{-4} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \sim \frac{d\delta}{\delta^{\frac{3}{2}}}(\delta^{\frac{1}{2}} + 64\delta^2 + \dots) \quad (1.73) \end{aligned}$$

Podemos repetir el cálculo con similares resultados con la expresión en el formalismo de superficies de Riemann hiperelípticas[14]:

$$e = (ij||kl), \quad \mathcal{U}_e(\mathfrak{S}m\tau)^{-6} = \frac{\prod_{i=1}^4 da_i}{dV_{pr}} T^{-6} \left( \prod_{i<j} a_{ij} \right)^{-12} \mathcal{Q}_e \quad (1.74)$$

donde

$$\mathcal{Q}_e = \mathcal{Q}(a_i a_j || a_k a_l) \quad (1.75)$$

definida en el Apéndice A es proporcional a la theta de Riemann con la característica apropiada y el resto de la notación es la del caso bosónico.

Aquí la distinción entre sector Ramond y sector Neveu-Schwarz pasa por la elección de una base de homología. Llamamos ciclo  $A$  al que rodea únicamente los dos puntos de rama que hacemos degenerar a uno sólo. De esta forma el ciclo  $A$  es el que degenera. Entonces podemos dividir las estructuras de espín en dos grupos: aquellas que corresponden a particiones de los cuatro puntos de rama en las que los dos que hacemos degenerar están en el mismo grupo y las que no (sector Ramond y Neveu-Schwarz, respectivamente, si estudiamos la periodicidad en torno al ciclo  $A$ ). En cada uno de los dos casos, tenemos ( $a_1 \rightarrow a_2$ , por ejemplo):

**Sector Ramond**

$$\mathcal{Q}(a_1 a_2 || a_3 a_4) \sim \vartheta^4 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} (0||\tau) \sim \mathcal{O}(\delta^{\frac{1}{2}}) \quad (1.76)$$

**Sector Neveu-Schwarz**

$$\mathcal{Q}(a_1 a_i || a_2 a_j) \sim \vartheta^4 \begin{bmatrix} 0 \\ - \end{bmatrix} (0||\tau) \sim \mathcal{O}(1) \quad (1.77)$$

Salvo esta particularidad el comportamiento es completamente igual al orden más bajo.

El comportamiento de los términos de orden superior al primero es mucho más complicado de determinar en general. A un loop se cancelan entre sí

orden a orden, pero no sabemos si esto ocurre también a partir de  $g = 2$ . Sin embargo, aún sabemos algo más sobre el término dominante en el sector Ramond: la constante  $C(e)$ ,  $e = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \vec{\alpha}_{(g-1)} \\ x & \vec{\beta}_{(g-1)} \end{bmatrix}$  es proporcional a la contribución de la estructura de espín  $\begin{bmatrix} \vec{\alpha}_{(g-1)} \\ \vec{\beta}_{(g-1)} \end{bmatrix}$ . Hemos señalado que, debido a la presencia de modos cero de los  $\frac{1}{2}$ -diferenciales, las estructuras impares no contribuyen a la constante cosmológica (observemos que esto es consistente con sumar sobre estructuras de espín para conseguir la invariancia modular ya que las estructuras pares se transforman irreduciblemente bajo el grupo modular). Si  $e = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \vec{\alpha}_{(g-1)} \\ \frac{1}{2} & \vec{\beta}_{(g-1)} \end{bmatrix}$  es par en  $\Sigma_g$ ,  $\begin{bmatrix} \vec{\alpha}_{(g-1)} \\ \vec{\beta}_{(g-1)} \end{bmatrix}$  es impar en  $\Sigma_{g-1}$ . De esto inmediatamente deducimos que

$$e = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & - \\ \frac{1}{2} & - \end{bmatrix}, \quad \mathcal{U}_e \sim \frac{d\delta}{\delta^{\frac{3}{2}}} \mathcal{O}(\delta^{\frac{3}{2}}) \quad (1.78)$$

Así que el orden más bajo ha de venir determinado por las estructuras sobre  $A_1$  y  $B_1$   $\begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$  y  $\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$  para cada grupo de características pares  $\begin{bmatrix} x & \vec{\alpha}_{(g-1)} \\ y & \vec{\beta}_{(g-1)} \end{bmatrix}$ . Es una tentación suponer que todos los signos, en este límite, van a ser los mismos que a un loop, tomando como referencia el loop que hacemos degenerar, pero en tanto en cuanto no es necesario para nuestros fines, no lo haremos, contentándonos con suponer que (1.63), (1.65) y (1.78) son válidas.

### 1.2.2 La supercuerda heterótica

A partir de las amplitudes vacío-vacío de la cuerda bosónica (con dieciseis dimensiones compactificadas haciendo el cociente de  $R^{16}$  por la red de raíces de  $E_8 \times E_8$  o de  $SO(32)/\mathcal{Z}_2$ , por ejemplo) y de la supercuerda fermiónica (1.13) y (1.61) construimos la de la supercuerda heterótica

$$\mathcal{Z}_g^{(Heter)} \stackrel{def}{=} \int_{\mathcal{M}_g} (\det \Im m \tau)^{-5} \mathcal{U} \wedge \overline{\mathcal{W}} \left( \begin{array}{c} E_8 \times E_8 \\ SO(32)/\mathcal{Z}_2 \end{array} \right) \quad (1.79)$$

El proceso para determinar el valor de  $\phi(e)$  está basado, como hemos dicho, en conseguir la invariancia modular del integrando. En esencia, consiste en definir la contribución de una estructura de espín  $d$ ,  $I(d)$

$$I(d) \stackrel{def}{=} \phi(d)(\det \mathfrak{S}m\tau)^{-5} \mathcal{U}_d \wedge \overline{\mathcal{W}} \left( \begin{array}{c} E_8 \times E_8 \\ SO(32)/\mathcal{Z}_2 \end{array} \right) \quad (1.80)$$

que se obtiene de otra  $e$  a través de la transformación modular  $T$ ,  $T(e) = d$  como el resultado de hacer la misma transformación modular a la contribución de ésta  $I(e)$ [28]:

$$I(d) \stackrel{def}{=} T(I(e)) \quad (1.81)$$

Esta definición es consistente e independiente de la transformación modular  $T$  que utilicemos en tanto en cuanto transformaciones modulares que dejen una estructura de espín  $f$  invariante dejen también invariante  $I(f)$ , lo que es equivalente a la ausencia de anomalías gravitacionales globales, demostrada por E. Witten [18].

Es el momento de describir con más detalle  $\mathcal{Z}_g^{(Heter)}$ . En términos de los determinantes de los distintos campos de las cuerdas bosónica y fermiónica tenemos [29]:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_g^{(Heter)} &= \int_{\mathcal{M}_g} \prod_{i=1}^{3(g-1)} d^2 m_i \frac{|\det \langle \mu_i | b_k \rangle|^2}{(\det \mathfrak{S}m\tau)^5} \left( \frac{\det' \Delta_{-1}}{\det \langle b_i | b_j \rangle} \right) \times \\ &\times \left( \frac{\det' \Delta_0}{A \det \mathfrak{S}m\tau} \right)^{-5} \sum_{e, f, g \text{ pares}} C(e, f, g) (\det \nabla_{\frac{1}{2}, f}^z)^8 (\det \nabla_{\frac{1}{2}, g}^z)^8 \times \\ &\times \left( \frac{\det' \Delta_{-\frac{1}{2}, e}}{\det \langle \beta_a | \beta_b \rangle_e} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\det \langle \chi_a | \beta_b \rangle_e} \times \\ &\times \int \prod_{a=1}^{2(g-1)} d^2 w_a \det_e \chi_a(w_b) \langle \langle T_F(w_1) \dots T_F(w_{2(g-1)}) \rangle \rangle_e \end{aligned} \quad (1.82)$$

donde  $T_F(z)$  es la parte fermiónica del (super-) tensor energía-momento total: de los campos de materia  $X^\mu$  y  $\psi^\mu$  ( $\mu = 1, \dots, 10$ ) y de los fantasmas  $bc, \beta\gamma$ :

$$T_F = \frac{1}{2} \psi^\mu \partial X^\mu + c \partial \beta + \frac{3}{2} \partial c \beta - \frac{1}{2} \gamma b \quad (1.83)$$

y se sobreentiende que el correlador  $\langle\langle \Theta \rangle\rangle$  incluye la inserción de  $3(g-1)$  fantasmas fermiónicos  $b$  y  $2(g-1)$  deltas de Dirac  $\delta(\beta)$  para absorber los modos cero y está normalizado:

$$\langle\langle \Theta \rangle\rangle \stackrel{def}{=} \frac{\langle \Theta \prod_{i=1}^{3(g-1)} b(z_i) \prod_{a=1}^{2(g-1)} \delta(\beta(w_a)) \rangle_e}{\langle \prod_{i=1}^{3(g-1)} b(z_i) \prod_{a=1}^{2(g-1)} \delta(\beta(w_a)) \rangle_e} \quad (1.84)$$

Las constantes  $C(e, f, g)$  son

$$C(e, f, g) = \begin{cases} \phi(e) (E_8 \times E_8) \\ \phi(e)\delta_{fg} (SO(32)/\mathcal{Z}_2) \end{cases} \quad (1.85)$$

dependiendo del grupo gauge.

Esta expresión de la constante cosmológica de la cuerda heterótica es independiente de las bases de diferenciales de Beltrami, gravitinos, diferenciales cuadráticos y  $\frac{3}{2}$ -diferenciales que usemos.

Una expresión ligeramente distinta se obtiene si partimos de una acción para la supercuerda fermiónica que incluye los fantasmas y superfantasmas desde el principio y utilizamos los modos cero de los gravitinos

$$\chi_a \sim \delta^{(2)}(z - z_a) \quad (1.86)$$

En este caso aparece dentro del correlador la combinación

$$Y(z_a) = T_F(z_a)\delta(\beta(z_a)) \quad (1.87)$$

Este producto de operadores también aparece en la primera expresión que hemos dado, utilizando (1.86) y llevando  $T_F$  y  $\delta(\beta)$  al mismo punto  $z_a$ . Consiguientemente, no aparece como un producto normalmente ordenado. Así se puede identificar con el "picture changing operator" (PCO)[20]

$$Y \equiv \{\mathcal{Q}_{BRST}, \xi\} \quad (1.88)$$

y la mitad quiral de la supercuerda fermiónica viene dada por

$$\mathcal{U}_e = \prod_{i=1}^{3(g-1)} dm_i \frac{\det \langle \eta_i | b_j \rangle}{\det b_i(x_j)} \langle \prod_{a=1}^{2(g-1)} Y(z_a) \prod_{i=1}^{3(g-1)} b(x_i) \rangle_e \quad (1.89)$$

Puesto que los correladores normalizados  $\langle\langle \Theta \rangle\rangle$  son covariantes modulares, usando las expresiones (1.45)-(1.48) podemos determinar  $\phi(e)$



(también a partir de los correladores normales, que han de transformarse como los determinantes quirales) . Para las teorías  $E_8 \times E_8$  y  $SO(32)/\mathcal{Z}_2$  es fácil ver que  $\phi(e)$  proviene únicamente de la combinación de estos dos factores

$$F(e, \tau) = \frac{(\det_e \nabla_{\frac{1}{2}}^z)^5}{\det_e \nabla_{\frac{3}{2}}^z}(\tau) \quad (1.90)$$

$$B(\tau) = \frac{\det \nabla_2^z}{(\det \nabla_0^z)^5} \quad (1.91)$$

$F(e, \tau)$  contiene la dependencia en la estructura de espín  $e$ . De acuerdo con la prescripción (1.81) tomamos una estructura de espín de referencia  $e_0 = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{bmatrix}$ , por pura conveniencia, y definimos para la estructura de espín  $e = \begin{bmatrix} \vec{\alpha} \\ \vec{\beta} \end{bmatrix}$

$$F(e, \tau)B(\tau) \stackrel{def}{=} F(e_0, \tau')B(\tau') = \phi(e) \frac{(\det_e \nabla_{\frac{1}{2}}^z)^5}{\det_e \nabla_{\frac{3}{2}}^z} \frac{\det \nabla_2^z}{(\det \nabla_0^z)^5}(\tau) \quad (1.92)$$

donde  $T$  es (A.11),  $\tau'$  viene dada por (A.14) y de  $e$  se obtiene  $e_0$  utilizando (A.17):  $e_0 = T(e)$ . (Obviamente,  $T$  depende de la estructura de espín  $e$ ).

De esta forma tenemos

$$F(e_0, \tau') = \frac{(\det_{T(e)} \nabla_{\frac{1}{2}}^z)^5}{\det_{T(e)} \nabla_{\frac{3}{2}}^z}(T(\tau)) = \epsilon^{\frac{8}{3}}(T) e^{4\pi i(\vec{\alpha}^t \vec{\delta} + \vec{\beta}^t \vec{\gamma})} F(e, \tau) \quad (1.93)$$

De forma análoga tenemos

$$B(\tau') = \epsilon^{\frac{-8}{3}}(T)B(\tau) \quad (1.94)$$

de lo que deducimos que la proyección GSO viene dada por

$$\phi(e) = e^{4\pi i(\vec{\alpha}^t \vec{\delta} + \vec{\beta}^t \vec{\gamma})} \quad (1.95)$$

y vale siempre +1 (A.18), lo cual está de acuerdo con otros cálculos [35] [40] basados en las mismas expresiones para los determinantes quirales, y en que se utiliza como requisito para determinar los signos de la proyección GSO que las funciones de correlación en las que intervengan vértices de emisión de fermiones  $V_f(z)$  sean periódicas en  $z$  en torno a ciclos de homología no triviales.

Para acabar, hablemos del "teorema de Belavin-Knizhnik" para la cuerda heterótica. Todo cuanto se refiere a la factorización holomorfa ha de ser trivial, por construcción. El comportamiento del integrando de la constante cosmológica es también una consecuencia de su construcción y se deduce de los de la cuerda bosónica (con dieciseis dimensiones compactificadas es el mismo) y fermiónica. En concreto, si suponemos válidas (1.63) y (1.65), lo cual parece razonable si suponemos que la proyección GSO utilizada elimina los taquiones del espectro, tendremos

Sector Ramond

$$\begin{aligned}
e_{(g)} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \vec{\alpha}_{(g-1)} \\ 0 & \vec{\beta}_{(g-1)} \end{bmatrix} \\
I(e_{(g)})(\det \mathfrak{S} m \tau)^5 &\sim [D + \mathcal{O}(\bar{\delta})] \frac{d\bar{\delta}}{\bar{\delta}^2} \wedge \\
&\wedge [C(e)\delta^{\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\delta^{\frac{3}{2}})] \frac{d\delta}{\delta^{\frac{3}{2}}} \\
&\sim [DC(e)\delta^{\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\delta)] \frac{d|\delta| \wedge d\tau_{11}^{(1)} e^{i\pi\tau_{11}^{(1)}}}{|\delta|^{\frac{5}{2}}} \quad (1.96)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{(g)} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \vec{\alpha}_{(g-1)} \\ \frac{1}{2} & \vec{\beta}_{(g-1)} \end{bmatrix} \\
I(e_{(g)})(\det \mathfrak{S} m \tau)^5 &\sim \mathcal{O}(\delta^{\frac{3}{2}}) \frac{d|\delta| \wedge d\tau_{11}^{(1)} e^{i\pi\tau_{11}^{(1)}}}{|\delta|^{\frac{5}{2}}} \quad (1.97)
\end{aligned}$$

## Sector Neveu-Schwarz

$$\begin{aligned}
 e_{(g)} &= \begin{bmatrix} 0 & \vec{\alpha}_{(g-1)} \\ 0 & \vec{\beta}_{(g-1)} \end{bmatrix} \\
 I(e_{(g)})(\det \mathfrak{S}m\tau)^5 &= [\overline{DA}(\begin{bmatrix} \vec{\alpha}_{(g-1)} \\ \vec{\beta}_{(g-1)} \end{bmatrix}) + \mathcal{O}(\delta^{\frac{1}{2}})] \frac{d|\delta| d\tau_{11}^{(1)} e^{i\pi\tau_{11}^{(1)}}}{|\delta|^{\frac{5}{2}}} \quad (1.98)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_{(g)} &= \begin{bmatrix} 0 & \vec{\alpha}_{(g-1)} \\ \frac{1}{2} & \vec{\beta}_{(g-1)} \end{bmatrix} \\
 I(e_{(g)})(\det \mathfrak{S}m\tau)^5 &= [-\overline{DA}(\begin{bmatrix} \vec{\alpha}_{(g-1)} \\ \vec{\beta}_{(g-1)} \end{bmatrix}) + \mathcal{O}(\delta^{\frac{1}{2}})] \frac{d|\delta| d\tau_{11}^{(1)} e^{i\pi\tau_{11}^{(1)}}}{|\delta|^{\frac{5}{2}}} \quad (1.99)
 \end{aligned}$$

utilizando  $\text{Arg}\delta = \tau_{11}^{(1)}$  (Apéndice B).

La integral sobre  $\tau_{11}^{(1)}$  es un elemento a tener muy en cuenta aquí, puesto que, integradas entre los límites naturales del parámetro  $\tau_{11}^{(1)}$  (el "twist" de la "plumbing fixture"), las potencias pares de  $e^{i\pi\tau_{11}^{(1)}}$  son eliminadas. A género uno, esto nos indica que los modos correspondientes de la cuerda heterótica son eliminados del espectro.

Para comprobar la validez de nuestras hipótesis, nada mejor que la comparación con cálculos explícitos. A género uno la comprobación va a ser directa e inmediata. A género dos se van a poner de manifiesto los problemas de que hablamos en la introducción a esta sección. Primeramente hemos tenido que elegir una de las expresiones que se pueden encontrar en la literatura. La elección de una expresión en el formalismo de superficies hiperelípticas está motivada por la simplicidad de la misma, básicamente. La simplicidad es mayor, aún, de lo que cabe esperar, al estar situados los dos PCOs en dos puntos de rama.

### Género $g = 1$

Los ingredientes básicos son (1.68) y la función de partición de 26 bosones quirales, 16 de ellos compactificados en los toros  $R^{16}/\Gamma_{16}$  o  $R^{16}/\Gamma_8 \oplus \Gamma_8$  para los grupos gauge  $SO(32)/\mathcal{Z}_2$  y  $E_8 \times E_8$ , respectivamente. La compactificación tiene como único efecto sobre la función de partición (como veremos con más detalle en el siguiente capítulo) la aparición de un factor nuevo correspon-

diente a la contribución de los solitones. Esta contribución se puede expresar a través de una "función theta"<sup>8</sup> correspondiente a la red:  $\theta_{\Gamma_{16}}(\tau)$  y  $\theta_{\Gamma_8 \oplus \Gamma_8}(\tau)$ [41]. La función theta para ambas redes es la misma (lo que va a corresponder al hecho de que las dos teorías correspondientes tienen el mismo número de estados a cada nivel de energía): podemos probar a través de la identidad de Riemann de género 1 que

$$\theta_{\Gamma_{16}} = \frac{1}{2} \sum_{\text{epares}} \theta^{16}[e](0|\tau) = \quad (1.100)$$

$$= \theta_{\Gamma_8 \oplus \Gamma_8} = \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\text{epares}} \theta^8[e](0|\tau) \right\}^2 = \quad (1.101)$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \theta_{\Gamma} = 1 + 480 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_7(m) q^{2m} \quad (1.102)$$

donde la función aritmética  $\sigma_k(m)$  asigna a cada natural  $m$  la suma de las  $k$ -ésimas potencias de sus divisores.

Tenemos, entonces (salvo constantes tipo 2,  $\pi$ ...)

$$I(e)(\Im m\tau)^6 = \phi(e) \overline{\eta^{-24} \theta_{\Gamma}} d\bar{\tau} \wedge \eta^{-12} \vartheta^4[e] d\tau \quad (1.103)$$

con  $\phi(e)$  dada por (1.67), y, desarrollando en el parámetro  $\delta = e^{2\pi i\tau} = q^2 = |\delta| e^{2\pi i\tau^{(1)}}$ , tenemos

### Sector Ramond

$$I\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}\right)(\Im m\tau)^6 \sim \frac{d|\delta| d\tau^{(1)} e^{\pi i\tau^{(1)}}}{|\delta|^{\frac{5}{2}}} [16|\delta|^{\frac{1}{2}} e^{i\pi\tau^{(1)}} + \mathcal{O}(\delta^{\frac{3}{2}})] \quad (1.104)$$

---

<sup>8</sup>No se debe confundir con una theta de Riemann, aunque existan relaciones entre unas y otras, desde el punto de vista físico, a través de la bosonización ("inversa") de los bosones quirales compactificados y su representación en términos de fermiones, cuyo determinante funcional es siempre proporcional a la theta de Riemann correspondiente a la cuarta.

## Sector Neveu-Schwarz

$$\begin{aligned}
 I\left(\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}\right)(\mathfrak{S}m\tau)^6 &\sim \frac{d|\delta|d\tau^{(1)}e^{\pi i\tau^{(1)}}}{|\delta|^{\frac{5}{2}}}[1-8|\delta|^{\frac{1}{2}}e^{i\pi\tau^{(1)}} + \\
 &+ \mathcal{O}(\delta)] \tag{1.105}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)(\mathfrak{S}m\tau)^6 &\sim \frac{d|\delta|d\tau^{(1)}e^{\pi i\tau^{(1)}}}{|\delta|^{\frac{5}{2}}}[-1-8|\delta|^{\frac{1}{2}}e^{i\pi\tau^{(1)}} + \\
 &+ \mathcal{O}(\delta)] \tag{1.106}
 \end{aligned}$$

Observemos que el término en  $|\delta|^{-2}$  se anula idénticamente antes de integrar. Sin embargo, si esto no fuera así, puesto que este término va multiplicado por la fase  $e^{2\pi i\tau^{(1)}}$ , se anularía tras la integración.

**Género  $g = 2$** 

Tomando el límite  $z_b \rightarrow z(P_b \equiv a_b, b = 1, 2)$  en que los dos PCOs se sitúan en dos puntos de rama, Knizhnik [33] obtuvo la expresión:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}_{g=2}^{(Heter)} &= \sum_{e,f,g \text{ pares}} C(e, f, g) \int \prod_{i=1}^6 \frac{d^2 a_i}{dV_{pr}^2} T^{-5} \prod_{k<l}^6 \overline{(a_{kl})^{-3}} (a_{kl})^{-2} \{ \overline{\mathcal{Q}_f^2} \mathcal{Q}_g^2 \times \\
 &\times \{ \mathcal{P}^X \mathcal{Q}_e + \mathcal{P}_e^{gh} \mathcal{Q}_e \} \tag{1.107}
 \end{aligned}$$

donde, si  $e$  es la estructura de espín dada por la partición de subíndices de puntos de rama  $(\alpha_1^e \alpha_2^e \alpha_3^e || \beta_1^e \beta_2^e \beta_3^e)$ , entonces

$$a_i = z(P_i) \tag{1.108}$$

$$\mathcal{Q}_e = \prod_{i<j}^3 (a_{\alpha_i^e} - a_{\alpha_j^e})(a_{\beta_i^e} - a_{\beta_j^e}) \tag{1.109}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}^X &= \frac{5}{8} a_{12}^{-1} T^{-1} \{ a_{23} a_{24} a_{25} a_{26} \int d^2 z_1 d^2 z_2 \frac{(a_1 - z_1)(a_1 - z_2)}{(a_2 - z_1)(a_2 - z_2)} \left| \frac{z_{12}}{y(z_1)y(z_2)} \right|^2 \\
 &+ a_1 \leftrightarrow a_2 \} \tag{1.110}
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{P}_e^{gh} = \frac{1}{4} a_{12}^{-1} \sum_{i=1}^3 (a_1 - a_{\alpha_3^e})(a_1 - a_{\beta_i^e})(a_2 - a_{\beta_{i+1}^e})(a_2 - a_{\beta_{i+2}^e}) \tag{1.111}$$

si  $\alpha_2^e = 2$  (siempre tomamos  $\alpha_1 = 1$ ), y, si  $\beta_1^e = 2$ , entonces

$$\mathcal{P}_e^{gh} = \frac{1}{4} a_{12}^{-1} (a_1 - a_{\alpha_2^e}) (a_1 - a_{\alpha_3^e}) (a_2 - a_{\beta_2^e}) (a_2 - a_{\beta_3^e}) \quad (1.112)$$

$\mathcal{P}^X$  y  $\mathcal{P}^{gh}$  son las partes del correlador de los PCOs que corresponden a la parte de materia y la parte de fantasmas de éstos. La parte de materia no depende de la estructura de espín  $e$ . El resto de la notación es la del caso  $g = 2$  bosónico.

Podemos repetir aquí la discusión que hicimos sobre el significado de los sectores Ramond y Neveu-Schwarz para  $g = 1$  hiperelíptico. Observemos en la tabla (A.47) que todas las estructuras en las que 3 y 4 están en el mismo grupo de la partición, corresponden a fermiones periódicos respecto al ciclo  $A_1$  (sector Ramond  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & - \\ - & - \end{bmatrix}$ ), y lo contrario para el sector Neveu-Schwarz.

$\mathcal{Q}_e$  y  $\vartheta^4[e](\vec{0}|\tau)$  van a tener el mismo comportamiento.

Knizhnik, además, propone una elección de signos para la proyección GSO, que es, en el orden en que damos las estructuras de espín pares en (A.47):  $(+ - + - + - + + - +)$ . Observemos que esta elección es básicamente la elección de signos relativos de la identidad de Riemann  $\mathcal{RI}_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$  y que, incidentalmente, esta estructura de espín se corresponde con el divisor  $P_1 - \Delta$ . La elección de signos de Knizhnik está, en sus propias palabras, motivada por la cancelación de taquiones (polos), que es una de las características de la proyección GSO. Más aún, esta elección de signos hace que la parte de materia  $\mathcal{P}^X$  sea proporcional a la identidad de Riemann (no así la parte de los fantasmas  $\mathcal{P}_e^{gh}$ , pues depende de la estructura  $e$ ) y se anule idénticamente. La parte de los fantasmas también se anula a través de una identidad más complicada, quizá del tipo de las derivadas en las referencias [35][37] a partir de identidades de Riemann expresadas en términos de thetas. Sea como fuere, esta expresión no es invariante modular. A pesar de que obtenemos cero de forma "algebraica" y que al permutar los  $a_i$ s vamos a seguir obteniendo cero, el espíritu de la invariancia modular es que el integrando debe ser formalmente invariante. Además, los puntos donde colocamos los PCOs varían. Pero quizá el argumento más fuerte venga del estudio del comportamiento de la energía libre que se deriva de esta expresión, con las ideas del segundo capítulo, en el tercer capítulo, en el límite en que un asa degen-

era, pues el término de orden más bajo va a depender de qué asa hagamos degenerar, o de qué puntos de rama hacemos degenerar en uno sólo.

El comportamiento en dicho límite va a venir dominado completamente por el de las identidades de Riemann en el mismo, expuesto en el Apéndice B. El problema es que las identidades de Riemann, como decimos en el Apéndice A, no son invariantes modulares. Esto se manifiesta en el límite de degeneración a los órdenes más bajos (véase el Apéndice B). Aunque (para la identidad de Riemann asociada a una estructura de espín impar  $d_{(g)} = \begin{bmatrix} \vec{\alpha}_0 \\ \vec{\beta}_0 \end{bmatrix}$ ) el término de orden más bajo en  $\delta$  (como los demás) se anula, no se anula siempre de la misma forma. Podemos distinguir varios casos:

**1**  $d_{(g-1)}$  es impar, o sea  $\begin{bmatrix} (\vec{\alpha}_0)_1 \\ (\vec{\beta}_0)_1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ . En este caso, de acuerdo con

(B.14), las dos contribuciones del sector de Neveu-Schwarz,  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  y  $\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

se cancelan independientemente una de otra a través de una identidad de Riemann en género  $g - 1$ , y, de acuerdo con (B.16), para cada estructura de espín "residual"  $e_{(g-1)}$ , ambas contribuciones tienen o no el mismo signo dependiendo del valor de  $(\vec{\alpha}_0)_1$ . Nuestra hipótesis es que el signo correcto es el producido por  $(\vec{\alpha}_0)_1 = \frac{1}{2}$ . Parece entonces que todo se reduce a tomar una estructura de espín impar tal que  $(\vec{\alpha}_0)_1 = \frac{1}{2}$ <sup>9</sup>, pero si tenemos invariancia modular, debemos obtener lo mismo para un ciclo  $A_i$  cualquiera, y eso implica, por ejemplo,  $(\vec{\alpha}_0)_i = \frac{1}{2} \forall i = 1, \dots, g$ . También debemos obtener lo mismo para cualquier transformación modular del ciclo  $A_1 \rightarrow A'_1$ . Y en algunas de estas transformaciones,  $(\vec{\alpha}_0)_1 = \frac{1}{2} \rightarrow (\vec{\alpha}'_0)_1 = 0$ , con lo que el comportamiento en el límite cambia, no es invariante modular.

**2** En el caso en que  $d_{(g-1)}$  es par, o sea,  $\begin{bmatrix} (\vec{\alpha}_0)_1 \\ (\vec{\beta}_0)_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ , el comportamiento es el que hemos supuesto (no puede ser de otra forma, ya que, si no, no se cancelarían los taquiones).

Los cálculos explícitos con nuestra expresión nos dan, para la parte independiente de los correladores, el comportamiento [42]

---

<sup>9</sup>Si queremos que la parte del sector Ramond de orden  $\mathcal{O}(\delta^{\frac{1}{2}})$  tenga el mismo signo que a género  $g = 1$  tendremos que tomar también  $(\vec{\beta}_0)_1 = \frac{1}{2}$ , pero ya hemos dicho que esto no influye en nuestros resultados. De cualquier modo, debemos esperar que sea así, desde un punto de vista físico.

$$\sim \frac{d|\delta|d\tau_{11}^{(1)}|\delta|^{-\frac{5}{2}} \exp i\pi\tau_{11}^{(1)}}{(-\log|\delta|)^5} \quad (1.113)$$

El comportamiento de los términos restantes es

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^X &\sim \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{Q}\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & - \\ - & - \end{bmatrix}\right) &= \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{Q}(134||256) \\ \mathcal{Q}(1\alpha_2^e\alpha_3^e||\beta_1^e34) \end{array} \right\} \sim \mathcal{O}(\delta^{\frac{1}{2}}) \\ \phi(e)\mathcal{Q}(e = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) &\sim -\mathcal{Q}(a_1a_2a||aa_5a_6) + \mathcal{O}(\delta^{\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (1.114)$$

$$\phi_e\mathcal{Q}(e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) \sim -\mathcal{Q}(a_1aa_5||a_2aa_6) + \mathcal{O}(\delta^{\frac{1}{2}})$$

$$\phi_e\mathcal{Q}(e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}) \sim +\mathcal{Q}(a_1aa_6||a_2aa_5) + \mathcal{O}(\delta^{\frac{1}{2}})$$

$$\phi_e\mathcal{Q}(e = \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{bmatrix}) \sim -\phi_d\mathcal{Q}(d = \begin{bmatrix} 0 & x \\ \frac{1}{2} & y \end{bmatrix}) + \mathcal{O}(\delta^{\frac{1}{2}}) \quad (1.115)$$

$$\mathcal{P}^{gh}(e = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & - \\ - & - \end{bmatrix}) \sim \mathcal{O}(1) \quad (1.116)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{gh}(e = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) &= \mathcal{P}^{gh}(d = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}) + \mathcal{O}(\delta^{\frac{1}{2}}) \\ &\sim \frac{1}{4}a_{12}^{-1}\{(a_1 - a)^2a_{25}a_{26} + (a_1 - a)(a_2 - a) \times \\ &\times (a_{15}a_{26} + a_{16}a_{25})\} + \mathcal{O}(\delta^{\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (1.117)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{gh}(e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) &= \mathcal{P}^{gh}(d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}) + \mathcal{O}(\delta^{\frac{1}{2}}) \\ &\sim \frac{1}{4}a_{12}^{-1}(a_1 - a)(a_2 - a)a_{15}a_{26} + \mathcal{O}(\delta^{\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{gh}(e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}) &= \mathcal{P}^{gh}(d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}) + \mathcal{O}(\delta^{\frac{1}{2}}) \\ &\sim \frac{1}{4}a_{12}^{-1}(a_1 - a)(a_2 - a)a_{16}a_{25} + \mathcal{O}(\delta^{\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

Es patente que se verifica la hipótesis en este límite. Del mismo modo se verifica en todos los límites  $a_i \rightarrow a_j$  con  $i, j \neq 1$ . Dejando aparte el



límite  $a_1 \rightarrow a_2$ , en que movemos también los PCOs, los demás límites en los que interviene  $a_1 = z(P_1)$  no verifican la hipótesis a pesar de que los taquiones son igualmente cancelados (al fin y al cabo el integrando es cero). En este contexto, esto parece que no origina ningún problema, pero a la hora de hallar las temperaturas críticas, vamos a ver que es una manifestación de falta de invariancia modular que tiene como consecuencia que las divergencias de la energía libre (que es invariante modular si y sólo si lo es la constante cosmológica a partir de la cual la construimos) son distintas dependiendo del asa que hagamos degenerar. Sin embargo, tengamos en cuenta que es por un problema fundamentalmente de los signos y no del orden de los polos (salvo en el caso  $a_1 \rightarrow a_2$ , que no entramos a discutir) por lo que no se cumple nuestra hipótesis.

Creemos que este es un comportamiento genérico de toda la clase de los llamados "gauges unitarios" [38][37] [43], a pesar de que en esta referencias se proclama que tales gauges no rompen la invariancia modular que tiene la expresión de las Verlindes [21] con la proyección GSO que hemos calculado una vez visto que no hay anomalías globales. Para acabar este capítulo vamos a comentar estos resultados basándonos en los estudios preliminares que hemos hecho.

Los gauges unitarios consisten en hacer una elección de los  $2(g-1)$  puntos donde se insertan los PCOs de forma que el argumento  $\vec{z}$  de la theta de Riemann del determinante funcional de los  $\frac{3}{2}$ -diferenciales (estamos en el contexto de las referencias [17][21]) sea un punto del Jacobiano conocido y podamos hacerlo cero a través de las propiedades de las thetas, cancelando de esta forma una de las cinco provenientes de los 10 fermiones. Tendremos de esta forma thetas a la cuarta y probabilidades de utilizar las identidades de Riemann para demostrar la cancelación del integrando de la constante cosmológica o de determinadas amplitudes de difusión. Para ser explícitos, tomemos la parte dependiente de la estructura de espín de la contribución de las "corrientes de materia" a género 2 con la GSO que calculamos:

$$\sum_{e \text{ pares}} \frac{\vartheta^4[e](\vec{0}|\tau)\vartheta[e](x_1 - x_2|\tau)}{\vartheta[e](x_1 + x_2 - 2\Delta_2|\tau)} \quad (1.118)$$

En [35] se tomó  $x_1 = x_2 = P_i$ , uno de los 6 puntos de rama de la superficie de género 2 y se utilizó (ver Apéndice A)

$$P_i - \Delta_2 = \tau\vec{\alpha} + \vec{\beta} \quad (1.119)$$

donde  $\begin{bmatrix} \vec{\alpha} \\ \vec{\beta} \end{bmatrix}$  es una estructura de espín impar. La ecuación (1.118) es, entonces, proporcional a la identidad de Riemann correspondiente. Ya hemos dicho que estas identidades no son invariantes modulares, aunque sus transformados modulares sean también cero, y veremos en el tercer capítulo que esto tiene consecuencias sobre cantidades con significado físico.

Se ha señalado que el problema de esta elección es que las transformaciones modulares permutan entre sí los  $P_i$ , y nosotros hemos de elegir uno. O, lo que es lo mismo: las transformaciones modulares permutan entre sí las estructuras de espín impares. Se propuso consiguientemente sumar sobre todas estas posibles prescripciones para lograr la invariancia modular. Aparte de ser completamente *ad hoc*, esta prescripción lleva, inevitablemente, a la combinación lineal de identidades de Riemann de género dos del Apéndice A, que es invariante modular por ser idénticamente nula. No creemos que esta sea una respuesta válida. Obsevemos, por otra parte, que (1.119) es una igualdad módulo  $\Lambda(\tau)$ , o en sentido estricto si tomamos el camino de integración adecuado.

El siguiente paso fue observar que el gauge de que hemos hablado es un caso particular de tomar  $[x_1 + x_2] = K$ , la clase canónica de divisores de 1-diferenciales. En concreto se propone tomar  $x_1$  y  $x_2$  como los ceros de un diferencial abeliano (esto excluye tomarlos como puntos de rama, salvo que estemos en el caso anterior  $[2P_i] = K \forall i$ ). Puesto que  $[2\Delta_2] = K$ ,  $x_1 + x_2 - 2\Delta_2$  es el divisor del cociente de dos 1-diferenciales, es decir, de una función holomorfa, lo que implica que  $\mathbf{I}(x_1 + x_2 - 2\Delta_2) \in \Lambda(\tau)$  por el teorema de Abel. Lo que en la práctica se suele hacer es tomar  $\mathbf{I}(x_1 + x_2 - 2\Delta_2) = 2(\tau\vec{\alpha} + \vec{\beta})$  con  $\begin{bmatrix} \vec{\alpha} \\ \vec{\beta} \end{bmatrix}$  impar. La elección es legítima en tanto en cuanto se entienda como una simple elección del camino de integración en la transformación de Jacobi. Además de esta elección, se utiliza el siguiente resultado de forma crucial en la demostración de invariancia modular[37]: si  $x_1$  y  $x_2$  son los ceros de un diferencial abeliano, entonces

$$\vartheta[e](\frac{1}{2}(x_1 - x_2)|\tau) = 0 \quad \forall e \quad (1.120)$$

Este resultado no es válido en general. Basta tomar  $x_1 = x_2 = P_i$  y observar que sólo si  $e$  es impar se anula en el cero, salvo para  $\tau$  especial.

En cuanto al comportamiento en el límite de degeneración, parece claro de la discusión que va a haber problemas con los signos, por la utilización de identidades de Riemann, pero, además, el orden de los polos no parece ser el que cabría esperar después de la discusión hecha anteriormente. El cálculo con divisores como argumentos de las thetas se presenta ambiguo: la dependencia en  $\delta$  proviene sobre todo de la dependencia en la matriz periodo, y ésta depende de los caminos de integración concretos escogidos, de la normalización, en definitiva, de los determinantes. Los gauges unitarios incluyen, precisamente, la prescripción en los caminos de integración que buscamos. Utilizándolos, hemos visto (son conclusiones preliminares) que sólo si tomamos una estructura de espín impar del tipo  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix}$  obtenemos el resultado esperado en el ciclo  $A_1$ . Esto no es invariante modular.

Un comentario final sobre la expresión de Knizhnik y su relación con (1.118). Teniendo en cuenta las relaciones entre puntos de rama y estructuras de espín impares del Apéndice A, tenemos (con la base de homología de dicho apéndice) sumando y restando:

$$P_1 + P_2 - 2\Delta_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (1.121)$$

$$= \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{J}ac(\Sigma_g) \quad (1.122)$$

$$P_1 - P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (1.123)$$

$$= \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{J}ac(\Sigma_g) \quad (1.124)$$

de forma que, si cogemos caminos de integración tales que los argumentos de las thetas son iguales, ambas se cancelarán sin factores extra. Sin embargo la expresión de Knizhnik tiene los polos esperados.

# Chapter 2

## Temperatura finita

### Introducción

En este capítulo vamos a ver primeramente cómo construir, a partir de la constante cosmológica de la cuerda bosónica o heterótica a un determinado orden en teoría de perturbaciones, introducida en el capítulo anterior, la contribución a ese mismo orden de la energía libre térmica. Atenderemos sobre todo al requisito de invariancia modular, que nos servirá de principio-guía y estudiaremos una propiedad de la energía libre a todo orden en teoría de perturbaciones, cuya transcendencia y auténtica interpretación aún no conocemos: la dualidad. Nos vamos a mover siempre dentro del colectivo canónico, y, dado que las cuerdas contienen gravedad, es de esperar que el alcance de las predicciones obtenidas en este contexto sea limitado, quizá muy limitado, a causa de la conocida "inestabilidad de Jeans" (clásica y cuántica [44]). Sin embargo, su estudio es obligado, sobre todo porque no sabemos ir mucho más allá y hacer estudios no perturbativos, lo que auténticamente necesitamos hacer.

Dentro de los cálculos de la energía libre térmica a órdenes superiores al primero, las referencias esenciales son [45] [46] [47]. [48] es una referencia general sobre trabajos anteriores (cálculos a un loop, en el gauge del cono de luz, y fundamentos).

## 2.1 La cuerda bosónica

La energía libre térmica se define como

$$\mathcal{F}(\beta) = -\frac{1}{\beta} \log \text{tr} e^{-\beta \mathcal{H}} \quad (2.1)$$

La traza en esta definición identifica estados iniciales y finales (espacio-temporales) y el hamiltoniano  $\hat{H}$  es el generador de las traslaciones temporales, de modo que en la representación como integral funcional de (2.1) para la cuerda bosónica

$$\mathcal{F}^{(Bos)}(\kappa, \beta) = \sum_{g=1}^{\infty} \kappa^{2(g-1)} \mathcal{F}_g(\beta) \equiv \sum_{g=1}^{\infty} \kappa^{2(g-1)} \int \frac{\mathcal{D}g_{\alpha\beta} \mathcal{D}X^\mu}{\text{vol}(\mathbf{W}) \text{vol}(\mathbf{Diff})} e^{-S} \quad (2.2)$$

(no hay contribución de género  $g = 0$ ). Debemos integrar sobre superficies compactas  $\Sigma_g$  y debemos identificar

$$\begin{aligned} X^0 &\sim X^0 + \beta \\ \Rightarrow X^0 &+ n\beta \quad \forall n \in \mathcal{Z} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Esta última condición sobre el campo  $X^0$  podemos describirla de dos formas equivalentes: la coordenada  $X^0$  del espacio-tiempo está compactificada en un 1-toro (la circunferencia  $S^1$ ) de radio  $\frac{\beta}{2\pi}$ , y  $X^0$  es un campo multivaluado sobre  $\Sigma_g$  cuyos valores en un determinado punto difieren por múltiplos enteros de  $\beta$ . Debemos entonces permitir que una configuración cualquiera del campo  $X^0$  (una función sobre  $\Sigma_g$ ) cambie de valor por un múltiplo de  $\beta$  cuando circulamos a lo largo de cualquier camino cerrado homotópicamente no trivial.

Podemos caracterizar la monodromía de una configuración por su monodromía respecto de una base del grupo de homología  $A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g$ , a través de un conjunto de enteros  $(n_1, \dots, n_g, m_1, \dots, m_g) \equiv (\vec{n}, \vec{m})$ : las configuraciones del "sector"  $(\vec{n}, \vec{m})$  son aquellas cuyos valores en un punto  $P \in \Sigma_g$ ,  $X^0(P)$ , se vuelven  $X^0 + n_i \beta$  (resp.  $m_j \beta$ ) al dar una vuelta al ciclo  $A_i$  (resp.  $B_j$ ). Esta clasificación no es invariante modular: bajo la transformación modular (A.11)

$$\begin{pmatrix} \vec{n} \\ \vec{m} \end{pmatrix} \rightarrow \left( \frac{D}{B} \middle| \frac{C}{A} \right) \begin{pmatrix} \vec{n} \\ \vec{m} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

diferentes sectores se intercambian entre sí. Los enteros  $n_i$  y  $m_i$  tampoco contienen información topológica individualmente. El único invariante topológico [45] es el entero  $r = m.c.d.\{n_i, m_i\}_{i=1}^g$ .  $X^0$  salta en cualquier punto de  $\Sigma_g$  por un valor múltiplo entero de  $r\beta$ .  $\gamma = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^g (n_i A_i + m_i B_i)$  se puede entender como una dirección temporal sobre  $\Sigma_g$ . Obviamente hay tantas posibilidades como sectores y todas deben ser tenidas en cuenta (ninguna es preferida ni invariante modular por separado, salvo el sector trivial  $(\vec{0}, \vec{0})$  que nos da la temperatura cero. En cierto sentido esto nos aleja completamente de la imagen de una superficie de Riemann en el espacio ordinario que tenemos y nos habla de lo diferente que es la descripción del espacio-tiempo en teoría de cuerdas. Finalmente  $r$  nos dice el número de veces que  $\Sigma_g$  ( $\sum_{i=1}^g (n_i A_i + m_i B_i)$ ) está "enrollada" en torno a  $X^0$ .

(En los cálculos en el gauge del cono de luz, el ciclo  $\gamma$  está determinado desde un principio (se le alinea con el tiempo espacio-temporal y se identifica con el tiempo propio de la cuerda) y sólo se considera un sector etiquetado por  $r$  [49], de acuerdo con la figura:

No se tiene invariancia modular (hay transformaciones modulares que nos llevan a sectores que no hemos tenido en cuenta, por ejemplo) y debemos integrar sólo sobre una región fundamental en  $\mathcal{T}_g$  del subgrupo de  $SP(2g, \mathcal{Z})$  que deja invariante el conjunto de sectores etiquetados por  $r$ . Esta región es mayor que  $\mathcal{M}_g$ . El resultado debe hacerse invariante modular posteriormente (de partida tenemos esta invariancia en la integral funcional) utilizando, por ejemplo, técnicas de cosets [50] que nos llevan a sumar sobre todos los sectores y a eliminar la parte de  $vol(\mathbf{Diff})$  que no habíamos eliminado por no tener invariancia modular. Que a todo género los resultados son equivalentes es demostrado en [45] a base de hacer transformaciones modulares que nos llevan a sectores en que sólo  $n_1$  es no nulo.  $A_1$  es, entonces, la dirección temporal en la analogía con el gauge del cono de luz.)

Una vez caracterizados los diferentes sectores, la integral funcional se descompone en una suma de integrales sobre cada sector:

$$\mathcal{F}_g(\beta) = \sum_{(\vec{n}, \vec{m}) \in \mathcal{Z}^g} \int_{BC(n, m)\beta} \frac{\mathcal{D}g_{\alpha\beta} \mathcal{D}X^\mu}{vol(\mathbf{W}) vol(\mathbf{Diff})} e^{-S[X, g, \beta]} \quad (2.5)$$

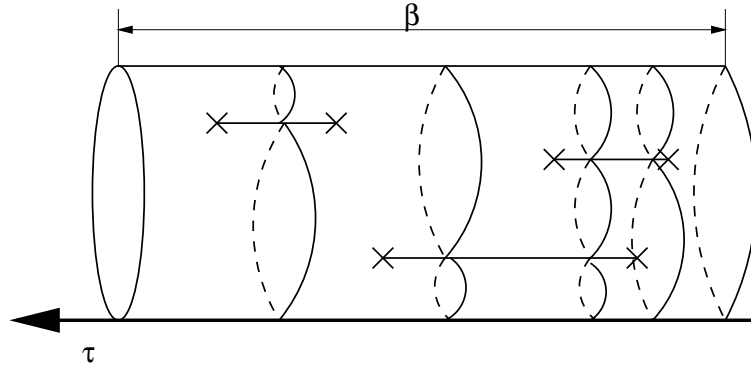


Figure 2.1: Diagrama de cono de luz de género  $g = 4$ .

Podemos escribir cada configuración  $X^0$  de un determinado sector así

$$X_{(\vec{n}, \vec{m})}^0 = X_{(\vec{n}, \vec{m})}^{0(clas)} + X^{0(cuant)} \quad (2.6)$$

donde la parte "clásica" verifica las ecuaciones del movimiento que se deducen de la acción de Polyakov:

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} X_{(\vec{n}, \vec{m})}^{0(clas)} = 0 \quad (2.7)$$

y pertenece al sector  $(\vec{n}, \vec{m})$ . Solamente hay una función real que satisfaga estas condiciones<sup>1</sup>:

$$X_{(\vec{n}, \vec{m})}^{0(clas)}(z, \bar{z}) = \frac{i}{2} \beta \left\{ \int^z \omega_i (\Im m \tau_{ij})^{-1} (\bar{\tau}_{jk} n_k - m_j) - c.c. \right\} \quad (2.8)$$

Una función es una "constante" en una integral funcional, de forma que

---

<sup>1</sup>Funciones univaluadas que verifiquen las ecuaciones del movimiento sólo hay una en superficies de Riemann compactas: la constante, que es el modo cero del laplaciano.

$$\mathcal{D}X^0 = \mathcal{D}X^{o(cuant)} \quad (2.9)$$

Por otro lado, para una configuración determinada, las contribuciones de las partes clásica y cuántica a la acción, se separan:

$$\mathcal{S}[X^0, g, \beta] = \mathcal{S}[X^{o(cuant)}, g] + \mathcal{S}[X^{o(clas)}, g, \beta] \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} &= \mathcal{S}[X^{o(cuant)}, g] + \\ &+ \frac{\beta^2}{2\pi} [n_i \tau_{ij} - m_j] (\mathfrak{S}m\tau)_{jk}^{-1} [\bar{\tau}_{kl} n_l - m_k] \end{aligned} \quad (2.11)$$

quedando toda la dependencia en la temperatura  $\beta$  en la parte clásica. Como consecuencia, la energía libre toma la forma

$$\mathcal{F}_g(\beta) = \int_{\mathcal{M}_g} d\mu (\det \mathfrak{S}m\tau)^{-13} \mathcal{W} \wedge \overline{\mathcal{W}} \sum_{(\vec{n}, \vec{m})} e^{-\mathcal{S}[X_{(\vec{n}, \vec{m})}^{o(clas)}, \beta]} \quad (2.12)$$

La integral se extiende sólo a  $\mathcal{M}_g$  puesto que el integrando es invariante modular (la parte que depende de la temperatura es lo único nuevo aquí, y se puede comprobar explícitamente que es, por sí misma, invariante modular. Intuitivamente lo es pues las transformaciones modulares simplemente permutan entresí los sectores y hemos incluido todos). La parte que depende de la temperatura (la parte que contiene la contribución de los "solitones térmicos") se puede escribir con ayuda de thetas de Riemann para género  $2g$ :

$$\sum_{(\vec{n}, \vec{m})} e^{-\mathcal{S}[X_{(\vec{n}, \vec{m})}^{o(clas)}, \beta]} = \vartheta(\vec{0} \parallel \frac{1}{4} \Omega_g(\beta)) \quad (2.13)$$

$$\Omega_g(\beta) = \frac{2i\beta^2}{\pi^2} \begin{pmatrix} \tau^{(1)}(\tau^{(2)})^{-1}\tau^{(1)} + \tau^{(2)} & -\tau^{(1)}(\tau^{(2)})^{-1} \\ -(\tau^{(2)})^{-1}\tau^{(1)} & (\tau^{(2)})^{-1} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

A través de una resumación de Poisson podemos reescribir esta contribución así

$$\vartheta(\vec{0} \parallel \frac{1}{4} \Omega_g(\beta)) = \left( \frac{\sqrt{2}\pi}{\beta} \right)^g (\det \mathfrak{S}m\tau)^{\frac{1}{2}} \sum_{\vec{p}_R, \vec{p}_L} e^{i\pi(\vec{p}_L^t \tau \vec{p}_L - \vec{p}_R^t \bar{\tau} \vec{p}_R)} \quad (2.15)$$



$$\left. \begin{aligned} \vec{p}_L &= \frac{\pi}{\beta} \vec{m} + \frac{\beta}{2\pi} \vec{n} \\ \vec{p}_R &= \frac{\pi}{\beta} \vec{m} - \frac{\beta}{2\pi} \vec{n} \end{aligned} \right\} \vec{n}, \vec{m} \in \mathcal{Z}^g \quad (2.16)$$

Los vectores de  $\mathcal{Z}^g$   $\vec{n}$  y  $\vec{m}$  no son aquí los mismos de antes, y se les suele llamar "windings" y momentos, respectivamente (esto está en relación con la primitiva imagen de la cuerda como ciclo  $A$  propagándose a lo largo de un ciclo  $B$ ).

El exponente de cada término del sumatorio es invariante bajo los cambios simultáneos

$$\begin{aligned} \beta &\rightarrow \frac{2\pi^2}{\beta} \\ \vec{n} &\rightarrow \vec{m} \\ \vec{m} &\rightarrow \vec{n} \end{aligned} \quad (2.17)$$

y el conjunto cambia por un factor global de forma que tenemos, para la contribución de orden  $g$  a la energía libre la relación:

$$\mathcal{F}_g^{(Bos)}\left(\frac{2\pi^2}{\beta}\right) = \left(\frac{\beta^2}{2\pi^2}\right)^g \mathcal{F}_g(\beta)^{(Bos)} \quad (2.18)$$

y si transformamos también la constante de acoplamiento  $\kappa$  en la serie perturbativa (2.2) completa, tenemos la relación

$$\mathcal{F}^{(Bos)}\left[\frac{\kappa\pi\sqrt{2}}{\beta}, \frac{2\pi^2}{\beta}\right] = \frac{\beta^2}{2\pi^2} \mathcal{F}^{(Bos)}(\kappa, \beta) \quad (2.19)$$

que se conoce como dualidad y relaciona propiedades a altas y bajas temperaturas. Para la cuerda bosónica no es más que una propiedad formal de la energía libre, debido a las divergencias causadas por los polos del integrando y a las de la serie perturbativa [5], las primeras de las cuales, al menos, no están presentes en las supercuerdas, presumiblemente (la supercuerda tipo II no tiene dualidad, sorprendentemente, la heterótica sí). Sin embargo, podemos considerar en ambos casos a la dualidad como una propiedad bien definida del integrando de la energía libre a cada orden.

La dualidad es, por otra parte, implica el límite de temperatura infinita

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \mathcal{F}^{(Bos)}(\beta) = -\frac{\Lambda^{(Bos)}}{\beta^2} \quad (2.20)$$

( $\Lambda$  es la constante cosmológica) que implicaría que la teoría de cuerdas tiene en este límite muchos menos grados de libertad que una teoría de campos convencional, que se comportaría como  $\beta^{-D}$  para  $D$  dimensiones espacio-temporales. lo que nos lleva a especular con una posible rotura de esta "simetría", quizá por efectos no perturbativos.

## 2.2 La cuerda heterótica

A diferencia del espectro de la cuerda bosónica, el de la cuerda heterótica posee fermiones espacio-temporales. Estos se corresponden con fermiones periódicos (Ramond, R) sobre la cuerda pues se pueden describir en términos de representaciones espinoriales de  $SO(8)$ . Los fermiones antiperiódicos (Neveu-Schwartz) dan lugar a bosones espacio-temporales. A un loop se suele fijar como dirección temporal, de propagación de la cuerda, al ciclo  $B$ , siendo la "cuerda", para todo valor de su tiempo propio, un ciclo homólogo al  $A$ . Las estructuras de espín  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$  y  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$  (que no contribuye por el modo cero) cons-

tituirían así el sector Ramond y las estructuras  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  y  $\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$  constituirían el sector Neveu-Schwarz, y ambas deberían contribuir con signos opuestos a la función de partición bajo este punto de vista. Si, por el contrario, fijamos  $A$  como dirección temporal,  $\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$  y  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$  constituirían el sector Ramond y las restantes el Neveu-Schwarz. Podemos elegir cualquier ciclo como dirección temporal, de forma que debemos elegir signos compatibles con todas las elecciones, o, lo que es lo mismo, signos invariantes modulares. Es, pues, la invariancia modular la que fija los signos, junto con el requisito, en el caso de la proyección GSO, de la no existencia de taquiones en el espectro como resultado de ciertas cancelaciones. La proyección GSO, además, nos proporciona un espectro supersimétrico (supersimetría y taquiones no son incompatibles [27]) y la cancelación de la constante cosmológica-función de partición se puede ver como cancelación entre las contribuciones iguales y con

signos opuestos de fermiones y bosones espacio-temporales, manifestación de un espectro supersimétrico. Como hemos visto, hay que fijar una dirección de propagación temporal para hacer este tipo de interpretaciones, romper la invariancia modular. En los cálculos en el gauge del cono de luz y en los cálculos en que hacemos degenerar la superficie (rompiendo invariancia modular) esta interpretación es aceptable.

Estadísticamente, los fermiones espacio-temporales han de ser tratados como antiperiódicos en el tiempo euclídeo  $X^0$  de longitud  $\beta$ , y han de ser pesados con signos menos adicionales.

Para  $g > 1$  el problema que teníamos a un loop se multiplica por  $g$ : cada estructura de espín indica propagación de objetos espacio-temporales de estadística distinta alrededor de cada ciclo de homología. Un fermión  $R$  en torno al ciclo  $C$  se propaga como un fermión espacio-temporal a través de la dirección orthogonal. Y esto para cada  $C$ . De nuevo es sobre todo la invariancia modular quien nos va a guiar en la determinación de los signos.

A temperatura finita, el problema se complica: si estamos en un sector etiquetado por  $l \in \mathcal{Z}$  respecto al ciclo  $C$ , al dar una vuelta a  $C$ , damos  $n$  al tiempo euclídeo compactificado  $X^0$ .

Por ejemplo, en Fig. 2.2,  $n = 2$ .

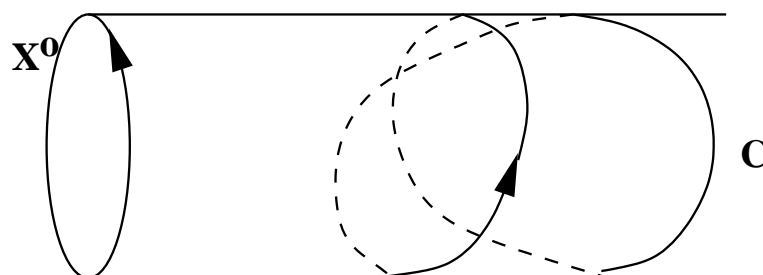


Figure 2.2:

Los factores adicionales vendrán entonces dados por

Sector Ramond

Cambio de signo alrededor de

$X^0$	$C$
$-1$	$+1$

Sector  $n \Rightarrow (-1)^n$  es el factor adicionalSector Neveu-Schwarz

Cambio de signo alrededor de

$X^0$	$C$
$+1$	$-1$

Sector  $n \Rightarrow +1$  es el factor adicional

Imponiendo invariancia modular [46] [47] llegamos a que el factor adicional que debemos introducir para el sector  $(\vec{n}, \vec{m})$  de la estructura de espín

$\begin{bmatrix} \vec{\alpha} \\ \vec{\beta} \end{bmatrix}$  es

$$U\left\{\begin{bmatrix} \vec{\alpha} \\ \vec{\beta} \end{bmatrix} \parallel (\vec{n}, \vec{m})\right\} = \exp\left\{2\pi i(\vec{n}^t \vec{\beta} + \vec{m}^t \vec{\alpha} + \frac{\vec{n}^t \vec{m}}{2})\right\} \quad (2.21)$$

y que la contribución de todos los sectores  $(\vec{n}, \vec{m})$  correspondiente a la estructura de espín  $\begin{bmatrix} \vec{\alpha} \\ \vec{\beta} \end{bmatrix}$  se puede expresar de nuevo en términos de thetas de Riemann:

$$\vartheta \begin{bmatrix} \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{\beta} & \vec{\alpha} \end{bmatrix} (\vec{0} \parallel \tilde{\Omega}_g(\beta)) \quad (2.22)$$

$$\tilde{\Omega}_g(\beta) = \Omega_g(\beta) + \frac{1}{2} \left( \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right) \quad (2.23)$$

Esta función theta (vamos a llamar a todas las que contienen las contribuciones de los solitones térmicos, por abreviar, thetas térmicas) es covariante modular: bajo la transformación modular  $T$  dada por (A.11) tenemos

$$\vartheta \begin{bmatrix} \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{\beta}' & \vec{\alpha}' \end{bmatrix} (\vec{0} \parallel \tilde{\Omega}'_g(\beta)) = \vartheta \begin{bmatrix} \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{\beta} & \vec{\alpha} \end{bmatrix} (\vec{0} \parallel \tilde{\Omega}_g(\beta)) \quad (2.24)$$

y la energía libre de la cuerda heterótica se escribe

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_g^{(Heter)}(\beta) &= \int_{\mathcal{M}_g} (det \mathfrak{S} m \tau)^{-5} \left\{ \sum_{e \text{ par}} \phi(e) \mathcal{U}_e \vartheta \begin{bmatrix} \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{\beta} & \vec{\alpha} \end{bmatrix} (\vec{0} \parallel \vec{\Omega}_g(\beta)) \right\} \wedge \\ &\wedge \overline{\mathcal{W}} \left( \begin{array}{c} E_8 \times E_8 \\ SO(32)/\mathbb{Z}_2 \end{array} \right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

a partir de la constante cosmológica y el integrando es invariante modular (si lo es el de la constante cosmológica).

Esta cantidad tiene también la propiedad de dualidad (más difícil de demostrar que en el caso bosónico y no trivial incluso desde el punto de vista conceptual (una "cuerda heterótica", es una cuerda?)) a todo orden en teoría de perturbaciones, de forma que la serie completa verifica

$$\mathcal{F}(\kappa, \beta) = \frac{\pi^2}{\beta^2} \mathcal{F}\left(\frac{\kappa\pi}{\beta}, \frac{\pi^2}{\beta}\right) \quad (2.26)$$

Con esto concluye esta breve introducción a las cuerdas a temperatura finita. Entre las propiedades importantes que nos quedan por estudiar, está el comportamiento crítico de estas teorías, la búsqueda de divergencias en la energía libre, que es el tema de esta memoria de tesis y del próximo capítulo.

Un razonamiento análogo al fundamentado en (2.20) para la cuerda heteró-

tica nos llevaría (suponiendo que la constante cosmológica se nula efectivamente) a que la teoría no tiene ningún grado de libertad en absoluto en ese límite. Siendo como es un límite de alta energía, podemos pensar que en esa región la simetría de la teoría es enorme, en consonancia con los resultados de scattering de cuerdas a muy altas energías de Gross y Mende etc.

# Chapter 3

## Comportamiento crítico

### Introducción

En este breve capítulo vamos a reunir varios resultados parciales de los obtenidos en distintas partes de esta memoria para estudiar el comportamiento crítico de las teorías de cuerdas con dualidad: la bosónica y la heterótica, y obtener sus temperaturas críticas. Apenas vamos a comentar los resultados, que serán discutidos e interpretados en el siguiente capítulo, que contiene las conclusiones a que hemos llegado.

Las referencias que contienen los resultados aquí expuestos son [51], [42] y [52], aunque algunos de ellos habían sido anticipados: en [49] se obtienen las temperaturas críticas a un loop, en [53] se obtiene la temperatura crítica para la supercuerda heterótica a un loop, en distintos espacio-tiempos, teniendo en cuenta la propiedad de dualidad a la hora de desarrollar las "thetas térmicas". En [54] se adelanta que debe haber una temperatura crítica a cada orden en teoría de perturbaciones para la cuerda bosónica, aunque su valor no se llega a determinar, y en [55] se afirma que la temperatura crítica de la cuerda heterótica a género dos debe ser la misma que a primer orden.

### 3.1 Comportamiento crítico de la energía libre

Previamente a la exposición de los cálculos, hagamos algunas puntualizaciones sobre lo que queremos calcular y por qué lo hacemos así.

Estamos interesados en la búsqueda de temperaturas a las cuales la energía libre diverja. El espectro de masa de todas las teorías de cuerdas diverge exponencialmente, de forma que la función de partición canónica de la cuerda diverge a partir de una determinada temperatura. A estas temperaturas, que llamaremos críticas, se pueden producir distintos tipos de fenómenos, quizá los más interesantes de los cuales sean las transiciones de fase. Otra posibilidad es que la temperatura a la que la energía libre diverge sea una temperatura límite del Universo. Las distintas posibles interpretaciones serán discutidas en el siguiente capítulo.

Observemos que si se trata de una teoría de cuerdas con dualidad, habrá también una temperatura dual de la crítica, por debajo de la cual la energía libre diverja. La fase de baja temperatura, y su dual, están entonces separadas por una franja en la que la energía libre diverge. Si se trata de la cuerda bosónica, debemos tener en cuenta que a esta divergencia se superpone la taquiónica que se halla ya a temperatura cero.

Puesto que tenemos sólo aproximaciones perturbativas la energía libre térmica, buscaremos estas temperaturas para cada orden. A partir del primero, el valor calculado contiene la influencia de las interacciones: los estados que contribuyen en un determinado nivel de energía al primer orden, adquieren anchura, y pueden desintegrarse, pudiendo dejar de contribuir si la velocidad de desintegración es grande. La temperatura crítica está, pues relacionada con la anchura de los estados a cada orden, y tendremos que comparar ambos valores. Por analogía con lo que ocurre en teoría cuántica de campos, podemos esperar que las contribuciones de orden superior al primero corrijan la de éste, y diverjan a temperaturas distintas.

En cuanto a las divergencias de la energía libre, puesto que la tenemos expresada como una integral sobre  $\mathcal{M}_g$ , lo más sencillo para buscarlas, será buscar polos de cierto orden en el integrando. Estos últimos sólo pueden provenir del integrando de la constante cosmológica, puesto que las funciones de partición de los solitones térmicos son regulares. Las divergencias del integrando de la constante cosmológica están situadas en la frontera de  $\mathcal{M}_g$ ,



y vienen dadas por el teorema de Belavin-Knizhnik en el caso bosónico y, probablemente, por (1.96), (1.97), (1.98), y (1.99), en el caso de la cuerda heterótica. Los polos del integrando de la constante cosmológica están "modulados" por factores provenientes de las funciones de partición de los solitones térmicos, de forma que el orden de los polos del integrando de la energía libre es función de la temperatura: a partir de la temperatura crítica  $T_c$ , el orden es tal que la integral diverge. Tenemos, pues, que estudiar el orden de los polos en  $\delta$  del producto del desarrollo de las thetas térmicas que tiene en cuenta la dualidad, (Apéndice B) y las constantes cosmológicas (Capítulo 1). Sólo estudiamos el límite en que un asa degenera. Es fácil ver que el límite de factorización simplemente da la factorización de la energía libre, sin que aparezcan polos con dependencia en la temperatura nuevos.

### 3.2 La cuerda bosónica

Del teorema de Belavin-Knizhnik (1.14, y (B.60) tenemos que el integrando de la energía libre térmica en el límite en que una asa degenera se puede escribir al orden más bajo en  $|\delta|$  como (ignorando las divergencias logarítmicas)

$$\mathcal{W} \wedge \overline{\mathcal{W}} \vartheta(\vec{\sigma} | \Omega_g(\beta)) \sim \frac{d |\delta| d\tau_{11}^{(1)}}{|\delta|^3} \{a + b |\delta|^{\frac{\beta^2}{4\pi^2}} + c |\delta|^{\frac{\pi^2}{\beta^2}} + \dots\} \quad (3.1)$$

La divergencia correspondiente al término  $a$  es la causada por el taquión. Las condiciones para que la integral en  $|\delta|$  de los dos términos siguientes converjan son

$$\beta \geq \pi\sqrt{8} = \frac{1}{T_c} \quad (3.2)$$

$$\beta \leq \pi\sqrt{2} = \frac{1}{T_c^*} \quad (3.3)$$

$$T_c^* = \frac{1}{2\pi^2 T_c} \quad (3.4)$$

donde el asterisco indica el dual en temperatura.

### 3.3 La cuerda heterótica

A partir de (1.96)-(1.99) y (B.62) y (B.63), tenemos

$$\boxed{\text{Sector Ramond, } (\vec{\alpha})_1 = \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{(\vec{\beta})_1 = 0}$$

$$I(e)\vartheta \begin{bmatrix} \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{\beta} & \vec{\alpha} \end{bmatrix} (\vec{0} \parallel \tilde{\Omega}_{g-1}(\beta)) \sim \frac{d |\delta| d\tau_{11}^{(1)} e^{i\pi\tau_{11}^{(1)}}}{|\delta|^{\frac{1}{2}}} \{a |\delta|^{\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{4\beta^2}} e^{i\pi\tau_{11}^{(1)}} +$$

$$+ b e^{2i\pi(\vec{\beta})_1} |\delta|^{\frac{1}{2} + \frac{\beta^2}{4\pi^2}} e^{i\pi\tau_{11}^{(1)}} + \dots\} \quad (3.5)$$

$$\boxed{\text{Sector Neveu-Schwarz, } (\vec{\alpha})_1 = 0}$$

$$\boxed{(\vec{\beta})_1 = 0}$$

$$I(e)\vartheta \begin{bmatrix} \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{\beta} & \vec{\alpha} \end{bmatrix} (\vec{0} \parallel \tilde{\Omega}_{g-1}(\beta)) \sim \frac{d |\delta| d\tau_{11}^{(1)} e^{i\pi\tau_{11}^{(1)}}}{|\delta|^{\frac{1}{2}}} \{c + d |\delta|^{\frac{\pi^2}{\beta^2}} +$$

$$+ |\delta|^{\frac{\beta^2}{4\pi^2} + \frac{\pi^2}{4\beta^2}} [e_+ e^{i\pi\tau_{11}^{(1)}} + e_- e^{-i\pi\tau_{11}^{(1)}}] +$$

$$+ \dots\} \quad (3.6)$$

$$\boxed{(\vec{\beta})_1 = \frac{1}{2}}$$

$$I(e)\vartheta \begin{bmatrix} \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{\beta} & \vec{\alpha} \end{bmatrix} (\vec{0} \parallel \tilde{\Omega}_{g-1}(\beta)) \sim \frac{d |\delta| d\tau_{11}^{(1)} e^{i\pi\tau_{11}^{(1)}}}{|\delta|^{\frac{1}{2}}} \{-c - d |\delta|^{\frac{\pi^2}{\beta^2}} +$$

$$+ |\delta|^{\frac{\beta^2}{4\pi^2} + \frac{\pi^2}{4\beta^2}} [e_+ e^{i\pi\tau_{11}^{(1)}} + e_- e^{-i\pi\tau_{11}^{(1)}}] +$$

$$+ \dots\} \quad (3.7)$$

En esta última expresión, los puntos suspensivos ... incluye al orden más bajo en  $|\delta|$ , términos con la fase  $e^{i\pi\tau_{11}^{(1)}}$ . Es fácil ver que tanto el sector Ramond en sus órdenes más bajos como estos últimos términos y el  $e_+$  del sector Neveu-Schwarz son eliminados tras integrar en  $\tau_{11}^{(1)}$ . Al sumar sobre

todas las estructuras de espín los términos  $c$  y  $d$  del sector Neveu-Schwarz se cancelan a través de lo que podemos llamar proyección GSO. Queda entonces el término  $e_-$ , cuyo exponente es autodual (con la dualidad heterótica), cuya integral converge si

$$T \leq \frac{1}{(1 + \sqrt{2})\pi} = T_c \quad (3.8)$$

$$T \geq \frac{-1}{(1 - \sqrt{2})\pi} = T_c^* = \frac{1}{\pi^2 T_c} \quad (3.9)$$

# Chapter 4

## Conclusiones

### Introducción

En el presente capítulo vamos a discutir brevemente los resultados obtenidos en el anterior. La discusión se va a fundamentar en la concordancia con otros datos conocidos de la teoría de cuerdas y en la comparación con la QCD y las cuerdas cósmicas, dos modelos con los que las cuerdas guardan cierta analogía. Las conclusiones no pueden ser definitivas en el estadio de desarrollo en que que la teoría de cuerdas se encuentra. Las referencias [51] y [52] contienen en su totalidad la discusión que vamos a hacer.

Hemos visto que la construcción de la energía libre de la cuerda heterótica pasa por la obtención de una expresión invariante modular (y eventualmente nula, por supersimetría) de la constante cosmológica de esta teoría. Este problema se ha revelado extremadamente complejo. Al final haremos unos breves comentarios sobre nuestra visión del problema a la luz de nuestro trabajo.

### 4.1 Temperatura crítica

Como hemos señalado anteriormente, es sabido que el espectro de masas de todas las teorías de cuerdas crece exponencialmente, lo que hace que la función de partición canónica de la cuerda diverja por encima de  $T_c$ .

El significado de esta divergencia nos es completamente desconocido.

Hay dos situaciones con las que podemos establecer una analogía. La

primera es la de un sistema de cuerdas cósmicas (en el caso en que no hay interacciones). Este sistema presenta también una temperatura crítica  $T_c$ , que es la temperatura máxima a la que puede acceder el sistema, según indican las simulaciones numéricas [56]. Cuando aumentamos la temperatura del sistema acercándonos a la crítica, la equivalencia entre el colectivo microcanónico y el canónico que se da habitualmente, se rompe.

En cuanto al espectro de la teoría se refiere, lo que ocurre en este límite es que la masa del bosón de Higgs tiende a cero, de forma que las cuerdas "engordan", lo que significa que las interacciones son importantes.

Está claro, por el procedimiento que hemos seguido, y fijándonos en el primer orden, que las divergencias que aparecen en la energía libre térmica de las teorías de cuerdas se pueden interpretar como modos que se convierten en modos de masa cero a  $T = T_c$ , y en modos taquiónicos, de masa al cuadrado negativa para  $T > T_c$  (en [46] esto se discute, y hay referencias sobre este tema).

La segunda situación tiene que ver con los antiguos modelos hadrónicos duales, que poseen una temperatura crítica, llamada temperatura de Hagedorn. Con la aparición de la QCD (descrita por los modelos duales en ciertas situaciones) la temperatura de Hagedorn fue interpretada como la señal de una transición de fase entre una fase hadrónica, que sería descrita por el modelo de Hagedorn (válido a  $T < T_c$ ), en que quarks y gluones están confinados en los hadrones, y una fase en que quarks y gluones están libres.

En principio, conociendo únicamente el modelo de Hagedorn, habría sido muy difícil llegar a esta idea de transición entre fases. Sólo tras la aparición de la QCD, con la QCD "in mente", se han realizado cálculos que, dentro del modelo de Hagedorn sugieren esta posibilidad [57].

Es obvio que éste puede ser un caso similar, y que la de cuerdas puede ser una teoría efectiva válida únicamente por debajo de  $T_c$ . Habría que buscar entonces la teoría válida a todas las temperaturas, similar a la QCD, de la que la de cuerdas es sólo una aproximación. De momento esto es sólo una especulación.

Es de esperar que el conocimiento de la temperatura crítica en interacción sea de alguna utilidad en este problema. De hecho, y siguiendo la comparación con QCD, en la referencia [57] se sugiere que las interacciones harían desaparecer la temperatura crítica, que aumentaría a cada orden hasta hacerse infinita. Se propone, para explicarlo, el siguiente mecanismo físico: supongamos que los estados con alta masa tienen una anchura que es una

función que crece con la masa de éstos. Por ejemplo, en el modelo de la referencia:

$$\Gamma(m) \sim m^{cm} \quad (4.1)$$

donde  $c$  es una constante dada, podemos introducir un "cutoff" ultravioleta en la densidad de estados que hace que la función de partición térmica tenga sentido para todos los valores de  $T$ : en el cálculo de la función de partición canónica ignoramos todos aquellos estados cuya vida media es inferior a su tiempo libre medio (que es del orden de  $\beta$ ). Esto es equivalente a incluir en el integrando de la energía libre un factor

$$\theta(\Gamma^{-1}(m) - \beta) \quad (4.2)$$

Basándonos en la analogía entre la teoría de cuerdas y la QCD, podemos decir que, puesto que hemos encontrado que la temperatura crítica permanece inalterada al tener en cuenta las interacciones, la anchura de los estado de gran masa en interacción no crece de forma que dejen de contribuir a la energía libre térmica.

Para comparar esta afirmación con recientes cálculos numéricos de la probabilidad de desintegración en cuerdas cerradas [58] debemos refinar los argumentos sobre la anchura de los estados, puesto que hay una cierta probabilidad  $e^{\beta\Gamma(m)}$  de que un estado de anchura  $\Gamma(m)$  viva más allá del tiempo libre medio  $\beta$ , y la función de Heaviside no es la más apropiada. Si suponemos que

$$\Gamma(m) = g^2 m^\gamma \quad (4.3)$$

entonces para  $\gamma > 1$  no hay temperatura crítica, para  $\gamma < 1$  la temperatura crítica no es modificada por las interacciones, y para  $\gamma = 1$  la temperatura crítica es modificada tan sólo por factores numéricos.

Los cálculos numéricos han dado como resultado que el comportamiento asintótico de  $\Gamma(m)$  se corresponde en realidad con el valor de  $\gamma = -1$ , lo que concuerda perfectamente con nuestro resultado. Incidentalmente, el mismo cálculo, para cuerdas abiertas [59], da como resultado  $\gamma = 1$ , con lo que es de esperar que el valor numérico de la temperatura crítica se modifique.

Hay que señalar que nuestro resultado encaja perfectamente en la generalizada creencia de que las interacciones de cuerdas a altas energías son "suaves" [60]. Por otro lado, seguimos sin saber lo que ocurre en  $T = T_c$ .

## 4.2 Constantes cosmológicas

A pesar de los muchos avances hechos en un corto espacio de tiempo en el cálculo de determinantes quirales, el cálculo de la constante cosmológica en las teorías de cuerdas con fermiones está en un estado de bastante confusión.

Los problemas con la "ambigüedad" y con la elección de gauge para los gravitinos [61] no deberían haber sido obstáculo para la obtención de una expresión con estas tres propiedades: invariancia modular, factorización correcta, y comportamiento en el límite en que un ciclo no trivial degenera (algo que corrientemente no se estudia, pues no admite comparación con la teoría cuántica de campos en que este límite no tiene análogo<sup>1</sup>) correcto, incluyendo la proyección GSO "local" que elimine los taquiones que deben estar presentes en las contribuciones de cada estructura de espín. Una cuarta propiedad debería ser la nulidad de la constante cosmológica, pero es quizá mucho más difícil de probar por que puede que haga falta realizar la integral en  $\mathcal{M}_g$ . Modestamente opino que es más importante hallar primero la expresión que tiene la tres primeras propiedades y trabajar posteriormente con ella en busca de la cuarta.

El hecho es que en la literatura, a pesar del tiempo transcurrido, en nuestra opinión hay muchas expresiones que sólo tienen la cuarta propiedad, lo que las invalida como bases para ir más allá (para calcular una energía libre, por ejemplo).

Me gustaría haber dejado claros, por ejemplo, los problemas de credibilidad de los "gauge unitarios", lo únicos que dan, por el momento, una constante cosmológica nula, a pesar de la imagen negativa que puede producir el no dar una nueva prescripción, mejor, a cambio (algo que nadie ha dado aún).

---

<sup>1</sup>No admite comparación en el sentido de que no podemos contraer las líneas del universo de partículas puntuales, pero sí en el sentido de que por el asa que contraemos en anchura (situación conformemente equivalente a aumentar su longitud) se propagan modos casi en la capa de masas durante un tiempo muy largo, lo cual tiene sentido en teoría cuántica de campos.

# Appendix A

## Superficies de Riemann y espacio modular

### Introducción

Hemos preferido comenzar representado en los diagramas de la página siguiente los distintos espacios involucrados en el problema y la acción que sobre ellos tienen las diferentes simetrías de la integral funcional (las líneas unen puntos relacionados por transformaciones del grupo en cuestión, las "fibras" representan clases de equivalencia de métricas<sup>1</sup>).

Cada punto de  $\mathcal{M}_g$  es una clase de equivalencia de métricas bajo la acción de reparametrizaciones y transformaciones de Weyl, una clase de equivalencia gauge de nuestro problema, y, por definición, una superficie de Riemann [62]. Cada métrica  $g_{\alpha\beta}d\xi^\alpha d\xi^\beta$  determina una estructura compleja  $J_\alpha^\beta = \sqrt{g}\epsilon_{\alpha\gamma}g^{\gamma\beta}$ , y, dada ésta, si  $z$  es una coordenada compleja que satisface la ecuación de Beltrami

$$J_\alpha^\beta \frac{\partial z}{\partial \xi^\beta} = i \frac{\partial z}{\partial \xi^\alpha} \tag{A.1}$$

entonces (pasa a la página 58.)

---

<sup>1</sup>Con esta representación, el espacio modular puede ser una sección cualquiera del haz de fibras-clases de equivalencia gauge. La elección de una sección determinada corresponde a una elección de "gauge slice", de representantes dentro de cada clase de equivalencia. Una posibilidad es tomar el representante de curvatura constante, por ejemplo. También hay diversas posibilidades para el espacio de Teichmüller.



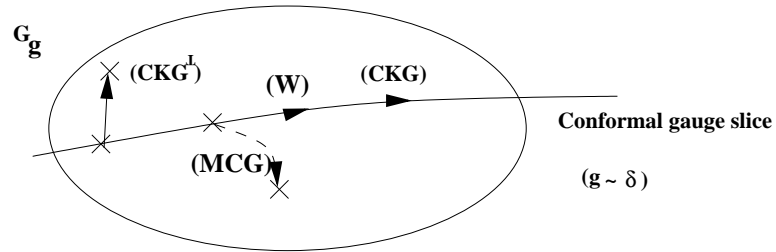


Figure A.1: Espacio de métricas de género  $g$ ,  $\mathcal{G}_g$ .

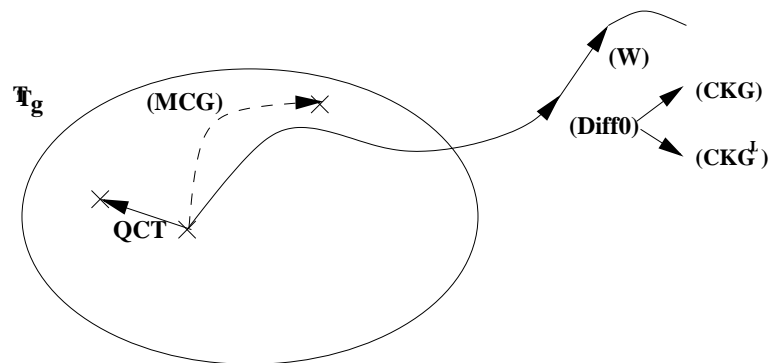
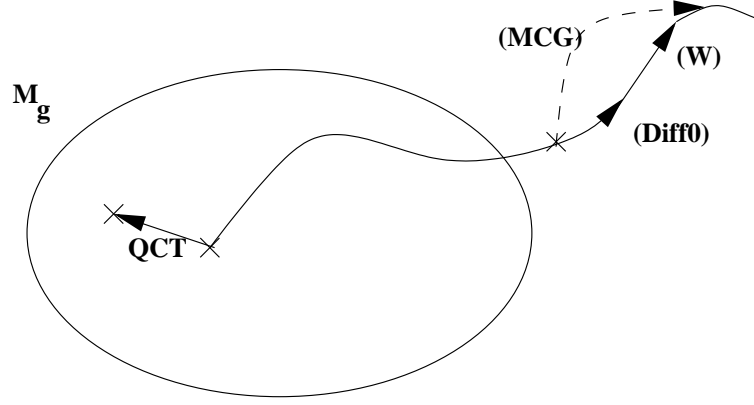


Figure A.2: Espacio de Teichmüller  $\mathcal{T}_g$ .

$$\mathcal{T}_g = \frac{\mathcal{G}_g}{\mathbf{W} \times \mathbf{Diff}_0}$$

Figure A.3: Espacio modular  $\mathcal{M}_g$ .

$$\mathcal{M}_g = \frac{\mathcal{T}_g}{\text{MCG}} = \frac{\mathcal{G}_g}{\mathbf{W} \times \mathbf{Diff}} \quad (A.2)$$

$$g_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta = g_{z\bar{z}} dz d\bar{z}$$

Métricas conformemente equivalentes corresponden a una misma estructura compleja. Podemos ver entonces también cada punto de  $\mathcal{M}_g$  como una clase de equivalencia de estructuras complejas bajo difeomorfismos.

Así podemos definir equivalentemente las superficies de Riemann como variedades complejas bidimensionales con funciones de transición que son analíticas. Los objetos geométricos más naturales que se puede definir sobre ellas son, en consecuencia, tensores complejos  $t$  de tipo  $(n, m)$ ,  $n, m \in \mathbb{Z}$ : bajo transformaciones conformes  $t(z, \bar{z})(dz)^n (d\bar{z})^m$  es invariante.

$\mathcal{M}_g$  es a su vez una variedad compleja, no compacta (más adelante estudiaremos su frontera, Apéndice B), de dimensión  $3(g-1)$ , igual a la dimensión de las  $\mathbf{QCT}^2$  que constituyen su espacio tangente. Las  $\mathbf{QCT}$  están generadas por vectores "cuasiconformes": vectores complejos  $v^z(z, \bar{z})(dz)^{-1}$  que

---

<sup>2</sup> $\mathbf{QCT}$  son las transformaciones cuasiconformes, que no pertenecen a ninguno de los grupos de simetrías de la integral funcional. Forman un espacio de dimensión  $3(g-1)$ , para  $g > 1$  y  $g < 2$ .

no son meromorfos<sup>3</sup>, que pueden tener discontinuidades a lo largo de curvas cerradas. Con cada uno de ellos podemos construir un diferencial de Beltrami  $\mu_{\bar{z}}^z = \partial_{\bar{z}} v^z$  que representa una transformación que no se puede compensar con cambios de coordenadas conformes:

$$g_{z\bar{z}} dz d\bar{z} \longrightarrow g_{z\bar{z}} | dz + \mu d\bar{z} |^2 \quad (\text{A.3})$$

y una nueva estructura compleja, no equivalente a la primera bajo difeomorfismos o transformaciones de Weyl.

Los diferenciales de Beltrami son duales a los diferenciales cuadráticos holomorfos  $b(z)(dz)^2$  con el producto escalar:

$$\langle \mu | b \rangle = \int_{\Sigma_g} \mu b = \int_{\Sigma_g} d^2 z \mu_{\bar{z}}^z(z, \bar{z}) b_{zz}(z) \quad (\text{A.4})$$

$\mu_1$  y  $\mu_2$  corresponden a la misma estructura compleja (salvo difeomorfismos) si para todo diferencial cuadrático  $b$

$$\langle \mu_1 | b \rangle = \langle \mu_2 | b \rangle \quad (\text{A.5})$$

Así podemos parametrizar  $\mathcal{M}_g$  en el entorno de una clase de estructuras complejas a través de diferenciales cuadráticos y clases de equivalencia de diferenciales de Beltrami o de vectores cuasiconformes. Para definir coordenadas complejas analíticas locales en un entorno de  $J$  en  $\mathcal{M}_g$  debemos tomar una base de clases de equivalencia bajo (A.5) de diferenciales de Beltrami  $\mu_i$ ,  $i = 1, \dots, 3(g-1)$  (es decir, un conjunto de  $(-1, 1)$ -diferenciales tal que si  $b_i$ ,  $i = 1, \dots, 3(g-1)$  es una base de diferenciales cuadráticos holomorfos,  $\det \langle \mu_i | b_j \rangle \neq 0$ ). Cualquier estructura compleja en un entorno de  $J$  estará parametrizada por  $\mu(m_1, \dots, m_{3(g-1)}) = \sum_i m_i \mu_i$ . y las  $m_i$  son las coordenadas que buscábamos.

Hay, pues,  $3(g-1)$  diferenciales cuadráticos holomorfos linealmente independientes. Este resultado se obtiene de forma más directa del teorema de Riemann-Roch, que en su forma más sencilla nos da las dimensiones de los espacios de  $\lambda$ -diferenciales holomorfos. Los resultados que nos interesan son simplemente la dimensión compleja del espacio de funciones (1), 1-diferenciales ( $g$ ),  $\lambda$ -diferenciales  $((2\lambda - 1)(g - 1)$  para  $\lambda > 1$  y 0 para

---

<sup>3</sup>Son holomorfos los tensores complejos  $t = t(z)(dz)^n$  que verifican la ecuación  $\bar{\partial} t = \partial_{\bar{z}} t(z) d\bar{z} (dz)^n = 0$  globalmente en  $\Sigma_g$ , ni dependen explícitamente de  $\bar{z}$  (son analíticos), ni tienen polos.

$\lambda < 0$ ) para  $g > 1$ . Si  $\lambda = \frac{1}{2}$  el teorema no nos proporciona ninguna información y además habrá que tener en cuenta las "estructuras de espín" que veremos más adelante en la sección A.3. (Una versión muy completa y que proporciona mucha información de dicho teorema está en el apéndice de la referencia [6], y es utilizada explícitamente en [63]. Véase también [3] donde se formula en términos de divisores.)

Durante toda la discusión precedente hemos hablado del género de una superficie de Riemann. El género de una superficie de Riemann,  $g$  es un entero que puede tomar valores entre 0 e  $\infty^4$  y que caracteriza por completo, desde el punto de vista topológico, a las superficies compactas. Coincide con el número de "asas" o de "agujeros" de la superficie, y se puede obtener a través de la característica de Euler  $\chi(\Sigma)$  (1.4)

## A.1 La matriz periodo

Dado que las superficies de Riemann compactas están completamente clasificadas desde el punto de vista topológico por su género  $g$ , el primer grupo de homología de toda superficie compacta de género  $g$  es isomorfo<sup>5</sup> a  $\mathcal{Z}^{2g}$  y podemos escoger siempre una base canónica como la de la Fig. A.4

Es decir, una base en la que la matriz de intersecciones entre los ciclos de homología (que están orientados) tome la forma:

$$\left( \begin{array}{c|c} (A_i, A_j) & (A_i, B_j) \\ \hline (B_i, A_j) & (B_i, B_j) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} 0 & \delta_{ij} \\ \hline -\delta_{ij} & 0 \end{array} \right), \quad i, j = 1, \dots, g \quad (\text{A.6})$$

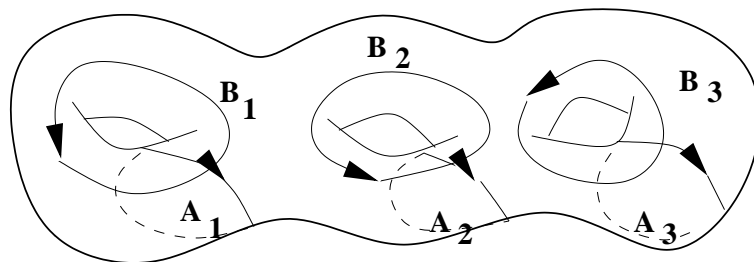
A estos  $2g$  ciclos corresponden (primer grupo de cohomología)  $g$  diferenciales abelianas (complejas y globalmente holomorfas) en la superficie  $\Sigma_g$ :  $\omega_i = \omega_i(z)dz$ ,  $i = 1, \dots, g$ . Se normalizan de forma que sean duales a los ciclos "A":

$$\int_{A_i} \omega_j = \delta_{ij} \quad (\text{A.7})$$

---

<sup>4</sup>Se han definido efectivamente superficies de Riemann hiperelípticas (que definiremos más tarde) de género  $g = \infty$

<sup>5</sup>Si  $\pi_1$  no es trivial, pero es abeliano, entonces el primer grupo de homología no trivial es isomorfo a éste [64]

Figure A.4: Base canónica en una superficie de género  $g = 3$ .

lo que determina la integral sobre los ciclos "B":

$$\int_{B_i} \omega_j = \tau_{ij} \quad (\text{A.8})$$

La matriz compleja  $g \times g$   $\tau_{ij}$  es simétrica (luego tiene  $\frac{1}{2}g(g+1)$  componentes complejas independientes), su parte imaginaria es definida positiva, y se llama matriz periodo. El conjunto de las matrices con estas propiedades es el "semiplano superior de Siegel"  $\mathcal{H}_g$  [65]. Una superficie de Riemann queda completamente determinada por su matriz periodo, y, de hecho, los elementos independientes de ésta  $\tau_{ij}$ ,  $i \leq j$  se pueden utilizar como coordenadas en el espacio de Teichmüller, y, en consecuencia, tomando una región fundamental de éste, en el espacio modular, que sería un subconjunto del semiplano superior de Siegel (para ello necesitamos primero saber cómo actúa el grupo modular sobre las matrices periodo). El problema es que la dimensión de  $\mathcal{H}_g$  y de  $\mathcal{M}_g$  sólo coinciden hasta género tres. Determinar qué matrices de  $\mathcal{H}_g$  pertenecen a alguna superficie de Riemann es el conocido "problema de Schottky", recientemente resuelto, pero de forma difícilmente aplicable en la práctica. Así pues, la región de integración cuando parametrizamos  $\mathcal{M}_g$  con matrices periodo (lo más cómodo en general) es desconocida. A pesar de todo, como veremos en el Apéndice B, podemos relacionar los elementos de

la matriz periodo con algunas buenas coordenadas en  $\mathcal{M}_g$ .

## A.2 El grupo modular

Los "twists" de Dehn [29] generan difeomorfismos no conexos con la identidad. Un twist de Dehn es una operación que consiste en cortar una superficie a lo largo de una curva cerrada, dar un giro completo a uno de los bordes que aparecen tras el corte y volver a unir los bordes como en la figura:

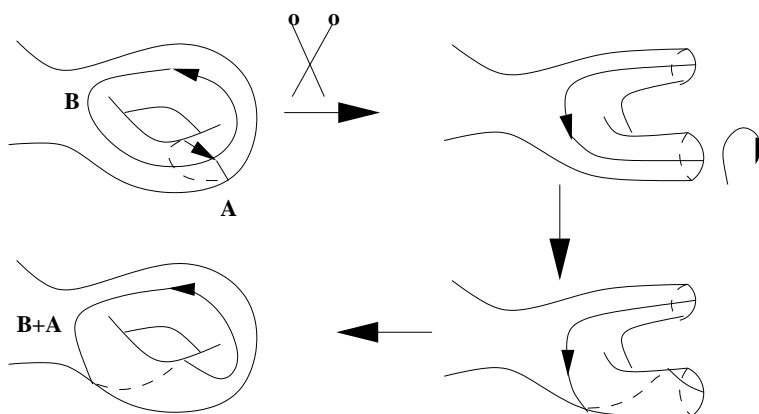


Figure A.5: Twist de Dehn.

Está claro que el difeomorfismo que relaciona los puntos de la superficie antes y después de la operación no se puede conectar de forma continua con la identidad. En este ejemplo hemos cortado a lo largo del ciclo homológicamente no trivial  $A_1$ , y, como vemos, el difeomorfismo actúa sobre la base de homología sin cambiar la matriz de intersecciones.

El conjunto de todos estos difeomorfismos constituye el grupo modular. Utilizando una notación aditiva para el grupo de homología podemos escribir los transformados de los ciclos como combinaciones lineales de los originales, y una transformación modular como una matriz sobre un "vector" de ciclos. En el ejemplo:

$$\begin{pmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ B'_1 \\ B'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

La condición de que debe preservarse la matriz de intersecciones (una forma bilineal antisimétrica) nos da la condición de que las matrices que representan las transformaciones modulares forman el grupo simpléctico de matrices  $2g \times 2g$  con coeficientes enteros  $Sp(2g, \mathcal{Z})$ .

El grupo modular tiene  $3g - 1$  generadores: los asociados a los twists de Dehn en torno a todos los ciclos  $A_i, B_i$  y  $(A_1 - A_2), (A_2 - A_3), \dots, (A_{g-1} - A_g)$ .

En nuestro ejemplo, una superficie de género dos, los generadores del grupo modular son las matrices:

$$\begin{aligned} D(A_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & D(A_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ D(B_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & D(B_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ D(A_1 - A_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

La elección de base canónica de homología en una superficie de Riemann es arbitraria (tenemos que hacer el cociente por el grupo modular). A la hora de construir objetos sobre superficies de Riemann, debemos tener en cuenta que no pueden depender de la base de homología elegida, o, lo que es equivalente, han de ser invariantes modulares. (Una superficie asociada a una base dada, o sea, un punto de  $\mathcal{T}_g$ , es una superficie de Torelli, no una superficie de Riemann.) Para comprobar si la función de partición de una teoría de cuerdas es invariante bajo todo el grupo modular basta ver que lo es bajo la acción de los generadores.

La base de diferenciales abelianos está asociada a la base de homología. Cuando transformamos modularmente ésta:

$$\left( \begin{array}{c|c} \mathbf{D} & \mathbf{C} \\ \hline \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{array} \right) \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_g \\ B_1 \\ \vdots \\ B_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'_1 \\ \vdots \\ A'_g \\ B'_1 \\ \vdots \\ B'_g \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

debemos tomar una nueva base de diferenciales abelianos  $\omega'_i$  que esté correctamente normalizada:

$$\int_{A'_i} \omega'_j = \delta_{ij} \quad (\text{A.12})$$

$$\Rightarrow \omega'_j = \omega_k (C\tau + D)^{-1}_{kj} \quad (\text{A.13})$$

$$\Rightarrow \int_{B'_i} = \tau'_{ij} = (A\tau + B)_{ik} (C\tau + D)^{-1}_{kj} \quad (\text{A.14})$$

Esta información nos permite hallar una región fundamental del grupo modular en  $\mathcal{H}_g$ .

### A.3 Estructuras de espín, divisores y thetas de Riemann

Podemos definir  $\lambda$ -diferenciales con  $\lambda$  semientero (racional, en general), simplemente por su ley de transformación, pero ésta implica tomar una raíz cuadrada y una elección arbitraria del signo de la misma. Esto se traduce en que viven en un recubrimiento doble de la superficie de Riemann y, sobre ella, pueden, por consiguiente, ser periódicos o antiperiódicos alrededor de cada ciclo no trivial de homología. El conjunto de estas  $2g$  condiciones de monodromía alrededor de los ciclos de una base canónica de homología determina una "estructura de espín", que se puede representar a través de una "característica" de una función theta de Riemann, que definiremos más tarde:



$$\begin{bmatrix} \vec{\alpha} \\ \vec{\beta} \end{bmatrix}, \quad \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \left(\frac{1}{2}\mathcal{Z}/\mathcal{Z}\right)^g \quad (\text{A.15})$$

de forma que al girar en torno al ciclo  $A_i$  (resp.  $B_i$ ), el valor del diferencial cambia por un factor  $(-1)^{2\alpha_i+1}$  (resp.  $(-1)^{2\beta_i+1}$ ) ( $0 \Rightarrow$  antiperiódico,  $\frac{1}{2} \Rightarrow$  periódico).

Hay dos tipos de estructuras de espín: pares, aquellas para las que el número de  $\frac{1}{2}$ -diferenciales holomorfos es par (en general cero) e impares, aquellas para las que este número es impar (en general, uno). Sus características verifican

$$\exp\{4\pi i \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}\} = +1, -1 \quad (\text{A.16})$$

respectivamente. Hay  $2^{g-1}(2^g - 1)$  características impares (6 en género  $g = 2$ ) y  $2^{g-1}(2^g + 1)$  pares (10 en  $g = 2$ ).

Las estructuras de espín no son invariantes modulares, por estar su definición ligada a la de una base de homología. Pero no cambian linealmente como ingénuamente habríamos podido esperar. Bajo la transformación (A.11) [66]

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \vec{\alpha} \\ \vec{\beta} \end{bmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} D & -C \\ -B & A \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\alpha} \\ \vec{\beta} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \text{Diag} \begin{pmatrix} CD^t \\ AB^t \end{pmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{bmatrix} \vec{\alpha}' \\ \vec{\beta}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{\gamma} \\ \vec{\delta} \end{bmatrix} \\ e &\longrightarrow e' = \tilde{e} + d \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

El término no lineal  $d$  refleja el hecho de los fibrados de  $\frac{1}{2}$ -formas diferenciales tienen curvatura, y se anula (módulo  $\mathcal{Z}$ ) si la transformación modular pertenece al subgrupo de Igusa  $\Gamma_{1,2}$  [67]. El término no lineal nos da exactamente la transformación de la clase de Riemann que definiremos más tarde. Las características pares e impares se transforman irreduciblemente bajo el grupo modular de forma separada. Finalmente, de esto último y de que  $d$  corresponde a una característica par se deduce que

$$e^{4\pi i(\tilde{\alpha}^t \vec{\delta} + \tilde{\beta}^t \vec{\gamma})} = +1 \quad (\text{A.18})$$

La theta de Riemann de argumentos  $\vec{z} \in C^g, \tau \in \mathcal{H}_g$  y de característica  $\begin{bmatrix} \vec{\alpha} \\ \vec{\beta} \end{bmatrix}$  está definida por la serie [65]:

$$\begin{aligned} \vartheta \begin{bmatrix} \vec{\alpha} \\ \vec{\beta} \end{bmatrix} (\vec{z}|\tau) &= \sum_{\vec{n} \in \mathcal{Z}^g} \exp \{ \pi i (\vec{n} + \vec{\alpha})^t \tau (\vec{n} + \vec{\alpha}) + 2\pi i (\vec{n} + \vec{\alpha})^t (\vec{z} + \vec{\beta}) \} \\ &= \exp \{ \pi i \vec{\alpha}^t \tau \vec{\alpha} + 2\pi i \vec{\alpha}^t (\vec{z} + \vec{\beta}) \} \vartheta(\vec{z} + \tau \vec{\alpha} + \vec{\beta}|\tau) \\ \vartheta(\vec{z}|\tau) &= \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{bmatrix} (\vec{z}|\tau) \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Como función de  $\vec{z}$  tiene la misma paridad que su característica y es cuasiperiódica en el toro complejo  $\mathcal{J}ac(\Sigma_g)C^g/(\tau\mathcal{Z}^g + \mathcal{Z}^g) = C^g/\Lambda(\tau)$  ("variedad de Jacobi asociada a la superficie de Riemann  $\Sigma_g$  de matriz periodo  $\tau$ "):

$$\begin{aligned} \vartheta \begin{bmatrix} \vec{\alpha} \\ \vec{\beta} \end{bmatrix} (\vec{z} + \tau \vec{n} + \vec{m}|\tau) &= \exp \{ -\pi i \vec{m}^t \tau \vec{m} + 2\pi i [\vec{\alpha}^t \vec{n} - (\vec{\beta} + \vec{z})^t \vec{m}] \} \times \\ &\times \vartheta \begin{bmatrix} \vec{\alpha} \\ \vec{\beta} \end{bmatrix} (\vec{z}|\tau) \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Bajo la transformación modular  $T$  (A.11) [66] [67]:

$$\vartheta \begin{bmatrix} \vec{\alpha}' \\ \vec{\beta}' \end{bmatrix} (\vec{z}'|\tau') = K(\det M)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i < j} z_i z_j \frac{\partial \log \det M}{\partial \tau_{ij}} \right\} \vartheta \begin{bmatrix} \vec{\alpha} \\ \vec{\beta} \end{bmatrix} (\vec{z}|\tau) \quad (\text{A.21})$$

donde  $\begin{bmatrix} \vec{\alpha}' \\ \vec{\beta}' \end{bmatrix}$  viene dada en función de  $\begin{bmatrix} \vec{\alpha} \\ \vec{\beta} \end{bmatrix}$  en (A.17),  $\tau'$  en función de  $\tau$  en (A.14),  $M = C\tau + D$ ,  $\vec{z}' = \vec{z}M$  y  $K \in C_1^x$  y no depende ni de  $\vec{z}$  ni de  $\tau$ :

$$\begin{aligned} K(T) &= \varepsilon(T) \exp \left\{ \varphi(T, \begin{bmatrix} \vec{\alpha} \\ \vec{\beta} \end{bmatrix}) \right\} \\ \varphi(T, \begin{bmatrix} \vec{\alpha} \\ \vec{\beta} \end{bmatrix}) &= [\vec{\alpha}^t D^t B \vec{\alpha} + \vec{\beta}^t C^t A \vec{\beta}] - [2\vec{\alpha}^t B^t C \vec{\beta} + \\ &\quad + (\vec{\alpha}^t D^t - \vec{\beta}^t C^t) \text{Diag}(AB^t)] \\ \varepsilon(T)^8 &= 1 \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Se conocen expresiones de  $\varepsilon(T)$  para transformaciones modulares  $T$  pertenecientes a subgrupos especiales. Si la transformación modular pertenece al grupo de Igusa  $\Gamma_{1,2}$ , entonces  $K^8 = 1$  y sólo depende de la matriz de la transformación [65].

Aunque es una función multivaluada en  $\mathcal{J}ac(\Sigma_g)$ , sus ceros y polos están bien definidos. Esto nos permite usarla para construir objetos geométricos sobre  $\mathcal{J}ac(\Sigma_g)$  primero, y luego sobre  $\Sigma_g$  a través de la "transformación de Jacobi": dado un punto base  $P_0$  sobre la superficie  $\Sigma_g$  de género  $g$  con matriz periodo  $\tau$ , a un punto cualquiera  $P$  de  $\Sigma_g$  le hacemos corresponder el siguiente punto de  $\mathcal{J}ac(\Sigma_g)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{I}: \Sigma_g &\longrightarrow \mathcal{J}ac(\Sigma_g) \\ P &\longrightarrow (f_{P_0}^P \omega_1, \dots, f_{P_0}^P \omega_g) \equiv \int_{P_0}^P \vec{\omega} \in \mathcal{J}ac(\Sigma_g) \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Por supuesto, depende del punto base elegido, pero se puede ser más general. Antes necesitamos el concepto de divisor sobre una superficie de Riemann. Por tal, entendemos una combinación lineal formal de puntos de  $\Sigma_g$ :

$$D = \sum_i n_i P_i, \quad n_i \in \mathbb{Z}, \quad P_i \in \Sigma_g \quad (\text{A.24})$$

El grado de un divisor es

$$\deg(D) = \sum_i n_i \quad (\text{A.25})$$

y es positivo si no hay enteros negativos entre los  $n_i$  de (A.3).

Puesto que los ceros  $P_i$  y sus órdenes  $n_i$ , y los polos  $Q_i$  y sus respectivos órdenes  $m_i$  de una diferencial o función  $f$  cualquiera sobre la  $\Sigma_g$  están siempre bien definidos, asociamos a una función o un diferencial el divisor:

$$\text{div}(f) = \sum_i n_i P_i - \sum_i m_i Q_i \quad (\text{A.26})$$

Así, un objeto holomorfo tiene siempre un divisor positivo.

Las funciones meromorfas en una superficie de Riemann tienen divisores de grado cero, lo que implica que los divisores de diferenciales del mismo orden tienen el mismo grado. (Hay que señalar que no siempre hay un objeto

cuyo divisor sea uno dado. Por ejemplo: no puede haber nada (en  $g > 1$ ) con el divisor  $P - Q$ , pues habría de ser una función con un único polo en  $Q$ , y esto no existe en general).

Dos divisores son equivalentes si su diferencia es el divisor de una función meromorfa. (Han de ser del mismo grado, y si existen objetos con esos divisores, su cociente es la función meromorfa correspondiente). El conjunto de las clases de divisores sobre  $\Sigma_g$  es un grupo aditivo, la variedad de Picard  $\mathcal{P}(\Sigma_g)$ . La clase de los divisores de las diferenciales abelianas es la clase canónica  $K$ , y su grado es  $2(g - 1)$ . Los fibrados de diferenciales de orden  $\lambda$ , entero, se definen como potencias tensoriales del de las formas abelianas, y por lo tanto el grado de sus divisores  $\mathcal{D}_\lambda = \lambda K$  es  $2\lambda(g - 1)$ . Para  $\frac{1}{2}$ -formas, hemos de distinguir entre las distintas estructuras de espín  $e$ , y su divisor  $\mathcal{D}_e$ , de grado  $g - 1$  verifica  $2\mathcal{D}_e = K$ <sup>6</sup>.

Dado el divisor de grado cero (A.3), podemos definir la transformación de Jacobi del mismo sin hacer referencia a puntos base [65]: si  $\sigma$  es una 1-cadena en  $\Sigma_g$  tal que  $\partial\sigma = D$

$$\mathbf{I}(D) = \int_\sigma \vec{\omega} \in \mathcal{J}ac(\Sigma_g) \quad (\text{A.27})$$

o bien, de forma más pedestre:

$$\mathbf{I}(D) = \sum_i \int_{P_0}^{P_i} \vec{\omega} - \sum_i \int_{P_0}^{Q_i} \vec{\omega} \quad (\text{A.28})$$

Esta definición se puede utilizar para divisores de grado distinto de cero, pero entonces no hay independencia del punto base. Hay que tener en cuenta que eso sería realmente  $\mathbf{I}(D - \text{deg}(D)P_0)$ .

Ahora podemos utilizar divisores de grado cero como argumento  $\vec{z}$  de la theta. Sin embargo, a la hora de construir objetos univaluados sobre  $\Sigma_g$  (funciones, por ejemplo [65]) habrá que tener en cuenta que  $\mathbf{I}$  está definido modulo  $\Lambda(\tau)$ , (únicamente porque  $\sigma$  está definido módulo ciclos "A" y "B"), y que la theta es cuasiperiódica en esta red. Utilizando cocientes de thetas y sus derivadas podemos obtener objetos univaluados, con ceros y polos bien

---

<sup>6</sup>Esto no quiere decir que  $\frac{1}{2}K = \mathcal{D}_e$ . El primer miembro de esta igualdad no tiene sentido. Sólo a un divisor concreto en el que cada punto aparezca multiplicado por dos, podemos dividirlo por dos, aunque, en general, nada garantiza la existencia del objeto correspondiente al resultado.

definidos. Pero esto sólo determina tal objeto salvo por una constante multiplicativa. Para determinar la constante hay que fijar además cada camino de integración (las ramas de cada theta en  $\mathcal{J}ac(\Sigma_g)$ ), de forma que tengamos los argumentos de las thetas definidas en  $C^g$  y no en  $\mathcal{J}ac(\Sigma_g)$ .

Un ejemplo muy sencillo para clarificar esto último puede ser el siguiente: podemos construir funciones univaluadas a través de cocientes de dos funciones multivaluadas que tengan la misma monodromía. Pero para determinar completamente la función univaluada hace falta fijar una rama concreta de cada una. Así, hallando el cociente de las funciones  $z^{\frac{3}{2}}$  y  $z^{\frac{1}{2}}$  obtenemos una función univaluada. Pero dependiendo de las ramas concretas que fijemos, podemos tener  $+z$   $0$   $-z$ , que se diferencian en un factor  $-1$  y tienen los mismos ceros y polos.

El primer resultado importante viene dado por el siguiente teorema

**Teorema 1 (Abel)** *Dado un divisor  $D$  de grado cero, entonces  $\mathbf{I}(D) = 0$  en  $\mathcal{J}ac(\Sigma_g)$  si y sólo si existe una función meromorfa  $f$  cuyo divisor sea  $D$ .*

La consecuencia inmediata es

**Corolario 1** *Dos divisores son equivalentes si su imagen por la transformación de Jacobi es la misma en  $\mathcal{J}ac(\Sigma_g)$ .*

Así podemos utilizar como argumento  $\vec{z}$  de las thetas de Riemann, clases de divisores de grado cero, y podemos aplicar el siguiente teorema que nos da los ceros de éstas:

**Teorema 2 (Riemann)** *Existe una clase de divisores  $\Delta_g$  de grado  $g - 1$  y que verifica  $2\Delta_g = K$ , tal que  $\vartheta(\vec{z}|\tau) = 0$  si y sólo si existen  $g - 1$  puntos  $P_1, \dots, P_{g-1} \in \Sigma_g$  tales que*

$$\vec{z} = \mathbf{I}(\Delta_g - \sum_i^{g-1} P_i) \quad (\text{A.29})$$

La clase  $\Delta_g$  se llama clase de Riemann y es, entonces, la clase de divisores de los  $\frac{1}{2}$ -diferenciales con una cierta estructura de espín. En general no hay ningún divisor positivo en la clase  $\Delta_g$ , sin embargo, [66]  $\forall P \in \Sigma_g$ ,  $\Delta_g$  es la clase del divisor del  $\frac{1}{2}$ -diferencial con un único polo en  $P$ , llamado kernel de

Szëgo, con característica  $\begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{bmatrix}$ . La clase de Riemann depende de la elección de base de homología a través de la definición de la theta.

Las clases de divisores de  $\frac{1}{2}$ -diferenciales para las otras características  $e = \begin{bmatrix} \vec{\alpha} \\ \vec{\beta} \end{bmatrix}$  verifican:

$$\mathbf{I}(\mathcal{D}_e - \Delta_g) = \tau\vec{\alpha} + \vec{\beta} \in \mathcal{J}ac(\Sigma_g) \quad (\text{A.30})$$

De ésta ecuación, del teorema de Riemann y de que las thetas impares son funciones impares de  $\vec{z}$  y por ello  $\vartheta(\tau\vec{\alpha} + \vec{\beta}||\tau) = 0$  se deduce que existen  $g - 1$  puntos  $P_i$  tales que  $\mathcal{D}_e = [\sum_i P_i]$ , si  $e = \begin{bmatrix} \vec{\alpha} \\ \vec{\beta} \end{bmatrix}$  es impar. Esto sugiere que existe un  $\frac{1}{2}$ -diferencial holomorfo, con  $g - 1$  ceros en los puntos  $P_i$ , para cada característica impar  $e$ . (Esto no es válido en general para las características pares, que se obtendrían a partir de transformaciones modulares de la clase de Riemann, que hemos dicho que, en general no contiene ningún divisor positivo). Tal diferencial se puede construir como raíz cuadrada del diferencial abeliano

$$h_e^2(z) = \sum_i \partial_i \vartheta[e](\vec{0}||\tau) \omega_i(z) \quad (\text{A.31})$$

cuyo divisor es  $\sum_i^{g-1} 2P_i$ .

Para la característica impar  $e$  podemos definir el  $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ -diferencial holomorfo

$$E(z, w) = \frac{\vartheta[e](\int_w^z \vec{\omega}||\tau)}{h_e(z)h_e(w)} \quad (\text{A.32})$$

que es independiente de la estructura de espín impar escogida y solo tiene un cero de primer orden en  $z = w$ . Naturalmente, con estas propiedades, ha de ser multivaluado en  $\Sigma_g \times \Sigma_g$ . Con la forma prima  $E(z, w)$  podemos construir el kernel de Szëgo para una característica par  $u$  arbitraria

$$S_u(z, w) = \frac{1}{E(z, w)} \frac{\vartheta[u](z - w)}{\vartheta[u](0)} \quad (\text{A.33})$$

También se puede utilizar para construir funciones meromorfas [65]. Hay que tener entonces en cuenta el comentario que hicimos al hablar de la construcción de funciones a través de thetas de Riemann cuyo argumento fuera un divisor: que las funciones así construidas no quedan completamente definidas (en concreto su normalización) si no determinamos las ramas de cada forma prima  $E(z, w)$  que interviene, fijando un camino de integración entre  $z$  y  $w$ . Normalmente éste queda fijado por la condición de que, cuando  $z$  tiende a  $w$

$$E(z, w) \sim z - w \tag{A.34}$$

lo que implica tomar un camino cuya longitud tienda a cero cuando  $z$  tienda a  $w$ , homológicamente equivalente a  $\sigma$  en Fig. A.6.

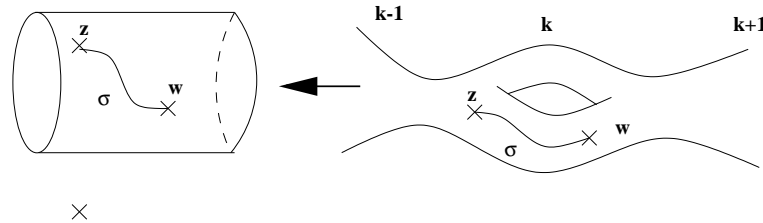


Figure A.6:

Si tomamos, por ejemplo  $A_k + B_k + \sigma$  tendríamos una rama que se diferencia en un factor

$$\exp \{2\pi i(\alpha_k - \beta_k)\} \exp \{-\pi i\tau_{kk} - 2\pi i \int_{\sigma} \omega_i\} \tag{A.35}$$

Este factor adicional puede ser muy importante si lo que nos interesa es sobre todo la dependencia en el moduli a través de  $\tau$ .

## A.4 Superficies hiperelípticas

Otro elemento a tener en cuenta puede ser la posible variación de los puntos de un divisor bajo transformaciones modulares. En rigor debemos hablar de cambios de clase de divisores de  $\frac{1}{2}$ -diferenciales por los métodos que vamos a utilizar para estudiarlos y porque son las únicas clases de divisores cuya definición está ligada a la de la base de homología (como  $\Delta_g$ ). Consideremos, como ejemplo concreto, superficies de Riemann de género  $g = 2$ . Todas ellas son superficies hiperelípticas, lo que significa que se pueden describir como recubrimientos dobles de la esfera con seis puntos de ramificación  $P_1, \dots, P_6$ , de acuerdo con el teorema de Riemann-Hurwitz [3]:

$$y^2 = \prod_{i=1}^6 [z - z(P_i)] \quad (\text{A.36})$$

$z(P_i)$  es la coordenada del punto de rama  $P_i$  sobre  $C$  (son puntos comunes a las dos hojas del recubrimiento). Podemos fijar el valor de tres de ellas gracias a la invariancia  $SL(2, C)$  de la esfera, de forma que la superficie queda enteramente especificada por las coordenadas de los 3 puntos de rama restantes, o, mejor, de las tres combinaciones

$$\frac{[z(P_i) - z(P_j)][z(P_k) - z(P_l)]}{[z(P_i) - z(P_k)][z(P_j) - z(P_l)]} \quad (\text{A.37})$$

que son invariantes bajo transformaciones de  $SL(2, C)$  y que son linealmente independientes, constituyendo buenas coordenadas en  $\mathcal{T}_g$ <sup>7</sup>. Estas razones se pueden relacionar, además, con la matriz periodo (en lo que constituye, en cierto modo la expresión de un cambio de coordenadas en  $\mathcal{T}_g$ ) utilizando las identidades de Thomae [66] [65]. Para ello tenemos que definir una base de homología y definir estructuras de espín en función de los datos de la superficie hiperelíptica.

Las seis estructuras de espín impares que podemos definir sobre estas superficies están en correspondencia biunívoca [66] con los seis divisores de grado  $g - 1 = 2$   $P_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , de manera que las seis características

---

<sup>7</sup>No son invariantes modulares. Por otro lado, las superficies hiperelípticas de género  $g$  tienen  $2(g+1)$  puntos de rama, y constituyen, por el mismo razonamiento, una subvariedad de  $\mathcal{M}_g$  de dimensión  $2g - 1$ : son hiperelípticas todas las superficies de Riemann de géneros  $g = 0, 1$  y  $2$ , pero no todas las de género  $g > 2$ .



$e_i = \begin{bmatrix} \vec{\alpha}_i \\ \vec{\beta}_i \end{bmatrix}$  impares se pueden obtener a través de la transformación de Jacobi del divisor de grado cero  $P_i - \Delta$ <sup>8</sup>:

$$\mathbf{I}(P_i - \Delta) = \tau \vec{\alpha}_i + \vec{\beta}_i \pmod{\Lambda(\tau)} \quad (\text{A.38})$$

De igual forma, las diez estructuras pares esán en correspondencia con particiones del conjunto de los seis puntos de rama en dos grupos de tres:  $(P_{i_1}, P_{i_2}, P_{i_3} \| P_{j_1}, P_{j_2}, P_{j_3}) \equiv (P_{j_1}, P_{j_2}, P_{j_3} \| P_{i_1}, P_{i_2}, P_{i_3})$ . Las correspondientes características se pueden obtener a partir, por ejemplo de

$$\mathbf{I}(P_{i_1} + P_{i_2} - P_{i_3} - \Delta) = \mathbf{I}(P_{j_1} + P_{j_2} - P_{j_3} - \Delta) \pmod{\Lambda(\tau)} \quad (\text{A.39})$$

o de cualquier divisor que podamos construir a partir de éstos permutando entre sí los  $P_i$  o los  $P_j$ .

Los cálculos se pueden hacer explícitamente, y además podemos ver que siempre existe una trayectoria de integración para la transformación de Jacobi que nos da todas las componentes de  $\vec{\alpha}_i$  y  $\vec{\beta}_i$  iguales a 0 ó  $\frac{1}{2}$ .

Para todo ello podemos adoptar la siguiente construcción de la superficie y la siguiente base de homología:

La correspondencia entre estructuras de espín impares y puntos de rama se calcula a partir de los "vectores de constantes de Riemann basados en el punto  $Q$ ",  $\vec{k}^Q$ , cuya componente  $j$  es:

$$(\vec{k}^Q)_j \stackrel{def}{=} \frac{1}{2} - \tau_{jj} + \sum_{i=1, i \neq j}^g \int_{A_i} (\omega_j(x) \int_Q^x \omega_i) \quad (\text{A.40})$$

y que tiene la propiedad de que, independientemente del punto  $Q$

$$\vec{k}^Q = \Delta_g - (g - 1)Q \quad (\text{A.41})$$

El resultado con los convenios adoptados es

---

<sup>8</sup>Es fácil ver que estos divisores no son equivalentes: si lo fueran, existirían funciones meromorfas con un único polo en  $P_i$  y un único cero en  $P_j$ ,  $i \neq j$ . Lo primero es imposible por coincidir los puntos de rama con los puntos de Weierstrass, y por el teorema del "gap" de Weierstrass [3].

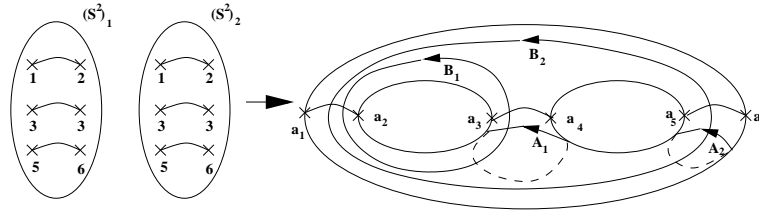


Figure A.7: Construcción del toro a partir de dos esferas de Riemann con cortes.

$$\begin{aligned}
 P_1 - \Delta &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} & P_2 - \Delta &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
 P_3 - \Delta &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} & P_4 - \Delta &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
 P_5 - \Delta &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} & P_6 - \Delta &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.42}$$

Si realizamos ahora la transformación modular correspondiente a la matriz de  $Sp(4, \mathcal{Z})$

$$\left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \tag{A.43}$$

$$\Rightarrow \tilde{\tau} = (A\tau + B)(C\tau + D)^{-1} = \tau + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.44})$$

es fácil ver que

$$\vartheta [e = P_2 - \tilde{\Delta}] (\tilde{z} || \tilde{\tau}) = \vartheta [e = P_1 - \Delta] (\tilde{z} || \tau) \quad (\text{A.45})$$

y que, en general, los puntos de rama resultan permutados entre sí bajo transformaciones modulares. La conclusión no hubiera sido exactamente ésta si hubiésemos utilizado la ley de transformación del argumento  $\tilde{z}$  de la theta de Riemann para los divisores  $P_i - \Delta$ , pero observemos que utilizar la ley de transformación de las características es aceptar la ley de transformación del argumento  $\tilde{z}$  e incorporar la ley de transformación de la clase de Riemann:

$$\tilde{\Delta}_g - \Delta_g = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \text{Diag} CD^t \\ \text{Diag} AB^t \end{bmatrix} = d \quad (\text{A.46})$$

que es el término no lineal en la ley de transformación de las características y corresponde a una característica par siempre.

Por completitud escribimos abajo la correspondencia entre particiones de puntos de rama  $(\alpha_1^e \alpha_2^e \alpha_3^e || \beta_1^e \beta_2^e \beta_3^e)$  ( $\alpha_i^e$  y  $\beta_i^e$  son los subíndices de los puntos de rama) y estructuras de espín pares  $[e]$  con la elección de base de homología anterior:

$$\begin{array}{ll}
\boxed{1} (123||456) & \boxed{2} (124||356) \\
P_1 + P_2 - P_3 - \Delta = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} & P_1 + P_2 - P_4 - \Delta = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\boxed{3} (125||346) & \boxed{4} (126||345) \\
P_1 + P_2 - P_5 - \Delta = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & P_1 + P_2 - P_6 - \Delta = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
\boxed{5} (134||256) & \boxed{6} (135||246) \\
P_1 + P_3 - P_4 - \Delta = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & P_1 + P_3 - P_5 - \Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\boxed{7} (136||245) & \boxed{8} (145||236) \\
P_1 + P_3 - P_6 - \Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} & P_1 + P_4 - P_5 - \Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \\
\boxed{9} (146||235) & \boxed{10} (156||234) \\
P_1 + P_4 - P_6 - \Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} & P_1 + P_5 - P_6 - \Delta = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}
\end{array} \tag{A.47}$$

Ahora vamos a escribir las identidades de Thomae: sea

$$y^2(z) = \prod_{i=1}^{2(g-1)} (z - a_i), \quad a_i = z(P_i) \tag{A.48}$$

una superficie de Riemann hiperelíptica de género  $g$ . Podemos construir  $g$  diferenciales abelianos

$$v_i = \frac{z^{i-1}}{y(z)} dz \tag{A.49}$$

y a partir de ellos los normalizados asociados a una determinada base de homología

$$\omega_i = \sum_j \sigma_{ij} v_j \tag{A.50}$$

Si  $(P_{i_1}, \dots, P_{i_{g+1}} || P_{j_1}, \dots, P_{j_{g+1}})$  es la partición de los puntos de rama que corresponde a la estructura de espín par no singular  $e$

$$e = \sum_{k=1}^{g+1} P_{i_k} - D - \Delta_g \quad (\text{A.51})$$

$$D = x + \phi(x) \quad \forall x \in \Sigma_g \quad (\text{A.52})$$

(Esta es la expresión que hemos utilizado antes:  $\phi$  es la involución de la superficie que intercambia ambas hojas. Nosotros tomamos  $x$  como uno de los puntos de rama, ya que, por ser comunes a ambas hojas verifican  $\phi(P_i) = P_i$ .)

Entonces

$$\vartheta^8[e] = (\det\sigma)^{-4} \prod_{k,l=1; k<l}^{g+1} (a_{i_k} - a_{i_l})^2 (a_{j_k} - a_{j_l})^2 \quad (\text{A.53})$$

En principio es posible determinar el signo de la raíz cuadrada de esta expresión [65], pero en general no es necesario, pues, por ejemplo, en una identidad de Riemann (véase la siguiente sección) sólo nos interesan signos relativos entre las thetas a la cuarta, que podemos hallar simplemente imponiendo la cancelación algebraica de productos de las  $a_i$ .

Esta identidad es fundamental. Con ella, para nuestro ejemplo de género dos podemos hallar las relaciones entre las razones (A.37) y la matriz periodo.

El ejemplo más sencillo y bien conocido corresponde a un toro. Solo tenemos un diferencial abeliano:

$$v = \frac{dz}{y(z)} \quad (\text{A.54})$$

y el parámetro modular  $\tau$  (la matriz periodo en  $g = 1$ ) vendrá dado por:

$$\tau = \frac{\int_B \frac{dz}{y}}{\int_A \frac{dz}{y}} \quad (\text{A.55})$$

Gracias a la descripción como recubrimiento doble de la esfera, teniendo en cuenta que  $v$  es impar frente al cambio de hoja y los ciclos de homología también (cambian de orientación), las integrales sobre  $A$  y  $B$  se convierten en integrales entre dos puntos de rama, integrales hiperelípticas siempre entre 0 y 1, tras realizar una transformación de  $SL(2, C)$  conveniente, que se pueden

expresar en términos de la función hipergeométrica [68] cuyos argumentos dependen de la razón de los cuatro puntos de rama del toro:

$$\lambda = \frac{a_{12}a_{34}}{a_{13}a_{24}} \quad (a_{ij} \stackrel{def}{=} a_i - a_j) \quad (\text{A.56})$$

$$\tau(\lambda) = i \frac{F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; 1 - \lambda)}{F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \lambda)} \quad (\text{A.57})$$

Es sabido que, en general, si  $\tau$  uniformiza  $F$ , es decir, si  $\lambda = \kappa^2(\tau)$  y  $F(a, b; c; \kappa^2(\tau))$  es una función univaluada de  $\tau$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Gamma(b)\Gamma(c-b)F(a, b; c; \kappa^2(\tau)) &= \pi^{2b}\Gamma(c)[\vartheta \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} | (0||\tau)]^{4b} \times \\ &\times \int_0^{\frac{1}{2}} \Phi(u||\tau) du \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

$$\begin{aligned} \Phi(u||\tau) &= \left( \frac{\vartheta' \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{matrix} | (u||\tau)}{\vartheta' \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{matrix} | (0||\tau)} \right)^{2b-1} \times \left( \frac{\vartheta \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{matrix} | (u||\tau)}{\vartheta \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{matrix} | (0||\tau)} \right)^{2(c-b)-1} \times \\ &\times \left( \frac{\vartheta \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} | (u||\tau)}{\vartheta \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} | (0||\tau)} \right)^{1-2a} \times \left( \frac{\vartheta \begin{matrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{matrix} | (u||\tau)}{\vartheta \begin{matrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{matrix} | (0||\tau)} \right)^{1-2(c-a)} \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

y de aquí obtenemos

$$\lambda(\tau) = \kappa^2(\tau) = \left( \frac{\vartheta \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{matrix} | (0||\tau)}{\vartheta \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} | (0||\tau)} \right)^4 \quad (\text{A.60})$$

lo mismo que habríamos obtenido a partir de las identidades de Thomae. A género dos tenemos, por ejemplo, salvo signos:

$$\left[ \frac{(a_1 - a_4)(a_5 - a_6)}{(a_1 - a_5)(a_4 - a_6)} \right]^2 \sim \frac{\vartheta^4 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \vartheta^4 \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}{\vartheta^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \vartheta^4 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} (\vec{0} \parallel \tau) \quad (\text{A.61})$$

$$\left[ \frac{(a_2 - a_4)(a_5 - a_6)}{(a_2 - a_5)(a_4 - a_6)} \right]^2 \sim \frac{\vartheta^4 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \vartheta^4 \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}{\vartheta^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \vartheta^4 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} (\vec{0} \parallel \tau) \quad (\text{A.62})$$

$$\left[ \frac{(a_3 - a_4)(a_5 - a_6)}{(a_3 - a_5)(a_4 - a_6)} \right]^2 \sim \frac{\vartheta^4 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \vartheta^4 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}{\vartheta^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \vartheta^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}} (\vec{0} \parallel \tau) \quad (\text{A.63})$$

Como hemos visto, las transformaciones modulares permutan entre sí los puntos de rama. Podemos identificar, en principio todas las permutaciones con las transformaciones modulares (es fácil ver que el número de generadores de ambos grupos es el mismo). Sin embargo esta identificación no es completamente satisfactoria. Es más exacto describir las transformaciones modulares en este contexto como continuaciones analíticas de las coordenadas de  $z(P_i) = a_i$  y  $z(P_j) = a_j$  hasta que  $z(P_i) = a_j$  y viceversa. Esta continuación se puede hacer por los dos caminos mostrados en Fig. A.8.

Estas dos operaciones son inversas la una de la otra (si las entendemos como simples permutaciones quedan identificadas) y sugieren identificar al grupo de "trenzas" de 6 elementos con el grupo modular. Todo esto se puede comprobar a través de las identidades de Thomae o de las identidades (A.63) (trabajando en ambos miembros) haciendo uso de las identidades de Riemann que vamos a ver ahora.

## A.5 Identidades de Riemann

Las identidades de Riemann entre funciones theta han jugado un importante papel en el estudio de la cancelación de la constante cosmológica en las teorías de cuerdas supersimétricas, en los llamados gauges "unitarios" [35] [36] [37]

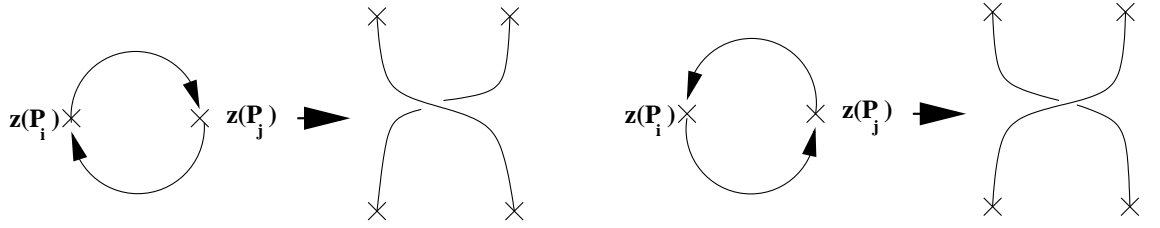


Figure A.8: Dos posibles caminos para la permutación de dos puntos de rama.

[38]. Si bien existe una identidad de Riemann más general [65], a nosotros nos interesa únicamente el siguiente caso particular:

$$\sum_d \langle d|e \rangle \prod_{i=1}^4 \vartheta[d](\vec{x}_i) = 2^g \prod_{j=1}^4 \vartheta[e](\vec{x}'_j) \quad (\text{A.64})$$

donde los argumentos con prima vienen dados por

$$\begin{pmatrix} \vec{x}'_1 \\ \vec{x}'_2 \\ \vec{x}'_3 \\ \vec{x}'_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{x}_2 \\ \vec{x}_3 \\ \vec{x}_4 \end{pmatrix} \quad (\text{A.65})$$

y  $\langle d|e \rangle$  es, para las características  $d = \begin{bmatrix} \vec{\alpha} \\ \vec{\beta} \end{bmatrix}$ ,  $e = \begin{bmatrix} \vec{\alpha}_0 \\ \vec{\beta}_0 \end{bmatrix}$

$$\langle d|e \rangle = \exp \{4\pi i(\vec{\alpha}_0^t \vec{\beta} - \vec{\beta}_0^t \vec{\alpha})\} \quad (\text{A.66})$$

El caso que más nos interesa es  $x_i = 0 \forall i$ , en cuyo caso, si  $e$  es una estructura de espín impar, la suma se extiende únicamente sobre estructuras  $d$  pares y es idénticamente nula. Escribiremos:



$$\mathcal{RI}_g[e] \stackrel{def}{=} \sum_{d \text{ pares}} \langle d|e \rangle \vartheta^4[d](\vec{0}|\tau) = 0 \quad (\text{A.67})$$

Habrá, pues, tantas identidades de Riemann del tipo (A.67) como estructuras de espín impares a género  $g$ . Además notemos que no son invariantes modulares: a género uno, únicamente hay una de tales identidades, la célebre *equatio identica satis abstrusa* de Jacobi:

$$\vartheta^4 \begin{bmatrix} o \\ o \end{bmatrix} (0|\tau) - \vartheta^4 \begin{bmatrix} 1 \\ o \end{bmatrix} (0|\tau) - \vartheta^4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (0|\tau) = 0 \quad (\text{A.68})$$

que da la cancelación de la función de partición de la supercuerda. Esta igualdad es "covariante modular", cambia a lo más por un factor global bajo transformaciones modulares, y este factor se ve compensado por otro del resto del integrando de la función de partición, que es invariante modular. Podemos asociar la covariancia modular a la invariancia de la estructura de espín  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ , que es la única impar a género uno, y sólo puede transformarse en ella misma. Pero la situación es completamente distinta a género  $g > 1$ . Por ejemplo, a género dos, las identidades de Riemann se transforman unas en otras, o en combinaciones del mismo tipo que no son identidades de Riemann.

Los signos de las seis identidades de Riemann de género dos, en el orden en que damos en (A.47) las estructuras de espín pares son:

$$\mathcal{RI}_2 \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \rightarrow (- - - + + + - - -) \quad (\text{A.69})$$

$$\mathcal{RI}_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \rightarrow (+ - - - + + - + - -) \quad (\text{A.70})$$

$$\mathcal{RI}_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \rightarrow (+ - + - - + - - + -) \quad (\text{A.71})$$

$$\mathcal{RI}_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \rightarrow (- + - + - + - - + -) \quad (\text{A.72})$$

$$\mathcal{RI}_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \rightarrow (- + - - - + - + - +) \quad (\text{A.73})$$

$$\mathcal{RI}_2 \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \rightarrow (- - + - - + + - - +) \quad (\text{A.74})$$

y son linealmente dependientes:

$$\begin{aligned} \mathcal{RI}_2 \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} - \mathcal{RI}_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \mathcal{RI}_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} - \mathcal{RI}_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \\ \mathcal{RI}_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} - \mathcal{RI}_2 \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{A.75}) \end{aligned}$$

de forma que de las 10 thetas a la cuarta con características pares, a lo más seis son linealmente independientes.

# Appendix B

## Degeneración de superficies de Riemann

### Introducción

La frontera de  $\mathcal{M}_g$  la constituyen las "superficies de Riemann degeneradas", superficies en las que un ciclo de homología se ha contraído hasta un punto. Así pertenecen a dos tipos distintos, según el ciclo pertenezca o no a la clase trivial. La degeneración de un ciclo trivial de una superficie de género  $g$ , como en Fig. B.1, da origen a dos superficies de géneros  $p$  y  $g - p$  con un punto identificado.

Estas superficies constituyen la subvariedad  $\mathcal{D}_p$  de  $\overline{\mathcal{M}}_g$ .

La degeneración de un ciclo de homología perteneciente a una clase no trivial origina una superficie de género  $g - 1$  con dos puntos identificados como en Fig. B.2.

Estas superficies forman la subvariedad  $\mathcal{D}_0$  en  $\overline{\mathcal{M}}_g$ . Todas las  $\mathcal{D}_p$  son de codimensión compleja 1 en  $\overline{\mathcal{M}}_g$ , y podemos escoger las  $3(g - 1)$  coordenadas complejas que parametrizan  $\mathcal{M}_g$  de forma que una, llamémosla  $\delta$ , sea transversa al  $\mathcal{D}_p$  en cuestión,  $\delta = 0$  sobre  $\mathcal{D}_p$  y las coordenadas restantes sean buenas coordenadas en esta subvariedad. Hay que recalcar que, como coordenada en  $\mathcal{M}_g$ ,  $\delta$  es un objeto invariante modular, y que al menos el término dominante del desarrollo de cualquier *función* en  $\mathcal{M}_g$  es invariante modular. Sin embargo, como veremos, al menos en la parametrización de  $\mathcal{M}_g$  con matrices periodo, para el caso de  $\mathcal{D}_0$ , hay que hacer una elección del

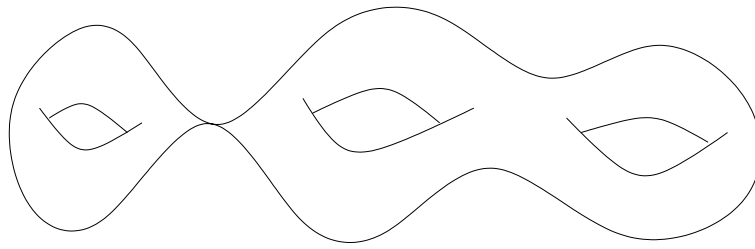


Figure B.1: Degeneración de un ciclo trivial de una superficie de Riemann.

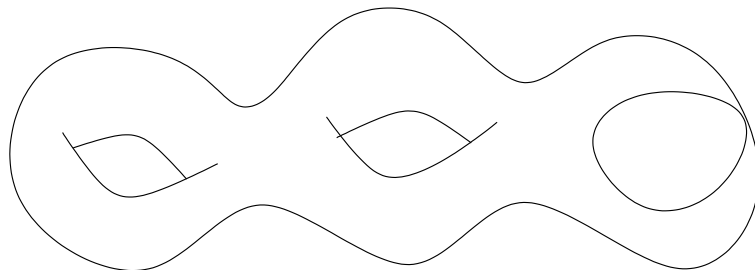


Figure B.2: Degeneración de un ciclo no-trivial ( $A_3$ ) de una superficie de Riemann.

ciclo no trivial que contraemos:  $A_1, A_2, B_1 - A_1 \dots$ . Cualquier ciclo ha de ser válido, pues todos son equivalentes bajo transformaciones modulares, y el término dominante en un desarrollo en  $\delta$  ha de ser siempre el mismo. Esta

es una observación de extrema importancia en lo que sigue, pues nos da un criterio de invariancia modular de funciones sobre  $\mathcal{T}_g$ .

Pasamos a describir el significado de la coordenada  $\delta$  y el comportamiento de los distintos objetos descritos en el apéndice A en el límite  $\delta \rightarrow 0$  para el caso  $\mathcal{D}_0$ . La referencia fundamental es [66], y, desde un punto de vista físico, [17] y especialmente [10].

## B.1 Degeneración de un ciclo no trivial

Vamos a construir una familia de superficies de Riemann de género  $g$  parametrizada por  $\delta \in D$  ( $D$  es el disco unidad en  $C$ ) de forma que  $\delta = 0$  sea una superficie de género  $g - 1$  con dos puntos identificados en uno que es el ciclo contraído<sup>1</sup>.

Tomemos dos entornos disjuntos  $U_{a,b}$  de dos puntos  $a$  y  $b$  de una superficie de Riemann compacta  $\Sigma_{g-1}$  de género  $g - 1$ , con coordenadas locales  $z_{a,b}$  que toman valores en  $D$  y tales que  $z_a(a) = 0$  (resp.  $b$ ). Sea  $W(\delta)$  la superficie que se obtiene de  $\Sigma_{g-1}$  quitando los puntos de  $U_{a,b}$  tales que  $|z_{a,b}| < |\delta|$ , y sea  $S(\delta)$  la hipérbola en  $C^2$   $XY = \delta$ , con  $X, Y \in D$ . Identificamos ahora los puntos  $p_a$  de  $W(\delta) \cup U_a$  con los puntos  $X = z_a(p_a), Y = \frac{\delta}{z_a(p_a)}$  de  $S(\delta)$  y los  $p_b$  de  $W(\delta) \cup U_b$  con los  $X = \frac{\delta}{z_b(p_b)}, Y = z_b(p_b)$  de  $S(\delta)$ . La unión (módulo estas identificaciones) de  $W(\delta)$  y la hipérbola  $S(\delta)$  es una superficie de Riemann  $\Sigma_g(\delta)$  de género  $g$  para cada  $\delta \neq 0$ , y, para  $\delta = 0$ , valor para el que la hipérbola degenera en dos planos con los orígenes identificados en un solo punto, tenemos una superficie degenerada:  $\Sigma_{g-1}$  con  $a$  y  $b$  identificados en un solo punto:  $P$ .

Las coordenadas  $x = \frac{1}{2}(X + Y)$ ,  $y = \frac{1}{2}(X - Y)$  son coordenadas en  $\Sigma_g(\delta) \cap S(\delta)$ , que verifican

$$y = \sqrt{x^2 - \delta} \tag{B.1}$$

de forma que la zona de la degeneración es un doble recubrimiento de un entorno de  $x = 0$  con puntos de ramificación en  $x = \pm\sqrt{\delta}$ .

Esta última propiedad nos permite identificar ésta coordenada  $\delta$  con la que surge de la descripción de la degeneración de un ciclo no trivial de la

---

<sup>1</sup>Esta construcción se conoce en la literatura como "plumbing fixture"

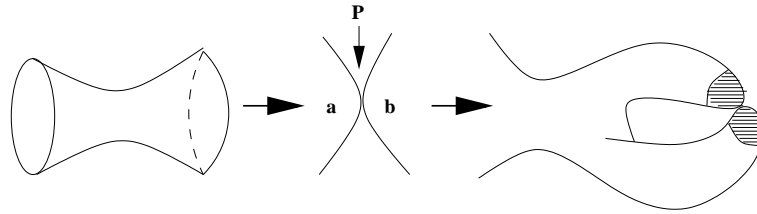


Figure B.3: Descripción local de la degeneración de una superficie de Riemann.

superficie hiperelíptica de género  $g$  dada por el doble recubrimiento de  $C$  (A.48), que construimos gráficamente así

Es obvio que cuando  $a_{2i+1} \rightarrow a_{2i+2}$ ,  $i = 0, \dots, g-1$ , el ciclo  $A_i$  se contrae hasta un punto y la superficie degenera en una de género  $g-1$  en la que dos puntos están identificados entre sí. En general, cuando  $a_i \rightarrow a_j$ , un ciclo no trivial se contrae. Podemos parametrizar el proceso por medio de la variable compleja  $\delta$ , definida por

$$\left( \frac{a_i - a_j}{2} \right)^2 = \delta \longrightarrow 0 \quad (\text{B.2})$$

$$a_i = a + \delta^{\frac{1}{2}}$$

$$a_j = a - \delta^{\frac{1}{2}}$$

$$a = \frac{1}{2}(a_i + a_j)$$

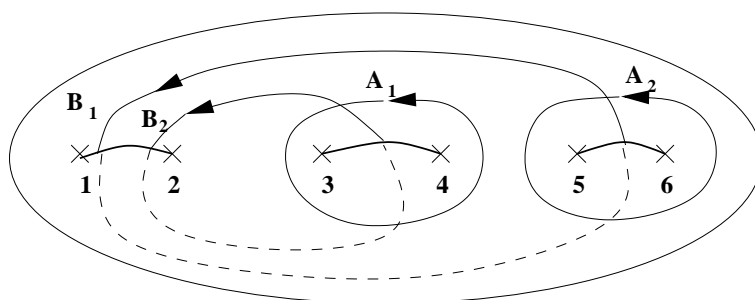


Figure B.4: Superficie de Riemann hiperelíptica de género  $g = 2$  con una base de homología.

$$y^2 = [(z - a)^2 - \delta] \prod_{k \neq i, j} (z - a_k) \quad (\text{B.3})$$

Comparando la ecuación (B.3) con (B.1), vemos que es posible identificar ambas deltas. La correspondencia se puede comprobar a través de las identidades de Thomae cuando sepamos cómo se comportan la matriz periodo y las thetas de Riemann con características en este límite. Entonces es fácil ver que el primer término del desarrollo en  $\delta$  de ambos miembros de las identidades se pueden identificar usando éstas para género  $g - 1$ .

Esta construcción nos da 3 coordenadas sobre  $\mathcal{M}_g$ :  $p_a$ ,  $p_b$  y la transversal  $\delta$ . Las  $3[(g - 1) - 1]$  restantes son las de  $\mathcal{M}_{g-1}$ . En el caso de la superficie hiperelíptica (A.48), las coordenadas de  $p_a$  y  $p_b$  sobre la esfera de riemann  $\hat{C}$  son ambas  $a$ .

El significado intuitivo de  $\delta$  es claro: podemos convertir la hipérbola con la que construimos la nueva asa de la superficie, a través de una transformación conforme, en un cilindro de longitud  $-\frac{\log |\delta|}{2\pi}$ , retorcido sobre sí mismo un

ángulo  $\text{Arg}(\delta)$ , que toma valores entre  $-\pi$  y  $\pi$ .

### B.1.1 Diferenciales abelianos y matriz periodo

Vamos a estudiar ahora el comportamiento de diversos objetos sobre esta familia de superficies en función de  $\delta$ . Primeramente observemos que en el proceso de degeneración varía el número de  $\lambda$ -diferenciales holomorfos  $\lambda > \frac{1}{2}$ : como consecuencia del teorema de Riemann-Roch han de desaparecer  $\lambda$  de ellos, que, o bien desarrollan polos (en los puntos singulares), o bien se anulan en el límite  $\delta \rightarrow 0$ . En particular nos interesan los diferenciales cuadráticos y los abelianos. De los primeros desaparecen tres, asociados a las coordenadas  $p_a$ ,  $p_b$  y  $\delta$ . Todo lo que nos interesa es que dos de ellos van como  $\delta^{\frac{1}{2}}$  y el otro como  $\delta$ . Para estudiar los abelianos, que se normalizan de una forma especial, primero tenemos que fijar arbitrariamente una base de homología sobre las  $\Sigma_g(\delta)$ . Elegimos la de la figura, en la que  $A_1^g$  es el ciclo que se contrae y los  $A_i^g$ ,  $B_i^g$ ,  $i > 1$  forman una base de  $\Sigma_{g-1}$ :  $A_i^g = A_{i-1}^{g-1}$ ,  $i > 1$  (resp.  $B$ ).

Entonces, los diferenciales abelianos  $\omega_i^g$  de  $\Sigma_g$  con  $i > 1$  tienden a los de  $\Sigma_{g-1}$  [66]:

$$\omega_i^g = \omega_{i-1}^{g-1} + \mathcal{O}(\delta) \quad (\text{B.4})$$

$\omega_1^g$ , en el límite  $\delta = 0$  desarrolla polos simples en  $p_a$  y  $p_b$  con residuos  $-1$ ,  $+1$ , respectivamente, y es, por lo tanto el "diferencial abeliano de tercer tipo"  $\omega_{p_b-p_a}^{g-1}$  sobre  $\Sigma_{g-1}$ :

$$\omega_1^g = \omega_{p_b-p_a}^{g-1} + \mathcal{O}(\delta) \quad (\text{B.5})$$

Con este resultado es posible probar que la matriz periodo de  $\Sigma_g$ ,  $\tau_{(g)}$  tiene el siguiente comportamiento:

$$\tau^g = \left( \begin{array}{c|c} \frac{\log \delta}{2\pi i} + C_1 & \vec{\tau}^t \\ \hline \vec{\tau} & \tau_{(g-1)} \end{array} \right) + \mathcal{O}(\delta) \quad (\text{B.6})$$

$\tau_{(g-1)}$  es la matriz periodo de la superficie resultante. Utilizaremos la notación

$$\Im m(\tau) = \tau^{(2)} \quad (\text{B.7})$$



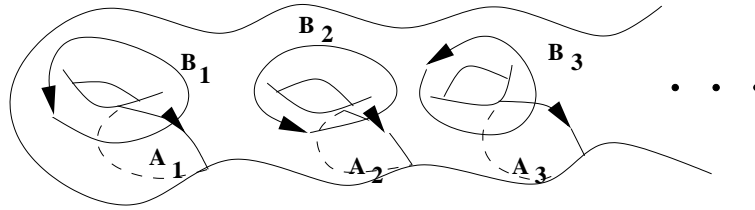


Figure B.5: Superficie de Riemann de género  $g$  con una base de homología.

$$\Re e(\tau) = \tau^{(1)} \tag{B.8}$$

$$\tau = \tau^{(1)} + i\tau^{(2)} \tag{B.9}$$

$$\tau_{11}^{(1)} = \frac{\mathcal{A}rg(\delta)}{2\pi} + \Re e C_1 \tag{B.10}$$

Como regla general, el superíndice (1) va a indicar parte real y el (2), parte imaginaria.  $\tau_{11}^{(1)}$  es el límite  $|\delta| \rightarrow 0$  del elemento  $\tau_{11}$  de la matriz periodo, y toma valores entre  $\Re e C_1 - \frac{1}{2}$  y  $\Re e C_1 + \frac{1}{2}$ , que son los límites de  $\mathcal{M}_g$  para esta coordenada.

### B.1.2 Thetas de Riemann

Si  $e_{(g)} = \begin{bmatrix} \vec{\alpha}_{(g)} \\ \vec{\beta}_{(g)} \end{bmatrix}$  es una característica sobre  $\Sigma_g$ , y  $\vec{x}_{(g)}$  un punto de  $C^g$ , utilizamos la notación

$$\vec{x}_{(g)} = (x_1, \dots, x_g) = (x_1, \vec{x}_{(g-1)}) \quad (\text{B.11})$$

$$e_{(g-1)} = \begin{bmatrix} \vec{\alpha}_{(g-1)} \\ \vec{\beta}_{(g-1)} \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

Tenemos entonces el siguiente desarrollo en  $\delta$  para las thetas de Riemann:

$$\begin{aligned} \vartheta[e_{(g)}](\vec{z}_{(g)} || \tau_{(g)}) &= \delta^{\frac{\alpha_1^2}{2}} \exp \{2\pi i \alpha_1 [z_1 + \beta_1 + \vec{\tau}^t \vec{\alpha}_{(g-1)}]\} \times \\ &\times \vartheta[e_{(g-1)}](\vec{z}_{(g-1)} + \alpha_1 \vec{\tau} || \tau_{(g-1)} + \mathcal{O}(\delta^{\frac{\alpha_1^2+1}{2}})) \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Aquí,  $\vec{z}_{(g)}$  no depende de  $\tau_{(g)}$ . Si sí lo hiciera, tendríamos que sustituir su desarrollo en  $\delta$ . Observemos que cuál es el orden más bajo en  $\delta$  depende básicamente de la periodicidad o antiperiodicidad de la estructura de espín respecto del ciclo que pinchamos,  $A_1$ .

### B.1.3 Identidades de Riemann

Utilizando las fórmulas de la sección precedente, cuando el ciclo  $A_1$  se contrae, obtenemos para la identidad de Riemann asociada a la estructura de espín impar  $d_{(g)} = \begin{bmatrix} \vec{\alpha}_0 \\ \vec{\beta}_0 \end{bmatrix}$  al orden más bajo en  $\delta$  (sector de Neveu-Schwarz  $\alpha_1 = 0$ ):

$$\begin{aligned} \mathcal{RI}[d_{(g)}] &= \sum_{e_{(g-1)} \text{ pares}}^{\alpha_1=\beta_1=0} \langle d_{(g-1)} | e_{(g-1)} \rangle \vartheta^4[e_{(g-1)}](\vec{0} || \tau_{(g-1)}) + \\ &+ e^{2\pi i (\vec{\alpha}_0)_1} \sum_{e_{(g-1)} \text{ pares}}^{\alpha_1=0, \beta_1=0} \langle d_{(g-1)} | e_{(g-1)} \rangle \vartheta^4[e_{(g-1)}](\vec{0} || \tau_{(g-1)}) + \\ &+ \mathcal{O}(\delta^{\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

El sector de Ramond  $\alpha_1 = \frac{1}{2}$  contribuye al orden  $\mathcal{O}(\delta^{\frac{1}{2}})$

$$e^{2\pi i (\vec{\beta}_0)_1} \delta^{\frac{1}{2}} \sum_{e_{(g-1)} \text{ pares}}^{\alpha_1=\frac{1}{2}, \beta_1=0} \langle d_{(g-1)} | e_{(g-1)} \rangle \exp \{4\pi i \vec{\tau}^t \vec{\alpha}_{(g-1)}\} \vartheta^4[e_{(g-1)}](\frac{1}{2} \vec{\tau} || \tau_{(g-1)}) \quad (\text{B.15})$$

Otra presentación, quizá más sugerente, consiste en agrupar los términos que degeneran a una misma estructura de espín en la superficie  $\Sigma_{g-1}$  (téngase en cuenta que no ponemos los términos de orden  $\mathcal{O}(\delta^{\frac{1}{2}})$  provenientes del sector de Neveu-Schwarz):

$$\sum_{e_{(g-1)} \text{ pares}} \{ \vartheta^4[e_{(g-1)}](\vec{0}||\tau_{(g-1)})[1 + e^{2\pi i(\vec{\alpha}_0)_1}] + e^{2\pi i(\vec{\beta}_0)_1} \delta^{\frac{1}{2}} \exp\{4\pi i \vec{\tau}^t \vec{\alpha}_{(g-1)}\} \vartheta^4[e_{(g-1)}](\frac{1}{2}\vec{\tau}||\tau_{(g-1)}) \} \quad (\text{B.16})$$

### B.1.4 Thetas térmicas

En el Capítulo 2 vimos que toda la dependencia de la energía libre térmica en la temperatura se puede expresar a través de thetas de Riemann para género  $2g$  con características y argumentos que dependen del tipo de cuerda, bosónica o heterótica, y de la estructura de espín en el último caso. Vamos a determinar su comportamiento en el límite  $\delta \rightarrow 0$ . Estos cálculos son quizá los más pesados, pero son un ingrediente fundamental en el resultado principal de este trabajo.

Detalles aparte, realizamos el cálculo en tres pasos: primeramente estudiamos el comportamiento de las matrices  $\Omega_g(\beta)$  y  $\tilde{\Omega}_g(\beta)$ , y hacemos un primer desarrollo de la theta en  $\delta$ . Esto último no es suficiente: tanto la cuerda bosónica como la heterótica tienen dualidad, y la transformación  $\Omega \rightarrow \Omega^{-1}$  es la que relaciona una temperatura con su dual. Si nos quedamos con el desarrollo que hacemos en un primer momento, sólo obtendremos el comportamiento crítico a una temperatura, y sabemos que debe haber un comportamiento análogo a la temperatura dual de la primera. Debemos, pues, realizar la transformación y hacer después un segundo desarrollo. Invertir las matrices  $\Omega_g(\beta)$  y  $\tilde{\Omega}_g(\beta)$  es el segundo paso, bastante pesado, y el tercero es finalizar el desarrollo. Empezamos con un pequeño "teorema" sobre la inversión de matrices simétricas por bloques que utilizaremos en el segundo paso.

**Teorema 3** *Sea  $M$  una matriz cuadrada, simétrica e inversible, de la forma*

$$M = \left( \begin{array}{c|c|c} A & \vec{d} & B \\ \hline \vec{d}^t & x & \vec{e}^t \\ \hline B^t & \vec{e} & C \end{array} \right) \quad (\text{B.17})$$

donde  $C$  es una submatriz cuadrada e inversible,  $\vec{d}$  y  $\vec{e}$  son vectores columna y  $x$  es un número. Si escribimos  $M^{-1}$  también por cajas de las mismas dimensiones

$$M = \left( \begin{array}{c|c|c} D & \vec{g} & E \\ \hline \vec{g}^t & y & \vec{h}^t \\ \hline E^t & \vec{h} & F \end{array} \right) \quad (\text{B.18})$$

entonces éstas vienen dadas en función de las de  $M$  por

$$D = \{A - BC^{-1}B^t - [\vec{d} - BC^{-1}\vec{e}][x - \vec{e}C^{-1}\vec{e}]^{-1} [\vec{d}^t - \vec{e}C^{-1}B^t]\}^{-1} \quad (\text{B.19})$$

$$\vec{g} = -D(\vec{d} - BC^{-1}\vec{e})(x - \vec{e}C^{-1}\vec{e})^{-1} \quad (\text{B.20})$$

$$y = (x - \vec{e}C^{-1}\vec{e})^{-1}[1 - (\vec{d}^t - \vec{e}C^{-1}B^t)\vec{g}] \quad (\text{B.21})$$

$$E = -[DBC^{-1} + \vec{g}\vec{e}^tC^{-1}] \quad (\text{B.22})$$

$$\vec{h} = -C^{-1}[B^t\vec{g} + y\vec{e}] \quad (\text{B.23})$$

$$F = C^{-1}\{1 + [B^t(DB + \vec{g}\vec{e}^t) + \vec{e}(\vec{g}^tB + y\vec{e}^t)]C^{-1}\} \quad (\text{B.24})$$

La demostración es muy sencilla (en principio bastaría multiplicar  $M$  por  $M^{-1}$ ), y, utilizándola repetidas veces podemos invertir matrices de similares características de cualquier número de cajas. Agrupamos primeramente las cajas para obtener una matriz simétrica de dos por dos cajas:

$$M^{-1} = \left( \begin{array}{c|c} D' & E' \\ \hline E'^t & F \end{array} \right) \quad (\text{B.25})$$

$$D' = \left( \begin{array}{c|c} D & \vec{g} \\ \hline \vec{g}^t & y \end{array} \right) \quad (\text{B.26})$$

$$E' = \left( \begin{array}{c} E \\ \hline \vec{h}^t \end{array} \right) \quad (\text{B.27})$$

(Con  $M$  hacemos lo mismo, agrupando cajas de la misma forma y llamándolas  $A'$  y  $B'$ )

Invertir una matriz por cajas dos por dos es muy fácil. Basta plantear las ecuaciones que ha de cumplir la matriz inversa y resolver el sistema de ecuaciones lineales que se obtiene, teniendo siempre en cuenta qué matrices son inversibles y cuáles no. Obtenemos de forma inmediata

$$D' = [A' - B'C^{-1}B^t]^{-1} \quad (\text{B.28})$$

$$E' = -D'B'C^{-1} \quad (\text{B.29})$$

$$F = C^{-1}[1 + B^tD'B'C^{-1}] \quad (\text{B.30})$$

Ahora las cajas agrupadas están en función de inversas de matrices de dos por dos bloques, por ejemplo (B.28)

$$D' = \left( \begin{array}{c|c} D & \vec{g} \\ \hline \vec{g}^t & y \end{array} \right)^{-1} = \left( \begin{array}{c|c} A - BC^{-1}B^t & \vec{d} - BC^{-1}\vec{e} \\ \hline \vec{d}^t - \vec{e}C^{-1}B^t & x - \vec{e}^tC^{-1}\vec{e} \end{array} \right)^{-1} \quad (\text{B.31})$$

de forma que aplicamos otra vez la fórmulas de inversión anteriores y obtenemos el resultado antedicho.

Otro paso común a los casos bosónico y heterótico es hallar el desarrollo en  $\delta$  de la matriz  $2g \times 2g$   $A_g$

$$\Omega_g(\beta) = \frac{2i\beta^2}{\pi^2} A_g \quad (\text{B.32})$$

que escribimos por bloques a partir de (B.6) a orden  $\mathcal{O}(x^{-1})$ :

$$\left( \begin{array}{c|c|c|c} x + M_{11} + \mathcal{O}(x^{-1}) & M_{12} + \mathcal{O}(x^{-1}) & M_{13}x^{-1} & M_{14} + \mathcal{O}(x^{-1}) \\ \hline & A + \mathcal{O}(x^{-1}) & M_{23}x^{-1} & B + \mathcal{O}(x^{-1}) \\ \hline & & x^{-1} & M_{34} + \mathcal{O}(x^{-1}) \\ \hline & & & C + \mathcal{O}(x^{-1}) \end{array} \right) \quad (\text{B.33})$$

donde, por simplicidad, utilizamos la notación:

$$x = \frac{-\log |\delta|}{2\pi} \quad (\text{B.34})$$

$$A = \tau_{(g-1)}^{(2)} + \tau_{(g-1)}^{(1)} (\tau_{(g-1)}^{(2)})^{-1} \tau_{(g-1)}^{(1)} \quad (\text{B.35})$$

$$B = -\tau_{(g-1)}^{(1)} (\tau_{(g-1)}^{(2)})^{-1} \quad (\text{B.36})$$

$$C = (\tau_{(g-1)}^{(2)})^{-1} \quad (\text{B.37})$$

$$\Rightarrow A_{(g-1)} = \begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C \end{pmatrix} \quad (\text{B.38})$$

$$\Rightarrow \Omega_{g-1}(\beta) = \frac{2i\beta^2}{\pi^2} A_{(g-1)} \quad (\text{B.39})$$

$$M_{11} = \bar{\tau}^{(1)t} (\tau_{(g-1)}^{(2)})^{-1} \bar{\tau}^{(1)} + C_1^{(2)} \quad (\text{B.40})$$

$$M_{12} = \bar{\tau}^{(2)t} + \bar{\tau}^{(1)t} (\tau_{(g-1)}^{(2)})^{-1} \tau_{(g-1)}^{(1)} \quad (\text{B.41})$$

$$M_{13} = \bar{\tau}^{(1)t} (\tau_{(g-1)}^{(2)})^{-1} \bar{\tau}^{(d)} - \tau_{11}^{(1)} \quad (\text{B.42})$$

$$M_{14} = -\bar{\tau}^{(1)t} (\tau_{(g-1)}^{(2)})^{-1} \quad (\text{B.43})$$

$$M_{23} = \tau_{(g-1)}^{(1)} (\tau_{(g-1)}^{(2)})^{-1} \bar{\tau}^{(d)} - \bar{\tau}^{(1)} \quad (\text{B.44})$$

$$M_{24} = -\tau_{(g-1)}^{(1)} (\tau_{(g-1)}^{(2)})^{-1} \quad (\text{B.45})$$

$$M_{34} = -\bar{\tau}^{(2)t} (\tau_{(g-1)}^{(2)})^{-1} \quad (\text{B.46})$$

y tenemos en cuenta que  $A_g$  es una matriz simétrica.

### Cuerda bosónica

Con el desarrollo de  $A_g$  en el límite  $\delta \rightarrow 0$  podemos hacer un primer desarrollo de la contribución de los solitones térmicos en la cuerda bosónica

$$\begin{aligned} \vartheta(\vec{0} \parallel \frac{\Omega_g(\beta)}{4}) &= \sum_{(n_1, \dots, n_{2g}) \in \mathbb{Z}^{2g}} |\delta| \frac{\beta^2 n_1^2}{4\pi^2} \exp\{\pi i \sum_{i,j=2}^{2g} n_i n_j (\frac{\Omega_g(\beta)}{4})_{ij} + \\ &+ 2\pi i n_1 \sum_{k=2}^{2g} n_k (\frac{\Omega_g(\beta)}{4})_{1k}\} = \\ &= \vartheta(\vec{0} \parallel \frac{\Omega_{g-\frac{1}{2}}(\beta)}{4})^{(n_1=0)} + 2 |\delta| \frac{\beta^2}{4\pi^2} \exp\{-\frac{\beta^2}{2\pi} M_{11}\} \times \\ &\times \vartheta[\frac{1}{4} \Omega_{g-\frac{1}{2}} \vec{\tau} \parallel \frac{\Omega_{g-\frac{1}{2}}(\beta)}{4}]^{(n_1=\pm 1)} + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

donde el vector

$$\vec{\Omega}_{g-\frac{1}{2}} = [(\Omega_g(\beta))_{12}, (\Omega_g(\beta))_{13}, \dots, (\Omega_g(\beta))_{12g}] \quad (\text{B.48})$$

$\Omega_{g-\frac{1}{2}}(\beta)$  es la matriz que obtenemos al suprimir la primera fila y la primera columna de bloques de  $\Omega_g(\beta)$ . La segunda fila y la segunda columna de bloques de  $\Omega_{g-\frac{1}{2}}(\beta)$  son de orden  $x^{-1} = -\frac{2\pi}{\log|\delta|}$ , y si las suprimimos tendremos  $\Omega_{g-1}(\beta)$ .

El siguiente paso, puesto que no es fácil desarrollar  $e^{\frac{1}{\log|\delta|}}$ , será hacer la transformación "modular"  $\Omega_{g-\frac{1}{2}}(\beta) \rightarrow -(\Omega_{g-\frac{1}{2}}(\beta))^{-1}$ . Para ello invertimos  $A_{(g-1)}$  con las fórmulas que hallamos anteriormente y calculamos el determinante de  $\Omega_{g-\frac{1}{2}}(\beta)$  que aparece en la ley de transformación de las thetas de Riemann. Vamos a utilizar:

$$\begin{aligned} \vartheta(\vec{z} \parallel \frac{\Omega_{g-\frac{1}{2}}(\beta)}{4}) &= (-idet \frac{\Omega_{g-\frac{1}{2}}(\beta)}{4})^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\pi i \vec{z}^t \left( \frac{\Omega_{g-\frac{1}{2}}(\beta)}{4} \right)^{-1} \vec{z} \right\} \times \\ &\times \vartheta \left[ \left( \frac{\Omega_{g-\frac{1}{2}}(\beta)}{4} \right)^{-1} \vec{z} \parallel - \left( \frac{\Omega_{g-\frac{1}{2}}(\beta)}{4} \right)^{-1} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

Si desarrollamos por la fila o columna centrales, todos los términos serán de orden  $x^{-2}$  salvo el correspondiente al término central. Así, a orden  $x^{-2}$  tendremos

$$det \Omega_{g-\frac{1}{2}}(\beta) = x \left( \frac{2i\beta^2}{\pi^2} det \Omega_{g-1}(\beta) + \mathcal{O}(x^{-2}) \right) \quad (\text{B.50})$$

Por otro lado

$$(A_{(g-\frac{1}{2})})^{-1} = \left( \begin{array}{c|cc} C & -C[M_{23} + \tau_{(g-1)}^{(1)} M_{43}^t & B^t \\ \hline & x + M & -M_{34} \tau_{(g-1)}^{(2)t} + D^t \\ \hline & & A \end{array} \right) + \mathcal{O}(x^{-1}) \quad (\text{B.51})$$

donde

$$D = \tau(\tau_{(g-1)}^{(2)})^{-1} E \quad (\text{B.52})$$

$$E = [M_{23} + \tau_{(g-1)}^{(1)} M_{34}^t] \quad (\text{B.53})$$

$$M = M_{34} \tau_{(g-1)}^{(2)} M_{34}^t - E^t (\tau_{(g-1)}^{(2)})^{-1} E \quad (\text{B.54})$$

Al suprimir la fila y columna centrales tendremos, a  $\mathcal{O}(x^{-1})$ ,  $(A_{(g-1)})^{-1}$ . Utilizando (B.49), (B.51) y (B.50) podemos volver a desarrollar en  $|\delta|$ :

$$\begin{aligned} \vartheta(\vec{0} \parallel \frac{\Omega_{g-\frac{1}{2}}(\beta)}{4}) &= (-idet \frac{\Omega_{g-\frac{1}{2}}(\beta)}{4})^{-\frac{1}{2}} \vartheta(\vec{0} \parallel -4(\Omega_{g-\frac{1}{2}}(\beta))^{-1}) = \\ &= (\frac{-i\beta^2}{\pi \log |\delta|})^{-\frac{1}{2}} (-idet \frac{\Omega_{g-\frac{1}{2}}(\beta)}{4})^{-\frac{1}{2}} \times \\ &\times \{ \vartheta(\vec{0} \parallel -(\frac{\Omega_{g-1}(\beta)}{4})^{-1}) + 2 |\delta|^{\frac{\pi^2}{\beta^2}} \exp \{ \frac{-2\pi^3}{\beta^2} M \} \times \\ &\times \vartheta[\frac{\Omega_{g-1}(\vec{\beta})^{-1}}{4} \parallel -(\frac{\Omega_{g-1}(\beta)}{4})^{-1}] + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.55})$$

donde el vector de  $2(g-1)$  componentes

$$\Omega_{g-1}(\vec{\beta})^{-1} = [(\Omega_{g-\frac{1}{2}}(\beta))_{g1}^{-1}, \dots, (\Omega_{g-\frac{1}{2}}(\beta))_{g2g+1}^{-1}] \quad (\text{B.56})$$

excluyendo el término  $(\Omega_{g-\frac{1}{2}}(\beta))_{gg}^{-1}$ .

Volviendo a usar (B.49), pero en sentido inverso, llegamos a

$$\begin{aligned} \vartheta(\vec{0} \parallel \frac{\Omega_{g-\frac{1}{2}}(\beta)}{4}) &= (\frac{-i\beta^2}{\pi \log |\delta|})^{-\frac{1}{2}} \{ \vartheta(\vec{0} \parallel \frac{\Omega_{g-1}(\beta)}{4}) + \\ &= 2 |\delta|^{\frac{\pi^2}{\beta^2}} \exp \{ \frac{-2\pi^3}{\beta^2} M \} \times \\ &\times R(g-1) \vartheta(\frac{1}{16} \Omega_{g-1}(\beta) \Omega_{g-1}(\vec{\beta})^{-1} \parallel \frac{\Omega_{g-1}(\beta)}{4}) + \\ &+ \dots \} \end{aligned} \quad (\text{B.57})$$

con

$$R(g-1) = \exp \{ -\frac{\pi i}{4} \Omega_{g-1}(\vec{\beta})^{-t} (\Omega_{g-1}(\beta))^{-1} \Omega_{g-1}(\vec{\beta})^{-1} \} \quad (\text{B.58})$$



Hacemos lo mismo con

$$\begin{aligned} \vartheta\left(\frac{1}{4}\Omega_{g-\frac{1}{2}}(\beta)\left\|\frac{\Omega_{g-\frac{1}{2}}(\beta)}{4}\right.\right) &= \left(\frac{-i\beta^2}{\pi \log|\beta|}\right)^{-\frac{1}{2}} R\left(g-\frac{1}{2}\right)R(g-1) \times \\ &\times \vartheta\left(\frac{1}{16}\Omega_{g-1}(\beta)\Omega_{g-1}(\vec{\beta})^{-1}\left\|\frac{\Omega_{g-1}(\beta)}{4}\right.\right) \end{aligned} \quad (\text{B.59})$$

Es importante ver que en los pasos intermedios en los que hay productos de elementos de  $\Omega_{g-\frac{1}{2}}(\beta)$ , todos los elementos son finitos.

El resultado final es el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned} \vartheta(\vec{0}\left\|\frac{\Omega_g(\beta)}{4}\right.) &= \left(\frac{-i\beta^2}{\pi \log|\delta|}\right)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \vartheta(\vec{0}\left\|\frac{\Omega_{g-1}(\beta)}{4}\right.) + \right. \\ &+ \vartheta\left(\frac{1}{16}\Omega_{g-1}(\beta)\Omega_{g-1}(\vec{\beta})^{-1}\left\|\frac{\Omega_{g-1}(\beta)}{4}\right.\right)R(g-1) \times \\ &\times \left[2|\delta|^{\frac{\beta^2}{4\pi^2}}R\left(g-\frac{1}{2}\right)\exp\left\{-\frac{\beta^2}{2\pi}M_{11}\right\} + \right. \\ &\left. + 2|\delta|^{\frac{\pi^2}{\beta^2}}\exp\left\{-\frac{2\pi^3}{\beta^2}M\right\} + \dots \right] \end{aligned} \quad (\text{B.60})$$

Los detalles que realmente nos importan de este desarrollo son los exponentes de  $|\delta|$  de orden más bajo, que son duales entre sí y el que no aparecen fases tipo  $e^{2n\pi i\tau_{11}^{(1)}}$  que al ser integradas se cancelen.

Mucho más sencillo habría sido desarrollar la matriz periodo  $\tau$  en la expresión alternativa (2.15). Sin embargo hemos elegido la forma más complicada para ilustrar las técnicas que hemos seguido en el caso heterótico, puesto que no conocemos expresiones parecidas a (2.15), y que no vamos a describir en detalle.

### Cuerda heterótica

Siguiendo pasos muy similares a los del caso bosónico (omitimos alguno, como la segunda inversión), con la notación

$$f(e_{(g)}) = f\left(\begin{bmatrix} \vec{\alpha}_{(g)} \\ \vec{\beta}_{(g)} \end{bmatrix}\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{\beta}_{(g)} & \vec{\alpha}_{(g)} \end{bmatrix} \\
f(e_{(g-1)}) &= f\left(\begin{bmatrix} \vec{\alpha}_{(g-1)} \\ \vec{\beta}_{(g-1)} \end{bmatrix}\right) = \\
&= \begin{bmatrix} \vec{\beta}_{(g-1)} & \vec{\alpha}_{(g-1)} \\ \vec{0} & \vec{0} \end{bmatrix} \tag{B.61}
\end{aligned}$$

llegamos a

Sector Ramond,  $\alpha_1 = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
\vartheta[f(e_g)](\vec{0} \parallel \tilde{\Omega}_{g-1}) &\sim (\log |\delta|)^{\frac{1}{2}} \{ 2 |\delta|^{\frac{\pi^2}{4\beta^2}} \vartheta[f(e_{(g-1)})](\vec{0} \parallel -(\tilde{\Omega}_{g-1})^{-1}) + \\
&+ 2e^{2\pi i(\vec{\beta})_1} e^M |\delta|^{\frac{\beta^2}{4\pi^2}} \vartheta[f(e_{(g-1)})](\vec{B} \parallel -(\tilde{\Omega}_{g-1})^{-1}) + \\
&+ \dots \} \tag{B.62}
\end{aligned}$$

Sector Neveu-Schwarz,  $\alpha_1 = 0$

$$\begin{aligned}
\vartheta[f(e_g)](\vec{0} \parallel \tilde{\Omega}_g) &\sim (\log |\delta|)^{\frac{1}{2}} \{ \vartheta[f(e_{(g-1)})](\vec{0} \parallel -(\tilde{\Omega}_{g-1})^{-1}) + \\
&+ 2 |\delta|^{\frac{\pi^2}{\beta^2}} \vartheta[f(e_{(g-1)})](\vec{A} \parallel -(\tilde{\Omega}_{g-1})^{-1}) + \\
&+ 2e^{2\pi i(\vec{\beta})_1} e^M |\delta|^{\frac{\beta^2}{4\pi^2} + \frac{\pi^2}{4\beta^2}} [\vartheta[f(e_{(g-1)})](\vec{B} - \frac{\vec{A}}{2} \parallel -(\tilde{\Omega}_{g-1})^{-1}) \times \\
&\times e^N e^{\pi i \tau_{11}^{(1)}} + \vartheta[f(e_{(g-1)})](\vec{B} + \frac{\vec{A}}{2} \parallel -(\tilde{\Omega}_{g-1})^{-1}) e^{-N} e^{-\pi i \tau_{11}^{(1)}}] + \\
&+ \dots \} \tag{B.63}
\end{aligned}$$

$M$ ,  $N$ ,  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  no dependen de  $|\delta|$  ni de  $\tau_{11}^{(1)}$ , y, por lo tanto, no nos interesan.

# Bibliography

- [1] M. Green, J. Schwartz, and Witten. E. *Superstring theory*, volume 1 and 2. Cambridge University Press, 1987.
- [2] Lust y Theisen. *Lectures on string theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [3] H. M. Farkas and I. Kra. *Riemann surfaces*. Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [4] A. M. Polyakov. The quantum geometry of bosonic strings. *Physics Letters B*, 103:207, 1981.
- [5] D. J. Gross and V. Periwal. *Physical Review D*, 60:2105, 1988.
- [6] L. Alvarez-Gaumé, C. Gómez, G. Moore, and C. Vafa. Strings in the operator formalism. *Nuclear Physics B*, 303:455, 1988.
- [7] L. Alvarez-Gaumé, P. Nelson, C. Gómez, G. Sierra, and C. Vafa. Fermionic strings in the operator formalism. *Nuclear Physics B*, 311:333 – 400, 1988/89.
- [8] E. D'Hoker and D.H. Phong. The geometry of string perturbation theory. *Reviews in Modern Physics*, 60(4):917, 1988.
- [9] A.A. Belavin and V.G. Knizhnik. Algebraic geometry and the geometry of quantum strings. *Physics Letters B*, 168:201, 1986.
- [10] V.G. Knizhnik. Multiloop amplitudes in the theory of quantum strings and complex geometry. *Sov. Phys. Usp.*, 32:945, 1989.
- [11] G. Moore. Modular forms and two loop string physics. *Physics Letters B*, 176:369, 1986.

- [12] A. Belavin, V. G. Knizhnik, A. Yu Morozov, and A. Perelomov. Two- and three-loop amplitudes in the bosonic string theory. *Physics Letters B*, 177:324, 1986.
- [13] A. Yu Morozov. *Physics Letters B*, 184:171, 1987.
- [14] V. G. Knizhnik. Analytic fields on riemann surfaces ii. *Communications in Mathematical Physics*, 112:567, 1987.
- [15] Yu.I. Manin. The partition function of the polyakov string can be expressed in terms of theta-functions. *Physics Letters B*, 172:185, 1986.
- [16] V.G. Knizhnik. Analytic fields on riemann surfaces. *Physics Letters B*, 180:247, 1986.
- [17] E. Verlinde and H. Verlinde. Chiral bosonization, determinants and the string partition function. *Nuclear Physics B*, 288:357 – 396, 1987.
- [18] E. Witten. Global anomalies in string theory. In W. A. Bardeen and A. R. White, editors, *Geometry, anomalies and topology*. World Scientific, 1985.
- [19] H. Verlinde. *The path integral formulation of supersymmetric string theory*. PhD thesis, Universty of Utrecht, 1988.
- [20] Friedan D., E. Martinec, and S. Shenker. Conformal invariance, supersymmetry and string theory. *Nuclear Physics B*, 271:93–165, 1986.
- [21] E. Verlinde and H. Verlinde. Multiloop calculations in covariant superstring theory. *Physics Letters B*, 192:95, 1987.
- [22] A. M. Polyakov. Quantum geometry of fermionic strings. *Physics Letters B*, 103:211, 1981.
- [23] P.S. Howe. Super weyl transformations in two dimansions. *Journal of Physics A*, 12:393, 1979.
- [24] L. Brink, P. di Vecchia, and P. S. Howe. *Physics Letters B*, 65:431, 1976.
- [25] F. Gliozzi, J. Scherk, and D. Olive. Supergravity and the dual spinor model. *Physics Letters B*, 65:282, 1976.

- [26] F. Gliozzi, J. Scherk, and D. Olive. Supersymmetry, supergravity theories and the dual spinor model. *Nuclear Physics B*, 122:253, 1977.
- [27] Alvarez-Gaume. An  $o(16) \times o(16)$  heterotic string. *Physics Letters B*, 171:155, 1986.
- [28] N. Seiberg and E. Witten. Spin structures in string theory. *Nuclear Physics B*, 276:272–290, 1986.
- [29] L. Alvarez-Gaume, G. Moore, and C. Vafa. Theta functions, modular invariance and strings. *Communications in Mathematical Physics*, 106:1, 1986.
- [30] M B. Green and N Seiberg. Contact interactions in superstring theory. *Nuclear Physics B*, 299:559–586, 1988.
- [31] H. Verlinde. A note on the integral over fermionic supermoduli. preprint THU-87/26, Utrecht University, 1987.
- [32] E. Martinec. Nonrenormalization theorems and fermionic string finiteness. *Physics Letters B*, 171:189, 1986.
- [33] V.G. Knizhnik. Explicit expression for the two loop measure in the heterotic string theory. *Physics Letters B*, 196:473, 1987.
- [34] E. Gava, R. Iengo, and G. Sotkov. Modular invariance and the two loop vanishing of the cosmological constant. *Physics Letters B*, 207:283, 1988.
- [35] O. Letchenfeld and A. Parkes. On the vanishing of the genus two superstring vacuum amplitude. *Physics Letters B*, 202:75, 1988.
- [36] A. Parkes. The two loop superstring vacuum amplitude and canonical divisors. *Physics Letters B*, 217:458, 1989.
- [37] O. Letchenfeld and A. Parkes. On covariant multi-loop superstring amplitudes. *Nuclear Physics B*, 332:39, 1990.
- [38] O. Letchenfeld. Factorization and modular invariance of multiloop superstring amplitudes in the unitary gauge. *Nuclear Physics B*, 338:403–414, 1990.

- [39] E. D'Hoker and D. H. Phong. Superholomorphic anomalies and supermoduli space. *Nuclear Physics B*, 292:317–329, 1987.
- [40] O. Yasuda. Multiloop modular invariance of d=10 type ii superstring theory. *Nuclear Physics B*, 318:397–416, 1989.
- [41] J. P. Serre. *A course in Arithmetics*. Springer-Verlag, New York, 1973.
- [42] T. Ortín and M.A.R. Osorio. Genus two free energy for heterotic strings. *Modern Physics Letters A*, 5:1195, 1990.
- [43] A. Parkes. Progress in multi-genus calculations for the spinning string. In L.-L. Chau and W. Nahm, editors, *Differential Geometric Methods in Theoretical Physics*. Plenum Press, 1989.
- [44] D.J. Gross, M. J. Perry, and L.G. Yaffe. Instability of flat space at finite temperature. *Physical Review D*, 25:330, 1982.
- [45] B. McClain and D.B. Roth. Modular invariance for interacting bosonic strings at finite temperature. *Communications in Mathematical Physics*, 111:539, 1987.
- [46] J.J. Atick and E. Witten. The hagedorn transition and the number of degrees of freedom of string theory. *Nuclear Physics B*, 310:291, 1988.
- [47] E. Alvarez and Osorio M.A.R. Duality is an exact symmetry of string perturbation theory. *Physical Review D*, 40:1150, 1989.
- [48] M.A.R. Osorio. *Teoría de cuerdas a temperatura finita*. PhD thesis, Universidad Autónoma de Madrid, 1988.
- [49] E. Alvarez and M.A.R. Osorio. Superstrings at finite temperature. *Physical Review D*, 36:1175, 1987.
- [50] E. Alvarez and M.A.R. Osorio. Cosmological constant versus free energy for heterotic strings. *Nuclear Physics B*, 304:327, 1988.
- [51] E. Alvarez and T. Ortín. Critical temperature for interacting bosonic strings. *Physics Letters B*, 241:215, 1990.

- [52] E. Alvarez, T. Ortín, and M.A.R. Osorio. Critical behavior of heterotic strings to all orders in string perturbation theory. preprint CERN-TH-5668, C.E.R.N., 1990.
- [53] E. Alvarez and M.A.R. Osorio. Thermal strings in nontrivial backgrounds. *Physics Letters B*, 220:121, 1989.
- [54] P. Murphy and S. Sen. *Physics Letters B*, 233:322, 1989.
- [55] M. Hellmund and J. Kripfganz. Multiloop free energy of the heterotic string near the hagedorn temperature. preprint KMU-HEP-89-08, Karl-Marx-Universität, 1989.
- [56] N. Turok. *Physica A*, 158:516, 1989.
- [57] M. Gleiser and J. G. Taylor. *Physics Letters B*, 164:36, 1985.
- [58] R.B. Wilkinson and D. Turok, N. nad Mitchell. preprint TP/88-89-23, Imperial College.
- [59] J. Dai and J. Polchinski. *Physics Letters B*, 220:387, 1989.
- [60] G. Veneziano. preprint CERN-TH-5581/90, CERN, 1989.
- [61] J. J. Atick, G. Moore, and A. Sen. Some global issues in string perturbation theory. *Nuclear Physics B*, 308:1, 1988.
- [62] R. C. Gunning. *Lectures on Riemann surfaces*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1966. Mathematical Notes.
- [63] T. Ortín. A proof of brst invariance. *Physics Letters B*, 221:294, 1989.
- [64] C. Nash and S. Sen. *Topology and geometry for physicists*. Academic Press, London, 1983.
- [65] D. Mumford. *Tata Lectures on Theta*, volume 1 and 2. Birkhauser, Boston, 1983.
- [66] J. D. Fay. *Theta functions on Riemann surfaces*. Springer-Verlag, Berlin, 1973. Lecture Notes in Mathematics 352.
- [67] J.-I. Igusa. *Theta functions*. Springer-Verlag, Berlin, 1972.

- [68] A. Erdelyi. *Higher transcendental functions*, volume 1 and 2. McGraw-Hill, New York, 1953.