
Soluciones de agujero negro en $\mathcal{N} = 2$ Super-Einstein-Yang-Mills

Memoria de trabajo presentada por **Pedro Fernández Ramírez**
para optar al título de **Máster en Física Teórica** por la
Universidad Autónoma de Madrid

Trabajo dirigido por **Prof. Don Tomás Ortín Miguel**
Profesor de Investigación en el Instituto de Física Teórica UAM/CSIC, Madrid.



Departamento de Física Teórica
Universidad Autónoma de Madrid

Instituto de Física Teórica
UAM/CSIC

10 de octubre de 2014

Resumen

En este trabajo presentamos la construcción de soluciones supersimétricas de tipo agujero negro y monopolo con uno y varios centros de la teoría de Supergravedad $\mathcal{N} = 2$, $d = 4$ acoplada a supermultipletes vectoriales con gauge no abeliano, ofreciendo una generalización de los resultados presentados en [0712.1530](#), [0806.1477](#) y [0803.0684](#). Nos centramos en soluciones del modelo $ST[2, n]$, que pertenece a la familia de modelos cúbicos y como tal es susceptible de ser embebido en Teoría de Supercuerdas. Las soluciones multicentro obtenidas son las primeras de esa clase encontradas en esta teoría, mientras que las de centro único son embebidas por primera vez en un modelo cúbico. Las soluciones de agujero negro obtenidas presentan compatibilidad con el mecanismo de atractores e indican una violación de la conjetura de no-pelo.

Esta memoria está basada en el artículo [1]: " $\mathcal{N} = 2$ Einstein-Yang-Mills' static two-center solutions", Pablo Bueno, Patrick Meessen, Tomás Ortín y P. F. R.

Índice

1. Introducción	1
2. $\mathcal{N} = 2$, $d = 4$ Super-Einstein-Yang-Mills	4
2.1. Supersimetría y Supergravedad	4
2.2. Campos en Supergravedad $\mathcal{N} = 2$, $d = 4$ y dualidad eléctrico-magnética	6
2.3. La teoría $\mathcal{N} = 2$, $d = 4$ SEYM	10
3. Soluciones supersimétricas de agujero negro (SBHSs)	14
3.1. Características de los agujeros negros	14
3.2. Configuraciones y soluciones supersimétricas	16
3.3. Pasos para la construcción de SBHSs en la teoría $\mathcal{N} = 2$, $d = 4$ SEYM	17
4. SBHSs estáticas de centro único de las teorías $\mathcal{N} = 2$, $d = 4$ SEYM y EYM pura	20
4.1. Soluciones con centro único de las ecuaciones SU(2) de Bogomol'nyi en \mathbb{R}^3	20
4.1.1. El sistema SU(2) Yang-Mills-Higgs	20
4.1.2. El ansatz de erizo	21
4.1.3. Generalización de Protogenov	22
4.2. Embebimiento en modelos ST[2, 4] con gauge SU(2)	23
5. SBHSs multicentro	29
5.1. Soluciones multicentro de las ecuaciones de Bogomol'nyi SU(2) en \mathbb{R}^3	29
5.1.1. Adición de pelo de Protogenov	33
5.1.2. La solución $s \rightarrow \infty$	34
5.2. Embebimiento en modelos ST[2, 4] con gauge SU(2)	34
6. Conclusiones	36
A. Complementos matemáticos	37
A.1. Variedades complejas	37

A.2. Variedades Hermíticas	39
A.3. Variedades de Kähler	40
A.4. Variedades de Kähler-Hodge	41
A.5. Geometría de Kähler Especial	42
A.5.1. Variedad de Kähler Especial	42
A.5.2. El prepotencial \mathcal{F}	43
A.5.3. Pasos para la construcción de una geometría de Kähler Especial	44
A.5.4. Isometrías holomorfas de variedades de Kähler	45
A.5.5. Modelos $ST[2, n]$	46
B. El monopolio de Wu-Yang	48
B.1. El monopolio de Dirac	48
B.2. Desde el monopolio de Dirac hasta el monopolio de Wu-Yang $SU(2)$	49

1. Introducción

La idea de la existencia de un marco teórico que combine de manera compatible todas las interacciones fundamentales de la naturaleza conocidas (en una época concreta) ha sido una constante en la historia de la ciencia. Así mismo, de entre los más grandes descubrimientos encontrados en física, una buena parte puede describirse como la comprensión de que varios fenómenos muy distintos en apariencia vienen regidos por unas mismas leyes básicas, expresadas en un lenguaje matemático.

En la época actual disponemos de dos modelos teóricos efectivos capaces de describir con una precisión asombrosa casi la totalidad de los sucesos que son susceptibles de ser analizados por ellos. Nos referimos, cómo no, a la Teoría de la Relatividad General y al Modelo Estándar de la física de partículas. Sin embargo, a pesar de ello, no se puede decir que la comunidad científica esté del todo satisfecha con este estado de conocimiento. Dejando de lado los problemas particulares de estas teorías, relacionados con la incapacidad de explicar algunos fenómenos que ya han sido observados (propiedades físicas de neutrinos, existencia de materia oscura y energía oscura, el problema de la jerarquía,...)¹, existe un desconcierto en cuanto a que éstas son incompatibles. Dicho de forma breve, la Relatividad General no es una teoría cuántica, mientras que el Modelo Estándar excluye la interacción fundamental más evidente ante nuestros ojos, la gravedad. La existencia de una única teoría capaz de combinar de manera compatible todas las interacciones fundamentales conocidas a través de un enfoque cuántico y relativista no puede, ni debe, darse por sentada. Sin embargo esta idea es, cuanto menos, atractiva, y desde luego todo esfuerzo realizado en esa dirección está a día de hoy justificado.

De entre todas las candidatas a ocupar ese puesto propuestas hasta la fecha, una resalta sobre el resto: la Teoría de Supercuerdas. Sin entrar en detalles descriptivos, podemos resaltar que sus principales fortalezas son la coherencia y consistencia matemática, unidas al hecho de que para alcanzar estas características la teoría necesariamente ha de incluir interacciones gravitatorias.

Un resultado conocido es que la teoría efectiva a bajas energías de una Teoría de Supercuerdas es un modelo de Supergravedad. Dicho de otro modo y acercándonos a la que va a ser nuestra materia de estudio en este trabajo, algunas de las teorías de Supergravedad $\mathcal{N} = 2$, $d = 4$ (esto es, en cuatro dimensiones y con dos conjuntos de generadores supersimétricos) pueden embeberse en el marco de una Teoría de Supercuerdas. En concreto, esto es posible para aquellas supergravedades cuyo prepotencial de Kähler es cúbico (lo que esto significa viene descrito en las secciones siguientes).

¹No es nuestra intención subestimar estos problemas, sino centrarnos en lo que consideramos un objetivo más ambicioso.

Los modelos de Supergravedad, que históricamente comenzaron a aparecer con anterioridad a los de Teoría de Supercuerdas, consisten en teorías clásicas de campos que combinan los principios de supergravedad y relatividad general. Así, además de ser compatibles con una teoría candidata a teoría del todo, incorporan una serie de elementos que han sido propuestos para resolver algunos de los problemas del Modelo Estándar.

Nosotros trabajaremos con el sector bosónico de una teoría de Supergravedad $\mathcal{N} = 2$, $d = 4$ con prepotencial cúbico, donde un subgrupo no abeliano de las isometrías de su variedad escalar ha sido gaugeado. En concreto nuestro interés será el de encontrar soluciones supersimétricas de agujero negro de esta teoría. Los párrafos anteriores nos han servido para contextualizar el papel que juegan las teorías de Supergravedad en cuatro dimensiones. Pasamos ahora a justificar el porqué de la búsqueda de este tipo de soluciones en esta teoría concreta.

Empezamos destacando que hemos elegido una teoría con $\mathcal{N} = 2$ porque los acoplamientos permitidos en ella posibilitan la existencia de soluciones supersimétricas de agujero negro cargado con escalares no triviales, lo que es imposible para $\mathcal{N} = 1$. Estamos interesados en gaugear un subgrupo no abeliano de la variedad escalar principalmente por dos razones. En primer lugar porque, al fin y al cabo, la naturaleza muestra este comportamiento², y en segundo porque nos va a permitir la exploración de un terreno hasta ahora poco visitado: qué sucede al acoplar gravedad a monopolos. Nuestro estudio se ciñe únicamente al sector bosónico de la teoría, ya que las configuraciones puramente bosónicas son las que se corresponden con soluciones clásicas; macroscópicamente sólo observamos campos bosónicos en la naturaleza. Por otra parte las soluciones supersimétricas de agujero negro, simétricas y estáticas espacialmente, son las más simples posibles. De la misma forma que el requerimiento de simetría espacio-temporal simplifica la búsqueda (las ecuaciones de movimiento adoptan una forma más sencilla), exigir que la solución sea supersimétrica va a implicar que las distintas ecuaciones del movimiento no son independientes, y por tanto no tenemos que preocuparnos de resolverlas todas. Aun a pesar estas simplificaciones, las ecuaciones de movimiento a las que nos enfrentamos están lejos de ser triviales: un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales para varias decenas de variables. El motivo por el cual el problema se hace soluble no es otro que su enfrentamiento desde otra perspectiva, basada en exigir que una configuración de campo sea supersimétrica y derivar de esto toda una serie de relaciones de consistencia que sí somos capaces de resolver.

Además de por motivos de simplicidad, hay otra razón muy importante por la cual buscamos so-

²Aunque las teorías con $\mathcal{N} = 2$ no son candidatas a describir la naturaleza, que es quiral, estudiar los gaugeos no abelianos en teorías de Supergravedad es interesante.

luciones de tipo agujero negro. Como hemos comentado anteriormente, las soluciones de algunas teorías de Supergravedad pueden interpretarse en el contexto de Teoría de Supercuerdas. Es sabido que los agujeros negros obedecen unas leyes idénticas a las de la termodinámica, que son un resultado macroscópico de un conjunto de procesos microscópicos más fundamentales. Una teoría consistente que aspire a unificar las interacciones fundamentales debería ser capaz de explicar las propiedades macroscópicas de su espectro de soluciones de agujero negro desde un punto de vista microscópico.

Justificadas las razones que motivan este trabajo, pasamos a resumir el contenido del mismo.

- En la sección 2 damos una brevísima introducción a los conceptos de supersimetría y a la teoría de Supergravedad $\mathcal{N} = 2, d = 4$ Super-Einstein-Yang-Mills (SEYM), objeto de nuestro estudio.
- La sección 3 resume las leyes de la mecánica de agujeros negros, describe las propiedades de las soluciones supersimétricas de agujeros negros (SBHSs) y describe cómo éstas pueden encontrarse en esta teoría.
- La sección 4 comienza con la exposición de una generalización de las soluciones con centro único a las ecuaciones de Bogomol'nyi en el sistema Yang-Mills $SU(2)$ en \mathbb{R}^3 . A continuación éstas son usadas para construir (SBHSs) estáticas de un centro de la teoría $\mathcal{N} = 2, d = 4$ SEYM.
- En la sección 5 presentamos la construcción de la primera familia de SBHSs multicentro conocida de esta teoría.
- En 6 presentamos las conclusiones.
- Los apéndices A y B contienen complementos matemáticos sobre geometría diferencial compleja y la descripción de los monopolos de Dirac y Wu-Yang, respectivamente.

2. $\mathcal{N} = 2$, $d = 4$ Super-Einstein-Yang-Mills

2.1. Supersimetría y Supergravedad

La *supersimetría*³ es una hipotética simetría fundamental de la naturaleza entre bosones y fermiones. Un modelo teórico de campos es supersimétrico si su Lagrangiano asociado es invariante bajo transformaciones de supersimetría. En este modelo los campos quedan agrupados en *supermultipletes*, transformándose unos entre otros bajo la acción de los generadores de esta simetría. Estos generadores son *fermiónicos*, es decir, satisfacen relaciones de anticonmutación. Llegaremos a ellos un poco más adelante.

Coleman y Mandula [6] estudiaron las propiedades que debían satisfacer los generadores *bosónicos* (es decir, que satisfacen ciertas relaciones de conmutación) de simetrías en una teoría de campos relativista, encontrando el hoy conocido como *teorema Coleman-Mandula*. Éste afirma que, en el caso más general, los generadores bosónicos de simetrías deben pertenecer a un grupo resultado del producto directo del grupo de Poincaré (con generadores P_μ y $J_{\mu\nu}$) y un grupo de simetrías interno (con generadores T_s). Estos generadores satisfacen

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \tag{2.1}$$

$$[P_\mu, J_{\nu\rho}] = (\eta_{\mu\nu}P_\rho - \eta_{\mu\rho}P_\nu), \tag{2.2}$$

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\gamma}] = -(\eta_{\mu\rho}J_{\nu\gamma} + \eta_{\nu\gamma}J_{\mu\rho} - \eta_{\mu\gamma}J_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}J_{\mu\gamma}), \tag{2.3}$$

$$[T_r, T_s] = f_{rs}{}^t T_t, \tag{2.4}$$

El contenido de este teorema se puede interpretar físicamente como que la presencia de simetrías adicionales impondría demasiadas restricciones para procesos de dispersión, permitiendo únicamente valores discretos para los ángulos de dispersión.

Más tarde, Haag Lopuszański y Sohnius [7] demostraron que una teoría relativista de campos podría admitir simetrías adicionales a las encontrados por Coleman y Mandula de manera consistente siempre que los generadores de las mismas fueran fermiónicos. La incorporación de éstos se hace a través de la promoción del álgebra de Poincaré a un álgebra graduada, introduciendo $4\mathcal{N}$ generadores (*supercargas*) Q_α^L , con $L = 1, \dots, \mathcal{N}$; $\alpha = 1, 2$ que se transforman como espinores de Weyl. Además de (2.1)-(2.4), las

³Damos aquí una brevísima introducción a los conceptos de supersimetría y supergravedad. La bibliografía disponible sobre el tema es más que amplia. En particular, recomendamos [2-5]

relaciones no triviales que satisfacen los generadores son

$$[Q_\alpha^L, J_{\mu\nu}] = (\sigma_{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta^L, \quad (2.5)$$

$$[Q_\alpha^L, P_\mu] = [\bar{Q}_\alpha^L, P_\mu] = 0, \quad (2.6)$$

$$\{Q_\alpha^L, \bar{Q}_{\dot{\beta}M}\} = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu \delta_M^L, \quad (2.7)$$

con el vector de matrices de Pauli $\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \sigma^a)$, $\bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}, -\sigma^a)$, $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu)$ y $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2i}\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\sigma_{\rho\lambda}$.

Una transformación supersimétrica infinitesimal viene dada por $\delta_\epsilon = \epsilon_L^\alpha Q_\alpha^L$, donde ϵ_L es un parámetro fermiónico. De forma esquemática, la acción de éstas sobre el espacio de campos bosónicos (B) y fermiónicos (F) es

$$\delta_\epsilon B \sim \bar{\epsilon} F, \quad (2.8)$$

$$\delta_\epsilon F \sim B \epsilon. \quad (2.9)$$

Cada supermultiplete está formado por $2^{\mathcal{N}}$ estados de helicidades $\lambda_{min} + k/2$, con $k = 0, \dots, \mathcal{N}$, con multiplicidades $\binom{\mathcal{N}}{k}$ y con el mismo número de grados de libertad bosónicos y fermiónicos en cada caso. Para que en el modelo no aparezcan partículas sin masa con helicidades⁴ $|\lambda| \geq 2$ y que solo haya una partícula con $\lambda = 2$, se tiene que el número máximo de supersimetrías ha de ser $\mathcal{N} = 8$.

Del mismo modo en que la teoría de la Relatividad General puede entenderse como la *teoría gauge* de las simetrías del espacio-tiempo de Minkowski globales (grupo de Poincaré), Supergravedad aparece como la *teoría gauge* de las transformaciones supersimétricas globales. Es decir, si permitimos que los parámetros de las transformaciones supersimétricas dependan de las coordenadas espaciotemporales, $\epsilon_L(x)$, encontraremos que la teoría resultante necesariamente implica la presencia de gravedad. Explícitamente, al promover la supersimetría global a local $\epsilon_L \rightarrow \epsilon_L(x)$, se generan traslaciones $a^\mu(x)\partial_\mu$ que difieren entre un punto y otro; es decir, aparecen transformaciones generales de coordenadas.

Decimos que una teoría invariante bajo la acción de tales transformaciones es una *teoría de Supergravedad*. En este trabajo trataremos con una teoría de supergravedad gaugeada, a la que llamaremos $\mathcal{N} = 2$ Super-Einstein-Yang-Mills no abeliana, y que presentamos a lo largo de las siguientes secciones.

⁴No se conoce un marco teórico consistente en el que acoplar estas partículas con las de helicidad $|\lambda| \leq 2$.

2.2. Campos en Supergravedad $\mathcal{N} = 2$, $d = 4$ y dualidad eléctrico-magnética

Supergravedad $\mathcal{N} = 2$, $d = 4$ es la teoría más sencilla de supergravedad extendida (es decir, con más de un set de generadores fermiónicos) y, aunque no tiene relevancia fenomenológica directa en Física de Partículas debido a la imposibilidad de reproducir la estructura quiral del Modelo Estándar, es interesante en sí misma. Los acoplamientos en la teoría no quedan inequívocamente determinados por las restricciones que impone la presencia de supersimetría, lo que sí sucede para $\mathcal{N} > 2$ en cuatro dimensiones, aunque todos ellos son diferentes realizaciones de una estructura matemática común conocida como geometría de Kähler Especial. Los acoplamientos permitidos en esta teoría posibilitan la existencia de soluciones supersimétricas de agujero negro cargado con escalares no triviales, lo cual es imposible para $\mathcal{N} = 1$.

Algunos de estos modelos aparecen en las compactificaciones de Teoría de Cuerdas tipo-II en una variedad de Calabi-Yau de dimensión compleja 3, lo que significa que sus soluciones pueden embeberse en Teoría de Supercuerdas. Concretamente esto es factible cuando la geometría de Kähler Especial del modelo tiene un prepotencial cúbico⁵.

El contenido en campos de cualquier Supergravedad $\mathcal{N} = 2$, $d = 4$ es el siguiente

- Un *multiplete de gravedad*: $(e^a{}_\mu, \psi_{\mu I}, A_\mu^0)$, siendo $e^a{}_\mu$ la tetrada, $\psi_{\mu I}$ un doblete de $SU(2)$ de gravitinos (1-formas), y A_μ^0 el *gravifotón* (1-forma).
- n_v *multipletes vectoriales*: $(A_\mu^i, \lambda^{iI}, Z^i)$, donde A_μ^i , $i = 1, \dots, n_v$ son 1-formas, λ^i son espinores (0-formas) y los Z^i son escalares complejos (0-formas). Como vamos a ver, los Z^i parametrizan una variedad Kähler especial de dimensión n_v .
- n_h *hipermultipletes*: (χ_α, q^u) donde los χ_α , $\alpha = 1, \dots, 2n_h$ son espinores (0-formas), y los q^u $u = 1, \dots, 4n_h$ son escalares reales (0-formas) que parametrizan una *variedad cuaterniónica Kähler* [8] $4n_h$ -dimensional. En este trabajo fijaremos los campos de este supermultiplete a un valor constante, con lo que no nos preocuparemos de ellos⁶.

Todo lagrangiano supersimétrico es invariante bajo la simetría \mathbb{Z}_2 que hace $B \rightarrow B$, $F \rightarrow -F$. Como consecuencia, la truncación de todos los campos fermiónicos es siempre consistente. Esto implica que cualquier solución de una teoría de supergravedad en la que se trunquen los fermiones es a su vez

⁵Ver apéndice A.5.

⁶El interés de esta truncación es que no existen soluciones de agujero negro regulares en la presencia de hiperescalares.

solución de la teoría completa. En este trabajo estaremos interesados en soluciones puramente bosónicas, con lo que truncaremos los fermiones en adelante.

Llegados a este punto, antes de pasar a describir en detalle la teoría particular en la que se basa este trabajo, $\mathcal{N} = 2$ SEYM, resulta interesante destacar el papel que en las teorías de supergravedad no gaugeadas juega la dualidad eléctrico-magnética. Consideremos la acción bosónica⁷

$$S = \int d^4x \sqrt{|g|} \left\{ R + \mathcal{G}_{ij}(\phi) \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^j + 2\Im m \mathcal{N}_{\Lambda\Sigma}(\phi) F^\Lambda_{\mu\nu} F^{\Sigma\mu\nu} - 2\Re e \mathcal{N}_{\Lambda\Sigma}(\phi) F^\Lambda_{\mu\nu} \star F^{\Sigma\mu\nu} \right\}, \quad (2.10)$$

siendo \mathcal{G} definida positiva y \mathcal{N} una matriz compleja con parte imaginaria definida negativa, y los índices $i = 1, \dots, n_s$ y $\Lambda = 0, \dots, n_v$ contando el número de escalares ϕ^i y de 1-formas A^Λ respectivamente. Esta acción cubre el sector bosónico de todas las teorías de supergravedad cuatrodimensional con $\mathcal{N} > 1$ no gaugeadas.

Las ecuaciones de movimiento para la métrica, los escalares y los vectores son

$$\mathcal{E}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + \mathcal{G}_{ij} \left[\partial_\mu \phi^i \partial_\nu \phi^j - \frac{1}{2} \partial_\rho \phi^i \partial^\rho \phi^j \right] + 8\Im m \mathcal{N}_{\Lambda\Sigma} F_\mu^{\Lambda+\rho} F_{\nu\rho}^{\Sigma-} = 0, \quad (2.11)$$

$$\mathcal{E}_i = \nabla_\mu (\mathcal{G}_{ij} \partial^\mu \phi^j) - \frac{1}{2} \partial_i \mathcal{G}_{jk} \partial_\rho \phi^j \partial^\rho \phi^k + \partial_i [\tilde{F}_\Lambda^{\nu\mu\star} F_{\mu\nu}^\Lambda] = 0, \quad (2.12)$$

$$\mathcal{E}_\Lambda^\mu = \nabla_\nu \star \tilde{F}_\Lambda^{\nu\mu} = 0, \quad (2.13)$$

donde en la última de ellas hemos definido el tensor dual \tilde{F}_Λ

$$\tilde{F}_{\Lambda\mu\nu} \equiv -\frac{1}{4\sqrt{|g|}} \frac{\delta S}{\delta \star F^{\Lambda\mu\nu}} = \Re e \mathcal{N}_{\Lambda\Sigma} F_{\mu\nu}^\Sigma + \Im m \mathcal{N}_{\Lambda\Sigma}^* F_{\mu\nu}^\Sigma. \quad (2.14)$$

La consistencia de la teoría impone además las identidades de Bianchi sobre los campos vectoriales

$$\mathcal{B}^{\Lambda\mu} \equiv \nabla_\nu \star F^{\Lambda\nu\mu} = 0. \quad (2.15)$$

Si definimos el vector simpléctico compuesto por los términos izquierdos de las ecuaciones de Maxwell e identidades de Bianchi

$$\mathcal{E}_\mu^M \equiv \begin{pmatrix} \mathcal{B}_\mu^\Lambda \\ \mathcal{E}_{\Lambda\mu} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

⁷Estos contenidos están basados en [9–11].

la información contenida en las ecuaciones de Maxwell y las identidades de Bianchi se escribe de forma más compacta como $\mathcal{E}_\mu^M = 0$, y por lo tanto vemos que las ecuaciones de movimiento admiten una simetría de rotación $\text{GL}(2n_v + 2, \mathbb{R})$ sobre el índice M,

$$\mathcal{E}_\mu^M = 0 \rightarrow m^M_N \mathcal{E}_\mu^N = 0, \quad m^M_N \in \text{GL}(2n_v + 2, \mathbb{R}). \quad (2.17)$$

Estas rotaciones actúan por definición sobre los vectores (simplicéticos) de 2-formas (tensores de campo) según

$$F_\mu^M \equiv \begin{pmatrix} F^\Lambda \\ \tilde{F}_\Lambda \end{pmatrix}, \quad F'^M = m^M_N F^N. \quad (2.18)$$

Sin embargo, F^Λ y \tilde{F}_Λ no son independientes como se ve en la definición de \tilde{F}_Λ , (2.14). Por tanto, en aras de que el modelo sea consistente, hemos de imponer que tal definición siga siendo válida para \tilde{F}'_Λ . Es decir, para que la condición

$$\tilde{F}'_{\Lambda\mu\nu} \equiv -\frac{1}{4\sqrt{|g|}} \frac{\delta S'}{\delta \star F'^{\Lambda\mu\nu}} \quad (2.19)$$

pueda satisfacerse, es necesario imponer que la matriz \mathcal{N} se transforme de algún modo tras la acción de $\text{GL}(2n_v + 2, \mathbb{R})$ en (2.17). La presencia de supersimetría requiere que esta matriz se relacione con los campos escalares (ver el apéndice A.5.3), con lo que ha de imponerse una acción sobre éstos que produzca la matriz periodo \mathcal{N}' con las propiedades deseadas. Para ello se hace necesario considerar toda una serie de transformaciones; un difeomorfismo $\xi \in \text{Diff}(\mathcal{M}_{\text{escalar}})$ sobre la variedad escalar $\mathcal{M}_{\text{escalar}}$, así como un homomorfismo de grupos (que es de hecho una representación del grupo $\text{Diff}(\mathcal{M}_{\text{escalar}})$) según

$$j : \text{Diff}(\mathcal{M}_{\text{escalar}}) \rightarrow \text{GL}(2n_v + 2, \mathbb{R}), \quad (2.20)$$

que a cada difeomorfismo ξ le asigna una transformación lineal general $j(\xi) \in \text{GL}(2n_v + 2)$. Esto nos va a permitir definir la acción simultánea de ξ sobre todos los campos de la teoría. De forma esquemática lo podemos escribir como

$$\{\phi, F'^M, \mathcal{N}'_{\Sigma\Lambda}(\phi)\} \xrightarrow{\xi} \{\xi(\phi), (j(\xi))^M_N F'^N, \mathcal{N}'_{\Sigma\Lambda}(\xi(\phi))\}. \quad (2.21)$$

La condición de consistencia (2.19) va a reducir el grupo de rotación que puede actuar sobre \mathcal{E}_μ^M . Las transformaciones m^M_N han de pertenecer al subgrupo $\text{Sp}(2n_v + 2, \mathbb{R})$, de forma que el homomorfismo j debe cumplir

$$j : \text{Diff}(\mathcal{M}_{\text{escalar}}) \rightarrow \text{Sp}(2n_v + 2, \mathbb{R}), \quad (2.22)$$

y la matriz periodo ha de transformarse según:

$$\mathcal{N}'(\xi(\phi)) = (A\mathcal{N}(\phi) + B)(C\mathcal{N}(\phi) + D)^{-1}, \quad (2.23)$$

donde A, B, C y D son las matrices $(n_v + 1) \times (n_v + 1)$ dimensionales

$$m \equiv \begin{pmatrix} D & C \\ B & A \end{pmatrix} \in \text{Sp}(2n_v + 2, \mathbb{R}). \quad (2.24)$$

Así pues, siempre que la matriz periodo transforme como (2.23) podemos definir estas transformaciones de *dualidad simpléctica eléctrico-magnética* sobre \mathcal{E}_μ^M , que actúan como simetrías de las ecuaciones de Maxwell y las identidades de Bianchi.

Por otro lado, no todas estas transformaciones se corresponden con simetrías de la acción (2.10). Sin embargo, sí podemos hacer que estas transformaciones dejen invariantes todas las ecuaciones de movimiento de la teoría. Para ello debemos restringir los difeomorfismos $\text{Diff}(\mathcal{M}_{\text{escalar}})$ asociados a las transformaciones de dualidad a aquellos que sean isometrías de la variedad escalar (y por tanto de su métrica \mathcal{G}_{ij}). Así, el homomorfismo j se reduce una vez más, llegando a su forma final

$$j : \text{Isometrías}(\mathcal{M}_{\text{escalar}}, \mathcal{G}_{ij}) \rightarrow \text{Sp}(2n_v + 2, \mathbb{R}). \quad (2.25)$$

Según hemos visto, las simetrías globales de las ecuaciones de movimiento implican que la teoría es invariante bajo transformaciones de dualidad simpléctica; esto es, difeomorfismos que se corresponden con isometrías de la variedad escalar acompañados de transformaciones simplécticas sobre los vectores simplécticos de 2-formas a través del homomorfismo (2.25), con la condición de que la matriz periodo satisfaga (2.23).

Finalmente, es posible comprobar que las isometrías de la variedad escalar son simetrías del Lagrangiano si hay una inmersión diagonal por bloques en el grupo simpléctico $\text{Sp}(2n_v + 2, \mathbb{R})$ (o sea, con $B = C = 0$).

En resumen, hemos comprobado que la estructura de la variedad escalar en toda teoría de Super-gravedad $\mathcal{N} = 2$, $d = 4$ es una geometría de Kähler Especial.

2.3. La teoría $\mathcal{N} = 2$, $d = 4$ SEYM

La teoría $\mathcal{N} = 2$, $d = 4$ Super-Einstein-Yang-Mills (SEYM) puede entenderse como la supersimetrización $\mathcal{N} = 2$ más simple de teorías Einstein-Yang-Mills (EYM). Aunque esta apreciación es interesante, en nuestro caso resulta más práctico describir la teoría como una Supergravedad $\mathcal{N} = 2$, $d = 4$ acoplada a n_V supermultipletes vectoriales, en los cuales un subgrupo no abeliano⁸ del grupo de isometrías de la variedad escalar (variedad de Kähler Especial⁹, por supuesto) ha sido gaugeado. Para ello son usados algunos de los campos vectoriales de la teoría en el papel de campo gauge. Nótese que una simetría global puede ser gaugeada de este modo si la acción de la misma sobre los campos vectoriales es en la representación adjunta. El grupo gauge que vamos a considerar es $SU(2)$.

Como ya hemos adelantado en la sección anterior, sólo el sector bosónico de la teoría es de nuestro interés. Éste está compuesto por la métrica $g_{\mu\nu}$, los campos vectoriales A^Λ_μ , $\Lambda = 0, 1, \dots, n_V$, siendo A^0_μ el gravifotón, y los escalares complejos Z^i , $i = 1, \dots, n_V$. La acción del sector bosónico es

$$S[g_{\mu\nu}, A^\Lambda_\mu, Z^i] = \int d^4x \sqrt{|g|} \left[R + 2\mathcal{G}_{ij^*} \mathfrak{D}_\mu Z^i \mathfrak{D}^\mu Z^{*j^*} + 2\Im \mathcal{N}_{\Lambda\Sigma} F^{\Lambda\mu\nu} F^\Sigma_{\mu\nu} - 2\Re \mathcal{N}_{\Lambda\Sigma} F^{\Lambda\mu\nu} \star F^\Sigma_{\mu\nu} - V(Z, Z^*) \right]. \quad (2.26)$$

En esta expresión, \mathcal{G}_{ij^*} es la métrica de Kähler y $\mathfrak{D}_\mu Z^i$ la derivada covariante gauge,

$$\mathfrak{D}_\mu Z^i = \partial_\mu Z^i + g A^\Lambda_\mu k_\Lambda^i, \quad (2.27)$$

siendo $k_\Lambda^i(Z)$ los vectores de Killing holomorfos de las isometrías que han sido gaugeadas¹⁰. El tensor de campo electromagnético no abeliano $F^\Lambda_{\mu\nu}$ es

$$F^\Lambda_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu} A^\Lambda_{\nu]} - g f_{\Sigma\Gamma}{}^\Lambda A^\Sigma_\mu A^\Gamma_\nu, \quad (2.28)$$

con $f_{\Sigma\Gamma}{}^\Lambda$ las constantes de estructura de $SU(2)$. $\mathcal{N}_{\Lambda\Sigma}$ es la matriz periodo de la variedad de Kähler Especial y $V(Z, Z^*)$ es el potencial escalar,

$$V(Z, Z^*) = -\frac{1}{4} g^2 \Im \mathcal{N}^{\Lambda\Sigma} \mathcal{P}_\Lambda \mathcal{P}_\Sigma, \quad (2.29)$$

⁸Necesariamente, puesto que si el subgrupo es abeliano la teoría es idéntica a la no gaugeada

⁹Ver el apéndice A.5.

¹⁰La notación que estamos usando asocia un vector de Killing a cada valor del índice Λ , para así evitar la introducción de otro índice. Queda sobreentendido que sólo un subgrupo de los k_Λ son no nulos

con $\mathcal{P}_\Lambda(Z, Z^*)$ los mapas de momento asociados a los vectores de Killing, relacionados con éstos y el potencial Kähler \mathcal{K} a través de las expresiones

$$i\mathcal{P}_\Lambda = k_\Lambda^i \partial_i \mathcal{K} - \lambda_\Lambda, \quad (2.30)$$

$$k_{\Lambda i^*} = i\partial_{i^*} \mathcal{P}_\Lambda, \quad (2.31)$$

para alguna función holomorfa $\lambda_\Lambda(Z)$.

Puesto que la parte imaginaria de la matriz periodo es definida negativa, el potencial escalar queda definido positivo, lo que conduce a soluciones asintóticamente-planas o -DeSitter.

Truncados hiperescalares y fermiones, la teoría queda completamente determinada por la elección de una sección simpléctica holomorfa del fibrado \mathcal{SM} con grupo de estructura $\mathrm{Sp}(2n_v + 2, \mathbb{R})$ definido sobre la variedad escalar o, equivalentemente en caso de que exista, por la función holomorfa y homogénea de segundo grado conocida como prepotencial \mathcal{F} y definida en la sección (A.5.2).

Tanto los vectores de Killing holomorfos como los generadores T_Λ del grupo gauge satisfacen álgebras de Lie

$$[k_\Lambda, k_\Sigma] = -f_{\Lambda\Sigma}{}^\Gamma k_\Gamma, \quad [T_\Lambda, T_\Sigma] = +f_{\Lambda\Sigma}{}^\Gamma T_\Gamma. \quad (2.32)$$

Para el grupo gauge $\mathrm{SU}(2)$ usaremos subíndices¹¹ $a, b, c = 1, 2, 3$, siendo las constantes de estructura $f_{ab}{}^c = -\varepsilon_{abc}$, con lo que las relaciones de conmutación se escriben como

$$[k_a, k_b] = +\varepsilon_{abc} k_c, \quad [T_a, T_b] = -\varepsilon_{abc} T_c. \quad (2.33)$$

Para los generadores vamos a emplear la representación fundamental, en la cual éstos son proporcionales a las matrices de Pauli¹² σ^a

$$T_a \equiv +\frac{i}{2}\sigma^a, \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Tr}(T_a T_b) = -\frac{1}{2}\delta_{ab}. \quad (2.35)$$

¹¹Que forman un subconjunto de los índices Λ, Σ, \dots

¹²En su forma estándar, es decir

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^a \sigma^b = \delta^{ab} + i\varepsilon^{abc} \sigma^c. \quad (2.34)$$

Las ecuaciones de movimiento de la teoría son pueden escribirse del modo siguiente

$$G_{\mu\nu} + 2\mathcal{G}_{ij^*}[\mathfrak{D}_{(\mu}Z^i\mathfrak{D}_{\nu)}Z^{*j^*} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathfrak{D}_{\rho}Z^i\mathfrak{D}^{\rho}Z^{*j^*}] + 4\mathcal{M}_{MN}\mathcal{F}^M{}_{\mu}{}^{\rho}\mathcal{F}^N{}_{\nu\rho} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}V(Z, Z^*) = 0, \quad (2.36)$$

$$\mathfrak{D}^2Z^i + \partial^i G_{\Lambda\mu\nu} \star F^{\Lambda\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial^i V(Z, Z^*) = 0, \quad (2.37)$$

$$\mathfrak{D}_{\nu} \star G_{\Lambda}{}^{\nu\mu} + \frac{1}{4}g(k_{\Lambda i^*}\mathfrak{D}_{\mu}Z^{*i^*} + k_{\Lambda i}^*\mathfrak{D}_{\mu}Z^i) = 0, \quad (2.38)$$

con $G_{\Lambda\mu\nu}$ el vector dual del tensor de campo electromagnético

$$G_{\Lambda} \equiv \Re\mathfrak{e}\mathcal{N}_{\Lambda\Sigma}F^{\Sigma} + \Im\mathfrak{m}\mathcal{N}_{\Lambda\Sigma} \star F^{\Sigma}, \quad (2.39)$$

$\mathcal{F}^M{}_{\mu\nu}$ es el vector simpléctico de 2-formas

$$(\mathcal{F}^M) \equiv \begin{pmatrix} F^{\Lambda} \\ G_{\Lambda} \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

\mathcal{M}_{MN} es la matriz simétrica $2(n+1) \times 2(n+1)$ definida como

$$(\mathcal{M}_{MN}) \equiv \begin{pmatrix} \Im\mathfrak{m}\mathcal{N}_{\Lambda\Sigma} + R_{\Lambda\Gamma}\Im\mathfrak{m}\mathcal{N}^{-1|\Gamma\Omega}R_{\Omega\Sigma} & -R_{\Lambda\Gamma}\Im\mathfrak{m}\mathcal{N}^{-1|\Gamma\Sigma} \\ -\Im\mathfrak{m}\mathcal{N}^{-1|\Lambda\Omega}R_{\Omega\Sigma} & \Im\mathfrak{m}\mathcal{N}^{-1|\Lambda\Sigma} \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

y

$$\mathfrak{D}_{\nu} \star G_{\Lambda}{}^{\nu\mu} = \partial_{\nu} \star G_{\Lambda}{}^{\nu\mu} + g f_{\Lambda\Sigma}{}^{\Gamma} A^{\Sigma}{}_{\nu} \star G_{\Lambda}{}^{\nu\mu}. \quad (2.42)$$

La mayor parte de la literatura y trabajo previo en soluciones de agujero negro y monopolo no abelianas se ha llevado a cabo en el contexto de las teorías EYM y Einstein-Yang-Mills-Higgs (EYMH). Antes de cerrar esta sección merece la pena discutir la relación entre éstas y las teorías que consideraremos en este trabajo. Las diferencias principales entre las teorías EYMH y $\mathcal{N} = 2$, $d = 4$ SEYM son la complejificación del campo de Higgs y la presencia de una matriz periodo no trivial. Otra diferencia es la posibilidad de tener variedades escalares más generales, lo que se refleja en las expresiones de

las derivadas covariantes gauge de los escalares. Las soluciones de la teoría $\mathcal{N} = 2$, $d = 4$ SEYM podrán ser soluciones también de la teoría EYMH si tienen escalares covariantemente constantes con fases complejas idénticas (por ejemplo, si todos ellos son puramente imaginarios). En ese caso, si además el potencial escalar se anula en las soluciones, también podrían ser soluciones del sistema EYM. Algunas de las soluciones encontradas en las referencias [12, 13] son también soluciones de la teoría EYM, como veremos.

3. Soluciones supersimétricas de agujero negro (SBHSS)

3.1. Características de los agujeros negros

La concepción de un objeto lo suficientemente denso como para que su velocidad de escape sea tan elevada que ni la luz pueda escapar de su superficie fue documentada por primera vez por el geólogo inglés John Michell, que hizo llegar sus pensamientos por escrito a Henry Cavendish en 1783. Por más de cien años la idea quedó irremediamente en cuarentena, ya que la interacción luz-campo gravitatorio estuvo lejos de ser entendida hasta la publicación de la teoría de la Relatividad General de Einstein. Muy poco después la publicación de las ecuaciones que relacionan el contenido de un espacio-tiempo con su curvatura, Schwarzschild encontró la primera de las soluciones, que describía el campo gravitatorio producido por una distribución esférica de masa. La solución de Schwarzschild, cuyas propiedades físicas fueron entendiéndose a lo largo de los decenios siguientes fue la primera de una larga serie de soluciones de tipo *agujero negro*.

La definición precisa de agujero negro está lejos de ser trivial y requiere la introducción de toda una serie de conceptos previos. Sin embargo, puesto que éstos no nos serán imprescindibles en el resto de nuestro trabajo, nos limitaremos a dar una descripción *práctica* sobre estos objetos y algunas de sus propiedades más interesantes en la física actual.

Para un espaciotiempo asintóticamente plano \mathcal{M} , la región de *agujero negro* $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$ se define como

$$\mathcal{B} \equiv \mathcal{M} - I^-(\mathcal{I}^+), \quad (3.1)$$

donde \mathcal{I}^+ denota el infinito futuro nulo (es decir, el conjunto de puntos a los que se aproximan asintóticamente las geodésicas nulas que pueden escapar al infinito espacial) e $I^-(\mathcal{I}^+)$ el pasado cronológico de éste (esto es, el conjunto de puntos por los que pasan las líneas de género luz y género temporal dirigidas hacia el pasado y que parten de \mathcal{I}^+)¹³.

El *horizonte de eventos* \mathcal{H} de un agujero negro se define como la frontera de \mathcal{B} . Así pues, \mathcal{H} es la frontera del pasado de \mathcal{I}^+ . Un agujero negro consiste por tanto en el conjunto de puntos de \mathcal{M} desde los cuales las geodésicas nulas no pueden escapar a infinito. De esta forma, un observador en \mathcal{B} no puede influir causalmente en nada de lo que ocurra fuera del horizonte: ninguna información enviada desde el interior de \mathcal{H} puede escapar del mismo. Similarmente, toda información enviada al agujero negro desde

¹³Es posible dar definiciones similares de agujeros negros para otros tipos de espaciotiempo en los que hay definida una región asintótica, como por ejemplo para aquellos que son asintóticamente *AdS*.

el exterior queda irremediamente y para siempre en su interior.

Las leyes de la mecánica de agujeros negros son las siguientes [14]

- **Ley cero de la mecánica de agujeros negros.** La gravedad superficial¹⁴ κ ha de ser constante sobre cualquier horizonte.
- **Primera ley de la mecánica de agujeros negros.** Las variaciones en masa M , área A del horizonte, momento angular J , y carga eléctrica Q de un agujero negro estacionario cuando es perturbado, a primer orden, siempre satisfacen

$$\delta M = \frac{1}{8\pi} \kappa \delta A + \Omega \delta J + \Phi \delta Q, \quad (3.2)$$

donde Ω es la velocidad angular, y Φ el potencial electrostático.

- **Segunda ley de la mecánica de agujeros negros.** La suma de las áreas de los horizontes de eventos de los agujeros negros contenidos en un espacio-tiempo nunca puede disminuir con el tiempo [15]. Es decir,

$$\delta A \geq 0. \quad (3.3)$$

Estas tres leyes son análogas a las leyes de la termodinámica a través de la identificación de las variables

$$\text{Masa} \sim \text{Energía}, \quad \text{Área} \sim \text{Entropía}, \quad \kappa \sim \text{Temperatura}, \quad (3.4)$$

lo que constituye, cuanto menos, un resultado sorprendente. En cierto sentido, las leyes de la mecánica de agujeros negros pueden verse simplemente como casos particulares de las leyes de la termodinámica aplicadas a sistemas que contienen agujeros negros. Ahora bien, al igual que las leyes de la termodinámica son el resultado estadístico macroscópico de unas leyes subyacentes microscópicas más fundamentales, es de esperar que la mecánica de agujeros negros esté regida por la dinámica de ciertos grados de libertad microscópicos. La comprensión de la física involucrada en esta dinámica requeriría del uso de una teoría cuántica de la gravedad. En el contexto de la teoría de cuerdas como candidata a esta teoría del todo, el acuerdo entre los cálculos macroscópico y microscópico de la entropía del agujero negro resulta, en efecto, producirse para ciertas familias de agujeros negros extremos y casi extremos [16–20] como observaron Strominger y Vafa por primera vez [16].

¹⁴La gravedad superficial es una función relacionada con la fuerza que siente un objeto de masa unidad en el horizonte

3.2. Configuraciones y soluciones supersimétricas

Es un hecho bien conocido que usualmente las soluciones de las ecuaciones de movimiento de una teoría dada rompen muchas (o todas) de sus simetrías. Encontramos un ejemplo familiar en el movimiento de una partícula relativista en el espacio de Minkowski, donde la simetría de la teoría a la solución pasa del grupo de Poincaré a $\mathbb{R} \times SO(2)$, o también en las ecuaciones de Einstein, invariantes bajo el grupo de dimensión infinita de transformaciones generales de coordenadas, mientras que una solución concreta (métrica) es invariante únicamente bajo un cierto grupo de *isometrías* de dimensión finita.

Dada una teoría de supergravedad, una configuración de sus campos se dice supersimétrica o *BPS* (de Bogomol'nyi-Prasad-Sommefeld) si preserva alguna de estas simetrías, es decir, si [2]

$$\delta_\epsilon B \sim \bar{\epsilon} F = 0, \quad (3.5)$$

$$\delta_\epsilon F \sim \partial\epsilon + B\epsilon = 0, \quad (3.6)$$

para al menos un espinor ϵ . Si además es una solución a las ecuaciones de movimiento, hablamos de una *solución supersimétrica*. Como estamos interesados en soluciones puramente bosónicas, (3.5) se satisface trivialmente, con lo que únicamente debemos preocuparnos de imponer (3.6). Éstas se conocen como *ecuaciones del espinor de Killing* (KSE) y cada solución ϵ es un *espinor de Killing*.

Las soluciones BPS son muy interesantes en sí mismas. Cuando estas soluciones tienden asintóticamente a estados de vacío máximamente supersimétricos (soluciones que conservan todas las supersimetrías), se les puede asignar estados con números cuánticos bien definidos en el marco de embebimiento de estas soluciones en una teoría cuántica. También se ha demostrado que estos estados BPS saturan una cota inferior de energía (*cotas supersimétricas o de Bogomol'nyi*), con lo que son soluciones estables.

En este punto aparece la cuestión de cómo encontrar estas soluciones. Siempre es posible comprobar si una solución dada es o no supersimétrica comprobando si admite un espinor de Killing, aunque sería deseable contar con un método de caracterización más general. Por fortuna, el requerimiento de que una configuración de campo (no necesariamente solución de las ecuaciones de movimiento) sea supersimétrica es lo suficientemente restrictivo que en todos los casos estudiados hasta el momento es suficiente para fijar completamente (salvo reparametrizaciones) esta configuración, todos los componentes de los campos dependen de un número muy reducido de funciones independientes. Cuando estas configuraciones se introducen en las ecuaciones de movimiento uno encuentra que sólo unas pocas de éstas son independientes y, en muchas ocasiones, se pueden resolver, encontrando así soluciones a las complicadas ecuaciones de la teoría de supergravedad. Hay un método sistemático para encontrar todas

las configuraciones de campo supersimétricas de una teoría de supergravedad [21–24], que describimos brevemente a continuación de forma cualitativa.

Este método [2] se basa en asumir la existencia de al menos un espinor ϵ que resuelve las KSE (3.6) y derivar de ahí toda una serie de relaciones de consistencia. Estas relaciones en todo caso apuntan a la existencia de un vector de Killing que genera una isometría sobre la configuración de campo, con lo cual será posible definir coordenadas adaptadas a este vector y escribir la forma general de la métrica¹⁵. Como resultado de este análisis se obtienen unas condiciones necesarias y suficientes para que la configuración de campo sea supersimétrica, que típicamente implican que los campos dependen de un reducido número de funciones independientes.

Hasta aquí hemos encontrado las configuraciones de campo supersimétricas de la teoría. Antes de sustituirlas en las ecuaciones de movimiento, es conveniente comprobar cuántas de ellas son independientes. Para ello se utilizan las llamadas *identidades de los espinores de Killing* (KSI), que se obtienen a partir de las identidades de Noether asociadas a la invariancia bajo transformaciones de supersimetría local en teorías de supergravedad [24]. Las KSI identifican las ecuaciones de movimiento independientes donde las configuraciones de campo encontradas deben sustituirse para encontrar soluciones supersimétricas.

3.3. Pasos para la construcción de SBHSs en la teoría $\mathcal{N} = 2, d = 4$ SEYM

El método descrito en los párrafos anteriores ha sido utilizado para encontrar y clasificar de forma efectiva todas las soluciones supersimétricas de teorías de Supergravedad $\mathcal{N} = 2, d = 4$ en el caso sin gaugear [25, 26], así como para las soluciones con vectores de Killing de género tiempo en el caso gaugeado SEYM [12, 13]. A continuación exponemos muy brevemente los resultados ahí encontrados, en forma de *receta* para construir SBHSs en nuestra teoría.

Antes de esto, es conveniente resaltar las dos características más importantes de estas soluciones. La primera de ellas es que los campos quedan unequivocamente determinados a través de su dependencia de $2(n_V + 1)$ funciones independientes del tiempo, $(\mathcal{I}^M) = (\frac{\mathcal{I}^\Lambda}{\mathcal{I}_\Lambda})$, que han de satisfacer una serie de igualdades. La segunda característica es que las funciones \mathcal{I}^Λ se relacionan con las componentes espaciales del tensor de campo electromagnético a través de la ecuación de Bogomol’nyi en \mathbb{R}^3 (3.7), jugando el papel de “campo de Higgs”. Es éste un hecho de gran relevancia, puesto que la ecuación de

¹⁵Este vector de Killing va a aparecer explícitamente en la métrica y las ecuaciones de consistencia que satisface se traducen en ecuaciones para las componentes de la métrica. Será necesario distinguir entre varios casos, dependiendo de si el vector de Killing es de género temporal, luz o espacial.

Bogomol'nyi ha sido ampliamente estudiada debido a su trascendencia en el estudio de monopolos, con lo que se conocen soluciones varias que pueden (y van a) ser utilizadas para nuestros intereses.

Los pasos para obtener SBHs en esta teoría son

1. En primer lugar se toma una solución de las ecuaciones de Bogomol'nyi

$$\tilde{F}^\Lambda_{\underline{mn}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{mnp}\tilde{\mathcal{D}}_{\underline{p}}\mathcal{I}^\Lambda \quad (3.7)$$

para un campo gauge $\tilde{A}^\lambda_{\underline{m}}$ (donde $\underline{m} = 1, 2, 3$ son las 3 coordenadas espaciales) y un campo real de "Higgs" \mathcal{I}^Λ . $\tilde{\mathcal{D}}_{\underline{p}}\mathcal{I}^\Lambda$ es una derivada covariante en la representación adjunta con el campo gauge $\tilde{A}^\lambda_{\underline{m}}$. Observemos que esta ecuación tiene que ser resuelta en direcciones gaugeadas (no abelianas) y no gaugeadas (abelianas). La condición de integrabilidad en las direcciones abelianas es el requerimiento de que \mathcal{I}^Λ sean funciones armónicas en \mathbb{R}^3 .

2. Tras esto encontramos las funciones \mathcal{I}_Λ resolviendo estas ecuaciones:

$$\tilde{\mathcal{D}}_{\underline{m}}\tilde{\mathcal{D}}_{\underline{m}}\mathcal{I}^\Lambda = \frac{1}{2}g^2 [f_{\Lambda(\Sigma}{}^\Gamma f_{\Delta)\Gamma}{}^\Omega \mathcal{I}^\Sigma \mathcal{I}^\Delta \mathcal{I}^\Omega] \quad (3.8)$$

En las direcciones no abelianas estas ecuaciones se resuelven en muchos casos haciendo $\mathcal{I}_\Lambda \propto \mathcal{I}^\Lambda$ (en particular para el grupo SU(2)). $\mathcal{I}_\Lambda = 0$ es siempre una solución, pero los campos físicos pueden ser singulares en algunos modelos. En las direcciones abelianas, las \mathcal{I}_Λ son sólo funciones armónicas independientes en \mathbb{R}^3 .

3. Dadas las funciones \mathcal{I}^M , debemos encontrar la 1-forma en \mathbb{R}^3 , $\omega_{\underline{m}}$ resolviendo la siguiente ecuación:

$$\partial_{[\underline{m}}\omega_{\underline{n}]} = \varepsilon_{mnp}\mathcal{I}_M\tilde{\mathcal{D}}_{\underline{p}}\mathcal{I}^M = \varepsilon_{mnp}\left(\mathcal{I}_\Lambda\tilde{\mathcal{D}}_{\underline{p}}\mathcal{I}^\Lambda - \mathcal{I}^\Lambda\tilde{\mathcal{D}}_{\underline{p}}\mathcal{I}_\Lambda\right) \quad (3.9)$$

Las condiciones de integrabilidad de esta ecuación imponen restricciones en las constantes de integración de las funciones \mathcal{I}^M como en el caso no gaugeado [27, 28]. En soluciones estáticas $\omega = 0$ y la ecuación anterior se convierte en una restricción para las constantes de integración de las funciones \mathcal{I}^M que tendremos que resolver.

4. Para reconstruir los campos físicos a través de las funciones \mathcal{I}^M necesitamos resolver las conocidas como ecuaciones de estabilización, o *ecuaciones de dualidad de Freundenthal*, que dan las componentes duales de Freundenthal $\tilde{\mathcal{I}}^M(\mathcal{I})$ en término de las funciones \mathcal{I}^M [29]. Estas relaciones caracterizan completamente el modelo de Supergravedad $\mathcal{N} = 2, d = 4$.

5. La métrica tiene la forma

$$ds^2 = e^{2\mathcal{U}} (dt + \omega)^2 - e^{-2\mathcal{U}} dx^m dx^m, \quad (3.10)$$

donde $\omega = \omega_{\underline{m}} dx^m$ y la función de la métrica $e^{-2\mathcal{U}}$ viene dada por

$$e^{-2\mathcal{U}} = \tilde{\mathcal{I}}_M (\mathcal{I}) \mathcal{I}^M. \quad (3.11)$$

6. Los campos escalares vienen dados por

$$Z^i = \frac{\tilde{\mathcal{I}}^i + i\mathcal{I}^i}{\tilde{\mathcal{I}}^0 + i\mathcal{I}^0}. \quad (3.12)$$

7. Las componentes de los campos vectoriales se obtienen como

$$A^\Lambda_t = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{2\mathcal{U}} \tilde{\mathcal{I}}^\Lambda, \quad (3.13)$$

$$A^\Lambda_{\underline{m}} = \tilde{A}^\Lambda_{\underline{m}} + \omega_{\underline{m}} A^\Lambda_t. \quad (3.14)$$

4. SBHSS estáticas de centro único de las teorías $\mathcal{N} = 2$, $d = 4$ SEYM y EYM pura

Siguiendo la receta dada en la sección anterior, vamos a construir SBHSS estáticas con centro único de SU(2) $\mathcal{N} = 2$, $d = 4$ SEYM. Algunas de las soluciones resolverán simultáneamente la ecuación de movimiento de las teorías EYM y EYMH. El primer paso consiste en encontrar una solución $\tilde{A}^\Lambda_{\underline{m}}, \mathcal{I}^\Lambda$ de las ecuaciones SU(2) de Bogomol'nyi en \mathbb{R}^3 (3.7)

4.1. Soluciones con centro único de las ecuaciones SU(2) de Bogomol'nyi en \mathbb{R}^3

Antes de buscar las soluciones de las ecuaciones de Bogomol'nyi merece la pena revisar el significado y origen de estas ecuaciones en el contexto de la teoría SU(2) Yang-Mills-Higgs (en el límite Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS) en el que el potencial Higgs se desvanece).

4.1.1. El sistema SU(2) Yang-Mills-Higgs

Con la normalización en la ecuación (2.35) y escribiendo $F \equiv F^a T_a$, $\Phi \equiv \Phi^a T_a$, la acción de esta teoría es

$$\mathcal{S}_{YMH} = -2 \int d^4x Tr \left\{ \frac{1}{2} \mathfrak{D}_\mu \Phi \mathfrak{D}^\mu \Phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right\}, \quad (4.1)$$

y las ecuaciones de movimiento

$$\mathfrak{D}_\mu F^{\mu\nu} = g[\Phi, \mathfrak{D}^\nu \Phi], \quad (4.2)$$

$$\mathfrak{D}^2 \Phi = 0. \quad (4.3)$$

Para las configuraciones estáticas $F_{t\underline{m}} = \mathfrak{D}_t \Phi = 0$, la acción puede escribirse, hasta una derivada total, de una forma manifiestamente positiva

$$\mathcal{S}_{YMH} = -2 \int d^4x Tr \left\{ -\frac{1}{4} \left(F_{\underline{mn}} \mp \varepsilon_{mnp} \mathfrak{D}_{\underline{p}} \Phi \right) \left(F_{\underline{mn}} \mp \varepsilon_{mnp} \mathfrak{D}_{\underline{p}} \Phi \right) \right\}, \quad (4.4)$$

lo cual nos lleva a la conclusión de que las configuraciones de los campos estáticos que satisfacen las ecuaciones de primer orden de Bogomol'nyi [30]

$$F_{\underline{mn}} = \pm \varepsilon_{mnp} \mathfrak{D}_{\underline{p}} \Phi, \quad (4.5)$$

extremizan la acción (4.1) y son soluciones de las ecuaciones de Yang-Mills-Higgs. De hecho, si actuamos en ambos lados de la ecuación con $\mathfrak{D}_{\underline{m}}$ y usamos la identidad de Ricci y la ecuación de Bogomol'nyi obtenemos la ecuación de Yang-Mills:

$$\mathfrak{D}_{\underline{m}} F_{\underline{mn}} = \mp \varepsilon_{nmp} \mathfrak{D}_{\underline{m}} \mathfrak{D}_{\underline{p}} \Phi = \mp \frac{1}{2} g \varepsilon_{nmp} [F_{\underline{mp}}, \Phi] = -g [\mathfrak{D}_{\underline{n}} \Phi, \Phi]. \quad (4.6)$$

De otro modo, si actuamos con $\varepsilon_{pmn} \mathfrak{D}_{\underline{p}}$ y usamos la identidad de Bianchi, se obtiene la ecuación de Higgs:

$$0 = \varepsilon_{pmn} \mathfrak{D}_{\underline{p}} F_{\underline{mn}} = \pm \mathfrak{D}_{\underline{p}} \mathfrak{D}_{\underline{p}} \Phi. \quad (4.7)$$

Observamos que la fuente del campo vectorial, la corriente de Higgs $g[\Phi, \mathfrak{D}\Phi]$, no sólo se desvanece cuando el campo de Higgs es covariantemente constante $\mathfrak{D}\Phi = 0$, sino que también lo hace cuando Φ y $\mathfrak{D}\Phi$ son paralelos en $\mathfrak{su}(2)$.

Las ecuaciones (4.5) son idénticas a las que se obtienen en la teoría SEYM $\mathcal{N} = 2$, $d = 4$, (3.7) una vez identificados los campos vectoriales y

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{I}^a = \mp \Phi^a. \quad (4.8)$$

4.1.2. El ansatz de erizo

Si queremos construir soluciones estáticas y de centro único, lo lógico es buscar soluciones simétricas esféricas de las ecuaciones (4.5). Sustituyendo el conocido como *ansatz del erizo*

$$\mp \Phi^a = \delta^a_{\underline{m}} f(r) x^{\underline{m}}, \quad A^a_{\underline{m}} = -\varepsilon^a_{\underline{mn}} x^{\underline{n}} h(r), \quad (4.9)$$

en las ecuaciones de Bogomol'nyi obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales para $f(r)$ y $h(r)$

$$r \partial_r h + 2h - f(1 + gr^2 h) = 0, \quad (4.10)$$

$$r \partial_r (h + f) - gr^2 h (h + f) = 0.$$

La solución general de estas ecuaciones fue encontrada por Protogenov [31]. Consiste en una familia de soluciones de dos parámetros $f_{\mu,s}$, $h_{\mu,s}$, más otra familia de un solo parámetro f_λ , h_λ , dadas por

$$\begin{aligned} r f_{\mu,s} &= \frac{1}{gr} [1 - \mu r \coth(\mu r + s)], & r h_{\mu,s} &= \frac{1}{gr} \left[\frac{\mu r}{\sinh(\mu r + s)} - 1 \right], \\ r f_\lambda &= \frac{1}{gr} \left[\frac{1}{1 + \lambda^2 r} \right], & r h_\lambda &= -r f_\lambda. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Al parámetro s se le conoce como *pelo de Protogenov* en el contexto de agujeros negros [32]. El monopolo BPS 't Hooft-Polyakov se encuentra para $s = 0$, y es la única solución globalmente regular de esta familia¹⁶. En el caso opuesto, para el límite $s \rightarrow \infty$, se obtiene

$$-r f_{\mu,\infty} = \frac{\mu}{g} - \frac{1}{gr}, \quad r h_{\mu,\infty} = -\frac{1}{gr}, \quad (4.12)$$

que coincide con el monopolo de Wu-Yang para $\mu = 0$ (B.10), el cual es una solución de la teoría Yang-Mills pura [33]. Esto es posible porque la corriente de Higgs $g[\Phi, \mathfrak{D}\Phi]$ se hace cero incluso aunque el campo de Higgs Φ no sea nulo ni covariantemente constante¹⁷. La existencia de un campo de Higgs no trivial permite asignar una carga al monopolo bien definida,

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S_\infty^2} \text{Tr}(\hat{\Phi}F) = \frac{1}{g}, \quad \hat{\Phi} \equiv \frac{\Phi}{\sqrt{|\text{Tr}(\Phi^2)|}}, \quad (4.13)$$

para cualquier μ y s .

La familia de un parámetro f_λ , h_λ es singular para todos los valores de éste, lo que también aparece como pelo en las soluciones de agujero negro. La carga magnética, tal y como se ha definido, se anula cuando se mide desde el infinito espacial. Sin embargo, puede argumentarse que estas soluciones describen un monopolo magnético situado en el origen, cuya carga queda apantallada: la entropía (como agujero negro) asociada a este campo tiene la misma forma que la del agujero negro asociado al monopolo de Wu-Yang. De hecho, cuando $\lambda = 0$ la solución es idéntica a la del monopolo de Wu-Yang.

4.1.3. Generalización de Protogenov

Muchas soluciones de monopolo pueden deformarse añadiendo un parámetro s al argumento μr , generando así una familia de soluciones que contiene a la solución original ($s = 0$) y, típicamente, una solución nueva y más simple, en el límite $s \rightarrow \infty$. Nos referiremos a este procedimiento como *generalización de Protogenov*, la cual puede ser justificada de la forma que sigue. Puesto que la ecuación de Bogomol'nyi es de naturaleza polinómica, el tener funciones de tipo exponencial en los campos (por ejemplo, funciones hiperbólicas en el caso del monopolo 't Hooft Polyakov) implica que éstas deban cancelarse entre ellas al sustituir en la ecuación, y que la adición de una constante al argumento no altera

¹⁶Lo cual explica el por qué es la única solución considerada habitualmente en la literatura de monopolos. Sin embargo cuando el sistema se acopla a la gravedad, las singularidades de las soluciones generales pueden dejar de ser relevantes si están cubiertas por horizontes de eventos regulares.

¹⁷La única configuración de tipo erizo con corriente de Higgs nula es ésta

esto. La introducción de s es equivalente a aplicar un desplazamiento en el origen de la coordenada radial en las funciones exponenciales.

Por supuesto, las cancelaciones necesarias para que la solución sea regular dejarán de funcionar (en caso de que lo hicieran para $s = 0$), resultando en una familia de soluciones singulares.

4.2. Embebimiento en modelos ST[2, 4] con gauge SU(2)

Antes de afrontar este tema, es recomendable estudiar el apéndice A.5 en general y A.5.5 en particular, donde se describen los modelos ST[2, n]. Para encontrar soluciones embebidas en este modelo no abeliano seguiremos los pasos de la receta dada en la sección 3.3. En primer lugar hay que encontrar las funciones \mathcal{I}^Λ y los componentes espaciales de los campos vectoriales $A^\Lambda_{\underline{m}}$ que resuelven las ecuaciones de Bogomol'nyi

$$F^\Lambda_{\underline{mn}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon_{mnp}\partial_{\underline{p}}\mathcal{I}^\Lambda, \quad I = 0, 1, 2, \quad (4.14)$$

$$F^{a+2}_{\underline{mn}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon_{mnp}\mathfrak{D}_{\underline{p}}\mathcal{I}^{a+2}, \quad a = 1, 2, 3, \quad (4.15)$$

(como ya indicamos en A.5.5, vamos a suprimir el +2 en los índices no abelianos en la mayoría de ocasiones). Las ecuaciones abelianas se resuelven por funciones armónicas, mientras que las no abelianas a través de la identificación (4.8) con el campo de Higgs y usando las soluciones de Protogenov (4.11).

A continuación tenemos que encontrar las funciones \mathcal{I}_Λ resolviendo las ecuaciones (3.8). En las direcciones abelianas $\Lambda = 0, 1, 2$ podemos simplemente elegir funciones armónicas, mientras que en las no abelianas tomaremos $\mathcal{I}_a = 0$. Esta elección da soluciones no singulares, como veremos a continuación. También fijaremos algunas funciones armónicas a cero por motivos de simplicidad.

El potencial de Hesse $W(\mathcal{I})$, que es igual a la componente de la métrica e^{-2U} (3.10), puede obtenerse de la solución de Shmakova a las ecuaciones de estabilización (o ecuaciones de dualidad de Freudenthal) para modelos cúbicos [34]. Puede escribirse como

$$W(\mathcal{I}) = 2\sqrt{J_4(\mathcal{I})}, \quad (4.16)$$

con el invariante cuártico $J_4(\mathcal{I})$ dado por

$$J_4(\mathcal{I}) \equiv (\mathcal{I}^\alpha \mathcal{I}^\beta \eta_{\alpha\beta} + 2\mathcal{I}^0 \mathcal{I}_1)(\mathcal{I}_\alpha \mathcal{I}_\beta \eta^{\alpha\beta} - 2\mathcal{I}^1 \mathcal{I}_0) - (\mathcal{I}^0 \mathcal{I}_0 - \mathcal{I}^1 \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}^\alpha \mathcal{I}_\alpha)^2. \quad (4.17)$$

Este potencial no se anula con la elección $\mathcal{I}_a = 0$, como adelantamos, y se mantendrá no singular si elegimos $\mathcal{I}^0 = \mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2 = 0$. Dicho de otra forma, los únicos componentes no triviales de \mathcal{I}^M son $\mathcal{I}^1, \mathcal{I}^2, \mathcal{I}^{a+2}, \mathcal{I}_0$. Con esta elección la función de la métrica viene dada por

$$e^{-2U} = W(\mathcal{I}) = 2\sqrt{-2\mathcal{I}^1 \mathcal{I}_0 \eta_{\alpha\beta} \mathcal{I}^\alpha \mathcal{I}^\beta} = 2\sqrt{-2\mathcal{I}^1 \mathcal{I}_0 [(\mathcal{I}^2)^2 - \mathcal{I}^a \mathcal{I}^a]}. \quad (4.18)$$

Observemos que una singularidad en e^{-2U} indica un horizonte de eventos, mientras que un cero denota una singularidad física. Esta función además debe ser positiva en la región exterior al horizonte de eventos, en caso de existir.

Para escribir la forma explícita de los escalares necesitamos el dual de Freudenthal de $\mathcal{I}^M, \tilde{\mathcal{I}}^M$, que se puede destilar del potencial de Hesse

$$\tilde{\mathcal{I}}_M = \frac{1}{2} \frac{\partial W(\mathcal{I})}{\partial \mathcal{I}^M}. \quad (4.19)$$

Para nuestra elección de componentes no triviales $\mathcal{I}^M, \tilde{\mathcal{I}}^i = 0, i = 1, \dots, 5$ y todos los escalares son imaginarios puros, dados por

$$Z^i = i \frac{\mathcal{I}^i}{\tilde{\mathcal{I}}^0}, \quad \text{donde} \quad \tilde{\mathcal{I}}^0 = \frac{2\mathcal{I}^1 \eta_{\alpha\beta} \mathcal{I}^\alpha \mathcal{I}^\beta}{W(\mathcal{I})}. \quad (4.20)$$

Es conveniente escribir todos ellos en términos de $\tau = Z^1$

$$Z^\alpha = \frac{\mathcal{I}^\alpha}{\mathcal{I}^1} \tau, \quad \tau = i \frac{e^{-2U}}{2\eta_{\alpha\beta} \mathcal{I}^\alpha \mathcal{I}^\beta}. \quad (4.21)$$

En las dos ramas (+ y -) del modelo presentadas en el apéndice, correspondientes respectivamente al signo (superior e inferior) de $\pm \Im \tau_{(\pm)} > 0$, es necesario elegir las funciones $\mathcal{I}_{(\pm)}^\alpha$ como

$$\pm \eta_{\alpha\beta} \mathcal{I}_{(\pm)}^\alpha \mathcal{I}_{(\pm)}^\beta = \pm [(\mathcal{I}_{(\pm)}^2)^2 - \mathcal{I}_{(\pm)}^a \mathcal{I}_{(\pm)}^a] > 0. \quad (4.22)$$

de manera que $e^{-\mathcal{K}}$ sea en todo caso positivo. Entonces, para que $W(\mathcal{I})$ sea real, $\mathcal{I}_{(\pm)0}$ y $\mathcal{I}_{(\pm)}^1$ han de elegirse tales que satisfagan

$$\pm \mathcal{I}_{(\pm)}^1 \mathcal{I}_{(\pm)0} < 0. \quad (4.23)$$

En lo sucesivo suprimimos los subíndices \pm para simplificar la notación, excepto cuando ésto pueda dar lugar a confusión.

Obsérvese que con nuestra elección de componentes no nulos de \mathcal{I}^M , el lado derecho de la ecuación (3.9) es automáticamente nulo, con lo que no necesitamos imponer condiciones adicionales en vista de conseguir la condición de que la solución sea estática; es decir, $\omega = 0$.

En este punto pasamos a dar una expresión más concreta para los componentes no nulos de \mathcal{I}^M . De acuerdo a las discusiones previas, éstos son de la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^1 &= A^1 + \frac{p^1/\sqrt{2}}{r}, & \mathcal{I}^2 &= A^2 + \frac{p^2/\sqrt{2}}{r}, & \mathcal{I}^a &= \sqrt{2} \delta^a_m x^m f(r), \\ \mathcal{I}_0 &= A_0 + \frac{q_0/\sqrt{2}}{r}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

donde $f(r)$ es $f_{\mu,s}$ o f_λ en las ecuaciones (4.11). p^1, p^2, q_0 son cargas magnéticas y eléctricas y A^1, A^2, A_0 son constantes de integración a ser determinadas en función de los valores asintóticos de los escalares y la métrica. Naturalmente estas constantes deben tener el mismo signo que las cargas con las que se corresponden

$$\text{sign}(A^{1,2}) = \text{sign}(p^{1,2}), \quad \text{sign}(A_0) = \text{sign}(q_0), \quad (4.25)$$

para que las funciones $\mathcal{I}^1, \mathcal{I}^2, \mathcal{I}_0$ no se anulen en el intervalo $r \in (0, +\infty)$. Consecuentemente, las restricciones en los signos de \mathcal{I}^1 y \mathcal{I}_0 anteriormente comentadas se traducen en la condición siguiente sobre las cargas en las dos ramas

$$\text{sign}(p^1)\text{sign}(q_0) = \mp 1. \quad (4.26)$$

Con el sistema de coordenadas elegido, la métrica implicada por (4.18) describirá un agujero negro únicamente si e^{-2U} se hace infinito en $r = 0$ y se mantiene positiva para el resto de valores admisibles de la coordenada radial ($r > 0$). Además será necesario que el horizonte (situado en $r = 0$) tenga área (\sim entropía) no nula, ya que en caso contrario estaríamos hablando de una singularidad desnuda. Para que la solución sea de tipo agujero negro, la expansión de la función de la métrica en torno a $r \rightarrow 0$ es

$$e^{-2U} \sim \frac{S}{\pi r^2} + \dots, \quad (4.27)$$

mientras que en torno a $r \rightarrow \infty$ cumple

$$e^{-2U} \sim 1 + \frac{2M}{r} + \dots, \quad (4.28)$$

donde M y S son la masa y la entropía asociadas al agujero negro.

Definiendo el valor asintótico de los escalares adjuntos Z_∞ como

$$Z_\infty^a \equiv Z_\infty \delta^a_m \frac{x^m}{r}, \quad (4.29)$$

e imponiendo la normalización de la métrica en el infinito no es difícil expresar las constantes de integración μ , A^1 , A^2 , A_0 en términos de los valores asintóticos de los escalares $\Im\mathfrak{m}\tau_\infty$, $\Im\mathfrak{m}Z_\infty^2$ y $\Im\mathfrak{m}Z_\infty$ y la constante de acoplamiento g

$$\begin{aligned} A^1 &= \frac{\text{sign}(p^1)|\Im\mathfrak{m}\tau_\infty|}{\sqrt{2}\chi_\infty}, \\ A^2 &= \frac{\text{sign}(p^2)|\Im\mathfrak{m}Z_\infty^2|}{\sqrt{2}\chi_\infty}, \\ \mu &= \frac{g|\Im\mathfrak{m}Z_\infty|}{2\chi_\infty}, \\ A_0 &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\text{sign}(q_0)\chi_\infty, \end{aligned} \quad (4.30)$$

donde hemos definido la combinación (real en ambas ramas de la teoría)

$$\chi_\infty \equiv \sqrt{\Im\mathfrak{m}\tau_\infty [(\Im\mathfrak{m}Z_\infty^2)^2 - (\Im\mathfrak{m}Z_\infty)^2]}. \quad (4.31)$$

La masa de las soluciones en términos de los valores asintóticos de los escalares y las cargas es

$$M = \frac{1}{4} \frac{\chi_\infty}{|\Im\mathfrak{m}\tau_\infty|} |p^1| + \frac{1}{2\chi_\infty} |q_0| \pm \frac{1}{2} \frac{|\Im\mathfrak{m}\tau_\infty \Im\mathfrak{m}Z_\infty^2|}{\chi_\infty} |p^2| \pm \frac{|\Im\mathfrak{m}\tau_\infty \Im\mathfrak{m}Z_\infty|}{\chi_\infty} \frac{1}{g}. \quad (4.32)$$

Para obtener estas relaciones nos hemos servido de dos condiciones de consistencia

$$\text{sign}(\Im\mathfrak{m}Z_\infty) = \mp \text{sign}(p^1), \quad \text{sign}(\Im\mathfrak{m}Z_\infty^2) = \pm \text{sign}(p^1)\text{sign}(p^2). \quad (4.33)$$

Estas expresiones para las constantes de integración y la masa son válidas para las dos familias de soluciones (4.11), de 2 ó 1 parámetros, obteniendo la segunda de éstas truncando el valor $\Im m Z_\infty = 0$ en todas las partes en las que aparece. En ese caso la contribución de la carga del monopolo $1/g$ a la masa queda apantallada y desaparece.

Hay que observar que la condición de que la masa sea positiva ha de imponerse en la rama $-$, ya que no está garantizada para todos los valores arbitrarios de las cargas y los escalares en el infinito.

Estudiamos a continuación el comportamiento de la solución en el límite $r \rightarrow 0$. Para $f_{\mu,s \neq 0}$ y f_λ la función de la métrica se comporta como

$$e^{-2U} \sim \sqrt{-2p^1 q_0 [(p^2)^2 - (2/g)^2]} \frac{1}{r^2}, \quad (4.34)$$

que se corresponde con un horizonte regular en ambas ramas. Las soluciones describirán agujeros negros si las cargas y los escalares en el infinito son tales que $M > 0$. Nótese que en la rama $-$ es posible elegirlos de manera que la masa sea cero y la entropía no sea nula.

En el caso $f_{\mu,s=0}$ con $p^2 \neq 0$ las soluciones sólo están bien definidas en la rama $+$ porque no existe la contribución $1/r$ del monopolo en el límite $r \rightarrow 0$ (tiende a cero como r^2) y es imposible satisfacer la condición $-\eta_{\alpha\beta} \mathcal{I}^\alpha \mathcal{I}^\beta > 0$. Para ese caso en la rama $+$ se tiene

$$e^{-2U} \sim \sqrt{-2p^1 q_0 (p^2)^2} \frac{1}{r^2}, \quad (4.35)$$

que se corresponde con un horizonte regular.

En el caso $f_{\mu,s=0}$ con $p^2 = 0$ hay dos posibilidades:

1. Podemos fijar $p^1 = q_0 = 0$. Entonces en el límite $r \rightarrow 0$, e^{-2U} es la constante $2\sqrt{-2A^1 A_0 (A^2)^2}$. No hay horizonte ni singularidad y la solución, que consiste en un monopolo global, pertenece a la rama $+$ (esto también garantiza que su masa es positiva).
2. Podemos mantener ambos $p^1 \neq 0$ y $q_0 \neq 0$, fijando $A^2 = 0$, aprovechándonos del hecho de que en este límite $\Phi^a \Phi^a$ se aproxima a cero como r^2 . La solución queda bien definida sólo en la rama $-$. La función de la métrica es de nuevo constante y toma el valor

$$e^{-2U} \sim \sqrt{+p^1 q_0 \frac{\mu^4}{g^2}}. \quad (4.36)$$

De nuevo tenemos una solución de monopolo (siempre y cuando $M \geq 0$), aunque en este caso con la presencia de dos cargas abelianas no triviales: p^1 y q_0 . Aquí también sería posible ajustar los parámetros para tener $M = 0$.

Los escalares en el límite cercano al horizonte en los casos $f_{\mu,s \neq 0}$ y f_λ son

$$\begin{aligned} \Im \tau_h &= \frac{\sqrt{-2p^1 q_0 [(p^2)^2 - (2/g)^2]}}{2 [(p^2)^2 - (2/g)^2]}, \\ \Im Z_h^2 &= \frac{p^2}{p^1} \Im \tau_h, \\ \Im Z_h^a &= \frac{2 \Im \tau_h}{gp^1} \delta^a_m \frac{x^m}{r}. \end{aligned} \tag{4.37}$$

En el caso $f_{\mu,s=0}$ con $p^2 \neq 0$ se obtienen los mismo resultados, salvo por la desaparición de la contribución del monopolo $1/g = 0$.

5. SBHSS multicentro

Para construir soluciones supersimétricas de agujero negro multicentro se puede usar el mismo método que para soluciones de un sólo centro, pero partiendo de soluciones multicentro de las ecuaciones de Bogomol'nyi. Empezaremos discutiendo éstas.

5.1. Soluciones multicentro de las ecuaciones de Bogomol'nyi SU(2) en \mathbb{R}^3

En el caso abeliano, las soluciones multicentro de las ecuaciones de Bogomol'nyi son funciones armónicas con singularidades aisladas. Éstas constituyen las *semillas* de las soluciones multicentro de agujero negro de las teorías Einstein-Maxwell [35–37] y Supergravedad $\mathcal{N} = 2$, $d = 4$ [27, 38, 39]. En el caso no abeliano el ansatz de erizo ya no es válido y son necesarios métodos más sofisticados. Sólo se conocen unas pocas soluciones. De hecho, a pesar de que se espera la existencia de soluciones con varios objetos BPS en equilibrio, no se ha encontrado hasta la fecha una solución explícita describiendo dos monopolos BPS 't Hooft-Polyakov en equilibrio.

Quizá de forma no demasiado sorprendente, la única familia general de soluciones disponible involucra un número arbitrario de monopolos de Wu-Yang, o de Dirac embebidos en SU(2) (ver apéndice B). La más simple de éstas es la que sólo contiene monopolos de Wu-Yang y, formalmente, puede obtenerse a partir de soluciones de monopolos de Dirac embebidas en SU(2) a través de transformaciones gauge singulares [40]. Como ya hemos comentado en la sección anterior, la métrica queda invariante frente a estas transformaciones gauge y toma la misma forma que en los casos abelianos.

En las referencias [41, 42] Cherkis y Durcan encontraron nuevas soluciones describiendo uno o varios monopolos de Dirac embebidos en SU(2) junto a un antimonopolo BPS 't Hooft-Polyakov. Usaremos la primera de estas soluciones (con un único monopolo de Dirac) para construir soluciones multicentro en el modelo $ST[2, 4]$ de $\mathcal{N} = 2$, $d = 4$ SEYM. Antes de ello procedemos a revisar la solución de Cherkis y Durcan.

La posición del antimonopolo BPS 't Hooft Polyakov es en $x^n = x_0^n$ y la del monopolo de Wu-Yang en $x^m = x_1^m$. Definimos las coordenadas relativas a estos dos centros y su posición relativa como

$$r^m \equiv x^m - x_0^m, \quad u^m \equiv x^m - x_1^m, \quad d^m \equiv u^m - r^m = x_0^m - x_1^m, \quad (5.1)$$

y sus normas como r , u y d respectivamente. El campo de Higgs y el potencial gauge de estas soluciones

están dados por

$$\pm\Phi^a = \frac{1}{g}\delta^a_m \left\{ \left[\frac{1}{r} - \left(\mu + \frac{1}{u} \right) \frac{K}{L} \right] \frac{r^m}{r} + \frac{2r}{uL} \left(\delta^{mn} - \frac{r^m r^n}{r^2} \right) d^n \right\}, \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} A^a &= -\frac{1}{g} \left[\frac{1}{r} - \frac{\mu D + 2d + 2u}{L} \right] \frac{\varepsilon^a_{mn} r^m dx^n}{r} + 2 \frac{K}{L} \frac{\varepsilon_{npq} d^n u^p dx^q}{uD} \delta^a_m \frac{r^m}{r} \\ &\quad - \frac{2r}{uL} \delta^a_m \left(\delta^{mn} - \frac{r^m r^n}{r^2} \right) \varepsilon_{npq} u^p dx^q, \end{aligned} \quad (5.3)$$

donde las funciones K , L y D están definidas como

$$K \equiv [(u+d)^2 + r^2] \cosh \mu r + 2r(u+d) \sinh \mu r, \quad (5.4)$$

$$L \equiv [(u+d)^2 + r^2] \sinh \mu r + 2r(u+d) \cosh \mu r, \quad (5.5)$$

$$D = 2(ud + u^m d^m) = (d+u)^2 - r^2. \quad (5.6)$$

La función D es claramente cero a lo largo de la dirección $u^m/u = -d^m/d^{18}$ apuntando a la posibilidad de la presencia de una cuerda de Dirac en (5.3). Sin embargo no es éste el caso, como fue demostrado en [43].

En los modelos que vamos a considerar, el campo de Higgs entra en la métrica como la combinación $\Phi^a \Phi^a$, cuya expresión es

$$\Phi^a \Phi^a = \frac{1}{g^2} \left\{ \left[\frac{1}{r} - \left(\mu + \frac{1}{u} \right) \frac{K}{L} \right]^2 + \frac{4|\vec{r} \times \vec{d}|^2}{u^2 L^2} \right\}. \quad (5.7)$$

Para entender mejor esta solución podemos tomar varios límites:

1. El límite en el cual tomamos el antimonopolo de 't Hooft Polyakov infinitamente alejado, manteniendo el monopolo de Dirac en x_1^m . Para esto hay que tomar $d \rightarrow \infty$, $r^m \sim -d^m$ dejando u

¹⁸Correspondiente a la semirrecta que parte del monopolo de Dirac, en $u = 0$, hasta el infinito espacial en la dirección opuesta al monopolo de 't Hooft Polyakov en $r = 0$

finito. Los campos gauge y de Higgs toman la forma

$$\pm\Phi^a \sim -\frac{1}{g}\delta^a{}_m \left(\mu + \frac{1}{u}\right) \frac{d^m}{d}, \quad (5.8)$$

$$A^a \sim -\frac{1}{g} \left(1 + \frac{d^m u^m}{d u}\right)^{-1} \varepsilon_{mnp} \frac{d^m}{d} \frac{u^m}{u} d \frac{u^p}{u}. \quad (5.9)$$

El campo vectorial puede compararse con el resultado del embebimiento de un monopolo de Dirac con una cuerda en la dirección $-d^m$ a lo largo de la dirección $\delta^a{}_m d^m T^a$ del grupo gauge (ver apéndice B).

2. El límite donde tomamos el monopolo de Dirac en el infinito, manteniendo el antimonopolo BPS 't Hooft Polyakov en x_0^m . Ahora tenemos $d \rightarrow \infty$, $u^m \sim d^m$ con r finito. Los campos de Higgs y gauge se convierten en los de un antimonopolo BPS 't Hooft Polyakov con centro único en x_0^m .
3. El límite en el cual estamos infinitamente alejados de ambos monopolos ($r \rightarrow \infty$, $u \rightarrow \infty$), que se dejan a una distancia relativa finita. Los campos en este caso toman la forma

$$\pm\Phi^a = -\left[\frac{\mu}{g} + \mathcal{O}(|x|^{-2})\right] \delta^a{}_m \frac{x^m}{|x|}, \quad (5.10)$$

$$A^a = -\frac{1}{g} \varepsilon^a{}_{mn} \frac{x^m dx^n}{|x|^2} + \frac{1}{2g} \delta^a{}_m \frac{x^m}{|x|} \left(\frac{\varepsilon_{npq} d^n x^p dx^q}{|x|^2}\right). \quad (5.11)$$

El primer término en el potencial gauge es idéntico al de un antimonopolo de Wu-Yang. Éste es también el comportamiento asintótico del monopolo 't Hooft Polyakov. El campo de Higgs es asintóticamente constante y, en particular

$$\Phi^a \Phi^a \sim \frac{\mu^2}{g^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^2}\right). \quad (5.12)$$

4. El límite en el cual nos aproximamos al centro del antimonopolo 't Hooft Polyakov $r^m \rightarrow 0$, $u^m \rightarrow d^m$. Aquí

$$\Phi^a \Phi^a \sim \frac{1}{4g^2 d^2 (1 + \mu d)^2} + \mathcal{O}(r). \quad (5.13)$$

Este valor es finito y se hace nulo únicamente cuando el monopolo de Dirac se lleva a infinito $d \rightarrow \infty$.

Para valores finitos de d , la ecuación (5.7) indica que $\Phi^a \Phi^a$ sólo puede anularse a lo largo de la línea que une $r = 0$ con $u = 0$, con lo que $\vec{r} \times \vec{d} = 0$. Substituyendo en esta expresión $r^m = \alpha d^m$ e igualando a cero obtenemos α en función de μd , encontrando un único valor de α para cada μd como se indica en la figura 1. El punto en que $\Phi^a \Phi^a$ se hace cero es un mínimo local con segunda derivada no nula, con lo que alrededor de ese punto $\Phi^a \Phi^a \sim \mathcal{O}(r^2)$, al igual que sucedía en el caso de un sólo monopolo en el punto en que el campo se anula (que coincide con el límite $r \rightarrow 0$). Sin embargo en este caso el valor de esta segunda derivada depende de la dirección¹⁹.

5. El límite en el cual nos aproximamos a la singularidad del monopolo de Dirac, $u^m \rightarrow 0$, $r^m \rightarrow -d^m$. En este caso

$$\Phi^a \Phi^a \rightarrow \frac{1}{g^2} \left\{ \frac{1}{u^2} + \left(\frac{1}{d} - \mu \right) \frac{1}{u} \right\} + \mathcal{O}(1). \quad (5.14)$$

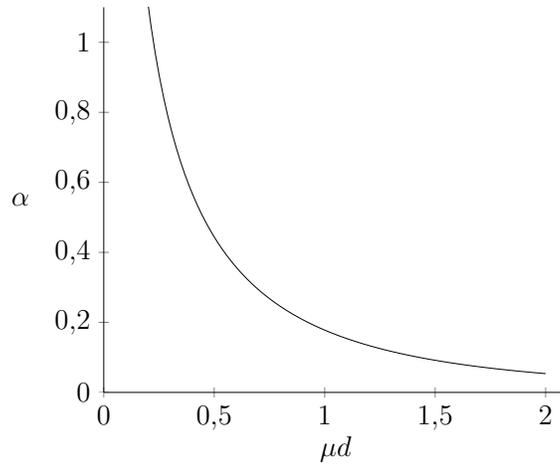


Figura 1: Localización de los ceros en la densidad de Higgs, medidos usando r como una función de la variable adimensional de separación μd .

¹⁹Para obtener la información contenida en este párrafo ha sido necesario un enfoque numérico, ya que las expresiones son demasiado enredadas como para un tratamiento analítico.

5.1.1. Adición de pelo de Protogenov

Como hemos comentado con anterioridad, podemos añadir el parámetro de pelo de Protogenov s a la solución de Cherkis y Durcan reemplazando el argumento μr en los seno y coseno hiperbólicos que aparecen en las funciones K y L por $\mu r + s$. No es necesario escribir explícitamente la solución, aunque necesitamos reconsiderar los diferentes límites estudiados en la sección anterior (recuperados aquí para $s = 0$):

1. En el límite en el que el antimonopolo BPS 't Hooft-Polyakov-Protogenov está infinitamente alejado, manteniendo el monopolo de Dirac en x_1^m , los campos de Higgs y gauge se convierten, en el orden dominante, en aquellos del monopolo de Dirac, con la cuerda de Dirac situada en la dirección $-d^m$, como en el caso con $s = 0$.
2. Cuando el monopolo de Dirac está infinitamente alejado y el antimonopolo BPS 't Hooft-Polyakov-Protogenov queda en x_0^m , los campos son aquellos de un antimonopolo BPS 't Hooft Polyakov-Protogenov con centro único en $x^m = x_0^m$ (las primeras dos ecuaciones en (4.11)).
3. En el límite en el que nos alejamos infinitamente de ambos monopolos ($r \rightarrow \infty$, $u \rightarrow \infty$), quedando éstos separados por una distancia finita, los campos toman la misma forma que en el caso $s = 0$, (5.10-5.12).
4. El límite en el que nos aproximamos a la singularidad del antimonopolo BPS 't Hooft-Polyakov-Protogenov $r^m \rightarrow 0$, $u^m \rightarrow d^m$ (para $s \neq 0$) da lugar a

$$\pm\Phi^a \sim \frac{1}{g} \delta^a_m \left[\frac{1}{r} - \left(\mu + \frac{1}{d} \right) \coth s + \mathcal{O}(r) \right] \frac{r^m}{r}, \quad (5.15)$$

$$\Phi^a \Phi^a \sim \frac{1}{g^2 r^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right), \quad (5.16)$$

lo que es similar al comportamiento cerca del monopolo de Dirac, como en la ecuación (5.14) (con u reemplazado por r).

5. En el límite en el que nos acercamos a la singularidad del monopolo de Dirac, $u^m \rightarrow 0$, $r^m \rightarrow -d^m$ tenemos el mismo comportamiento que en el caso $s = 0$, (5.14).

Las soluciones con pelo de Protogenov admiten un nuevo límite ($s \rightarrow \infty$), que estudiamos en una sección aparte.

5.1.2. La solución $s \rightarrow \infty$

En este límite obtenemos una solución que describe el mismo monopolo de Dirac acompañado de un antimonopolo de Wu-Yang ($\mu \neq 0$)

$$\pm\Phi^a = \frac{1}{g}\delta^a_m \left[-\mu + \frac{1}{r} - \frac{1}{u} \right] \frac{r^m}{r}, \quad (5.17)$$

$$A^a = \frac{1}{g} \frac{\varepsilon^a_{mn} r^m dx^n}{r^2} + \frac{1}{g} \frac{\varepsilon_{npq} d^n u^p du^q}{u(ud + u^r dr)} \delta^a_m \frac{r^m}{r}. \quad (5.18)$$

Esta solución es un ejemplo particular de una familia general que describe un número arbitrario de monopolos de Dirac junto con un antimonopolo de Wu-Yang. Estas soluciones pueden obtenerse a partir de una solución que describa únicamente monopolos de Dirac embebidos en $SU(2)$ via una transformación gauge singular que elimina la cuerda de Dirac de uno de ellos, el cual se convierte en el antimonopolo de Wu-Yang. En lo sucesivo no usaremos la forma particular de esta familia general de soluciones, una descripción sobre su forma y algunas de sus propiedades aparecen en [1].

5.2. Embebimiento en modelos ST[2, 4] con gauge $SU(2)$

La métrica y los campos escalares de la solución vienen dados por:

$$e^{-2U} = 2\sqrt{-2\mathcal{I}^1\mathcal{I}_0[(\mathcal{I}^2)^2 - 2\Phi^a\Phi^a]}, \quad (5.19)$$

$$Z^1 \equiv \tau = i \frac{e^{-2U}}{2[(\mathcal{I}^2)^2 - 2\Phi^a\Phi^a]}, \quad Z^2 = \frac{\mathcal{I}^2}{\mathcal{I}^1} \tau, \quad Z^a = \frac{\sqrt{2}\Phi^a}{\mathcal{I}^1} \tau, \quad (5.20)$$

donde Φ^a es el campo de Higgs de la solución de Cherkis & Durcan (deformado con el parámetro de pelo de Protogenov, s) y donde las funciones armónicas $\mathcal{I}^1, \mathcal{I}^2, \mathcal{I}_0$ tienen polos en $r = 0$ y $u = 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^1 &= A^1 + \frac{p_r^1/\sqrt{2}}{r} + \frac{p_u^1/\sqrt{2}}{u}, & \mathcal{I}^2 &= A^2 + \frac{p_r^2/\sqrt{2}}{r} + \frac{p_u^2/\sqrt{2}}{u}, \\ \mathcal{I}_0 &= A_0 + \frac{q_{r,0}/\sqrt{2}}{r} + \frac{q_{u,0}/\sqrt{2}}{u}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Las cargas abelianas en cada centro deben de ser escogidas con el mismo criterio que las correspondientes al caso de un solo centro. Esto significa que las cargas abelianas en $u = 0$, $p_u^1, q_{u,0}$ no deben

de ser nulas. p_u^2 deberá ser activada o no dependiendo de la rama considerada. Para las cargas en $r = 0$ obtenemos las mismas posibilidades si $s \neq 0$, pero cuando $s = 0$ encontramos dos posibilidades:

1. $p_r^1, q_{r,0}, p_r^2$ no nulos. Encontramos un agujero negro en $r = 0$ en la rama +.
2. $p_r^1 = q_{r,0} = p_r^2 = 0$. La función de la métrica e^{-2U} es una constante complicada que depende de d en el límite $r = 0$ y encontramos un monopolo global.

Aquí encontramos una diferencia importante con respecto al caso de un solo centro dado que $\Phi^a \Phi^a$ es una constante finita en el límite $r \rightarrow 0$ en lugar de tender a cero con orden r^2 . Por ello, no hay solución con $p_r^1 q_{r,0} \neq 0$ y $p_r^2 = 0$. Para obtener una solución global de monopolo con $p^1 q_0 \neq 0$ y $p^2 = 0$ en equilibrio con el monopolo en $u = 0$ debemos intentar colocar esas cargas en el punto en el que $\Phi^a \Phi^a = 0$, pero la solución resultante podría no estar bien definida ya que el coeficiente que acompaña al término en r^2 en la expansión de $\Phi^a \Phi^a$ en torno a ese punto depende de la dirección de acercamiento al punto (Es decir, la derivada segunda en ese punto no es independiente de la dirección).

Las contribuciones del monopolo y el anti-monopolo a la masa se cancelan entre si, obteniendo

$$M = \frac{1}{4} \frac{\chi_\infty}{|\Im \tau_\infty|} |p_u^1 + p_r^1| + \frac{1}{2\chi_\infty} |q_{u,0} + q_{r,0}| \pm \frac{1}{2} \frac{|\Im \tau_\infty \Im Z_\infty^2|}{\chi_\infty} |p_u^2 + p_r^2|. \quad (5.22)$$

6. Conclusiones

En este trabajo presentamos la construcción, por vez primera, de una familia de soluciones supersimétricas de agujero negro con varios centros de una teoría de Supergravedad $\mathcal{N} = 2$, $d = 4$ no abeliana. Además ofrecemos una generalización para las soluciones de un único centro de esa misma clase. Cabe destacar el comportamiento genuinamente no abeliano en algunas de ellas, en el sentido de que características inherentes a modelos no abelianos (en concreto, la carga magnética asociada a un monopolio) afectan a las propiedades físicas de la solución de agujero negro.

Para las soluciones propuestas, es posible seleccionar los parámetros de manera que no haya singularidades y la solución describa un monopolio global, tanto en los casos de un sólo centro como en los multicentro.

La introducción del parámetro de Protogenov s permite establecer una relación entre dos soluciones clásicas de tipo monopolio, la de Wu-Yang y la de 't Hooft-Polyakov, que pueden entenderse como los casos extremos de toda una familia de soluciones (ver ecuación (4.11) y discusión posterior). Además debido a la presencia del parámetro s , cuando estos monopolos son embebidos en teorías de supergravedad las soluciones de agujero negro resultantes no quedan unequivocamente especificadas por su masa, cargas y valores de los escalares en el infinito. Esto ilustra una violación de la conjetura de no-pelo en la teoría. Lo mismo es cierto para el parámetro λ si se usa la segunda familia de soluciones que aparece en (4.11).

El modelo de supergravedad en el que las soluciones han sido embebidas, el ST[2, 4], pertenece a una clase más general, conocida como modelos cúbicos. Esta clase de modelos aparecen de manera natural en la compactificación de Teorías de Supercuerdas tipo II sobre variedades de Calabi-Yau de dimensión compleja 3. La consistencia de estas teorías implica que han de ser capaces de explicar, desde un punto de vista de *microestados constituyentes*, las propiedades *macroscópicas* del espectro de soluciones de tipo agujero negro de su versión efectiva a baja energía (es decir, de la teoría de supergravedad correspondiente), en particular de las soluciones aquí obtenidas.

La construcción de este tipo de soluciones puede también ser útil para encontrar soluciones de teorías de Supergravedad $\mathcal{N} = 1$, $d = 5$. En efecto, la reducción dimensional de estas teorías resulta en un modelo de Supergravedad $\mathcal{N} = 2$, $d = 4$ (cuyo prepotencial de Kähler es cúbico), obteniéndose una especie de diccionario que relaciona los campos de las teorías cuatro- y cinco-dimensionales. Por tanto, las soluciones de ambas supergravedades han de estar relacionadas. Planeamos utilizar los resultados de este trabajo con esta finalidad en un futuro cercano.

A. Complementos matemáticos

Las teorías de Supergravedad $\mathcal{N} = 2$, $d = 4$ admiten una formulación geométrica que, además de elegante, resulta útil en una amplia variedad de aplicaciones. En este apéndice introducimos brevemente las herramientas de geometría diferencial compleja²⁰ necesarias para esta formulación, que viene expuesta en la sección 2.

A.1. Variedades complejas

Una variedad compleja de dimensión d es un espacio topológico Hausdorff que localmente se parece a \mathbb{C}^d , y por tanto a \mathbb{R}^{2d} ; es decir, cada uno de los subconjuntos abiertos que cubren la variedad es homeomorfo a un subconjunto abierto de \mathbb{C}^d . Esto proporciona simultáneamente un set de coordenadas complejas y reales $z^i = x^i + iy^i$, donde el índice toma valores $i = 1, \dots, d$. En ocasiones denotaremos las $2d$ coordenadas reales (x^i, y^i) como x^m , con $m = 1, \dots, 2d$. Si el dominio de dos cartas se superpone, las coordenadas están relacionadas a través de un difeomorfismo dado por funciones holomorfas, esto es, funciones $F^i(z) = f^i + ig^i$ que satisfacen las ecuaciones de *Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j} = \frac{\partial g^i}{\partial y^j}, \quad \frac{\partial f^i}{\partial y^j} = -\frac{\partial g^i}{\partial x^j}, \quad (\text{A.1})$$

definiendo así la *estructura compleja*. Por las restricciones que esto impone, toda variedad compleja de dimensión d es a su vez una variedad real $2d$ -dimensional. Sin embargo la relación inversa no se satisface en general, y estamos interesados en encontrar bajo qué condiciones es satisfecha.

La existencia de un tensor $\mathcal{J} \equiv \mathcal{J}_m{}^n dx^m \otimes \frac{\partial}{\partial x^n}$ globalmente definido como

$$(\mathcal{J}_m{}^n) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{d \times d} \\ -\mathbb{1}_{d \times d} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

es condición necesaria y suficiente para que la variedad tenga una estructura compleja. De hecho es trivial comprobar que las componentes $\mathcal{J}_m{}^n$ son las mismas en todo sistema de coordenadas si y sólo si los cambios de coordenadas son holomorfos (A.1).

El espacio tangente de una variedad compleja d -dimensional es simplemente su espacio tangente como una variedad real $2d$ -dimensional, con el añadido de posibilidades que da la presencia de una estructura compleja. Ahora podemos *complexificar* el espacio tangente permitiendo combinaciones del

²⁰Las referencias sobre esta materia son abundantes. En particular recomendamos [2, 44]

tipo $\xi + i\eta$ siendo ξ y η vectores reales. De este modo, definimos una nueva base para el espacio tangente complexificado

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial z^i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} - i \frac{\partial}{\partial y^i} \right), \quad \partial_{i^*} \equiv \frac{\partial}{\partial z^{*i^*}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + i \frac{\partial}{\partial y^i} \right), \quad (\text{A.3})$$

así como la base dual de 1-formas

$$dz^i \equiv dx^i + idy^i, \quad dz^{*i^*} \equiv dx^i - dy^i \quad (\text{A.4})$$

que trivialmente satisfacen

$$\langle dz^i | \partial_j \rangle = \delta^i_j, \quad \langle dz^{*i^*} | \partial_{j^*} \rangle = \delta^{i^*}_{j^*}, \quad \langle dz^i | \partial_{j^*} \rangle = \langle dz^{*i^*} | \partial_j \rangle = 0. \quad (\text{A.5})$$

En esta base el tensor \mathcal{J} está dado por

$$\mathcal{J} = idz^i \otimes \partial_i - idz^{*i^*} \otimes \partial_{i^*}. \quad (\text{A.6})$$

A través de él podemos construir dos proyectores

$$P_{\mp m}^n \equiv \frac{1}{2} (\delta_m^n \mp i \mathcal{J}_m^n), \quad (\text{A.7})$$

que proyectan, respectivamente, las componentes holomorfas y antiholomorfas de tensores.

Así mismo, en una variedad compleja la derivada exterior d puede descomponerse en los *operadores de Dolbeault* ∂, ∂^*

$$d = \partial + \partial^*, \quad (\text{A.8})$$

que actúan sobre $(p+q)$ -formas $\alpha^{(p,q)}$ con p índices holomorfos y q antiholomorfos según

$$\partial \alpha^{(p,q)} = \alpha^{(p+1,q)} = \frac{1}{p!q!} \partial_i \alpha_{i_1 \dots i_p i_1^* \dots i_q^*}^{(p,q)} dz^i \wedge dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_p} \wedge dz^{*i_1^*} \dots \wedge dz^{*i_q^*}, \quad (\text{A.9})$$

$$\partial^* \alpha^{(p,q)} = \alpha^{(p,q+1)} = \frac{(-1)^p}{p!q!} \partial_{i^*} \alpha_{i_1 \dots i_p i_1^* \dots i_q^*}^{(p,q)} dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_p} \wedge dz^{*i^*} \wedge dz^{*i_1^*} \dots \wedge dz^{*i_q^*}. \quad (\text{A.10})$$

Dichos operadores satisfacen las siguientes propiedades

$$\partial^2 = \partial \bar{\partial} + \bar{\partial} \partial = \bar{\partial}^2 = 0. \quad (\text{A.11})$$

A.2. Variedades Hermíticas

Una variedad compleja es *Hermítica* si está equipada con una métrica Riemanniana \mathcal{G} que satisfice, para los vectores ξ, η cualesquiera

$$\mathcal{G}(\mathcal{J}\xi, \mathcal{J}\eta) = \mathcal{G}(\xi, \eta) \rightarrow \mathcal{J}_m{}^p \mathcal{J}_n{}^q \mathcal{G}_{pq} = \mathcal{G}_{mn}, \quad (\text{A.12})$$

en cuyo caso la métrica \mathcal{G} se dice *Hermítica*. Esta propiedad puede escribirse como

$$\mathcal{G}_{mn} = (P_{-m}{}^p P_{+n}{}^q + P_{+m}{}^p P_{-n}{}^q) \mathcal{G}_{pq}, \quad (\text{A.13})$$

lo que implica que, en coordenadas complejas, una métrica Hermítica tiene únicamente dos tipos de componentes, \mathcal{G}_{ij^*} y \mathcal{G}_{i^*j} , con lo que siempre puede escribirse

$$ds^2 = \mathcal{G}_{ij^*} dz^i \otimes dz^{*j^*} + \mathcal{G}_{i^*j} dz^{*j^*} \otimes dz^i. \quad (\text{A.14})$$

Toda variedad compleja admite una métrica Hermítica. En efecto, puesto que toda variedad admite una métrica de Riemann g_{mn} , entonces en todo caso es posible construir una métrica \mathcal{G}_{mn} de la forma

$$\mathcal{G}_{mn} = \frac{1}{2} (g_{mn} + \mathcal{J}_m{}^q \mathcal{J}_n{}^q g_{pq}), \quad (\text{A.15})$$

que es automáticamente Hermítica por construcción.

En una variedad Hermítica se define la *2-forma de Kähler* ω a través de su acción sobre dos vectores ξ y η

$$\omega(\xi, \eta) \equiv \mathcal{G}(\mathcal{J}\xi, \eta). \quad (\text{A.16})$$

En términos de sus componentes, la forma de Kähler está dada por

$$\omega_{mn} = \mathcal{J}_m{}^p \mathcal{G}_{pn}, \quad \omega_{ij^*} = -\omega_{j^*i} = i\mathcal{G}_{ij^*}. \quad (\text{A.17})$$

La forma producto $\omega \wedge \dots \wedge \omega$ (d veces) no se anula en ningún punto de la variedad, constituyendo una forma de volumen. Por lo que toda variedad hermítica es orientable. Así mismo, como toda variedad compleja admite una métrica hermítica a través de la cual se puede definir la forma Kähler, se sigue que toda variedad compleja es orientable.

A.3. Variedades de Kähler

Una *variedad de Kähler* es una variedad Hermítica cuya forma de Kähler es cerrada

$$d\omega = 0. \quad (\text{A.18})$$

En este caso, la métrica Hermítica \mathcal{G} se dice una *métrica de Kähler*. De esta manera, una variedad de Kähler es una variedad Riemanniana (\mathcal{G}), Compleja (\mathcal{J}) y Simpléctica (ω), incorporando de una manera compatible ($\mathcal{G}(\cdot, \cdot) = \omega(\cdot, \mathcal{J}\cdot)$) las tres estructuras básicas de la geometría diferencial.

Expandiendo (A.18) en términos de los operadores de Dolbeault (A.8 - A.10) y usando (A.17) encontramos

$$\partial_{[k}\mathcal{G}_{i]j^*} = 0, \quad \partial_{[k^*}\mathcal{G}_{i]j^*} = 0, \quad (\text{A.19})$$

En cada carta $U_{(x)}$ de la variedad, estas ecuaciones tienen como solución (local)

$$\mathcal{G}_{ij^*} = \partial_i \partial_{j^*} \mathcal{K}_{(x)}, \quad (\text{A.20})$$

para cierta función real $\mathcal{K}_{(x)}(Z, Z^*)$ ²¹, llamada *potencial de Kähler*. La expresión para el potencial de Kähler no es única, ya que (A.20) es invariante bajo *transformaciones de Kähler*

$$\mathcal{K}'_{(x)}(Z, Z^*) = \mathcal{K}_{(x)}(Z, Z^*) + \lambda(Z) + \lambda^*(Z^*), \quad (\text{A.21})$$

donde $\lambda(Z)$ es cualquier función holomorfa de las coordenadas complejas Z^i .

Las componentes no nulas de la conexión (Levi-Civita) y el tensor de Ricci asociados a la métrica Kähler vienen dados por

$$\Gamma_{ij, k} = \mathcal{G}^{kl^*} \partial_i \mathcal{G}_{jl^*}, \quad \Gamma_{i^*j^*}{}^{k^*} = \mathcal{G}^{k^*l} \partial_{i^*} \mathcal{G}_{j^*l}, \quad (\text{A.22})$$

$$R_{ij^*} = \frac{1}{2} \partial_i \partial_{j^*} (\log \det \mathcal{G}). \quad (\text{A.23})$$

La *forma de Ricci* se define según

$$\mathfrak{R} \equiv i R_{ij^*} dZ^i \wedge dZ^{*j^*}. \quad (\text{A.24})$$

Se comprueba fácilmente que ésta es una forma real $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R}$ y cerrada $d\mathfrak{R} = 0$. \mathfrak{R} define un elemento no trivial del segundo grupo de cohomología de la variedad $[\mathfrak{R}/2\pi] \in H^2(\mathcal{M}; \mathbb{R})$ conocido como *primera clase de Chern* de la variedad: $c_1(\mathcal{M}) \equiv [\mathfrak{R}/2\pi]$.

²¹En las variedades de Kähler usaremos letras mayúsculas para las coordenadas complejas $z^i \rightarrow Z^i$

A.4. Variedades de Kähler-Hodge

En una variedad de Kähler es posible definir objetos que transformen de manera no trivial bajo transformaciones de Kähler. Decimos que un objeto $\Psi(Z, Z^*)$ (donde no indicamos posibles índices tensoriales) tiene peso Kähler (q, \bar{q}) si bajo (A.21) se comporta como

$$\Psi' = e^{-(q\lambda + \bar{q}\lambda^*)/2} \Psi. \quad (\text{A.25})$$

Por ejemplo, de acuerdo a esta definición, $e^{\mathcal{K}}$ tiene peso Kähler $(-2, -2)$. La derivada covariante de Kähler que actúa sobre estos objetos está dada por

$$\mathcal{D}_i \equiv \nabla_i + iq\mathcal{Q}_i, \quad \mathcal{D}_{i^*} \equiv \nabla_{i^*} - i\bar{q}\mathcal{Q}_{i^*}, \quad (\text{A.26})$$

siendo ∇ la derivada covariante estándar asociada a la conexión (A.22) y \mathcal{Q} la 1-forma de Kähler, definida en cada carta $U_{(x)}$

$$\mathcal{Q}_{(x)} \equiv -\frac{i}{2}(\partial - \partial^*)\mathcal{K}_{(x)}. \quad (\text{A.27})$$

Un caso de especial interés se da para campos con $q = -\bar{q}$, cuyas transformaciones de Kähler son de tipo $U(1)$

$$\Psi' = e^{-iq\mathfrak{I}m\lambda(Z)} \Psi. \quad (\text{A.28})$$

La estructura compatible con estos campos cuando $q = 1$ es un fibrado lineal complejo ²² $L^1 \rightarrow \mathcal{M}$ sobre la variedad de Kähler \mathcal{M} , y la consistencia de esta construcción requiere que la primera clase de Chern del fibrado $L^1 \rightarrow \mathcal{M}$ (dada por la 2-forma de Ricci \mathcal{R} de la métrica de la fibra) sea igual a la 2-forma de Kähler ω . Estas estructuras se conocen como *variedades de Kähler-Hodge*.

La variedad parametrizada por los escalares complejos de los multipletes quirales de la teoría de Supergravedad $\mathcal{N} = 1, d = 4$ debe ser Kähler-Hodge. En esta teoría, objetos como el superpotencial y los espinores tienen definido un peso de Kähler no trivial, transformando como secciones del fibrado. Una variedad Kähler-Hodge proporciona el punto de partida formal para la definición de variedad de Kähler Especial, que aparece en la variedad parametrizada por los escalares (complejos) en Supergravedad $\mathcal{N} = 2, d = 4$. Puesto que supersimetría $\mathcal{N} = 2$ incluye supersimetría $\mathcal{N} = 1$, una variedad de Kähler Especial es también Kähler-Hodge, aunque deberá satisfacer condiciones adicionales.

²²Un fibrado lineal complejo es un fibrado vectorial complejo de rango 1 sobre la variedad compleja \mathcal{M} tal que la proyección $\pi : L^1 \rightarrow \mathcal{M}$ es holomorfa.

A.5. Geometría de Kähler Especial

Geometría de Kähler Especial es la estructura que da soporte a los acoplamientos entre los campos de los n_V supermultipletes en Supergravedad $\mathcal{N} = 2, d = 4$. Estos acoplamientos están codificados en varias funciones de los escalares complejos: el potencial Kähler \mathcal{K} y sus derivadas, la *matriz periodo* $\mathcal{N}_{\Lambda\Sigma}$, la *sección simpléctica canónica* \mathcal{V} y su derivada covariante de Kähler \mathcal{U}_i . Además, en los casos en que la teoría está gaugeada, algunos acoplamientos vienen dictados por los vectores de Killing holomorfos K_A y sus mapas de momento asociados \mathcal{P}_A . A continuación detallaremos cómo se definen estos objetos así como algunas de sus aplicaciones que nos serán de utilidad.

A.5.1. Variedad de Kähler Especial

Consideremos una variedad Kähler-Hodge $L^1 \rightarrow \mathcal{M}$ de dimensión compleja n_V y un fibrado $2\bar{n}$ -dimensional ($\bar{n} = n_V + 1$) $\mathcal{SM} \rightarrow \mathcal{M}$ con grupo de estructura $Sp(2\bar{n}; \mathbb{R})$. El fibrado producto $\mathcal{SV} = \mathcal{SM} \otimes L^1 \rightarrow \mathcal{M}$ será una *variedad de Kähler Especial* si existe una sección \mathcal{V} ²³ de ese fibrado, llamada *sección simpléctica canónica*, satisfaciendo las siguientes propiedades

$$\mathcal{V} \equiv \begin{pmatrix} \mathcal{L}^\Lambda \\ \mathcal{M}_\Sigma \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \langle \mathcal{V} | \mathcal{V}^* \rangle &= \mathcal{L}^{*\Lambda} \mathcal{M}_\Lambda - \mathcal{L}^\Lambda \mathcal{M}_\Lambda^* = -i, \\ \mathcal{D}_{i^*} \mathcal{V} &= (\partial_{i^*} + \frac{1}{2} \partial_{\bar{v}} \mathcal{K}) \mathcal{V} = 0, \\ \langle \mathcal{D}_i \mathcal{V} | \mathcal{V} \rangle &= \langle \mathcal{U}_i | \mathcal{V} \rangle = 0. \end{cases} \quad (\text{A.29})$$

Con $\Lambda = 0, \dots, n_V$. Estas relaciones imponen restricciones en la sección simpléctica, que debe describir únicamente n_V grados de libertad (complejos), correspondientes a los escalares Z^i . En efecto, la sección simpléctica \mathcal{V} puede entenderse como una descripción muy redundante de los escalares Z^i a través de $2n_V + 2$ funciones. Sin embargo esta estructura contiene una gran cantidad de información, hasta el punto de que \mathcal{V} define por completo el modelo de Supergravedad $\mathcal{N} = 2, d = 4$ bajo consideración.

La lista de propiedades matemáticas implicadas por (A.29) es extensa (ver por ejemplo [2]). En este trabajo nos centraremos únicamente en la aplicación de esta estructura para construir una teoría de supergravedad.

²³Nótese que ser una sección del fibrado $\mathcal{SM} \otimes L^1 \rightarrow \mathcal{M}$ implica que \mathcal{V} tiene peso Kähler $q = 1$

A.5.2. El prepotencial \mathcal{F}

La derivada covariante de la sección canónica \mathcal{V} puede escribirse de la forma

$$\mathcal{D}_i \mathcal{V} = e^{-\mathcal{K}/2} \partial_i (e^{\mathcal{K}/2} \mathcal{V}) = \mathcal{U}_i, \quad \mathcal{D}_{i^*} \mathcal{V} = e^{\mathcal{K}/2} \partial_{i^*} (e^{-\mathcal{K}/2} \mathcal{V}) = 0, \quad (\text{A.30})$$

con lo que resulta interesante definir una nueva sección, Ω , como

$$\Omega \equiv e^{-\mathcal{K}/2} \mathcal{V}. \quad (\text{A.31})$$

Por construcción, Ω es una sección simpléctica holomorfa de peso Kähler $(2, 0)$, puesto que $e^{-\mathcal{K}/2}$ y \mathcal{V} tienen peso $(1, 1)$ y $(1, -1)$ respectivamente. En términos de Ω , las propiedades que definen una variedad Especial Kähler (A.29) toman la forma

$$\Omega = \begin{pmatrix} \mathcal{X}^\Lambda \\ \mathcal{F}_\Lambda \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \langle \Omega | \Omega^* \rangle \equiv \mathcal{X}^{*\Lambda} \mathcal{F}_\Lambda - \mathcal{X}^\Lambda \mathcal{F}_\Lambda^* = -i e^{-\mathcal{K}}, \\ \partial_{i^*} \Omega = 0, \\ \langle \partial_i \Omega | \Omega \rangle = 0. \end{cases} \quad (\text{A.32})$$

Definimos por otro lado la *matriz periodo* $\mathcal{N}_{\Lambda\Sigma}$ a través de las propiedades

$$\mathcal{M}_\Lambda \equiv \mathcal{N}_{\Lambda\Sigma} \mathcal{L}^\Sigma, \quad \mathcal{D}_i \mathcal{M}_\Lambda \equiv \mathcal{N}_{\Lambda\Sigma}^* \mathcal{D}_i \mathcal{L}^\Sigma. \quad (\text{A.33})$$

La matriz periodo es simétrica y su parte imaginaria $\Im \mathcal{M}_{\Lambda\Sigma}$ es invertible y definida negativa. Este objeto aparece en el término cinética de los campos vectoriales en acciones de supergravedad. Así mismo definimos el tensor \mathcal{C} simétrico de 3 índices y peso Kähler 2

$$\mathcal{C}_{ijk} \equiv \langle \mathcal{D}_i \mathcal{U}_j | \mathcal{U}_k \rangle. \quad (\text{A.34})$$

Debido a la ya mencionada redundancia en la descripción de las n_V coordenadas complejas a través de las secciones simplécticas, es posible asumir que los componentes inferiores \mathcal{F}_Λ de Ω dependen de las coordenadas Z^i sólo a través de los componentes superiores \mathcal{X}^Λ . Si utilizamos esto en la última de las expresiones de (A.32) es posible llegar a

$$\partial_i \left[2\mathcal{F}_\Lambda - \frac{\partial (\mathcal{X}^\Sigma \mathcal{F}_\Sigma)}{\partial \mathcal{X}^\Lambda} \right] = 0, \quad (\text{A.35})$$

cuya solución *genérica* es

$$\mathcal{F}_\Lambda = \frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{X})}{\partial \mathcal{X}^\Lambda}, \quad (\text{A.36})$$

donde hemos definido el *prepotencial* $\mathcal{F}(\mathcal{X})$ como

$$\mathcal{F}(\mathcal{X}) \equiv \frac{1}{2} \mathcal{X}^\Sigma \mathcal{F}_\Sigma(\mathcal{X}). \quad (\text{A.37})$$

Combinando estas dos últimas expresiones se tiene

$$\mathcal{X}^\Lambda \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathcal{X}^\Lambda} = 2\mathcal{F}, \quad (\text{A.38})$$

lo cual implica que el prepotencial \mathcal{F} es homogéneo de grado dos en los \mathcal{X}^Λ s.

La existencia de un prepotencial puede ser siempre asumida. Por supuesto, la solución *genérica* (y por tanto el prepotencial) podría no existir para una cierta sección holomorfa Ω . Sin embargo, en [45] fue demostrado que para todo Ω siempre hay una transformación simpléctica $Sp(2\bar{n}, \mathbb{R})$ tal que el prepotencial existe, que se corresponderá con un cambio de coordenadas en la variedad escalar.

El prepotencial proporciona una alternativa a las secciones simplécticas (Ω, \mathcal{V}) a la hora de caracterizar una geometría de Kähler Especial. Todo lo que se necesita es una elección de coordenadas Z^i para expresar las \mathcal{X}^Λ como funciones holomorfas de éstas. Una opción recurrente es usar las conocidas como *coordenadas especiales*

$$Z^i \equiv \mathcal{X}^i / \mathcal{X}^0, \quad \mathcal{X}^0 = 1. \quad (\text{A.39})$$

Una transformación de Kähler dejaría la primera ecuación invariante, mientras que \mathcal{X}^0 se convertiría en una función holomorfa arbitraria.

A.5.3. Pasos para la construcción de una geometría de Kähler Especial

Los pasos para reconstruir la geometría de Kähler Especial relacionada con el supermultiplete vectorial de una teoría de Supergravedad $\mathcal{N} = 2, d = 4$ partiendo desde $\mathcal{F}(\mathcal{X})$, una función holomorfa de grado dos de las $n_V + 1$ variables \mathcal{X}^Λ son:

1. Construir la sección simpléctica holomorfa Ω , usando (A.36)

$$\mathcal{F}_\Lambda = \frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{X})}{\partial \mathcal{X}^\Lambda}, \quad \Omega = \left(\begin{array}{c} \mathcal{X}^\Lambda \\ \frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{X})}{\partial \mathcal{X}^\Lambda} \end{array} \right). \quad (\text{A.40})$$

2. Construir el potencial de Kähler a partir de (A.32)

$$e^{-\mathcal{K}} = i (\mathcal{X}^{*\Lambda} \mathcal{F}_\Lambda - \mathcal{F}_\Lambda^* \mathcal{X}^\Lambda) . \quad (\text{A.41})$$

3. La sección simpléctica canónica \mathcal{V} viene dada por

$$\mathcal{V} = e^{\mathcal{K}/2} \Omega . \quad (\text{A.42})$$

4. Obtenemos la matriz periodo como

$$\mathcal{N}_{\Lambda\Sigma} = \mathcal{F}_{\Lambda\Sigma}^* + 2i \frac{\Im \mathcal{F}_{\Lambda\Lambda'} \mathcal{X}^{\Lambda'} \Im \mathcal{F}_{\Sigma\Sigma'} \mathcal{X}^{\Sigma'}}{\mathcal{X}^\Omega \Im \mathcal{F}_{\Omega\Omega'} \mathcal{X}^{\Omega'}} , \quad (\text{A.43})$$

donde hemos definido

$$\mathcal{F}_{\Lambda_1 \dots \Lambda_n} \equiv \frac{\partial^n \mathcal{F}}{\partial \mathcal{X}^{\Lambda_1} \dots \partial \mathcal{X}^{\Lambda_n}} . \quad (\text{A.44})$$

5. El tensor \mathcal{C} tiene la forma

$$\mathcal{C}_{ijk} = e^{\mathcal{K}} \partial_i \mathcal{X}^\Lambda \partial_j \mathcal{X}^\Sigma \partial_k \mathcal{X}^\Omega \mathcal{F}_{\Lambda\Sigma\Omega} . \quad (\text{A.45})$$

A.5.4. Isometrías holomorfas de variedades de Kähler

Llegados a este punto resulta natural considerar los cambios de coordenadas $Z^i = f^i(Z)$ que dejan la métrica Kähler invariante. Éstas son generadas por las componentes

$$\delta_\epsilon Z^i = \epsilon k_A^i(Z) , \quad \partial_{j^*} k_A^i(Z) = 0 , \quad (\text{A.46})$$

de los vectores de Killing holomorfos $K_A(Z, Z^*) = k_A^i(Z) \partial_i + k_A^{*i^*}(Z^*) \partial_{i^*}$. Estas transformaciones preservan la estructura de Kähler si la derivada de Lie del potencial \mathcal{K} con respecto a K_A satisface

$$\mathcal{L}_A \mathcal{K} \equiv k_A^i \partial_i \mathcal{K} + k_A^{*i^*} \partial_{i^*} \mathcal{K} = \lambda_A(Z) + \lambda_A^*(Z^*) , \quad (\text{A.47})$$

Esto lleva a la conservación de la 2-forma de Kähler ω

$$\mathcal{L}_A(\omega) = 0 . \quad (\text{A.48})$$

Además debido a que ω es cerrado, se tiene localmente $\mathcal{L}_A(\omega) = d(i_{k_A} \omega)$. Por tanto, la preservación de la estructura Kähler implica la existencia local de un set de 0-formas reales \mathcal{P}_A conocidas como *mapas de momento* tales que

$$i_{k_A} \omega = d\mathcal{P}_A , \quad (\text{A.49})$$

con solución local

$$i\mathcal{P}_A = k_A{}^i \partial_i \mathcal{K} - \lambda_A. \quad (\text{A.50})$$

Los mapas de momento pueden entenderse como el prepotencial desde el cual los vectores de Killing pueden derivarse

$$k_{Ai^*} = i\partial_{i^*} \mathcal{P}_A, \quad (\text{A.51})$$

motivo por el cual en ocasiones se les llama *prepotenciales de Killing*.

A.5.5. Modelos ST[2, n]

Un modelo ST[2, n] es un tipo especial de modelo cúbico²⁴ con $n_V = n + 1$ supermultipletes vectoriales que, como todo modelo cúbico, puede embeberse en Teoría de Cuerdas tipo II compactificada sobre una variedad de Calabi-Yau de dimensión compleja 3. También aparecen estos modelos cuando se considera la compactificación en S^1 de Supergravedad $\mathcal{N} = 1$, $d = 5$.

La particularidad de los modelos ST[2, n] estriba en el tensor d_{ijk} , cuyos únicos componentes no nulos son $d_{1\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$, con $(\eta_{\alpha\beta}) = \text{diag}(+ - \cdots -)$ y donde los índices α, β toman n valores entre 2 y n_V .

En estos modelos el escalar $Z^1 = \mathcal{X}^1/\mathcal{X}^0$ juega un papel especial, parametrizando un espacio de clases laterales $\text{SL}(2, \mathbb{R})/\text{SO}(2)$. Es conocido como *axidilación*, denotándolo como τ . Para el resto de escalares mantenemos la notación estándar $Z^\alpha = \mathcal{X}^\alpha/\mathcal{X}^0$ $\alpha = 2, \dots, n$. Éstos parametrizan un espacio de clases laterales $\text{SO}(2, n)/(\text{SO}(2) \times \text{SO}(n))$.

Usando esta notación y fijando el gauge $\mathcal{X}^0 = 1$, la sección simpléctica canónica Ω , el potencial de Kähler \mathcal{K} y los componentes de la 1-forma de Kähler \mathcal{Q}_i y la métrica Kähler \mathcal{G}_{ij^*} vienen dados por

²⁴Un modelo cúbico está caracterizado porque el prepotencial de la variedad de Kähler Especial es de la forma $\mathcal{F} = d_{ijk} \frac{\mathcal{X}^i \mathcal{X}^j \mathcal{X}^k}{3! \mathcal{X}^0}$.

$$\begin{aligned}
\Omega &= \begin{pmatrix} 1 \\ \tau \\ Z^\alpha \\ \frac{1}{2}\tau\eta_{\alpha\beta}Z^\alpha Z^\beta \\ -\frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}Z^\alpha Z^\beta \\ -\tau\eta_{\alpha\beta}Z^\beta \end{pmatrix}, & e^{-\mathcal{K}} &= 4\Im\tau \eta_{\alpha\beta}\Im Z^\alpha \Im Z^\beta, \\
\mathcal{Q}_\tau &= \frac{1}{4\Im\tau}, & \mathcal{Q}_\alpha &= \frac{\eta_{\alpha\beta}\Im Z^\beta}{2\eta_{\gamma\delta}\Im Z^\gamma \Im Z^\delta}, \\
\mathcal{G}_{\tau\tau^*} &= \frac{1}{4(\Im\tau)^2}, & \mathcal{G}_{\alpha\beta^*} &= \frac{\eta_{\alpha\gamma}\Im Z^\gamma \eta_{\beta\delta}\Im Z^\delta}{[\eta_{\epsilon\varphi}\Im Z^\epsilon \Im Z^\varphi]^2} - \frac{\eta_{\alpha\beta}}{2\eta_{\epsilon\varphi}\Im Z^\epsilon \Im Z^\varphi}.
\end{aligned} \tag{A.52}$$

El potencial de Kähler ha de ser real, lo que impone restricciones a los valores de los escalares. El modelo tiene entonces dos posibles ramas, distinguidas por

$$\Im\tau > 0, \quad \eta_{\alpha\beta}\Im Z^\alpha \Im Z^\beta > 0, \tag{A.53}$$

y

$$\Im\tau < 0, \quad \eta_{\alpha\beta}\Im Z^\alpha \Im Z^\beta < 0, \tag{A.54}$$

que deben ser consideradas independientemente, y serán distinguidas mediante el uso de los índices + y – respectivamente.

Solamente el subgrupo $SO(1, n) \subset SO(2, n)$ actúa en la representación fundamental de las coordenadas especiales Z^α . El grupo $SO(3)$ actúa en la adjunta sobre las coordenadas α (por ejemplo $\alpha = 3, 4, 5$) si $n \geq 4$. Por simplicidad consideramos el caso más simple que permite esta isometría, es decir $n = 4$. Denotaremos los índices $\alpha = 3, 4, 5$ como $a, b, \dots = 1, 2, 3$, escribiendo en un abuso de notación Z^a en lugar de Z^{a+2} para Z^3, Z^4, Z^5 . Los generadores y constantes de estructura del álgebra $\mathfrak{so}(3)$ y su acción sobre los escalares son

$$(T_a)^b{}_c = f_{ac}{}^b = -\varepsilon_{acb}, \quad \delta_\alpha Z^a = \alpha^b (T_b)^a{}_c Z^c = -\varepsilon_{abc} \alpha^b Z^c = \alpha^b k_b{}^a(Z), \tag{A.55}$$

(τ y Z^2 son inertes a esta transformación) lo que significa que los vectores de Killing y sus mapas de momento asociados han de ser

$$k_a{}^b(Z) = \epsilon_{abc}Z^c, \quad \mathcal{P}_a = -\frac{i}{2} \frac{\epsilon_{abc}Z^b Z^{*c*}}{\eta_{\alpha\beta} \Im Z^\alpha \Im Z^\beta}. \quad (\text{A.56})$$

El potencial escalar presenta una estructura complicada. Puesto que su forma exacta no es necesaria en este trabajo no la explicitamos aquí.

B. El monopolo de Wu-Yang

El monopolo de Wu-Yang SU(2) [33] es una solución de la teoría Yang-Mills SU(2) que puede obtenerse a través del embebimiento del monopolo de Dirac en SU(2) a través de una transformación gauge singular. Para dejar clara nuestra notación comenzamos revisando la construcción de Dirac.

B.1. El monopolo de Dirac

El campo U(1) del monopolo de Dirac, que denotaremos como B , se define imponiendo que ha de satisfacer la ecuación del monopolo de Dirac²⁵, que puede escribirse de varias formas

$$F(B) \equiv dB = \star_{(3)} d \frac{1}{2gr} = -\frac{1}{2g} d\Omega^2, \quad 2\partial_{[m} B_{n]} = -\frac{1}{2g} \epsilon_{mnp} \frac{x^p}{r^3}, \quad (\text{B.1})$$

donde $d\Omega^2$ es la 2-forma de volumen de una 2-esfera de radio unidad

$$d\Omega^{(2)} = -\frac{1}{2} \epsilon_{mnp} \frac{x^m}{r} d \frac{x^n}{r} \wedge d \frac{x^p}{r} = \sin \theta d\theta \wedge d\varphi. \quad (\text{B.2})$$

El valor de la carga magnética ha sido fijado a g^{-1} . La ecuación (B.1) no admite una solución global regular. Las expresiones B^+ y B^-

$$B^{(\pm)} = -\frac{1}{2g} (\cos \theta \mp 1) d\varphi, \quad (\text{B.3})$$

son soluciones locales regulares en todo el espacio salvo en el eje x^3 negativo (respectivamente positivo). A esta línea singular se le conoce como cuerda de Dirac. Una solución globalmente regular puede construirse

²⁵Ésta no es otra que la versión abeliana de la ecuación de Bogomol'nyi

usando B^\pm en cada uno de los hemisferios y relacionándolos en las regiones de solape usando una transformación gauge

$$B^{(+)} - B^{(-)} = -d\left(\frac{1}{g}\varphi\right), \quad (\text{B.4})$$

Resulta útil disponer de la expresión del monopolo de Dirac en coordenadas cartesianas,

$$B^{(\pm)} = \frac{1}{2g} \frac{[(0, 0, \mp 1) \times (x^1, x^2, x^3)]}{r^2(r \pm x^3)}, \quad (\text{B.5})$$

donde la singularidad en $r = \mp x^3$ es evidente. En esta forma, uno puede fácilmente cambiar la posición del monopolo de Dirac desde el origen hasta un punto arbitrario x_0^m , y la posición de la cuerda de Dirac desde la semirrecta que empieza en el origen y se dirige en la dirección $-(0, 0, \mp 1)$ a la semirrecta que parte de x_0^m y tiene la dirección s^m relativa a ese punto:

$$B^{(s)} = \frac{1}{2g} \left(1 - \frac{s^m u^m}{s u}\right)^{-1} \varepsilon_{mnp} \frac{s^m}{s} \frac{u^n}{u} d\frac{u^p}{u}, \quad (\text{B.6})$$

con

$$u^m \equiv x^m - x_0^m, \quad u^2 \equiv u^m u^m, \quad s^2 \equiv s^m s^m. \quad (\text{B.7})$$

B.2. Desde el monopolo de Dirac hasta el monopolo de Wu-Yang SU(2)

Consideremos la solución abeliana B^+ de la ecuación (B.3) y su embebimiento en SU(2) como la tercera componente del campo vectorial gauge

$$A^{(+)} \equiv 2B^{(+)}T_3, \quad F(A^{(+)}) = 2F(B)T_3. \quad (\text{B.8})$$

La transformación gauge SU(2), que es evidentemente singular en el eje x^3 negativo,

$$U^{(+)} \equiv \frac{1}{\sqrt{2(1 + \frac{z}{r})}} \left[1 + \frac{z}{r} + 2\left(\frac{x}{r}T_2 - \frac{y}{r}T_1\right)\right], \quad (\text{B.9})$$

hace desaparecer la cuerda de Dirac y relaciona el campo gauge $A^{(+)}$ con

$$A = \frac{1}{gr} \varepsilon^a{}_{mn} dx^m \frac{x^n}{r} T_a, \quad A^{(+)} = U^{(+)} A (U^{(+)})^{-1} + \frac{1}{g} dU^{(+)} (U^{(+)})^{-1}, \quad (\text{B.10})$$

que es el campo vectorial gauge del monopolo de Wu-Yang SU(2). Este campo es una solución clásica de la teoría de Yang-Mills SU(2) pura.

Esta construcción puede generalizarse a posiciones arbitrarias del monopolo y cuerda de Dirac. Si consideramos el embebimiento de la solución $B^{(s)}$ de (B.6) en $SU(2)$

$$A^{(s)} \equiv -2B^{(s)} \frac{s^m}{s} \delta_m^a T_a, \quad (\text{B.11})$$

Es fácil comprobar que la transformación gauge

$$U^{(s)} \equiv \frac{1}{\sqrt{2} \left(1 - \frac{s^m u^m}{s u}\right)} \left[1 - \frac{s^m u^m}{s u} - 2\varepsilon_{mn}^a \frac{s^m u^n}{s u} T_a \right], \quad (\text{B.12})$$

lo relaciona con el mismo campo del monopolo de Wu-Yang de (B.10) mediante

$$A^{(s)} = U^{(s)} A (U^{(s)})^{-1} + \frac{1}{g} dU^{(s)} (U^{(s)})^{-1}. \quad (\text{B.13})$$

Referencias

- [1] P. Bueno, P. Meessen, T. Ortin, and P. F. Ramirez, *N=2 Einstein-Yang-Mills' static two-center solutions*, [arXiv:1410.4160](#).
- [2] T. Ortín, *Gravity and Strings*. Cambridge University Press.
- [3] F. Quevedo, S. Krippendorff, and O. Schlotterer, *Cambridge Lectures on Supersymmetry and Extra Dimensions*, [arXiv:1011.1491](#).
- [4] M. Sohnius, *Introducing Supersymmetry*, *Phys.Rept.* **128** (1985) 39–204.
- [5] D. Cerdeño and C. Muñoz, *An introduction to supergravity*, in *Corfu Summer Institute on Elementary Particle Physics*.
- [6] S. Coleman and J. Mandula, *All possible symmetries of the s matrix*, *Phys. Rev.* **159** (Jul, 1967) 1251–1256.
- [7] R. Haag, J. T. Łopuszański, and M. Sohnius, *All possible generators of supersymmetries of the S-matrix*, *Nuclear Physics B* **88** (Mar., 1975) 257–274.
- [8] A. L. Besse, *Einstein Manifolds*. Springer.
- [9] M. K. Gaillard and B. Zumino, *Duality Rotations for Interacting Fields*, *Nuclear Physics B* (1981).
- [10] L. Andrianopoli, M. Bertolini, A. Ceresole, R. D'Auria, S. Ferrara, et al., *N=2 supergravity and N=2 superYang-Mills theory on general scalar manifolds: Symplectic covariance, gaugings and the momentum map*, *J.Geom.Phys.* **23** (1997) 111–189, [[hep-th/9605032](#)].
- [11] C. Shahbazi, *Black Holes in Supergravity with Applications to String Theory*, [arXiv:1307.3064](#).
- [12] M. Huebscher, P. Meessen, T. Ortin, and S. Vaula, *Supersymmetric N=2 Einstein-Yang-Mills monopoles and covariant attractors*, *Phys.Rev.* **D78** (2008) 065031, [[arXiv:0712.1530](#)].
- [13] M. Huebscher, P. Meessen, T. Ortin, and S. Vaula, *N=2 Einstein-Yang-Mills's BPS solutions*, *JHEP* **0809** (2008) 099, [[arXiv:0806.1477](#)].

- [14] J. M. Bardeen, B. Carter, and S. Hawking, *The Four laws of black hole mechanics*, *Commun.Math.Phys.* **31** (1973) 161–170.
- [15] S. Hawking, *Gravitational radiation from colliding black holes*, *Phys.Rev.Lett.* **26** (1971) 1344–1346.
- [16] A. Strominger and C. Vafa, *Microscopic origin of the Bekenstein-Hawking entropy*, *Phys.Lett.* **B379** (1996) 99–104, [[hep-th/9601029](#)].
- [17] G. T. Horowitz and A. Strominger, *Counting states of near extremal black holes*, *Phys.Rev.Lett.* **77** (1996) 2368–2371, [[hep-th/9602051](#)].
- [18] J. Breckenridge, R. C. Myers, A. Peet, and C. Vafa, *D-branes and spinning black holes*, *Phys.Lett.* **B391** (1997) 93–98, [[hep-th/9602065](#)].
- [19] J. M. Maldacena and A. Strominger, *Statistical entropy of four-dimensional extremal black holes*, *Phys.Rev.Lett.* **77** (1996) 428–429, [[hep-th/9603060](#)].
- [20] J. Breckenridge, D. Lowe, R. C. Myers, A. Peet, A. Strominger, et al., *Macroscopic and microscopic entropy of near extremal spinning black holes*, *Phys.Lett.* **B381** (1996) 423–426, [[hep-th/9603078](#)].
- [21] K. Tod, *All metrics admitting super-covariantly constant spinors*, *Physics Letters B* **121** (1983), no. 4 241 – 244.
- [22] J. P. Gauntlett, J. B. Gutowski, C. M. Hull, S. Pakis, and H. S. Reall, *All supersymmetric solutions of minimal supergravity in five- dimensions*, *Class.Quant.Grav.* **20** (2003) 4587–4634, [[hep-th/0209114](#)].
- [23] J. P. Gauntlett and J. B. Gutowski, *All supersymmetric solutions of minimal gauged supergravity in five-dimensions*, *Phys.Rev.* **D68** (2003) 105009, [[hep-th/0304064](#)].
- [24] R. Kallosh and T. Ortin, *Killing spinor identities*, [hep-th/9306085](#).
- [25] P. Meessen and T. Ortin, *The Supersymmetric configurations of $N=2$, $D=4$ supergravity coupled to vector supermultiplets*, *Nucl.Phys.* **B749** (2006) 291–324, [[hep-th/0603099](#)].

- [26] M. Huebscher, P. Meessen, and T. Ortin, *Supersymmetric solutions of $N=2$ $D=4$ sugra: The Whole ungauged shebang*, *Nucl.Phys.* **B759** (2006) 228–248, [[hep-th/0606281](#)].
- [27] F. Denef, *Supergravity flows and D-brane stability*, *JHEP* **0008** (2000) 050, [[hep-th/0005049](#)].
- [28] B. Bates and F. Denef, *Exact solutions for supersymmetric stationary black hole composites*, *JHEP* **1111** (2011) 127, [[hep-th/0304094](#)].
- [29] P. Galli, P. Meessen, and T. Ortin, *The Freudenthal gauge symmetry of the black holes of $N=2, d=4$ supergravity*, *JHEP* **1305** (2013) 011, [[arXiv:1211.7296](#)].
- [30] E. Bogomolny, *Stability of Classical Solutions*, *Sov.J.Nucl.Phys.* **24** (1976) 449.
- [31] A. Protogenov, *Exact Classical Solutions of Yang-Mills Sourceless Equations*, *Phys.Lett.* **B67** (1977) 62–64.
- [32] P. Meessen, *Supersymmetric coloured/hairy black holes*, *Phys.Lett.* **B665** (2008) 388–391, [[arXiv:0803.0684](#)].
- [33] T. Wu and C.-N. Yang, *SOME SOLUTIONS OF THE CLASSICAL ISOTOPIC GAUGE FIELD EQUATIONS*, .
- [34] M. Shmakova, *Calabi-Yau black holes*, *Phys.Rev.* **D56** (1997) 540–544, [[hep-th/9612076](#)].
- [35] S. Majumdar, *A class of exact solutions of Einstein's field equations*, *Phys.Rev.* **72** (1947) 390–398.
- [36] Z. Perjes, *Solutions of the coupled Einstein Maxwell equations representing the fields of spinning sources*, *Phys.Rev.Lett.* **27** (1971) 1668.
- [37] W. Israel and G. Wilson, *A class of stationary electromagnetic vacuum fields*, *J.Math.Phys.* **13** (1972) 865–871.
- [38] K. Behrndt, D. Lust, and W. A. Sabra, *Stationary solutions of $N=2$ supergravity*, *Nucl.Phys.* **B510** (1998) 264–288, [[hep-th/9705169](#)].
- [39] J. Bellorin, P. Meessen, and T. Ortin, *Supersymmetry, attractors and cosmic censorship*, *Nucl.Phys.* **B762** (2007) 229–255, [[hep-th/0606201](#)].

- [40] A. D. Popov, *On explicit point multi-monopoles in $SU(2)$ gauge theory*, *J.Math.Phys.* **46** (2005) 073506, [[hep-th/0412042](#)].
- [41] S. A. Cherkis and B. Durcan, *The 't Hooft-Polyakov monopole in the presence of an 't Hooft operator*, *Phys.Lett.* **B671** (2009) 123–127, [[arXiv:0711.2318](#)].
- [42] S. A. Cherkis and B. Durcan, *Singular monopoles via the Nahm transform*, *JHEP* **0804** (2008) 070, [[arXiv:0712.0850](#)].
- [43] C. D. Blair and S. A. Cherkis, *One Monopole with k Singularities*, *JHEP* **1011** (2010) 127, [[arXiv:1009.5387](#)].
- [44] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*. Institute of Physics.
- [45] B. Craps, F. Roose, W. Troost, and A. Van Proeyen, *What is special Kahler geometry?*, *Nucl.Phys.* **B503** (1997) 565–613, [[hep-th/9703082](#)].