Agujeros negros supersimétricos en la supergravedad N=1 d=5

Memoria de trabajo presentada por

Oscar Lasso Andino

para optar al título de **Máster en Física Teórica** por la

Universidad Autónoma de Madrid

Trabajo dirigido por

Prof. Don Tomás Ortín Miguel

Profesor de Investigación en el Instituto de Física Teórica UAM/CSIC, Madrid.

Departamento de Física Teórica - Universidad Autónoma de Madrid

Instituto de Física Teórica
UAM/CSIC

3 de Octubre de 2014

Índice

1. Introducción

Desde que en el siglo XIX, J.C. Maxwell publicó la descripción del hasta entonces desconocido campo electromagnético, muchos científicos han dedicado su vida a buscar una teoría, que de manera similar, logre unificar los campos conocidos bajo un único formalismo. Actualmente sabemos que existen cuatro interacciones fundamentales. Tres de ellas: la débil, la fuerte y la electromagnética, se pueden describir mediante teorías cuánticas de campo, que se agrupan en lo que se conoce como Modelo Estándar del Universo. La fuerza restante, la gravedad, en cambio viene descrita por la Relatividad General. Cada teoría en su escala describe con bastante exactitud los fenómenos observados. Sin embargo son fundamentalmente diferentes.

Es sabido que una de las predicciones más exóticas de la teoría General de la Relatividad es la xistencia de agujeros negros, y con estos las aparición de singularidades espacio-temporales. Estos objetos presentan propiedades tan extrañas que nos han llevado a replantearnos las ideas acerca del el espacio y el tiempo.

La entropía de estos agujeros puede ser calculada mediante la fórmula de Bekenstein-Hawking, en esta fórmula la presencia de las constantes de Newton y de Planck muestra que es necesario una teoría cuántica de la gravedad para poder describir estos objetos. Es así que, el interés por estudiarlos ha ido en aumento, pues juegan un papel muy importante a la hora de tratar de unificar las interacciones gravitatorias con el Modelo Estándar.

Una teoría cuántica de la gravedad es uno de los grandes objetivos de los físicos teóricos en la actualidad, y aunque se han dado pasos gigantes en la comprensión del espaciotiempo, todavía no se ha podido formular consistentemente dicha teoría.

Desde el punto de vista dimensional, esperaríamos que los efectos combinados de la gravedad y la mecánica cuántica se vuelvan importantes a la escala de Planck $Ep = 10^{19} GeV$. La gravedad es una teoría efectiva que emergería solo a bajas energías, por lo que se asume que existe una teoría aún más fundamental.

Por otro lado, si en la Relatividad General asumimos la existencia de una supersimetría local que relaciona bosones con fermiones entonces tenemos los que se conoce como Supergravedad. Esta teoría hereda muchas de las consecuencias de la Relatividad General de Einstein, entre ellas los agujeros negros.

Las teorías supergravedad son teorías efectivas de las Supercuerdas, la cual a su vez representa la opción más convincente para ser la teoría que unifique a todas las partículas fundamentales y sus interacciones.

Estudiar las soluciones supersimétricas para la supergravedad $\mathcal{N} = 1, d = 5$ con el objetivo de analizar el comportamiento de las soluciones que asintóticamente son AdS nos permitirá tener una idea más clara de como la supergravedad se comporta en el interior del espacio AdS.

Las ecuaciones de movimiento que se obtienen a partir de la acción de la teoría de supergravedad son altamente no lineales, por lo que encontrar una solución general es una tarea muy compleja. Sin embargo, existen métodos alternativos que nos permiten encontrar soluciones partículares con cierta simetría.

El presente trabajo pretende ser el inicio de un proyecto más ambicioso: el de encontrar soluciones que son asintóticamente AdS_5 en la supergravedad $\mathcal{N} = 1, d = 5$. Para ello se considera la acción de la supergravedad mencionada más un potencial en los escalares de la teoría. Evidentemente la forma del potencial vendrá constreñida por las transformaciones de supersimetría de la teoría.

En este trabajo vamos a hacer uso de la a acción FGK para encontrar soluciones de la supergravedad $\mathcal{N} = 1, d = 5$ gaugeada y acoplada con n_v multipletes vectoriales.

En el sección 2 revisamos las soluciones más simples conocidas de la Relatividad General para luego usar estas soluciones embebidas en una supergravedad y describir lo que se conoce como agujeros negros supersimétricos.

En la sección 3 describimos brevemente la acción del formalismo FGK y encontramos una ecuación de movimiento, la cual para caso en el que los escalares son constantes se reduce a la solución de Reissner Nordström-(anti)-de Sitter topológica. Luego, usando el truco de Bogomol´nyi encontramos ecuaciones de primer orden para la acción $d$dimensional efectiva. Finalmente encontramos ecuaciones de primer orden para la supergravedad $\mathcal{N} = 1; d = 5$ acoplada con supermultipletes vectoriales para el caso $Z = 0, \mathcal{L} \neq 0$, y logramos integrarlas bajo la condición de que $\mathcal{L}$ no dependa de los escalares ϕ. Observamos que las soluciones obtenidas corresponden a "domain walls".

Finalmente en la sección 4 encontramos las condiciones bajo las cuales la métrica de Reissner-Nordström-(Anti)-de Sitter topológica en cinco dimensiones es supersimétrica, embebida en la supergravedad $N = 1, d = 5$. pura. Mostramos que las soluciones supersimétricas no tienen horizontes de sucesos.

2. Agujeros negros y supersimetría

Es un fenómeno conocido que la luz es deflectada por un campo gravitacional. Mediciones de quasars que se mueven en lugares lejanos del universo y cuya luz llega hasta nuestros radio telescopios rodeando el sol y las observaciones durante algunos eclipses permitieron confirmarlo. [1, 2]. De acuerdo con la Relatividad General, la responsable de las trayectorias curvas de los rayos de luz es la gran masa del sol, la cual crea una curvatura en el espaciotiempo, haciendo posible que las ondas de radio provenientes de los quasares se desvíen de su trayectoría rectilínea para seguir la ruta trazada por tal curvatura.

Puesto que la curvatura del espacio tiempo es proporcional a la masa, se esperaría que al concentrarse un gran cantidad de materia en un punto del espaciotiempo el campo gravitatorio producido no permita que la luz escape hacia el infinito, sino que sea arrastrada nuevamente hacia el foco de la curvatura.

De la mecánica de Newton sabemos que para que una partícula masiva escape de un campo gravitatorio es necesario que dicha partícula alcance una velocidad mínima, conocida como velocidad de escape. Esta velocidad de escape dependerá de la masa del cuerpo que genera el campo gravitatorio del cual la partícula intenta escapar. Podemos imaginar fácilmente que cuando la masa que genera el campo es lo suficientemente grande, la velocidad de escape superaría a la velocidad de la luz. Así, la forma más elemental de entender un agujero negro es considerándolo como una región del espacio cuya velocidad de escape es mayor que la velocidad de la luz.

La aparición de la Relatividad de Einstein cambió por completo las ideas del espacio y tiempo que hasta entonces se tenía, entre ellas la ídea clásica de un objeto masivo con velocidad de escape mayor que la velocidad de la luz. La defincón de un agujero negro en el marco de la Relatividad General es bastante técnica y requiere de algunos conocimientos previos que presentamos a continuación.

En la Relatividad General, un espaciotiempo es una clase de equivalencia de los pares $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$, donde $\mathcal{M}$ es una variedad diferenciable $d-$dimensional y $g_{\mu\nu}$ una métrica pseudo-riemanniana con signatura lorentziana $(+, -, ..., -)$ y cuya relación de equivalencia esta dada por los difeomorfismos f tales que si $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{g}_{\mu\nu})$ es un par miembro de la clase entonces se tiene que $f^*\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$.

Denotamos J^+ a la región del espacio tiempo conocida como infinito futuro nulo y que es el conjunto de puntos a los que se aproximan asintóticamente las geodésicas nulas que pueden escapar hacia el infinito espacial. Llamamos I^- al pasado cronológico. Entonces $I^-(J^+)$ es el conjunto de puntos para los cuales es posible construir geodésicas tipo tiempo dirigidas hacia el futuro a una distancia arbitraria dentro de la región extrena.

Para un espacio asintóticamente plano se define a un agujero negro $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$ como

$$\mathcal{B} = \mathcal{M} - \mathcal{I}^-(\mathcal{J}^+) \tag{2.1}$$

Se pueden dar definiciones similares de agujeros negros para espaciotiempo con diferentes propiedades de la región asintótica.

El *horizonte de eventos* $\mathcal{H}$ de un agujero negro es la frontera de $\mathcal{B}$, por lo que $\mathcal{H}$ es la frontera del pasado de $\mathcal{I}^+$. Podemos decir que un agujero negro consiste en el conjunto de puntos de $\mathcal{M}$ desde los cuales las geodésicas no nulas no pueden escapar al infinito, por lo que un observador en $\mathcal{B}$ no puede influir causalmente sobre cualquier evento fuera del horizonte. Algunas soluciones de las ecuaciones de Einstein presentan agujeros negros, a continuación estudiaremos algunas de ellas.

2.1. La solución de Schwarzschild

Consideremos un cuerpo de massa M esféricamente simétrico, entonces el espaciotiempo alrededor de éste se puede describir usando la métrica de Schwarzschild. Esta métrica se obtiene al resolver al resolver las ecuaciones de Einstein en el vacío [3], y según el teorema de Birkhoff [3], esta métrica también es estática. En coordenadas Schwarzschild (t, r, θ, ϕ) la métrica de se escribe como;

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2_{(2)}, \tag{2.2}$$

donde

$$d\Omega^2_{(2)} = d\theta^2 + sen^2(\theta) d\varphi^2, \tag{2.3}$$

es la métrica de la 2-esfera unidad.

Del hecho de que para campos pequeños la Relatividad General debe reducirse a la teoría newtoniana se demuestra que M debe ser la masa gravitacional del cuerpo que produce el campo gravitatorio medida desde el infinito. Esta solución es única pues cualquier otra solución esféricamente simétrica de las ecuaciones de campo en el vacío es localmente isométrica a la solución Schwarzschild.

La solución Schwarzschild es asintóticamente plana ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + O(1/r)$ para r grande.) y presenta 2 singularidades, la primera en $r = 2M$ y la segunda en $r = 0$, por lo que nuestra variedad se divide en dos componentes disconexas, $0 < r < 2M$ y $2M < r < \infty$. Ahora, dado que asumimos que la variedad espaciotiempo es conexa tenemos que escoger una de las dos regiones y lo más lógico es tomar la region $r > 2M$. Entonces sería natural considerar a la métrica de Schwarzschild como la solución buscada fuera del cuerpo ($r > 2M$) de masa M creador del campo.

¿Qué sucede en las puntos sobre $r = 2M$? Se puede demostrar que aunque la métrica es singular en $r = 2M$ en las coordenadas de Schwarzschild (t, r, θ, ϕ) ningún polinomio escalar del tensor de curvatura y la métrica diverge cuando $r \to 2M$, lo cual sugiere que la singularidad $r = 2M$ no es una singularidad física sino una singularidad del sistema de coordenadas escogido. Basta con efectuar un cambio de coordenadas para extender la métrica de Schwarzschild hasta $r = 2M$. Por otro lado, el escalar $R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma}$ diverge como M^2/r^6 cuando r tiende a cero, por lo que $r = 0$ si es una singularidad del espaciotiempo.

Finalmente la region $r < 2M$ es bastante extraña, y es la que técnicamente se define como un agujero negro, que es una region del espaciotiempo rodeada de un horizonte de eventos (los puntos sobre $r = r_s = 2M$)

Cuando M es negativa, el horizonte que cubre a la singularidad en $r = 0$ desaparece y puede ser vista por todos los observadores que pueden ser afectados causalmente por ella, lo cual es un problema, por lo que se conjetura que dicha métrica no podría aparecer como el resultado del colapso gravitatorio de una estrella ordinaria, lo que genera una especie de censura en la clase de singularidades que pueden aparecer. A tal conjetura se la denomina conjetura del censor cósmico (CCC). Para una introdución muy didáctica ver Ref. [4]

Los horizontes de eventos de agujeros negros estacionarios son generalmente horizontes de Killing, hipersuperficies invariantes bajo alguna isometría donde el módulo del vector correspondiente de Killing k^μ de la métrica se anula ($k^2 = 0$). En el caso de Schwarzschild $k^\mu = \delta^{\mu t}$ el cual genera traslaciones en el tiempo: $k^2 \mid_{r=r_s} = g_{tt} \mid_{r=r_s} = 0$. Además el horizonte de sucesos $r = r_s$ es invariante bajo traslaciones temporales. Los horizontes de Killing (por tanto los horizontes de eventos) son hipersuperficies nulas. Además, como mencionamos anteriormente el horizonte de Killing es una 2-esfera de radio r_s, la cual es la única topología permitida de acuerdo a los teoremas del censor topológico [5]. Estos teoremas dependen fuertemente de las condiciones de positividad de la energía y fallan cuando se introduce una constante cosmológica por lo que es posible encontrar agujeros negros topológicos cuyos horizontes de sucesos pueden tener la topología de cualquier superficie de Riemann compacta.

Para los horizontes de Killing se puede definir la gravedad superficial κ como

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2}(\nabla^\mu k^\nu)(\nabla_\mu k_\nu)_{horizonte}. \tag{2.4}$$

Si $\kappa \neq 0$, entonces el horizonte de Killing es parte del horizonte de bifurcación, mientras que si $\kappa = 0$ entonces el horizonte se denomina degenerado.

En particular, para el caso de las métricas esféricamente simétricas, las cuales siempre se pueden escribir como

$$ds^2 = g_{tt}(r)dt^2 + g_{rr}(r)dr^2 - r^2 d\Omega^2_{(2)}, \tag{2.5}$$

donde $d\Omega^2_{(2)}$ es la métrica de la esfera unidad, el vector de Killing k^μ es $\delta^{\mu t}$ y la gravedad superficial es

$$\kappa = \frac{1}{2}\frac{\partial_r g_{tt}}{\sqrt{-g_{tt}g_{rr}}}. \tag{2.6}$$

En el caso del agujero negro de Schwarzschild se convierte en

$$\kappa = \frac{c^4}{4G_N^{(4)}M}, \tag{2.7}$$

donde $G_N^{(4)}$ es la constante gravitacional en cuatro dimensiones. Se puede demostrar que la gravedad superficial es también constante en casos más generales. Físicamente, la gravedad superficial es la fuerza que debe ser aplicada en el ∞ para contener una masa unidad en su sitio cuando $r \to r_s$ y tiene dimensiones de aceleración, LT^{-2} .

Finalmente se puede demostrar [23] (teoremas de unicidad) que los únicos agujeros negros en ausencia de momento angular y otros campos son de tipo Schwarzschild, que el agujero con carga eléctrica es Reissner Nordström y el agujero con masa y momento angular es de tipo Kerr. Además, no existen agujeros negros sin cargas eléctricas con un campo escalar no constante. Se concluye que no pueden existir agujeros negros con otras características ("pelos") que no sean M, J y Q (y en general otras cargas localmente conservadas). Aunque no ha sido probado en todos los casos, esto sugiere que los agujeros negros estacionarios no tienen "pelo", a esto se le conoce con el nombre de conjetura del no-pelo. Para un tratamiento detallado ver [23].

2.2. Métrica de Schwarzschild d-dimensional

De forma similar al caso $d = 4$ queremos encontrar soluciones a las ecuaciones Einstein d-dimensionales en el vacío. Así, buscamos soluciones estáticas y esféricamente simétricas (invariancia bajo las transformaciones globales $SO(d-1)$) por lo que se propone el Ansatz

$$ds^2 = W(r)(dct)^2 - W^{-1}(r)dr^2 - R^2(r)d\Omega^2_{(d-2)}, \tag{2.8}$$

donde $d\Omega^2_{(d-2)}$ es el elemento de métrica en la $(d-2)-esfera\ S^{d-2}$. Se encuentra que

$$W = 1 - \frac{16\pi G_N^{(d)} M c^{-2}}{(d-2)w_{(d-2)} r^{d-3}}, \tag{2.9}$$

$$R^2 = r^2 \tag{2.10}$$

con

$$w_{(d-2)} = \int_{S^{d-2}} d\Omega^{d-2} = \frac{2\pi^{d-1}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}, \tag{2.11}$$

el volumen de S^{d-2}.

La ecuación anterior es la generalización de la métrica de Schwarzschild, y al igual que su contraparte en $d = 4$ todas estas métricas poseen horizontes de eventos en $r = \frac{16\Pi G_N^d M c^{-2}}{(d-2)w_{(d-2)}}$.

2.3. La solución de Reissner-Nordstrom

Luego de estudiar soluciones estáticas y esféricamente simétricas de las ecuaciones de Einstein en el vacío pasamos a estudiar la soluciones de las ecuaciones de Einstein en presencia de campos de materia. La acción para la gravedad acoplada a un campo vectorial abeliano A_μ se denomina: acción de Einstein-Maxwell. Dicha acción proviene de sumar la acción de Hilbert-Einstein con la acción de Maxwell haciendo la sutitución $\eta_{\mu\nu}, \partial_\mu,$ y d^4x por $g_{\mu\nu}, \nabla_\mu,$ y $d^4x\sqrt{|g|}$ Entonces obtenemos (considerando que por la usencia de torsión $\nabla_{[\mu}A_{\nu]} = \partial_{[\mu}A_{\nu]}$)

$$S_{EM}(g_{\mu\nu}A_\mu) = S_{HE}[g] + \frac{1}{c}\int d^4x\sqrt{|g|}\left(-\frac{1}{4}F^2\right), \tag{2.12}$$

donde

$$F_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu}A_{\nu]}, \qquad F^2 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \qquad F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu = dA, \qquad A = A_\mu dx^\mu. \tag{2.13}$$

El tensor F y la acción S_{EM} son invariantes bajo las transformaciones gauge abelianas

$$\tilde{A} = A + d\varphi \ , \tag{2.14}$$

con φ una función suave denominada parámetro gauge. La invariancia gauge de F es una consecuencia directa de $d^2 = 0$.

Aunque las ecuaciones de movimiento que se obtienen de la acción de Einstein-Maxwell están en términos de F y se resuelven en términos de ésto, estamos interesados en el campo vectorial A, de modo que debemos asegurarnos que el F que obtengamos está relacionado con algún campo vectorial a través de la ecuación (2.13). Resulta ser que A existe, al menos localmente, si se satisface la identidad de Bianchi electromagnética

$$dF = 0. \tag{2.15}$$

La ecuación de Maxwell (una de las ecuaciones de movimiento que se deriva de (2.12) se escribe como

$$d * F = 0. \tag{2.16}$$

Existe un hecho interesante en estas ecuaciones: el par de ecuaciones (2.15) (2.16) son invariantes bajo la transformación $F \to *F$ (por el hecho de que $* * F = -F$). Esta transformación se denomina transformación de dualidad eléctrico-magnética. Es necesario recalcar que los pares de ecuaciones mencionados (la ecuación de Maxwel y la identidad de Bianchi) son invariantes bajo la sustitución (invertible) de F por cualquier combinación lineal de F y ${}^*F$. Para un estudio más detallado de esta dualidad y sus implicaciones ver Ref. [6]

Nuevamente buscamos soluciones estáticas esféricamente simétricas por lo que imponemos el ansatz para la métrica

$$ds^2 = W(r)(dct)^2 - W^{-1}(r)dr^2 - R^2(r)d\Omega^2_{(2)}, \tag{2.17}$$

y con el Ansatz para el campo electromagnético, (el campo de una partícula puntual cargada en reposo) , como

$$F_{tr} \sim \pm \frac{q}{R^2(r)}. \tag{2.18}$$

Los signos $\pm$ corresponden a los dos posibles signos de la carga eléctrica. La métrica no puede depender de este signo puesto que la acción es invariante bajo la simetría $F \to -F$. La solución que se obtiene, se denomina de Reissner-Nordström (RN) y se puede escribir como [23]

$$\begin{aligned} ds^2 &= f(r)dt^2 - f^{-1}(r)dr^2 - r^2 d\Omega^2_{(2)} && (2.19)\\ f(r) &= \frac{(r-r_+)(r-r_-)}{r^2} && (2.20)\\ r_\pm &= G_N^{(4)}(M \pm (M^2 - 4q^2)^{1/2}), && (2.21) \end{aligned}$$

donde q es la carga eléctrica normalizada.

La métrica de Reissner-Nordström describe el campo electromagnético creado por un objeto esférico (o puntual) eléctricamente cargado de masa M (que incluye la energía asociada a la presencia del campo electromagnético) y carga eléctrica q visto por un observador estático lejano para el que las coordenadas $\{t, r, \theta, \phi\}$ han sido adaptadas. La solución de Schwarzschild aparece cuando hacemos $q = 0$.

Para la métrica de Reissner-Nordström la gravedad superficial viene dada por:

$$\kappa = \frac{1}{2}\frac{r_+ - r_-}{r_+^2} = \frac{\sqrt{M^2 - 4q^2}}{r_+^2}, \tag{2.22}$$

y en el caso cuando $q = 0$ se recupera la expresión usual (Schwarzschild) para gravedad superficial $\kappa = 1/4G^{(4)}M$.

Al igual que en el caso de la métrica de Schwarzschild, esta métrica es singular singular en $r = 0$, pero además es singular en r_- y r_+. La singularidad en $r = 0$ es una singularidad del tensor de curvatura, por lo tanto es una singularidad física, pero no la singularidad en $r_\pm$. De hecho y similarmente al caso de Schwarzschild r_+ es un horizonte de eventos de área

$$A = 4\pi r_+^2. \tag{2.23}$$

Este horizonte de eventos rodea a la singularidad en $r = 0$, mientras que r_- es un horizonte de Cauchy, por lo que en el espaciotiempo de Reissner-Nordström no existe una hipersuperficie de Cauchy en la cual se pueda dar condiciones iniciales para un campo arbitrario y predecir su evolución en todo el espacio tiempo. Por definición sólo podemos tener una superficie de Cauchy para la región que está fuera del horizonte de Cauchy. Aunque el espaciotiempo de Reissner-Nordström satisface la conjetura del censor cósmico débil, lo viola en su forma fuerte: un observador que viaja en el interior del horizonte de sucesos podrá observar la singularidad en $r = 0$.

Si $M < 2\,|q|$ entonces no existe horizonte de eventos y por lo tanto la solución tiene una singularidad desnuda.

Se puede demostrar [7] que si se envía sobre el agujero negro una partícula test masiva cargada es posible aumentar la carga del agujero negro. En el caso límite cuando $M = 2\,|q|$ se demuestra [7] que el agujero negro no es capaz de absorber a la partícula test cargada, en este caso límite se dice que el agujero negro es *extremo*. Así, cuando $M = 2\,|q|$ los dos horizontes $r_\pm$ coinciden,

$$r_+ = r_- = G_N^{(4)} M, \tag{2.24}$$

y además no existe cambio en la signatura a través del horizonte resultante, que a su vez tiene un área dada por

$$A_{ext} = 4\pi r_+^2 = 4\pi (G_N^{(4)} M)^2 \tag{2.25}$$

Los agujeros negros extremos, como veremos más adelante, juegan un papel muy importante dentro de las teorías de supergravedad.

Si desplazamos la coordenada radial $r = \rho + G_N^{(4)} M$ en la métrica extrema de Reissner-Nordström obtenemos

$$ds^2 = \left(1 + \frac{G_N^{(4)} M}{\rho}\right)^{-2} dt^2 - \left(1 + \frac{G_N^{(4)} M}{\rho}\right)^{2} (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_{(2)}^2), \tag{2.26}$$

y definiendo nuevas coordenadas cartesianas $\vec{x}_3 = (x^1, x^2, x^3)$ tal que $|\vec{x}_3| = \rho$ y $d\vec{x}_3 = d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_{(2)}^2$ se obtiene

$$\begin{aligned} ds^2 &= H^{-2} dt^2 - H^2 d\vec{x}_3, && (2.27)\\ A_\mu &= -2\delta_{\mu t} sign(q)(H^{-1} - 1), && (2.28)\\ H &= 1 + \frac{2G_N^{(4)} |q|}{|\vec{x}_3|} = 1 + \frac{G_N^{(4)} M}{|\vec{x}_3|}. && (2.29) \end{aligned}$$

Obsérvese que, en este caso, el horizonte de eventos se ubica en $\vec{x}_3 = 0$.

Si tomamos el límite de cercanía del horizonte ($\rho \to 0$) en la metrica de Reissner-Nordström para agujeros negros extremos obtenemos una nueva métrica con función armónica $H = 2G_N^{(4)} |q| / \rho$ dada por

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= \left(\frac{\rho}{2G_N^{(4)}\,|q|}\right)^2 dt^2 - \left(\frac{\rho}{2G_N^{(4)}\,|q|}\right)^{-2} d\rho^2 - (2G_N^{(4)}\,|q|)^2 d\Omega^2_{(2)}, && (2.30)\\
A_t &= -\frac{\rho}{2G_N^{(4)} q}, \qquad F_{t\rho} = \frac{1}{G_N^{(4)} q}. && (2.31)
\end{aligned}
$$

La familia de métricas (2.30) se conoce como solución Robinson-Bertotti y describe a la métrica extrema de Reissner-Nordström cerca del horizonte. Ésta es la única solución de las ecuaciones de Einstein-Maxwell que es homogénea y tiene una campo electromagnético homogéneo no nulo. Tal métrica es el producto directo de dos espacios 2-dimensionales de curvatura constante: AdS_2 (Anti-de Sitter bi-dimensional) con radio $R_{AdS} = 2G_N^{(4)}\,|q|$ y por tanto con curvatura escalar

$$
R^{(2)} = -\frac{1}{(2G_N^{(4)}\,|q|^2)}, \tag{2.32}
$$

en la parte $t-\rho$ de la métrica, con otro espacio bidimensional: la $2-esfera$ de radio $R_S = 2G_N^{(4)}\,|q|$ y curvatura

$$
R^{(2)} = +\frac{1}{(2G_N^{(4)}\,|q|^2)}. \tag{2.33}
$$

Evidentemente esta métrica no es asintóticamente plana.

Recordemos que AdS_2 es invariante bajo el grupo de isometría $SO(1,2)$ y S^2 es invariante bajo $SO(3)$. Comparando los grupos de isometría de la solución de Robinson-Bertotti con el grupo de isometría de la solución extrema de Reissner-Nordström podemos ver que existe una aumento en la simetría cuando nos acercamos hacia el horizonte, lo cual sugiere considerar la solución de Robinson-Bertotti como el vacío de la teoría alternativo a Minkowski. Además, estos nos permite interpretar la solución extrema de Reissner-Nordström como un soliton gravitacional, que interpola entre el vacío Minkowski en el infinito y la solución de Robinson-Bertotti en el horizonte.

2.4. Métrica de Resissner-Nördstrom d-dimensional

En d-dimensiones la métrica Reissner -Nordström se escribe

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2_{(d-2)}, && (2.34)\\
f(r) &= 1 - \frac{2\mu}{r^{d-3}} + \frac{q}{r^{2(d-3)}}, && (2.35)\\
\mu &= \frac{8\pi GM}{(d-2)w_{(d-2)}}, \qquad q = \frac{8\pi GQ^2}{(d-3)(d-2)w_{(d-2)}}, && (2.36)
\end{aligned}
$$

Los horizontes se ubican en

$$
r_{\pm}^{d-3} = \mu \pm \sqrt{\mu^2 - q}\ . \tag{2.37}
$$

En el caso de extremalidad $\mu^2 = q$,por lo que al igual que en el caso 4-dimensional se tiene que $r_- = r_+$ y también se tiene

$$
f(r) = \left(1 - \left(\frac{r_+}{r}\right)^{d-3}\right)^2 \tag{2.38}
$$

2.5. Supersimetría

Uno de los aspectos más fundamentaes de la Física es la existencia de simetrías en las teorías que describen los diferentes fenómenos. En la década del 60 se investigaba (en Física de Partículas) acerca de todas las simetrías que una teoría podría tener. En tal época se conocía la simetría bajo el grupo de Poincaré $ISO(1,3)$ definida por los generadores $M^{\mu\nu}$ del grupo de Lorentz $SO(1,3)$ más los generadores de las simetrías de traslación P^{μ}, y que satisfacen las relaciones de conmutación

$$
\begin{aligned}
[P^{\mu}, P^{\nu}] &= 0, && (2.39)\\
[M^{\mu\nu}, P^{\sigma}] &= i(P^{\mu}\eta^{\nu\sigma} - P^{\nu}\eta^{\mu\sigma}), && (2.40)\\
[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] &= i(M^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho} + M^{\nu\rho}\eta^{\mu\sigma} - M^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} - M^{\nu\sigma}\eta^{\mu\rho}) && (2.41)
\end{aligned}
$$

Pero además se conocía que en la física de partículas existen simetrías internas , como la simetría local $U(1)$ del electromagnetismo, y la simetría global $SU(2)$ de isospín (más tarde se descubriría la simetría local $SU(3)$ de QCD). Los generadores T_r del álgebra de las transformaciones internas y de las del grupo de Poincaré forman un álgebra de Lie y por tanto satisfacen:

$$[T_r, T_s] = f_{rs}{}^{t} T_t. \tag{2.42}$$

Conocidas tales simetrías se especulaba si podría existir una nueva simetría que permita descubrir nueva Física, esta simetría debía combinar los dos tipos de simetrías, las internas y las del grupo de Poincaré. Así en 1967 Coleman y Mandula [8] demostraron que no había manera de combinar las simetrías, ya que si se hacía las matrices S para los procesos involucrados se anulaban. Afortunadamente, se dieron cuenta de que la imposibilidad de combinar dichas simetrías estaba sustentada en la hipótesis de que el álgebra resultante debía ser un álgebra de Lie, por lo que al relajar tal suposición, permitiento que el álgebra final sea un álgebra de Lie graduada se pudo construir un a nueva simetría, la *Supersimetría*.

Luego de varios trabajos en la década de los 70 entre los que destacan, Golfand& Likhtman (1971); Ramond, Neveu-Schwarz,Gervais,Sakita (1971);Volkov, Akulov (1973), Wess, Zumino (1974), Haag, Lopuszanski, Sohnius (1975), se pudo establecer formalmente la idea de Supersimetría.

De manera formal, un álgebra de Lie graduada es un álgebra tal que algunos de sus generadores Q^A_α, satisfacen relaciones de anticonmutacion (en lugar de conmutación como en el caso del álgebra de Lie). Por lo que para extender el álgebra de Poincaré agregamos $4\mathcal{N}$ generadores Q^A_α con $A = 1, ..., \mathcal{N}$; $\alpha = 1, 2.$ que satisfacen las relaciones de conmutación y anticonmutación siguientes.

$$[Q^A_\alpha, M^{\mu\nu}] = (\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q^A_\beta \tag{2.43}$$
$$[Q^A_\alpha, P^\mu] = [\bar{Q}^A_{\dot\alpha}, P^\mu] = 0 \tag{2.44}$$
$$\{Q^A_\alpha, Q^B_\beta\} = \epsilon_{\alpha\beta} Z^{AB} \tag{2.45}$$
$$\{Q^A_\alpha, \bar{Q}_{\dot\beta B}\} = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta} P_\mu \delta^A_B \tag{2.46}$$

donde las Z^{AB} se denominan cargas centrales. Estas cargas conmutan con todos los generadores. A los generadores Q^A_α y $\bar{Q}^A_{\dot\alpha}$ se los suele denominar *supercargas*. De acuerdo con el teorema de Coleman-Mandula, las cargas bosónicas se limitan a $M_{\mu\nu}$ y P_μ más cargas escalares de simetría interna y el subálgebra de Lie es la suma directa del álgebra de Poincaré con un álgebra compacta de dimensión finita proveniente de la simetría interna.

Las transformaciones de supersimetría sobre los campos se escriben como

$$\delta_\epsilon \varphi = \epsilon^\alpha_A Q^A_\alpha \varphi. \tag{2.47}$$

Así, de manera general las transformaciones de supersimetría que transforman campos bosónicos en campos fermiónicos y viceversa se pueden escribir como:

$$\delta_\epsilon B \sim \bar{\epsilon} F, \tag{2.48}$$

$$\delta_\epsilon F \sim B\epsilon + \partial\epsilon, \tag{2.49}$$

donde B representa a una superposición bosónica de campos y F a una fermiónica.

2.6. Agujeros negros supersimétricos

Una teoría se dice supersimétrica si es invariante bajo la acción de las transformaciones (2.48) y (2.49). Si ademas el parámetro de la transformación $\epsilon(x)$ depende del punto en el espaciotiempo que se evalúe (transformaciones locales) entonces todos los campos se acoplarán al campo gravitatorio por lo que las teorías invariantes bajo tales transformaciones se denominan teorías de supergravedad.

Las supergravedades son una generalización de la Relatividad General, éstas teorías permiten el acomplamiento de fermiones al campo gravitatorio, y son teorías que contienen materia y con ciertas restricciones derivadas de alguna forma por las transformaciones (2.48) y (2.49).

Los campos bosónicos se transforman en representaciones tensoriales del grupo de Lorentz $SO(1,3)$, pero los campos fermiónicos se transforman en representaciones espinoriales del recubridor universal del grupo de Lorentz $Spin(1,3)$. De este modo, para incluir fermiones en una teoría del espaciotiempo como la Relatividad General se necesita introducir una estructura conocida como fibrado de espín, y de la cual los fermiones vendrían a ser secciones.

Si la variedad espaciotiempo admite una estructura de fibrado de espín, entonces se puede usar el formalismo de primer orden CSK (Cartan-Scima-Kibble). En dicho formalismo la métrica $\mathbf{g}$ deja de ser el campo asociado a la gravedad, siendo reemplazada por la tétrada $\mathbf{e}$, y ambas se relacionan por $g = \eta(\mathbf{e}, \mathbf{e})$. La elección de la tétrada $\mathbf{e}$ hace manifiesta la invariancia de la teoría bajo transformaciones locales de $Spin(1,3)$ y permite definir la conexión de espín ω, la cual se sonsidera un campo de la teoría. Tal conexión permite definir la derivación covariante con respecto a la acción de dicho grupo. Ahora, la acción de Einstein-Hilbert se escribe

$$S_{EH}(\mathbf{e},\omega) = \int *R(\omega) \wedge e \wedge e. \tag{2.50}$$

Una vez que sabemos como inlcluir fermiones en la Reatividad General, cabe preguntarse si las consecuencias de la teoría (agujeros negros por ejemplo) siguen siendo similares.

El caso más interesante es el del agujero negro de Reissner-Nordtsröm. Recordemos que este agujero es estacionario (aunque también es estático) y tiene energía finita (masa). Es regular en el sentido de que no tiene una singularidad desnuda y además interpola entre el vacío Minkowski en el infinito y la solución de Robinsonon-Bertotti Ec.(2.30) en el horizonte, todas estas características nos permitieron afirmar que el agujero negro de Reissner-Nordström extremo es un solitón gravitacional.

En el contexto de la gravedad, las simetrías del espaciotiempo son generadas por los vectores de Killing. El espaciotiempo de Minkowski tiene diez vectores de Killing, pues es invariante bajo el grupo de Poincaré. Evidentemente un espaciotiempo sin simetrías no tendrá vectores de Killing. El agujero negro de Reissner-Nordström en cuatro dimensiones tiene un vector de Killing tipo tiempo, el cual corresponde a la invariancia bajo traslaciones temporales, y también tiene tres vectores de Killing tipo espacio, que corresponden a la invariancia bajo rotaciones espaciales. Sin embargo, la invariancia bajo traslaciones espaciales esta rota, como corresponde a una configuración de campos con energía finita.

De manera similar sucede en las transformaciones de supersimetría. Si podemos encontrar parámetros de transformaciones de superismetría $\epsilon(x)$ tal que una configuración particular de campos es invariante, entonces se tiene el análogo a una isometría. A tales parámetros se los denomina espinores de Killing. De este modo modo, una configuración de campos bosónicos ϕ_0 se dice supersimétrica si existen unos parámetros $\epsilon(x)$ de la transformacón de supersimetría tales que:

$$\delta_{\epsilon(x)}\phi \mid_{\phi_0} = 0. \tag{2.51}$$

Como se indica en la ecaución anterior, primero tenemos que efecutuar una variación supersimétrica con parámetro $\epsilon(x)$ de los campos ϕ y luego evaluar en la configuración ϕ_0. A la ecuación anterior se la conoce como ecuacion de los espinores de Killing (KSE).

Los espinores de Killing están asociados con soluciones especiales clásicas de las ecuaciones de movimiento de una teoría de supergravedad. Estos contienen un número finito de parámetros constantes y determinan el algebra residual global supersimétrica de la solución. En algunos casos es más fácil encontrar soluciones clásicas de las ecuaciones de movimiento estudiando las condiciones para los espinores de Killing en lugar de las mismas ecuaciones de movimiento.

Existen similitudes entre el análisis usando espinores de Killing y la técnica introducida por Bogomol'nyi con los monópolos magnéticos. En ambos formalismos las componentes de los campos bosónicos se relacionan por ecuaciones diferenciales de primer orden. Por esto una solución de supergravedad que tiene espinores de Killing se suele llamar solución BPS. Para más detalles ver [24].

El agujero negro extremo de Reissner-Nordström es una solución de la teoría de Einstein -Maxwell, la cual puede ser embebida en supergravedad $\mathcal{N} = 2$, añadiendo dos campos extra (los gravitinos). Además es una solución de la teoría extendida cuando igualamos los gravitinos a cero. Sumado a todo lo anterior, este agujero negro es una solución supersimétrica, en el sentido de que posee espinores de Killing.

Puesto que la solución de Robinson-Berttoti Ec(2.30) tiene el número máximo de espinores de Killing es una alternativa para el vacío de una supergravedad con $\mathcal{N} = 2$, dado que el agujero de Reissner-Nordström extremo es asintóticamente Minkowski, se interpreta como un solitón interpolante entre dos vacíos (el de Minkowski y el de Berttoti-Robinson).

Estamos interesados en averiguar cuándo la solución de Reissner-Nordström- (Anti-) de Sitter topológica en cinco dimensiones es supersimétrica, es decir buscar la existencia de espinores de Killing, lo que implicaría resolver una ecuación del tipo Ec. (2.49), Para esto necesitamos proveer una teoría de supergravedad en la cual embeber nuestra solucíon. Usaremos la supergravedad $\mathcal{N} = 1, d = 5$ pura, donde la configuración de campos es puramente bosónica y los únicos campos no triviales son el vielbein (gravitón) y el gravifotón.

Puesto que buscamos soluciones puramente bosónicas las transormaciones de supersimetría de los bosones son triviales ya que se transforman en cantidades bosónicas, por lo que los únicos que aportan son los fermiones pues se transforman en bosones. Así, de las tres posibles KSE's la única que tenemos que resolver es la del fermión, el gravitino.

3. La acción efectiva

Como vimos en capítulos anteriores la solución de Reissner-Nordström juega un papel muy importante cuando introducimos la supersimetría. Consideremos la familia de soluciones de Reissner-Nordström $d-$ dimensionales no extremas Ec.(2.19). La acción de $d-$dimensional de Einstein -Maxwell se escribe como

$$S_{EM}(g_{\mu\nu}, A_\mu) = \frac{1}{16G_N^{(d)}} \int d^d x \sqrt{|g|} \left(R - \frac{1}{4} F^2 \right), \tag{3.1}$$

donde $G_N^{(d)}$ es la constante de Newton $d-$dimensional. Entonces la métrica se puede poner en la forma

$$ds^2 = H^{-2} W dt^2 - H^{\frac{2}{d-3}} \left(W^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2_{(d-2)} \right), \tag{3.2}$$

donde

$$H = 1 + \frac{h}{r^{d-3}} \qquad W = 1 - \frac{2\mathfrak{B}}{r^{d-3}}, \tag{3.3}$$

donde $d\Omega^2_{(d-2)}$ es la métrica de la $(d-2)$-esfera unidad, con h y $\mathfrak{B}$ (el parámetro de no-extremalidad) dados por

$$\mathfrak{B} = \frac{4\pi G_N^{(d)}}{(d-2)\omega_{(d-2)}} \sqrt{M^2 - 2\frac{(d-2)}{(d-3)} q^2}, \tag{3.4}$$

$$h = \frac{4\pi G_N^{(d)}}{(d-2)\omega_{(d-2)}} M - \mathfrak{B}, \tag{3.5}$$

donde M es la masa ADM y q la carga eléctrica normalizada. La métrica 3.2 describe el exterior de un agujero negro de Reissner-Nordström cuyos horizonte es:

$$\text{Horizonte de eventos} \quad : \quad r^{d-3} = 2\mathfrak{B} \geqq 0. \tag{3.6}$$

Notemos además que cuando $\mathfrak{B} = 0$ recuperamos el agujero negro de RN extremal en coordenadas isotrópicas. Como es bien sabido, en este límite existen muchas otras soluciones de la misma forma con H reemplazada por una función armónica arbitraria en el espacio $\mathbb{R}^{d-1}$. En este sentido, la métrica no extrema descrita se puede entender como una deformación de la métrica extrema añadiendo una función armónica W (factor de no-extremalidad) que contiene al parámetro $\mathfrak{B}$.

Si efectuamos el cambio de coordenadas

$$r^{d-3} = \frac{2\mathfrak{B}}{1 - e^{-2\mathfrak{B}\rho}}, \tag{3.7}$$

en la métrica (3.1) obtenemos

$$ds^2 = e^{2U} dt^2 - e^{-\frac{2}{d-3}U} \gamma_{\underline{m}\underline{n}} dx^{\underline{m}} dx^{\underline{n}}, \tag{3.8}$$

donde la función e^{2U} viene dada por

$$e^{2U} = \left(\frac{h + 2\mathfrak{B}}{2\mathfrak{B}} - \frac{h}{2\mathfrak{B}} e^{-2\mathfrak{B}\rho} \right)^{-2} e^{-2\mathfrak{B}\rho}, \tag{3.9}$$

y la métrica espacial γ se escribe como

$$\gamma_{\underline{m}\underline{n}} dx^{\underline{m}} dx^{\underline{n}} = \left(\frac{\mathfrak{B}}{senh(\mathfrak{B}\rho)} \right)^{\frac{2}{d-3}} \left[\left(\frac{\mathfrak{B}}{senh(\mathfrak{B}\rho)} \right)^2 \frac{d\rho^2}{(d-3)^2} + d\Omega^2_{(d-2)} \right]. \tag{3.10}$$

Ahora el horizonte de eventos se encuentra en $\rho \to +\infty$. Además el horizonte interior no está cubierto por ρ, pues en general ρ no puede tomar valores negativos.

En el límite extremo ($\mathfrak{B} \to 0$) la métrica transversa toma la forma

$$\gamma_{\underline{m}\underline{n}} dx^{\underline{m}} dx^{\underline{n}} = \frac{1}{\rho^{\frac{2}{d-3}}} \left[\left(\frac{d\rho}{(d-3)\rho} \right)^2 + d\Omega^2_{(d-2)} \right] \tag{3.11}$$

que es la métrica euclidiana en $\mathbb{R}^{d-1}$, basta hacer el cambio de coordenadas $\rho = r^{3-d}$.

En general, se supone que todas las métricas estáticas de agujeros negros en $d \geqq 4$ se pueden poner en la forma (3.8) con la métrica transversa (3.10) y para diferentes funciones $U(\rho)$.

Nosotros estamos interesados en agujeros negros de la acción $d-$dimensional

$$S(g_{\mu\nu}, A^{\Lambda}_{\mu}, \phi^i) = \int d^dx\sqrt{|g|}\left\{R + \mathcal{G}_{ij}\partial_\mu\phi^i\partial^\mu\phi^j + 2I_{\Lambda\Sigma}F^{\Lambda}_{\mu\nu}F^{\Sigma\mu\nu} - V(\phi)\right\}, \qquad (3.12)$$

que generaliza la acción estudiada en Ref [12] incluyendo un potencial escalar arbitrario. Para el caso en que $V(\phi)$ es constante se tiene (con la normalización estándar) que

$$V(\phi) = (d-2)\Lambda, \qquad (3.13)$$

siendo Λ la constante cosmológica. Para el caso de una supergravedad específica, la matriz cinética $I_{\Lambda\Sigma}(\phi)$, la métrica de los escalares $\mathcal{G}_{ij}(\phi)$, el potencial escalar $V(\phi)$ y el contenido de los campos están determinados por la invariancia bajo las transformaciones de supersimetría. Las soluciones de teorías con un potencial escalar no trivial pueden tender asintóticamente en el infinito espacial a espaciotiempos más generales que el de Minkowski. Así, teniendo en cuenta este hecho, un Ansatz para la métrica que vamos a usar es el de la ec. (3.8). Ahora, la métrica transversa $(d-2)$-dimensional γ ya no puede tener una forma fija como en el caso de los espacios asintóticamente planos. Como se demuestra en las Ref. [9], [10] para agujeros negros $4-$dimensionales supersimétricos AdS , la métrica transversa debe depender de al menos una función arbitraria.

Siguiendo la Ref. [11] escogemos la métrica transversa de modo que tenga la siguiente forma

$$\gamma_{\underline{mn}}dx^{\underline{m}}dx^{\underline{n}} = dr^2 + R^2 d\Omega^2_{(d-2)}(\kappa), \qquad (3.14)$$

donde R es una función de la coordenada radial r (e^ψ en la Ref. [11]) y además

$$d\Omega^2_{(d-2)}(\kappa) = h_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta, \qquad (3.15)$$

es la métrica del espacio $(d-2)$-dimensional de curvatura constante κ por lo que su tensor de Ricci es

$$R_{\alpha\beta}(h) = (d-3)\kappa h_{\alpha\beta}. \tag{3.16}$$

Aquí κ puede tomar los valores $\kappa = -1$ (para $(d-2)$-esferas), $\kappa = 0$ (para el espacio euclidiano $(d-2)$-dimensional), y $\kappa = +1$ (para los espacios hiperbólicos $(d-2)-$ dimensionales).

Si asumimos que los campos son estáticos y solo dependen de r y siguiendo los mismos pasos que en las Ref. [12], [13] se llega a un conjunto de ecuaciones de movimiento para las variables U, R, ϕ, ecuaciones que pueden ser derivadas de la acción efectiva siguiente

$$\begin{aligned} S(U,R,\phi^i) \;=\; & \int dr\, R^{d-2} \left\{ \frac{(d-2)}{(d-3)}\dot{U}^2 + \mathcal{G}_{ij}\dot{\phi}^i\dot{\phi}^j - (d-2)(d-3)\frac{\dot{R}^2}{R^2} \right. \\ & \left. +(d-2)(d-3)\frac{\kappa}{R^2} - \frac{(d-2)}{(d-3)}e^{2U}R^{-2(d-2)}V_{\rm bh} + e^{-\frac{2}{(d-3)}U}V(\phi) \right\} \end{aligned} \tag{3.17}$$

y fijando el valor del hamiltoniano (que se conserva, debido a que el lagrangiano no depende explícitamente de r) a cero, entonces obtenemos la restricción hamiltoniana:

$$\begin{aligned} & \frac{(d-2)}{(d-3)}\dot{U}^2 + \mathcal{G}_{ij}\dot{\phi}^i\dot{\phi}^j - (d-2)(d-3)\frac{\dot{R}^2}{R^2} \\ -(d-2)(d-3)\frac{\kappa}{R^2} + & \frac{(d-2)}{(d-3)}e^{2U}R^{-2(d-2)}V_{\rm bh} - e^{-\frac{2}{(d-3)}U}V(\phi) \;=\; 0\,. \end{aligned} \tag{3.18}$$

El *potencial de agujero negro* V_{bh} se define como en el caso asintóticamente plano dado en [12],[13],[15]

$$V_{bh} = (\phi, Q) = 4\alpha^2\frac{(d-3)}{(d-2)}\mathcal{M}_{MN}(\phi)Q^M Q^N, \tag{3.19}$$

donde α es una constante de normalización para la carga eléctrica y magnética con:

$$(Q^M) = \begin{pmatrix} p^\Lambda \\ q_\Lambda \end{pmatrix}, \tag{3.20}$$

y la matriz simétrica $\mathcal{M}_{MN}$ se define en términos de $I \equiv (I_{\Lambda\Sigma})$ por:

$$\mathcal{M}_{MN} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I^{-1} \end{pmatrix}, \tag{3.21}$$

Para $d = 4$ recuperamos el resultado de Ref. [11] (incluída la restricción para el Hamiltoniano que no se menciona explícitamente). Para $d > 4$ estas coordenadas no son convenientes: de hecho en estas coordenadas las soluciones simples (Reissner-Nordström-de Sitter y anti-de Sitter) tienen formas muy complicadas.

Introduciremos una nueva coordenada radial ρ en la cual la métrica toma la forma

$$ds^2 = e^{2U}dt^2 - e^{-2U}d\rho^2 - P^2 d\Omega_{(d-2)}(\kappa), \tag{3.22}$$

donde

$$P \equiv R\, e^{-\frac{1}{d-3}U}. \tag{3.23}$$

Comparando (3.22) con (3.8) encontramos que la coordenada radial r y la nueva coordenada ρ se relacionan por

$$dr = e^{-\frac{d-4}{d-3}U} d\rho. \tag{3.24}$$

De este modo la acción efectiva se convierte en

$$\begin{aligned} S(U, R, \phi^i) \;\; = \;\; & \int d\rho \left\{ P^{d-2} e^{2U} \left[\frac{(d-2)}{(d-3)} \dot{U}^2 + \mathcal{G}_{ij} \dot{\phi}^i \dot{\phi}^j - (d-2)(d-3) \frac{\dot{R}^2}{R^2} \right] \right. \\ & \left. +(d-2)(d-3)\kappa P^{d-4} - \frac{(d-2)}{(d-3)} P^{-(d-2)} V_{\rm bh} + P^{d-2} V(\phi) \right\}, \end{aligned} \tag{3.25}$$

y la restricción hamiltoniana se convierte en

$$
\begin{aligned}
& P^{d-2}e^{2U}\left[\frac{(d-2)}{(d-3)}\dot{U}^{2}+\mathcal{G}_{ij}\dot{\phi}^{i}\dot{\phi}^{j}-(d-2)(d-3)\frac{\dot{R}^{2}}{R^{2}}\right] \\
& -(d-2)(d-3)\kappa P^{d-4}+\frac{(d-2)}{(d-3)}P^{-(d-2)}V_{\mathrm{bh}}-P^{d-2}V(\phi) \;=\; 0\,.
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

Considerando que en las soluciones más simples $P=\rho$ y puesto que P aparece como una combinación natural de R y e^U en la acción (3.25) podría ser de ayuda reemplazar R por P, haciendo este cambio obtenemos:

$$
\begin{aligned}
S(U,P,\phi^{i}) \;=\; & \int d\rho\left\{P^{d-2}e^{2U}\left[-(d-2)(d-3)\frac{\dot{P}^{2}}{P^{2}}-2(d-2)\frac{\dot{P}\dot{U}}{P}+\mathcal{G}_{ij}\dot{\phi}^{i}\dot{\phi}^{j}\right]\right. \\
& \left. +(d-2)(d-3)\kappa P^{d-4}-\frac{(d-2)}{(d-3)}P^{-(d-2)}V_{\mathrm{bh}}+P^{d-2}V(\phi)\right\}\,,
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

y la restricción hamiltoniana es

$$
\begin{aligned}
& P^{d-2}e^{2U}\left[-(d-2)(d-3)\frac{\dot{P}^{2}}{P^{2}}-2(d-2)\frac{\dot{P}\dot{U}}{P}+\mathcal{G}_{ij}\dot{\phi}^{i}\dot{\phi}^{j}\right] \\
& -(d-2)(d-3)\kappa P^{d-4}+\frac{(d-2)}{(d-3)}P^{-(d-2)}V_{\mathrm{bh}}-P^{d-2}V(\phi) \;=\; 0\,.
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

La acción puede ser simplificada integrando por partes el único término que contiene $\dot{U}$:

$$
\begin{aligned}
S(U,P,\phi^{i}) \;=\; & \int d\rho\left\{P^{d-2}e^{2U}\left[(d-2)\frac{\ddot{P}}{P}+\mathcal{G}_{ij}\dot{\phi}^{i}\dot{\phi}^{j}\right]\right. \\
& \left. +(d-2)(d-3)\kappa P^{d-4}-\frac{(d-2)}{(d-3)}P^{-(d-2)}V_{\mathrm{bh}}+P^{d-2}V(\phi)\right\}\,.
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

La ecuación de movimiento para U toma una forma muy simple

$$\ddot{P} = -\frac{1}{(d-2)}\mathcal{G}_{ij}\dot{\phi}^i\dot{\phi}^j P \tag{3.30}$$

y en los casos más simples, cuando las derivadas de los campos escalares se hacen cero recuperamos, luego de fijar algunas constantes, $P = \rho$.

3.1. El agujero negro de Reissner-Nordström-(Anti) de Sitter topológico

Reemplazando la Ec. (3.30) en la restricción hamiltoniana (3.28) obtenemos una ecuación aún más simple:

$$\frac{d(P^{d-3}\dot{P}e^{2U})}{d\rho} + (d-3)\kappa P^{d-4} - \frac{1}{(d-3)}P^{-(d-2)}V_{bh} + \frac{1}{(d-2)}P^{d-2}V(\phi) = 0, \tag{3.31}$$

que puede ser integrada en ausencia de escalares (es decir, $P = \rho, V_{bh} = Q^2$ y $V(\phi) = (d-2)\Lambda$) dando como resultado la solución Reissner-Nordström-(anti) de Sitter topológico en $d-$dimensiones.

$$e^{2U} = -\kappa + \frac{C}{\rho^{d-3}} + \left(\frac{Q}{(d-3)\rho^{d-3}}\right)^2 - \frac{\Lambda\rho^2}{(d-3)} \tag{3.32}$$

donde C es, salvo alguna constante de normalización, la masa. En el límite extremal $C = -2\,|Q|\,/(d-3)$ y para $\kappa = -1$ se tiene que

$$e^{2U} = \left(1 - \frac{Q}{(d-3)\rho^{d-3}}\right)^2 - (d-1)\Lambda\rho^2. \tag{3.33}$$

De forma general escribimos la Ec. (3.32) Ref. [16] como

$$W(r) = \kappa - \lambda r^2 - \frac{M}{r^{d-3}} + \frac{\bar{Q}^2}{r^{2(d-3)}}, \tag{3.34}$$

donde

$$\kappa = \{0, +1, -1\}, \qquad \lambda = \frac{\Lambda}{(d-3)}, \qquad \bar{Q} = \frac{Q}{(d-3)^2} \tag{3.35}$$

Queremos determinar las regiones en donde la métrica Ec. (3.34) contiene un agujero negro regular. Lo que buscamos es un horizonte de Killing u horizontes de Killing bifurcándose en $r = r_H$, que a su vez separa la región donde $W(r) > 0$ y la región que contiene una singularidad en $r = 0$.

Supongamos que $\lambda \geqslant 0$, y $\kappa \leqslant 0$, en esta región si $\bar{Q} = 0$,no existe horizonte puesto que W es negativa. Ahora si $\bar{Q} \neq 0$ entonces no existe una región (donde $W > 0$) separada de la parte singular por algún horizonte de Killing, por lo que el espaciotiempo contiene agujeros negros regulares solo cuando $\kappa = 1$ ó $\lambda < 0$. Para mas detalles ver [16].

Cuando $\bar{Q} \neq 0$, $\kappa = 1$ y $\Lambda = 0$, recuperamos la solución de Reissner-Nordström. En general este espaciotiempo tendrá un agujero negro regular si $\lambda_c \leq \lambda < 0$ si $= \{0, -1\}$, en el caso cuando $\kappa = 1$ tendrá un agujero negro si y solamente si Ref. [16]

$$\lambda_{c_1} \leq \lambda < \lambda_{c_2}, \qquad y \qquad 4(d-2)M^2 < \frac{(d-1)^2}{\bar{Q}^2}, \tag{3.36}$$

donde

$$\lambda_{c_1,c_2} = 2^{\frac{d-1}{d-3}} \frac{(d-3)}{(d-2)} \frac{(d-3)M \mp \sqrt{d}}{((d-1)M \mp \sqrt{d})^{\frac{d-1}{d-3}}}, \tag{3.37}$$

$$\lambda_c = \frac{d-3}{(d-2)a_c^2}\left(\kappa - \frac{M}{a_c^{d-3}}\right), \tag{3.38}$$

$$a_c^{d-3} = \frac{2(d-2)\bar{Q}^2}{(d-3)M + \sqrt{d}}. \tag{3.39}$$

Como señalamos, estas soluciones tienen una singularidad en $r = 0$ y las soluciones de agujeros negros tienen como mucho tres horizontes: El horizonte de Cauchy r_-, el horizonte de eventos r_+ y el horizonte cosmológico r_c que satisfacen $r_- \leqslant r_+ \leqslant r_c$.

Para el caso $d = 5$ y cuando dos de los horizontes coinciden en $r = \sigma$ entonces la ecuación (3.35) se puede escribir como:

$$W(r) = -\frac{\Lambda}{3}\frac{1}{r^4}(r-\sigma)^2(r+\sigma)^2\left(r^2 - \frac{3}{\Lambda} + 2\sigma^2\right). \tag{3.40}$$

Entonces, aparte del horizonte degenerado en $r = \sigma$ existe otro horizonte en

$$r_2 = \sqrt{3/\Lambda - 2\sigma^2}. \tag{3.41}$$

Usando la Ec (3.38) para $d = 5$ y la ecuación (3.41) podemos escribir la masa M y la carga $\bar{Q}$ como:

$$\begin{aligned} M &= \sigma^2(2 - \Lambda\sigma^2), \qquad (3.42) \\ \bar{Q}^2 &= \sigma^4(1 - 2\Lambda\sigma^2/3). \qquad (3.43) \end{aligned}$$

La condición $\bar{Q}^2 \geqslant 0$ implica que $\sigma \leqslant \sqrt{3/(2\Lambda)}$. Además, en el sector $r_2 > \sigma$ los parámetros $\bar{Q}$ y M crecen hasta que r_2 alcanza el punto crítico $\sigma = \sqrt{1/\Lambda}$ y entonces $\bar{Q}, M$ comienzan a decrecer hasta que σ alcanza su valor máximo permitido, este sector corresponde a $r_2 < \sigma$. Los tres sectores descritos corresponden a tres tipos de agujeros negros de Sitter extremos: los agujeros negros fríos, los ultra-fríos y los agujeros negros de Nariai respectivamente [17]. Se puede hacer un análisis similar en $d-$dimensiones, para más detalles ver Ref. [17].

3.2. Ecuaciones de primer orden

Como mostramos anteriromente , existen soluciones que preservan alguna fracción de la supersimetría, lo cual implica que estas soluciones satisfacen ciertas ecuaciones diferenciales que aparecen al demandar que las transformaciones de supersimetría sean satisfechas por fermiones que se anulan. Tales ecuaciones de primer orden se conocen como ecuaciones (BPS), luego de que Bogomolny, Prasad y Sommerfeld trabajaran en las ecuaciones de primer orden y soluciones exactas para monópolos magnéticos en la teoría de Yang- Mills-Higgs. Luego se demostró que este límite está intimamente ligado a la supersimetría conservada de solitones en teorías supersimétricas. El término ecuaón BPS ahora se usa de manera genérica para las ecuaciones de movimiento que se derivan de escribir la acción como suma de cuadrados, en particular las soluciones supersimétricas pertenecen a esta clase. Las soluciones no extremas, y dependientes del tiempo no pueden preservar la supersimetría en las teorías ordinarias de supergravedad por lo que intuitivamente se esperaría que dichas soluciones no se puedan encontrar a través de las ecuaciones BPS sino resolviendo las ecuaciones de segundo orden, sin embargo existen ejemplos de soluciones de agujeros negros extremos en supergravedad que no son supersimétricos, pero satisfacen ecuaciones de primer orden . Se puede demostrar que el agujero negro no extremal de Reisssner -Nordström , que es una solución de la teoría de Einstein Maxwell, se puede encontrar a partir de ecuaciones de primer orden, escribiendo a la acción como suma de cuadrados. Existen algunas otras soluciones que no preservan la supersimetría pero que pueden ser encontrados a partir de ecuaciones de primer orden. [14]

Ahora queremos encontrar la ecuaciones de primer orden provenientes de la acción en Ec. (3.27) por lo que necesitamos especificar los potenciales V_{bh} , $V(\phi)$. Más adelante veremos que en el caso de la supergravedad $\mathcal{N} = 1, d = 5$ ambos potenciales vienen determinados completamente por la supersimetría de la teoría. Por ahora tomamos el caso más simple donde los dos potenciales son escalares $V_{bh} = Q^2$ y $V(\phi) = (d-2)\Lambda$. Así la acción en Ec. (3.27) se escribe como

$$\begin{aligned} S(U,P,\phi^i) &= \int d\rho \left\{ P^{d-2} e^{2U} \left[-(d-2)(d-3)\frac{\dot{P}^2}{P^2} - 2(d-2)\frac{\dot{P}\dot{U}}{P} \right] \right. \\ & \left. +(d-2)(d-3)\kappa P^{d-4} - \frac{(d-2)}{(d-3)} P^{-(d-2)} Q^2 + (d-2) P^{d-2}\Lambda \right\}. \end{aligned} \tag{3.44}$$

La acción de la ecuación anterior se puede escribir como:

$$S(U,P,\phi^i) = (d-2)\int d\rho\ (A+B+C), \tag{3.45}$$

donde

$$A = -(d-3)P^{d-4}e^{2U}\left(\dot{P}-1\right)^2 \tag{3.46}$$

$$B = -2P^{d-3}e^{2U}\left(\dot{P}-1\right)\left(\dot{U} + \frac{d-3}{2P} + e^{-2U}P^{-(d-3)}F(p)\right) \tag{3.47}$$

$$C = -\frac{d}{d\rho}\left(P^{d-3}e^{2U} - 2\int dP F(p)\right), \tag{3.48}$$

y además

$$F(p) \equiv (d-3)\kappa P^{d-4} - \frac{1}{d-3}P^{-(d-2)}Q^2 + P^{d-2}\Lambda. \tag{3.49}$$

De esta forma la acción (3.27) se ha escrito como un producto escalar del tipo .

$$-\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ y & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

mas una derivada total, donde

$$\begin{aligned} a &= (\dot{P}-1) && (3.50)\\ b &= (U+\frac{d-3}{2P}+e^{-2U}P^{-(d-3)}F(p)) && (3.51)\\ x &= (d-3)P^{d-4}e^{2U} && (3.52)\\ y &= 2P^{d-3}e^{2U} && (3.53) \end{aligned}$$

Por lo que las ecuaciones de primer orden se escriben como:

$$\begin{aligned} \dot{P} &= 1, && (3.54)\\ \dot{U} &= -\frac{d-3}{2P}-e^{-2U}P^{-(d-3)}F(p). && (3.55) \end{aligned}$$

Estas ecuaciones son equivalentes a la Ec. (3.31) , la restricción hamiltoniana, y su solución corresponde al agujero negro de Reisner-Nordström-(Anti) de Sitter topológico dada en la Ec. (3.32).

En el caso particular, cuando $V_{bh}=Q^2$ y $V(\phi)=0$ la acción dada en la Ec. (3.17) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} S(U,R) &= \frac{(d-2)}{(d-3)}\int d\rho\left\{P^{d-2}e^{2U}\left(\left(\dot{U}-\alpha\frac{|Q|\,e^{\frac{1}{d-3}}U^2}{R^{d-2}}\right)^2\right.\right.\\ &\left.-(d-3)^2R^{-2}\left(\dot{R}-\beta\sqrt{-\kappa}e^{-\frac{d-4}{d-3}U}\right)^2\right) \qquad (3.56)\\ &\left.+\frac{d}{d\rho}\left(2\alpha\,|Q|\,e^U-2(d-3)\beta R^{d-3}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Sin embargo, como era de esperarse, esta acción es válida solo para $\kappa = -1$ (el caso esféricamente simétrico). Las ecuaciones de primer orden que se obtienen son

$$\dot{U} = \alpha \frac{|Q|\, e^{\frac{1}{d-3}U^2}}{R^{d-2}}, \tag{3.57}$$

$$\dot{R} = \beta\sqrt{-\kappa} e^{-\frac{d-4}{d-3}U}. \tag{3.58}$$

Se puede verificar que la solución de Reissner-Nordström extrema Ec. (3.33) satisface las ecuaciones anteriores si hacemos $\Lambda = 0$, aunque en general el sistema compuesto por las Ec. (3.57) y Ec. (3.58) no es fácil de resolver directamente.

3.3. La acción efectiva para la supergravedad $\mathcal{N} = 1, d = 5$

Estamos interesados en encontrar las ecuaciones de primer orden para la supergravedad $\mathcal{N} = 1, d = 5$ acoplada con supermultipletes vectoriales Ref. [18], [19] y usaremos los convenios de Refs. [20], [22]. Para agujeros negros estáticos el término de Chern-Simons en la acción bosónica puede ser ignorado sin problemas, por lo que podemos trabajar con la acción

$$S(g_{\mu\nu}, A^I_\nu, \phi^x) = \int d^5x\sqrt{|g|}\left\{R + \frac{1}{2}g_{xy}\partial_\mu\phi^x\partial^\mu\phi^y - \frac{1}{4}a_{IJ}F^I{}_{\mu\nu}F^{J\,\mu\nu} - V(\phi)\right\} \tag{3.59}$$

donde $I, J = 0, 1, , , , , n$ y $x, y = 1, .., n$. Los escalares ϕ^x parametrizan una variedad *Especial Real* (ver Apéndice A) con la métrica del modelo σ escrita como $g_{xy}(\phi)$, la cual se transforma no-linealmente bajo las simetrías de la teoría. Es conveniente introducir n_V funciones de los escalares que se transformen en la representación vectorial de $GL(n_V + 1)$. Estas funciones se denotan $h^I(\phi)$ y se pueden ver como coordenadas en un espacio de Riemann n_V dimensional con métrica $a_{IJ}(\phi)$ la cual aparece en la teoría como la matriz cinética de los campos vectoriales . En este espacio, la variedad *especial real*, puede ser parametrizada por los escalares físicos ϕ^x y puede ser descrita como la hipersuperficie de codimension-1 definida por la ecuación

$$C_{IJK}h^I h^J h^K = 1 \tag{3.60}$$

donde C_{IJK} es un tensor completamente simétrico real y constante que caracteriza completamente los acoplos en el sector vectorial: dado este tensor , las funciones $h^I(\phi)$ son el conjunto de soluciones de la Ec. (3.61), con las cuales se pueden construir las funciones $h_I(\phi), a_{IJ}(\phi)$ $g_{xy}(\phi)$. Ver Apéndice A.

Recordemos que el potencial $V(\phi)$ viene completamente determinado por las relaciones de supersimetría de la supergravedad considerada. Para que la acción sea invariante bajo las nuevas reglas de transformación de supersimetrìa (que ahora incluyen los ”desplazamientos” en los fermiones) es necesaria la introducción de un potencial cuadrático en los desplazamientos.

$$V(\phi, q) = -4g^2 C_{IJK} h^I P^J P^K \qquad P^I \equiv a^{IJ} P_J. \tag{3.61}$$

El producto $gP_I = g_I$ se puede entender como el tensor del embebimiento que selecciona la combinación de vectores que gaugean la simetría R de SO(2). Usaremos g_I en lugar de g. Además si tomamos como constante de normalización $\alpha^2 = 3/64$, el potencial V_{bh} se escribe como

$$V_{bh}(\phi, q) = -a^{IJ} q_I q_J, \tag{3.62}$$

donde a^{IJ} es la inversa de a_{IJ}.

La acción efectiva Ec.(3.17) toma la siguiente forma

$$S(U, R, \phi^i) = \int dr R^3 \left\{ \frac{3}{2}\dot{U}^2 + \frac{1}{2} g_{xy} \dot{\phi}^x \dot{\phi}^y - \frac{6}{R^2}\left(\dot{R}^2 - \kappa\right) - \frac{3}{2}\frac{e^{2U}}{R^6} V_{bh} + e^{-U} V(\phi) \right\} \tag{3.63}$$

y la restricción hamiltoniana es:

$$\frac{3}{2}\dot{U}^2 + \frac{1}{2} g_{xy} \dot{\phi}^x \dot{\phi}^y - \frac{6}{R^2}\left(\dot{R}^2 - \kappa\right) + \frac{3}{2}\frac{e^{2U}}{R^6} V_{bh} - e^{-U} V(\phi). \tag{3.64}$$

Usando las identidades del Apéndice A podemos escribir los potenciales V_{bh} y $V(\phi)$ como

$$\begin{aligned} V_{bh}(\phi, q) &= -Z^2 - g_{xy}\partial_x Z \partial_y Z, && (3.65)\\ V(\phi) &= -4^2 \mathcal{L}^2 - 2 g_{xy} \partial_x \mathcal{L} \partial_y \mathcal{L}, && (3.66) \end{aligned}$$

donde

$$Z = h^I q_I, \qquad \mathcal{L} = h^I g_I. \tag{3.67}$$

Para el caso en que $Z = 0$, la acción en la Ec. (3.64) puede escribirse como

$$\begin{aligned} S(U, R, \phi^i)_{Z=0} \;\; = \;\; & \frac{3}{2}\int d\rho \Bigg\{ R^3 e^{\frac{1}{2}U} \left(U + \beta e^{-U} \frac{\mathcal{L}}{\sqrt{3}} \right)^2 \\ & + \frac{1}{3} R^3 e^{\frac{1}{2}U} g_{xy} \left(\dot{\phi}^x - 6\beta g^{xy} \partial_x \left(e^{-U} \frac{\mathcal{L}}{\sqrt{3}} \right) \right) \left(\dot{\phi}^y - 6\beta g^{xy} \partial_y \left(e^{-U} \frac{\mathcal{L}}{\sqrt{3}} \right) \right) \\ & - 4R^3 e^{\frac{1}{2}U} \left(\frac{\dot{R}}{R} + \frac{3}{2}\beta \left(e^{-U} \frac{\mathcal{L}}{\sqrt{3}} \right) \right)^2 + 4\kappa R\, e^{-\frac{1}{2}U} \\ & + \frac{d}{d\rho} \left(\frac{4}{\sqrt{3}} \beta R^3 e^{-\frac{1}{2}U} \mathcal{L} \right) \Bigg\}. \end{aligned} \tag{3.68}$$

Las ecuaciones de primer orden (cuando $\kappa = 0$) que se obtienen al igualar a cero cada uno de los términos cuadráticos son

$$\dot{U} = \beta e^{-U} \frac{\mathcal{L}}{\sqrt{3}} \tag{3.69}$$

$$\dot{\phi}^x = 6\beta g^{xy} \partial_y \left(e^{-U} \frac{\mathcal{L}}{\sqrt{3}} \right) \tag{3.70}$$

$$\frac{\dot{R}}{R} = -\frac{3}{2}\beta \left(e^{-U} \frac{\mathcal{L}}{\sqrt{3}} \right). \tag{3.71}$$

De las ecuaciones anteriores se obtiene cuando $\mathcal{L}$ no depende de los campos $\phi(x)$, que

$$\dot{U} = \frac{d}{d\rho}\left(\log R^{\frac{2}{3}}\right) \implies U = \log R^{\frac{2}{3}} + C \tag{3.72}$$

$$R = Ae^{\frac{3}{2}U} \implies P = R\, e^{-\frac{1}{2}U}. \tag{3.73}$$

Las ecuaciones de primer orden encontradas corresponden a "domain walls".

Para el caso más general ($\mathcal{L} \neq 0$ y $\mathcal{Z} \neq 0$) hasta el momento no se ha podido aplicar la técnica de Bogomonly para encontrar alguna ecuacion de primer orden. Considerando que existen muchas maneras de escribir la acción como una combinación lineal de términos cuadráticos se espera que el presente trabajo siga siendo extendido y en un futuro se pueda resolver dicho caso.

4. Supersimetría de la solución de Reissner-Nordström-(anti) de Sitter en la supergravedad $\mathcal{N} = 1, d = 5$

Estamos interesados en encontrar las condiciones bajo las cuales la solución de Reissner-Nordström-(anti) de Sitter topológico en cinco dimensiones es supersimétrica, y para esto necesitamos una teoría de supergravedad para embeber nuestra solución, para luego buscar soluciones a las ecuaciones de los espinores de Killing como se ha indicado en el capítulo 1.

Las configuraciones relevantes de los campos de nuestra supergavedad serán puramente bosónicas, por lo que exigiremos que las transformaciones $\delta_{\epsilon(x)}\Psi$ de supersimétria se anulen para los campos fermiónicos.

La supergravedad $\mathcal{N} = 1$, $d = 5$ gaugeada como en la Ref. [22], [21] y sin acoplamiento con los hipermultipletes. Además gaugeamos el grupo $U(1)$.

El contenido de esta supergravedad acoplada a n_V multipletes vectoriales es el siguiente:

• El multiplete de supergravedad: $\{e^a{}_\mu, \psi^i{}_\mu, A_\mu\}$ que está conformado por el graviton $e^a{}_\mu$, el gravifotón A_μ y el gravitino $\psi^i{}_\mu$

• El supermultiplete vectorial $\{A^x{}_\mu, \lambda^{xi}, \phi^x\}$ que está conformado por el campo vectorial A^x_μ, un gaugino λ^{xi} y un escalar real ϕ^x. y donde $x = 1, ..n_V$,

En $d = 5$ los espinores tienen cuatro componentes complejas, y son pares de espinores en los que un espinor esta relacionado con el otro a través de la conjugación compleja: un miembro del par es un espinor de Dirac y el otro es su conjugado complejo. A este tipo de espinores se los denomina: espinores de Majorana-simplécticos . Ver Apéndice B.

Todos los espinores, incluído el gravitino son espinores de Majorana-simplécticos ϵ^i con $i = 1, 2$ un índice SU(2). Es conveniente usar una notación que permita tratar todos los campos vectoriales de la misma forma: se agrega un índice (el 0) al gravifotón $A_\mu \to A^0{}_\mu$ y se usan los índices $I\ J = 0, ..., n_V$ para contar a todos los vectores

$$(A^I{}_\mu) = (A^0{}_\mu, A^x{}_\mu), \tag{4.1}$$

Nuevamente la geometría de los n_V escalares ϕ^x $(x = 1, ..., n_v)$ viene dterminada por las funciones

$h_I(\phi)$ que definen una geometría especial real. Ver Apéndice A.

La acción bosónica de la supergravedad gaugeada $\mathcal{N}=1, d=5$ viene dada por

$$\begin{aligned} S &= \int d^5x\sqrt{g}\left\{R+\frac{1}{2}g_{xy}\partial_\mu\phi^x\partial^\mu\phi^y+V(\phi)-\frac{1}{4}a_{IJ}F^{I\mu\nu}F^J_{\mu\nu}\right. \\ &\left.+\frac{1}{12\sqrt{3}}C_{IJK}\frac{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma\alpha}}{\sqrt{g}}F^I_{\mu\nu}F^J_{\rho\sigma}A^K_\alpha\right\}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde

$$V(\phi)=4g^2C_{IJK}h^IP^JP^K, \tag{4.3}$$

es el potencial escalar, (comparar con la ecuación (3.61)) . En el límite cuando $n_V=0, V$ se convierte en la constante cosmológica. Las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}-\frac{1}{2}a_{IJ}(F^I_{\mu}{}^{\rho}F^J_{\nu\rho}-\frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^{I\ \rho\sigma}F^J_{\rho\sigma}), & \\ +\frac{1}{2}g_{xy}(\partial_\mu\phi^x\partial_\nu\phi^y-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial_\rho\phi^x\partial^\rho\phi^y)-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}V=0 & \qquad (4.4) \\ g^{xy}\varepsilon_y=\nabla^2\phi^x+\frac{1}{4}\partial^x a_{IJ}F^{I\ \rho\sigma}F^J_{\rho\sigma}-\partial^xV=0, & \qquad (4.5) \\ \partial_\nu F_I^{\nu\mu}+\frac{1}{4\sqrt{3}}\frac{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma\alpha}}{\sqrt{g}}C_{IJK}F^I_{\nu\rho}F^J_{\sigma\alpha}=0, & \qquad (4.6) \end{aligned}$$

Las reglas de transformación supersimétricas se escriben como:

$$\delta_\epsilon e^a_\mu=\frac{i}{2}\bar{\epsilon}_i\gamma^a\psi^i_\mu, \tag{4.7}$$

$$\delta_\epsilon A^I_\mu=-\frac{i\sqrt{3}}{2}h^I\bar{\epsilon}_i\psi^i_\mu+\frac{i}{2}h^I_x\bar{\epsilon}_i\gamma_\mu\lambda^{xi}, \tag{4.8}$$

$$\delta_\epsilon\phi^x=\frac{i}{2}\bar{\epsilon}_i\lambda^{xi}, \tag{4.9}$$

y las transformaciones supersimétricas correspondientes para los campos fermiónicos evaluadas en fermiones que se anulan son

$$\delta_\epsilon \psi^i_\mu = \mathfrak{D}_\mu \epsilon^i - \frac{1}{8\sqrt{3}} h_I F^{I\alpha\beta}(\gamma_{\mu\alpha\beta} - 4g_{\mu\alpha}\gamma_\beta)\epsilon^i + \frac{1}{2\sqrt{3}} g h^I \gamma_\mu \epsilon^j P_I \, \sigma^2{}_j{}^i \tag{4.10}$$

$$\delta_\epsilon \lambda^{ix} = \frac{1}{2}(\partial\phi^x - \frac{1}{2} h^x_I F^I)\epsilon^i + g h^x_I \epsilon^j P^I \, \sigma^2{}_j{}^i, \tag{4.11}$$

donde

$$\mathfrak{D}_\mu \epsilon^i = \nabla_\mu \epsilon^i + \epsilon^j B_\mu{}^i{}_j \qquad \text{con} \quad B_J{}^i{}_\mu = \frac{1}{2} g A^I_\mu P_I \sigma^2{}_j{}^i \tag{4.12}$$

Una vez que hemos determinado como se transforman los espinores (evaluados en espinores que se anulan) podemos usar la Ec. (4.10) y escribir las KSE's como:

$$\mathfrak{D}_\mu \epsilon^i - \frac{1}{8\sqrt{3}} h_I F^{I\alpha\beta}(\gamma_{\mu\alpha\beta} - 4g_{\mu\alpha}\gamma_\beta)\epsilon^i + \frac{1}{2\sqrt{3}} g h^I \gamma_\mu \epsilon^j P_I \, \sigma^2{}_j{}^i = 0, \tag{4.13}$$

$$\frac{1}{2}(\partial\phi^x - \frac{1}{2} h^x_I F^I)\epsilon^i + g h^x_I \epsilon^j P^I \, \sigma^2{}_j{}^i = 0. \tag{4.14}$$

Asumimos que las KSE's admiten al menos una solución ϵ^i.

Ahora, recordemos que nuestra métrica es solución de la teoría de Einstein-Maxwell-(anti)-de Sitter y solo tiene una carga Q, entonces nos limitaremos a la supergravedad gaugeada pura, por lo que el multiplete de gravedad se reduce al Gravitón e^a_μ el vector A_μ y el gravitino ψ_μ. Puesto que todos los fermiones estan cargados, sus derivadas covariantes se modifican y los desplazamientos de fermiones aperecen en la regla de transformación del gravitino, así, quitando el índice 0 del gravifotón y normalizando el producto de los "mapas"de momento a 1 obtenemos la acción

$$S = \int d^5x \sqrt{|g|} \left\{ R - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{12\sqrt{3}} \frac{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma\alpha}}{\sqrt{|g|}} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} A_\alpha + 4g^2 \right\} \tag{4.15}$$

La constante (tipo anti de Sitter) $\Lambda = V/3 = -\frac{4}{3}\, g^2$ aparece por el gaugeo de la teoría. Ver Ec.(3.61)

Ahora la KSE. para el gravitino se escribe

$$\delta_\epsilon \psi^i{}_\mu = \nabla_\mu \epsilon^i + \frac{i}{2} g A_\mu P^r \sigma^r{}_j{}^i \epsilon^j - \frac{1}{8\sqrt{3}} F^{\alpha\beta}(\gamma_{\mu\alpha\beta} - 4g_{\mu\alpha}\gamma_\beta)\epsilon^i + \frac{i}{2\sqrt{3}} g \gamma_\mu P^r \sigma^r{}_j{}^i \epsilon^j \tag{4.16}$$

Reescribiendo la Ec. anterior obtenemos

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon \psi^i_\mu &= \{\nabla_\mu + \frac{i}{2} g A_\mu \sigma^2 - \frac{1}{8\sqrt{3}} F^{\alpha\beta}(\gamma_{\mu\alpha\beta} - 4 g_{\mu\alpha}\gamma_\beta)\epsilon^{i,} + \frac{i}{2\sqrt{3}} g \gamma_\mu \sigma^2\}\epsilon^i \\ &= \{\nabla_\mu + \frac{i}{2} g \left(A_\mu + \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_\mu\right)\sigma^2 - \frac{1}{8\sqrt{3}} F^{\alpha\beta}(\gamma_{\mu\alpha\beta} - 4 g_{\mu\alpha}\gamma_\beta)\}\epsilon^i \\ &= \{\nabla_\mu + N_\mu - M_\mu\}\epsilon^i, \end{aligned} \tag{4.17}$$

donde

$$N_\mu = \frac{i}{2} g \left(A_\mu + \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_\mu\right)\sigma^2, \tag{4.18}$$

$$M_\mu = \frac{1}{16\sqrt{3}} F^{\alpha\beta}(\gamma_\mu \gamma_{\alpha\beta} - 3\gamma_{\alpha\beta}\gamma_\mu)\}\epsilon^i = \frac{1}{16\sqrt{3}}(\gamma_\mu F - 3F\gamma_\mu)\}\epsilon^i, \tag{4.19}$$

$$\nabla_\mu = \partial_\mu - \frac{1}{4} {\omega_\mu}^{ab}\gamma^{ab}. \tag{4.20}$$

El conmutador $D_{\mu\nu} = [\{\nabla_\mu + N_\mu - M_\mu\}, \{\nabla_\nu + N_\nu - M_\nu\}]$ se escribe

$$D_{\mu\nu} = \begin{array}{c}\{[\nabla_\mu, \nabla_\nu] + 2\nabla_{[\mu} N_{\nu]} + 2\nabla_{[\mu} M_{\nu]} + [M_\mu, M_\nu] + \\ [N_\mu, N_\nu] + [M_\mu, N_\nu] + [N_\mu, M_\nu]\}\epsilon^i.\end{array} \tag{4.21}$$

Después de calcular cada uno de los términos de la ecuación anteriror podemos escribir

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu} &= -\frac{1}{4}\left\{{R_{\mu\nu}}^{ab} - \frac{2}{3} {R_{[\mu}}^{a} g^b_{\nu]} + \left(\frac{1}{3}R + 2g^2\right){g_{\mu\nu}}^{ab} - \frac{1}{2} {F_\mu}^a {F_\mu}^b\right\}\gamma_{ab} \\ &\quad + \frac{1}{2} {F_{[\mu}}^{\sigma} (*F)^b_{\nu]\sigma\xi}\gamma^\xi - \frac{1}{8\sqrt{3}}\gamma_{[\mu}\nabla_{\nu]}F - \frac{\sqrt{3}}{8}\nabla_{[\mu} F\gamma_{\nu]} + \frac{i}{2} g F_{\mu\nu}\sigma^2 \\ &\quad + \frac{i}{3} g {F_{[\mu|}}^{\beta}\gamma_{\beta|\nu]}\sigma^2 - \frac{i}{3} g (*F)_{\mu\nu\xi}\gamma^\xi\sigma^2. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Luego usando el tensor F. dado por

$$F_{t\rho} = \frac{6Q}{\rho^3}, \tag{4.23}$$

y el resto de componentes cero, por lo que las únicas componentes campo diferentes de cero son las F_{01}. Así, la componente D_{01} viene dad por

$$D_{01} = \left\{-\frac{1}{2}R_{01}{}^{01} + \frac{1}{6}R_0{}^0 - \frac{1}{12}R - \frac{g^2}{2} - \frac{1}{8}(F_{01})^2\right\}\gamma_{01} \tag{4.24}$$

$$+\frac{i}{2}gF_{01}\sigma^2 + \frac{1}{4\sqrt{3}}\partial_1 F^{01}\gamma_1, \tag{4.25}$$

y lo escribimos como

$$D_{01} = A\gamma_{01} + \frac{1}{4\sqrt{3}}\partial_1 F^{01}\gamma_1 + \frac{i}{2}gF_{01}\sigma^2, \tag{4.26}$$

con

$$A = -\frac{1}{2}R_{01}{}^{01} + \frac{1}{6}R_0{}^0 - \frac{1}{12}R - \frac{g^2}{2} - \frac{1}{8}(F_{01})^2. \tag{4.27}$$

Recordemos que estamos trabajando en 5 dimensiones, así que debemos usar las matrices gamma apropiadas (ver Apéndice C):

$$\gamma_{01} = \begin{pmatrix} 1_{2\times2} & 0 \\ 0 & -1_{2\times2}, \end{pmatrix} \qquad \gamma_1 = \begin{pmatrix} i\sigma^1 & 0 \\ 0 & -i\sigma^1 \end{pmatrix} \tag{4.28}$$

Finalmente, requerimos que el determinante $Det(D_{01})$ sea cero. Por tanto, usando las Ec.(4.26) (4.27) y (4.28) se tiene que

$$Det(A\ \gamma_{01} + y\ \gamma_1 - i\ b) = 0, \tag{4.29}$$

donde

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\partial_1 F^{01} && (4.30)\\
b &= -\frac{1}{2} g F_{01}, && (4.31)
\end{aligned}
$$

de donde, finalmente se llega a

$$A^2 + b^2 = y^2. \tag{4.32}$$

Trabajaremos con la métrica $5-$ dimensional: (Ver Apéndice C)

$$ds^2 = e^{2U}dt^2 - e^{-2U}d\rho^2 - \rho^2 d\Omega^2_{(d-3)}(\kappa), \tag{4.33}$$

donde $d\Omega^2_{(d-3)}$ es la métrica de la esfera $(d-3)-$ dimensional, y además

$$e^{2U} = -\kappa - \frac{2M}{\rho^2} + \frac{3Q^2}{\rho^4} + \frac{g^2}{3}\rho^2. \tag{4.34}$$

Usando (4.34) y la expresión para el tensor F dado en la Ec.(4.23) podemos usar la ecuacion (4.32) para determinar las condiciones bajo las cuales la métrica dada en la Ec (4.33) es supersimétrica. De este forma, obtenemos para la métrica de Reissner-Nordström-(Anti)-de Sitter topológica en cinco dimensiones:

$$
\begin{aligned}
A &= -\frac{3M}{\rho^4} + \frac{9Q^2}{\rho^6}, && (4.35)\\
y &= \frac{9}{\sqrt{3}}\frac{Q}{\rho^4}e^U, && (4.36)\\
b &= \frac{-3gQ}{\rho^3}. && (4.37)
\end{aligned}
$$

Finalmente de la Ec.(4.32) obtenemos

$$M^2 = -3Q^2\kappa. \tag{4.38}$$

de donde se concluye que

$$
\begin{aligned}
\kappa &= -1, \Rightarrow \qquad M = \sqrt{3}Q \\
\kappa &= 0 \Rightarrow \qquad M = 0
\end{aligned}
$$

En el primer caso (cuando $\kappa = -1$) la métrica Ec.(4.34) se convierte en

$$e^{2U} = (1 - \frac{\sqrt{3}Q}{\rho^2})^2 + \frac{g^2}{3}\rho^2. \tag{4.39}$$

En este caso, la solución sigue teniendo una singularidad $\rho = 0$, pero no tiene horizonte de sucesos.

Para el caso cuano $k = 0$ la métrica Ec.(4.34) se convierte en

$$e^{2U} = \frac{3Q^2}{\rho^4} + \frac{g^2}{3}\rho^2,$$

de donde nuevamente se observa una singularidad en $\rho = 0$, además

$$\frac{3Q^2}{\rho^4} + \frac{g^2}{3}\rho^2 > 0, \tag{4.40}$$

por lo tanto la métrica no tiene horizonte de sucesos.

5. Conclusiones

En el presente trabajo se han encontrado ecuaciones de primer orden para la supergravedad $\mathcal{N} = 1, d = 5$. acoplada a n_V multipletes vectoriales más un potencial escalar para casos muy particulares (cuando $\mathcal{Z} = 0, \mathcal{L} \neq 0$ y $\kappa = 0$).

En primer lugar hemos encontrado las ecuaciones de movimiento resultantes de la acción efectiva (3.17) más la restricción hamiltoniana . Tales ecuaciones pueden ser integradas en el caso de escalares constantes, es decir cuando $P = \rho$, $V_{bh} = Q^2$ y $V(\phi) = (d-2)\Lambda$, encontrándose una solución conocida, la de Reissner-Nordström-(Anti) de Sitter topológica en d dimensiones.

Luego, usando el truco de Bogomolny hemos encontrado ecuaciones de primer orden para la acción efectiva $d-$dimensional en el caso $\kappa = -1$ (el caso esféricamente simétrico) . Hemos mostrado que cuando la constante cosmológica se anula, la métrica de Reissner-Nordström extrema es una solución de las ecuaciones encontradas.

En la sección 3.3 hemos encontrado algunas ecuaciones de primer orden para la supergravedad $N = 1, d = 5$ acoplada a n_V multipletes vectoriales más un potencial escalar, bajo la condición de que $Z = h^I q_I = 0$ y cuando $\kappa = 0$ encontramos ecuaciones tipo BPS, aunque no se ha podido encontrar la solución al sistema de ecuaciones se ha dado una solución bajo la condición de que $\mathcal{L}$ no dependa de los escalares. Las soluciones corresponden a ”domain walls”.

Finalmente, se han encontrado las condiciones para que la solución de Reissner-Nordström-(Anti) de Sitter topológica en 5 dimensiones, embebida en la supergravedad $N = 1, d = 5$ pura, sea supersimétrica. Se ha demostrado que las métricas supersimétricas resultantes no tienen horizontes de sucesos.

Hemos intentado encontrar las ecuaciones de primer orden, usando el truco de Bogomol´nyi para el caso general ($\mathcal{Z} \neq 0, \mathcal{L} \neq 0$).Sin embargo no hemos llegado a una conclusión satisfactoria. El trabajo futuro será reescribir la acción, para el caso general, como suma de cuadrados para así poder encontrar ecuaciones de primer orden. Finalmente se buscarán las soluciones a las ecuaciones encontradas.

A. Apéndice

Geometría especial real.

La geometría especial Real describe los acoplos de los escalares reales de los supermultipletes vectoriales en la supergravedad mínima $5-$dimensional. Esta geometría aparece de la necesidad de integrar en una única estructura la métrica riemanniana del modelo-σ parametrizado por n_V escalares reales ϕ^x, $x = 1, ..., n_V$ con el grupo $GL(n_V + 1)$ que controla el acoplamiento a los campos vectoriales a través de la matriz cinética $a_{IJ}(\phi)$, $I, J = 0, 1..., n_V, .$ la cual satisface muchas de las propiedades de una métrica. Por otro lado, para hacer manifiesta la simetría $GL(n_V + 1)$ en los escalares se requiere la introducción de una descripción redundante en términos de un conjunto de funciones $h^I(\phi)$ con restricciones, estas funciones se transformarán covariantemente en la representación vectorial de $GL(n_V + 1)$.

La restricción que satisfacen las funciones $h^I(\phi)$ siempre tiene la forma

$$C_{IJK}h^I h^J h^K = 1 \tag{A.1}$$

donde C_{IJK} es un tensor completamente simétrico. El espacio de los n_V escalares ϕ^x es una hipersuperficie en un espacio de Riemann $(n_V + 1)-$dimensional definido por I.1. Además se satisface que

$$h_I \equiv \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial h^I} C_{IJK}h^J h^K h^L = C_{IJK}h^J h^K \tag{A.2}$$

de donde se deduce que

$$h_I h^I = 1 \tag{A.3}$$

Las variables h_I se transformarán (por construcción) covariantemente por lo que es natural definir una métrica a_{IJ} que permita relacionar los dos conjuntos de variables h^I y h_I, de la siguiente forma

$$h_I \equiv a_{IJ}h^J \qquad h^I \equiv a^{IJ}h_J \qquad a_{IJ}a^{IK} = \delta^I{}_K \tag{A.4}$$

Esta métrica se puede entender como la métrica del espacio de Riemann (n_V+1)-dimensional. Se puede verificar que una matriz a_{IJ} con las propiedades requeridas satisface:

$$a_{IJ} = -2C_{IJK}h^K + 3h_I h_J \tag{A.5}$$

Además se definen las derivadas normalizadas de las funciones h^I y h_I con respeco a ϕ^x como:

$$h^I_x \equiv -\sqrt{3}h^I_{,x} \equiv -\sqrt{3}\frac{\partial h^I}{\partial \phi^x} \tag{A.6}$$

$$h_{Ix} \equiv +\sqrt{3}h_{I,x} \tag{A.7}$$

además se cumple que

$$a_{Ix} = a_{IJ}h^J_x \tag{A.8}$$

Las variables h^I y h^I_x cumplen las siguientes relaciones de ortogonalidad

$$h_I h^I_x = 0 \qquad h^I h_{Ix} = 0 \tag{A.9}$$

Podemos combinar h^I y h^I_x en un objeto único que satisface las siguientes relaciones de ortonormalidad

$$\begin{pmatrix} h^I \\ h^I_x \end{pmatrix} (h_I, h^y_I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta^y_x \end{pmatrix} \qquad (h_I, h^x_I)\begin{pmatrix} h^J \\ h^J_x \end{pmatrix} = \delta^J_I \tag{A.10}$$

lo cual nos permite descomponer cualquier elemento con algún índice $G(n_V+1)$ como;

$$A^I = (h_J A^J)h^I + (h^x_J A^J)h^I_x \tag{A.11}$$

Por otro lado, la métrica $g_{xy}(\phi)$ de la hipersuperficie $C_{IJK}h^I h^J h^K = 1$ que contiene a los escalares, se define como el pullback de a_{IJ}

$$g_{xy} \equiv a_{IJ} h^I_x h^I_y = -2 C_{IJK} h^I_x h^J_y h^K \tag{A.12}$$

y se la puede usar para subir y bajar los índices x, y. Algunas relaciones muy útiles en geometría especial real son

$$\begin{aligned}
a_{IJ} &= h_I h_J + h^x_I h_{Jx} & \text{(A.13)}\\
C_{IJK} h^k &= h_I h_J - \frac{1}{2} h^x_I h_{Jx} & \text{(A.14)}\\
h_I h_J &= \frac{1}{3} a_{IJ} + \frac{2}{3} C_{IJK} h^K & \text{(A.15)}\\
h^x_I h_{Jx} &= \frac{2}{3} a_{IJ} - \frac{2}{3} C_{IJK} h^k & \text{(A.16)}
\end{aligned}$$

La conección Levi-Civita asociada a la métrica escalar g_{xy} se denota por $\Gamma_{xy}^{\ \ z}$ y la derivada covariante asociada se define como

$$h_{Ix;y} \equiv h_{Ix,y} - \Gamma_{xy}^{\ \ z} h_{Iz} \tag{A.17}$$

B. Apéndice

Matrices Gamma y espinores de Majorana simplécticos

B.1. Matrices gamma 5-dimensionales

Las matrices gamma 5-dimensionales se construyen a partir de matrices gamma en dimensiones más bajas. En efecto, las matrices gamma en cinco dimensiones $\hat{\gamma}^\mu$ en cualquier representación se escriben en función de las de cuatro dimensiones γ^μ, en la misma representación, de la siguiente forma:

$$\hat{\gamma}^a = \gamma^a \quad a = 0,1,2,3 \qquad \hat{\gamma}^4 = -i\,\gamma_5 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3, \tag{B.1}$$

donde las matrices gamma 4-dimensionales, en la representación de Majorana, en función de las matrices gamma 3-dimensionales se escriben como

$$\gamma^a = \gamma^a_{(3)} \otimes \sigma^3 \quad a = 0,1,2 \qquad \gamma^3 = I_{2\times 2} \otimes i\sigma^1, \tag{B.2}$$

$$\gamma_5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -iI_{2\times 2} \otimes \sigma^2, \tag{B.3}$$

y tal que satisfacen

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab}. \tag{B.4}$$

Además se cumple que $\gamma^{a_1\ldots a_5} = +\varepsilon^{a_1\ldots a_5}$ y en general se cumple que

$$\gamma^{a_1\ldots a_n} = \frac{(-1)^{[n/2]}}{(5-n)!}\varepsilon^{a_1\ldots a_n b_1\ldots b_{n-5}}\gamma_{b_1\ldots b_{n-5}}. \tag{B.5}$$

Además, γ^0 es hermitiana y las otras gammas son antihermitianas.

B.2. Espinores de Majorana simplécticos

Consideremos las matrices $\mathcal{D}_\pm, \mathcal{B}_\pm$, y $\mathcal{C}_\pm$ como las matrices conjugación de Dirac, conjugación compleja y de conjugación de carga respectivamente. Por definición tales matrices satisfacen

$$\mathcal{D}_\pm \gamma^a \mathcal{D}_\pm^{-1} = \pm\gamma^{a\dagger} \quad \mathcal{B}_\pm \gamma^a \mathcal{B}_\pm^{-1} = \pm\gamma^{a*} \quad \mathcal{C}_\pm \gamma^a \mathcal{C}_\pm^{-1} = \pm\gamma^{aT}. \tag{B.6}$$

Generalmente se escoge a la matriz de conjugación de Dirac como

$$\mathcal{D} = i\gamma^0. \tag{B.7}$$

La cual corresponde a $\mathcal{D} = D_+$. Las otras matrices de conjugación se relacionan con ésta a través de la siguiente relación

$$\mathcal{C}_\pm = \mathcal{B}_\pm^T \mathcal{D}, \tag{B.8}$$

pero se puede demostrar que en este caso solo existen $\mathcal{C} = \mathcal{C}_+$ y $\mathcal{B} = \mathcal{B}_+$ y ambas son antisimétricas, de este modo nosotros las escogemos de tal forma que se cumpla:

$$\mathcal{C} = i\gamma^{04} \quad \mathcal{B} = \gamma^4 \Rightarrow \mathcal{B}^*\mathcal{B} = -1. \tag{B.9}$$

El conjugado de Dirac se define como

$$\psi^\dagger \mathcal{D} = i\psi^\dagger \gamma^0, \tag{B.10}$$

y el conjugado de Majorana como

$$\psi^T \mathcal{C} = i\psi^T \gamma^{04}. \tag{B.11}$$

La condición de Majorana (Conjugación de Dirac=Conjugación de Majorana) no se pueden imponer consistentemente puesto que se requiere que $\mathfrak{B}^*\mathcal{B} = +1$. Por lo tanto introducimos la conjugación Majorana-simpléctica en pares de espinores usando la correspondiente matriz simpléctica:

$$\psi^{ic} \equiv \varepsilon_{ij}\psi^{jT}\mathcal{C}, \tag{B.12}$$

por lo que la condición Majorana-simpléctica es

$$\psi^{i*} = \varepsilon_{ij}\gamma^4\psi^j. \tag{B.13}$$

Nuestras convenciones en los índices $SU(2)$ están pensadas para hacer manifiesta la covarianza $SU(2)$. En $SU(2)$ aparte de la métrica preservada, existe un tensor preservado ε_{ij}. Además introducimos ε^{ij} con $\varepsilon_{12} = \varepsilon^{12} = +1$. por lo tanto podremos construír nuevos objetos covariantes usando ε^{ij} y ε_{ij}. Por ejemplo $\psi_i = \varepsilon_{ij}\psi^j$ ($\psi^j = \psi_i\varepsilon^{ij}$). Con esta notación la condición Majorana-simpléctica dada en Ec. (B.3) se escribe como

$$\psi^{i*} = \gamma^4\psi_i. \tag{B.14}$$

Usaremos una barra sobre los espinores para denotar la conjugación de Majorana

$$\bar{\psi}^i \equiv \psi^{iT}\mathcal{C}, \tag{B.15}$$

el cual se transforma bajo $SU(2)$ en la misma representación que ψ^i lo hace. También podemos usar ε_{ij} para subir y bajar índices $\bar{\psi}^i \equiv \varepsilon_{ij}\bar{\psi}^j$. En términos de la conjugación de Majorana la condición Majorana-simpléctica se escribe

$$(\bar{\psi}^i)^* = \bar{\psi}_i\gamma^4. \tag{B.16}$$

Observemos que después de imponer la condición Majorana-simpléctica se satisface la relación entre la conjugación de Majorana y la de Dirac

$$\psi^{i\dagger}\mathcal{D} = \bar{\psi}_i. \tag{B.17}$$

La cual es de mucha ayuda si se prefiere usar la conjugación de Dirac en lugar de la de Majorana.

En general, se puede construir bilineales de los espinores de Killing, los cuales serán matrices 2×2 que se pueden escribir como combinaciones lineales de las matrices de Pauli σ^r $(r = 0, .., 3)$ donde $\sigma^0 = 1_{2\times 2}$.Así que para reordenar los productos de espinores se suelen usar las identidades de Fierz

$$\begin{aligned}\left(\bar{\lambda} M \varphi\right)\left(\bar{\psi} N \chi\right) &= \frac{p}{8}\Big\{ \left(\bar{\lambda} M \sigma^r N \chi\right)\left(\bar{\psi} \sigma^r \varphi\right) + (\bar{\lambda} M \gamma^a \sigma^r N \chi)(\bar{\psi} \gamma_a \sigma^r \varphi) \\ & -\frac{1}{2}(\bar{\lambda} M \gamma^{ab} \sigma^r N \chi)(\bar{\psi} \gamma_{ab} \sigma^r \varphi)\Big\}\Omega\end{aligned} \tag{B.18}$$

donde los índice $SU(2)$ están implícitos y $p = (-)1$ para espinores que (anti-)conmutan.

Con un espinor de Majorana simpléctico que conmuta podemos construir los bilineales $SU(2)$ covariantes e independientes, por ejemplo con $\bar{\epsilon}_i \epsilon^j$, el cual verifica

$$\bar{\epsilon}_i \epsilon^j = -\varepsilon^{jk}(\bar{\epsilon}_k \epsilon^l)\varepsilon_{li}, \tag{B.19}$$

$$(\bar{\epsilon}_i \epsilon^j)^* = \bar{\epsilon}_j \epsilon^i. \tag{B.20}$$

La ecuación (B.19) implica que la matriz es proporcional a ${\delta_i}^j$ y la segunda ecuación implica que la constante es puramente imaginaria. Así, definimos el escalar inavarainte $SU(2)$ como

$$f \equiv i\bar{\epsilon}_i \epsilon^i = i\bar{\epsilon}\sigma^0\epsilon \qquad \bar{\epsilon}_i \epsilon^j = \frac{i}{2} f \ {\delta_i}^j, \tag{B.21}$$

y el resto de bilineales escalares $i\bar{\epsilon}\sigma^r\epsilon$ $(r = 1, 2, 3)$ se anulan identicamente.

Similarmente se pueden definir otros bilineales, por ejemplo $V^a \equiv i\bar{\epsilon}_i \gamma^a \epsilon^i$ los cuales son útiles para caracterizar soluciones de supergravedad. Para mas detalles ver [20].

C. Apéndice

La métrica de Reissner-Nordström-(Anti)-de Sitter en cinco dimensiones

En $d = 5$ la métrica de Reissner-Nordström-(Anti)-de Sitter es una solución de la teoría de Einstein-Maxwell-de Sitter con constante cosmológica dada por

$$V(\phi) = 3\Lambda = -4g^2. \tag{C.1}$$

.

Tal métrica viene dada por

$$ds^2 = e^{2U}dt^2 - e^{-2U}d\rho^2 - \rho^2 d\Omega^2_{(d-3)}(\kappa), \tag{C.2}$$

donde $d\Omega^2_{(d-3)}$ es la métrica de la esfera $(d-3)-$ dimensional, y además

$$e^{2U} = -\kappa - \frac{2M}{\rho^2} + \frac{3Q^2}{\rho^4} + \frac{g^2}{3}\rho^2. \tag{C.3}$$

Las componentes del tensor de Riemann para la métrica anterior son

$$R^{01}{}_{01} = -\frac{1}{2}\partial^2_\rho(e^{2U}) \qquad R^{0j}{}_{i0} = \frac{1}{2\rho}\partial_\rho(e^{2U}), \tag{C4}$$

$$R^{1j}{}_{i1} = \frac{1}{\rho}\partial_\rho(e^U)e^U\delta^j{}_i \qquad R^{ij}{}_{jk} = -\frac{2\kappa}{\rho^2}\delta^{ij}{}_{kl} - 2\left(\frac{e^{2U}}{\rho}\right)^2\delta^{ij}{}_{kl}. \tag{C.5}$$

Las componentes del tensor de Ricci son

$$R^0{}_0 = R^1{}_1 = -\frac{12Q^2}{\rho^6} - \frac{4}{3}g^2, \tag{C.6}$$

$$R^i{}_j = \frac{6Q^2}{\rho^6} - \frac{4}{3}g^2. \tag{C.7}$$

El escalar de curavtura R se escribe como

$$R = -\frac{6Q^2}{\rho^6} - \frac{20}{3}g^2. \tag{C.8}$$

Referencias

[1] J. M. Weisberg and J. H. Taylor, ASP Conf. Ser. **328**, 25 (2005) [astro-ph/0407149].

[2] M. Will. Clifford Living Reviews in Relativity, **9**, 3, (2006) [http://www.livingreviews.org/lrr-2006-3].

[3] G.D. Birkhoff, *Relativity and Modern Physics*, p.253, Harvard University Press, Cambridge (1923).

[4] R. M. Wald, In *Iyer, B.R. (ed.) et al.: Black holes, gravitational radiation and the universe* 69-85 [gr-qc/9710068].

[5] J. L. Friedman, K. Schleich and D. M. Witt, Phys. Rev. Lett. **71**, 1486 (1993) [Erratum-ibid. **75**, 1872 (1995)] [gr-qc/9305017].

[6] J. M. Figueroa, O. Farrill, "Electromagnetic Duality for Children", [http://www.maths.ed.ac.uk/ jmf/Teaching/Lectures/EDC.pdf].

[7] J. E. Hubeny, Phys. Rev. **D59** (1999) 064013.

[8] S. Coleman, J. Mandula, Phys. Rev. **159**, 5, pg. 1251-1256 (1967).

[9] M. M. Caldarelli and D. Klemm, JHEP **0309** (2003) 019 [0307022].

[10] S. L. Cacciatori and D. Klemm, JHEP **1001** (2010) 085 [0911.4926 [hep-th]].

[11] G. Dall'Agata and A. Gnecchi, JHEP **1103** (2011) 037 [1012.3756 [hep-th]].

[12] P. Meessen and T. Ortín, Phys. Lett. **B707** (2012) 178 [1107.5454].

[13] S. Ferrara, G. W. Gibbons, R. Kallosh, Nucl. Phys. **B500** (1997) 75-93. [9702103].

[14] J. Perz, P. Smyth, T. Van Riet and B. Vercnocke, JHEP **0903**, 150 (2009) [arXiv:0810.1528 [hep-th]].

[15] A. de Antonio Martín, T. Ortín and C. S. Shahbazi, JHEP **1205** (2012) 045 [1203.0260 [hep-th]].

[16] H. Kodama and A. Ishibashi, Prog. Theor. Phys. **111**, 29 (2004) [hep-th/0308128].

[17] V. Cardoso, O. J. C. Dias and J. P. S. Lemos, Phys. Rev. D **70**, 024002 (2004) [hep-th/0401192].

[18] M. Gunaydin, G. Sierra, P. K. Townsend, Nucl. Phys. **B242** (1984) 244.

[19] B. de Wit, F. Vanderseypen, A. Van Proeyen, Nucl. Phys. **B400** (1993) 463-524. [9210068].

[20] J. Bellorín, P. Meessen and T. Ortín, JHEP **0701** (2007) 020 [0610196].

[21] J. Bellorin and T. Ortin, JHEP **0708**, 096 (2007) [arXiv:0705.2567 [hep-th]].

[22] E. Bergshoeff, S. Cucu, T. de Wit, J. Gheerardyn, S. Vandoren and A. Van Proeyen, Class. Quant. Grav. **21** (2004) 3015 [0403045].

[23] T. Ortin, Cambridge Unversity, Cambridge University Press, 2004

[24] D. Z. Freedman and A. Van Proeyen, Cambridge, UK: Cambridge Univ. Pr. (2012) 607 p

[25] J. Bellorin and T. Ortin, Phys. Lett. B **616**, 118 (2005) [hep-th/0501246].

[26] R. Kallosh and T. Ortin, hep-th/9306085.