

Universidad Autónoma de Madrid  
Facultad de Ciencias  
Departamento de Física Teórica

# **Escenarios tipo Randall-Sundrum**

Memoria del trabajo de iniciación a la investigación presentado por:

**Natxo Alonso Alberca**

para la obtención del Diploma de Estudios Avanzados.

Tutor: **Tomás Ortín Miguel**

Madrid, 1 de junio 2000

# Índice General

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1 La idea original</b>	<b>8</b>
1.1 El problema de las jerarquías gauge . . . . .	8
1.2 Confinando la gravedad . . . . .	13
<b>2 Generalizaciones del escenario de Randall-Sundrum</b>	<b>19</b>
2.1 Las soluciones . . . . .	19
2.2 Acción efectiva y constante de Newton en 4 dimensiones . . . . .	24
2.3 Supersimetría de los escenarios tipo Randall-Sundrum . . . . .	26
2.4 Una acción de branas para el escenario de Randall-Sundrum . . . . .	28
<b>3 Escenarios tipo Randall-Sundrum con dilatón</b>	<b>32</b>
3.1 Branas con constante cosmológica nula . . . . .	32
3.2 Branas con constante cosmológica no nula . . . . .	36
3.3 Escenarios con constante cosmológica en cinco dimensiones nula . . . . .	38
3.4 El problema de la constante cosmológica . . . . .	40
<b>4 Agujeros negros en la brana</b>	<b>44</b>
4.1 Agujeros negros asintóticamente planos . . . . .	44
4.2 Agujeros negros asintóticamente (a)DS . . . . .	48
<b>Conclusiones</b>	<b>50</b>
<b>A Ecuación de movimiento del gravitón</b>	<b>51</b>

# Introducción

El Modelo Estándar de las interacciones fundamentales da una descripción completa de las interacciones de las partículas elementales hasta la escala de energías a la que ha sido verificado experimentalmente. Pero, ¿qué sucede más allá de esta escala de energías? Una posibilidad es que siga siendo válido para energías mucho más altas, pero también podría ser que este modelo necesitase algunas modificaciones al ir a escalas de energía mucho mayores que las que hoy en día pueden alcanzarse en los aceleradores.

El Modelo Estándar es básicamente una teoría cuántica relativista de campos de Yang-Mills cuyo grupo es  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ , en el que el grupo  $SU(3)$  es el de las interacciones fuertes y  $SU(2) \times U(1)$  el de las interacciones electrodébiles. Las interacciones gravitatorias vienen descritas por una teoría clásica (es decir, no cuantizada): la Relatividad General.

Uno de los ingredientes fundamentales del Modelo Estándar es el fenómeno de la ruptura espontánea de simetría que separa a bajas energías las interacciones débiles de las electromagnéticas. Invirtiendo el punto de vista, podemos hablar de unificación de las interacciones electromagnética y débil a altas energías. Esta sería la última de las unificaciones que constituyen la historia de la física (la inmediatamente anterior sería la unificación de la electricidad y el magnetismo lograda por Maxwell).

Es natural intentar avanzar en la unificación de las interacciones. Esta es una de las ideas que ha prevalecido en la física teórica del siglo XX. La siguiente unificación que parece más natural es la de la fuerza fuerte con la electrodébil (ambas son teorías de Yang-Mills). Así se ha propuesto que los respectivos grupos gauge son en realidad subgrupos de un grupo más grande que sufre una ruptura espontánea de simetría a escalas de energía más altas que la de unificación electrodébil. La hipótesis de que el grupo  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  está contenido en un grupo gauge (semisimple) más grande se ha dado en conocer como *gran unificación*.

En el marco de las teorías de gran unificación las tres constantes de acoplamiento del Modelo Estándar se unifican a una escala de energía del orden de  $10^{16}$  GeV, que es la escala a la que tiene lugar la ruptura de simetría del grupo gauge que contiene al  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  del Modelo Estándar. La idea de que se pueda producir una unificación a una escala de energías tan elevada es una posibilidad muy atractiva pero también plantea sus propios problemas, como vamos a ver.

Existe otra escala de energía enorme en teoría cuántica campos: la escala a la que la atracción gravitatoria entre las partículas elementales se vuelve comparable con el resto de las posibles interacciones (fuerte, débil, electromagnética) entre éstas. Convencionalmente definimos la *escala de Planck* como la escala de energía a la que la interacción gravitatoria entre las partículas es del orden de la unidad:

$$M = \left( \frac{G_N}{\hbar c} \right)^{-1/2} \sim 10^{19} \text{ GeV} . \quad (1)$$

Sin embargo, incluso a escalas de energía del orden de  $10^{18}$  GeV, la atracción gravitatoria entre las partículas es comparable a la fuerza gauge debida a los bosones de una teoría de gran unificación. Aunque esta escala es todavía mayor que aquella a la que se unifican las constantes de acoplo del Modelo Estándar, puede parecer razonable esperar que la gran unificación esté relacionada de alguna forma con la unificación de la gravedad al resto de las interacciones de la física de partículas elementales.

Por otro lado, la introducción de una escala de energías tan elevada en física conduce directamente a algunos problemas conceptuales. El primer problema que inmediatamente nos encontramos cuando consideramos extensiones de gran unificación del Modelo Estándar es la masa del bosón de Higgs. De alguna forma necesitamos romper el grupo  $SU(2) \times U(1)$ . Una posibilidad es considerar que esta ruptura se debe a la existencia de un campo escalar fundamental cuyo valor esperado de vacío ( $vev$ ) es distinto de cero, o incluso podríamos pensar en un nuevo sector de partículas con una determinada dinámica.

Si  $SU(2) \times U(1)$  se rompiera gracias a un  $vev$  distinto de cero de un campo escalar elemental<sup>1</sup>, entonces dicho campo escalar debería formar parte de la teoría de gran unificación. Esto nos lleva a un problema conceptual importante. Para producir un  $vev$  adecuado que reproduzca las masas observadas de los bosones  $W$  y  $Z$ , el campo escalar de Higgs debe tener un término de masa negativa del orden de  $-\mu^2 \sim -(100\text{GeV})^2$ . Desafortunadamente, la (masa)<sup>2</sup> de un campo escalar recibe renormalizaciones aditivas. En una teoría con una escala de *cut-off*  $\lambda$ ,  $\mu^2$  puede ser mucho más pequeña que  $\lambda^2$  si y sólo si la masa desnuda del campo escalar es del orden de  $-\lambda^2$ , y este valor se reduce a  $-\mu^2$  debido a correcciones radiativas. Si consideramos que la Naturaleza contiene las enormes escalas de energía de gran unificación, tenemos que considerar que un valor adecuado para el *cut-off*  $\lambda$  debería ser del orden de  $10^{16}$  GeV o mayor. En definitiva, la (masa)<sup>2</sup> del bosón de Higgs está 28 (o más) órdenes de magnitud por debajo de su valor natural, es decir, que la masa del campo Higgs es mucho más pequeña que la escala de gran unificación. Esta cuestión que surge en teorías de gran unificación es lo que se ha dado en llamar el *problema de las jerarquías gauge*.

La enorme escala de energías que introducen las teorías de gran unificación introduce otro problema además del de la masa del bosón de Higgs. Al cuantizar una teoría de campos escalares libres, la densidad de energía de vacío recibe una contribución positiva e infinita de las energías *zero-point* de los distintos modos de oscilación. Si la escala del *cut-off* es  $\lambda$ , esta energía *zero-point* viene aproximadamente dada por:

$$\langle 0|\mathcal{H}|0\rangle \sim \lambda^4, \quad (2)$$

siendo  $\mathcal{H}$  el Hamiltoniano. La ruptura espontánea de simetría da lugar a una contribución finita de la densidad de energía de vacío de la forma

$$\langle 0|\mathcal{H}|0\rangle \sim -cv^4, \quad (3)$$

siendo  $c$  una constante adimensional y  $v$  el  $vev$ . De esta forma, podríamos esperar que tanto la ruptura espontánea de la simetría de la interacción electrodébil  $SU(2) \times U(1)$  como la de la simetría quiral de la interacción fuerte podrían dar lugar a una modificación de la densidad de la energía de vacío.

---

<sup>1</sup>Ésta es la opción que mejor parece concordar con los datos experimentales.

En los experimentos de física de partículas elementales no podemos observar tales modificaciones de la energía de vacío. Por ejemplo, las masas de partículas medidas experimentalmente son diferencias de energía entre el vacío y ciertos estados excitados de  $\mathcal{H}$ , lo que implica que no podemos medir el valor real de la energía absoluta de vacío. Sin embargo, existe un método mediante el cual quizás podríamos observar la energía de vacío: acoplando esta energía a la gravedad, puesto que en gravitación sí que hay una escala absoluta de energías. Según la Relatividad General, el tensor de energía-momento  $T_{\mu\nu}$  de la materia es la fuente del campo gravitatorio. Se acepta comunmente que una densidad de energía de vacío  $\langle 0|\mathcal{H}|0\rangle = \Lambda$  contribuye a la fuente con un término proporcional a  $\Lambda$  de la forma:

$$T_{\mu\nu} = N(T_{\mu\nu}) + \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (4)$$

Aquí hemos separado  $T_{\mu\nu}$  en dos partes:  $N(T_{\mu\nu})$  es la parte cuyo *vev* es cero, y  $\Lambda g_{\mu\nu}$  es la parte que contribuye a la energía de vacío. Este último término tiene la forma de una constante cosmológica en las ecuaciones de Einstein, y, por tanto, afectará potencialmente a la expansión del universo. Las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica vienen dadas por:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} R + \frac{d-2}{2} \Lambda_B g_{\mu\nu} = 8\pi G^{(d)} T_{\mu\nu} \quad (5)$$

siendo  $G^{(d)}$  la constante de Newton en  $d$  dimensiones y  $\Lambda_B$  la constante cosmológica *puramente gravitatoria*<sup>2</sup>. De esta forma, podemos considerar que la constante cosmológica se renormaliza, es decir, que la constante cosmológica efectiva  $\Lambda_{ef}$  será  $(\Lambda_B - \frac{16\pi G^{(d)}}{d-2} \Lambda)$ .

Las medidas que se han llevado a cabo acerca de la expansión cosmológica excluyen una constante cosmológica grande. De hecho, sabemos que  $\Lambda_{ef}$  es menor que  $\sim (10^{-11} GeV)^4$ . No se entiende por qué la constante cosmológica que observamos es mucho más pequeña que los ajustes a la energía de vacío generados por transiciones de fase conocidas en física de partículas y las energías de vacío de la teoría de campos. Hay 120 órdenes de magnitud de diferencia entre la cota experimental para  $\Lambda_{ef}$  y el valor  $\Lambda$  que se obtiene a partir de teoría de campos, lo que requiere una cancelación extraordinariamente precisa (y poco natural) entre  $\Lambda$  y  $\Lambda_B$ . Este problema se conoce como el *problema de la constante cosmológica*.

Se han propuesto varias soluciones a estos dos problemas (jerarquías gauge y constante cosmológica). Una de las más interesantes es la introducción de supersimetría que, sin embargo, produce nuevos problemas (en particular el de la propia ruptura de supersimetría). No vamos a hablar aquí de esta posibilidad sino de una clase de escenarios en los que estos dos problemas se resuelven a través de la introducción de dimensiones espaciales extra.

La introducción de dimensiones espaciales tiene una larga historia que se remonta a los trabajos de Kaluza, Klein, Einstein y Rosen. Originalmente, su motivación era la unificación de la gravitación con el electromagnetismo. Muy posteriormente se utilizaron para unificar la gravitación con las interacciones gauge conocidas. Más recientemente han aparecido de forma natural en las teorías de supercuerdas, que están bien definidas en 10 dimensiones.

Al margen del éxito de estas teorías (cuyos problemas incluyen los de las teorías supersimétricas y de gran unificación), es lícito preguntarse de forma general cuántas

---

<sup>2</sup> *Desnuda*.

dimensiones tiene realmente nuestro universo y cómo, si tiene más de 4, sólo vemos estas 4.

Si el universo tuviera más de 4 dimensiones no compactas en las cuales se propagase la gravedad, la primera consecuencia sería una modificación de la ley de Newton de la Gravitación Universal ya que el potencial estático gravitatorio sigue una ley  $V(r) \sim 1/r^{(d-3)}$ , siendo  $d$  el número de dimensiones del espacio-tiempo. Los experimentos sobre el comportamiento de la gravedad que se han llevado a cabo hasta nuestros días siempre han verificado satisfactoriamente la ley de Newton, excepto a distancias muy pequeñas, donde es muy difícil hacer medidas.

Hasta ahora, la única solución a conocida a este problema era la *compactificación à la Kaluza-Klein* que consiste en suponer que el espacio-tiempo es producto de dos subespacios. Uno de estos subespacios representaría el espacio-tiempo 4-dimensional no compacto que describe el universo que observamos, mientras que el otro subespacio es compacto y muy pequeño, de forma que no podríamos percibirlo. Los gravitones que se mueven en las direcciones compactas tienen el momento cuantizado y se manifiestan en las 4 dimensiones visibles como una espectro discreto (pero infinito) de gravitones masivos. El primer estado masivo está separado del estado sin masa por una energía inversamente proporcional al volumen del subespacio compacto. Haciendo a éste muy pequeño las contribuciones de los gravitones masivos a la ley de Newton son despreciables excepto a muy pequeñas distancias (energías comparables a las del primer estado masivo), donde estas desviaciones no están excluidas experimentalmente.

Hace dos años se propuso una solución al problema de las jerarquías gauge basado en la existencia de dimensiones extra. En los modelos más sencillos, el espacio-tiempo es 5-dimensional, y contiene una hipersuperficie 4-dimensional, que se ha dado en llamar 3-brana, que contiene el universo que conocemos. Sin embargo, estos modelos no resolvían el problema que acabamos de explicar, que es fundamental.

Randall y Sundrum han propuesto más recientemente un modelo de este tipo para resolver el problema de las jerarquías gauge [1]. El modelo incluye una segunda 3-brana y el espacio-tiempo 5-dimensional estaría limitado por ambas 3-branas<sup>3</sup>. La dimensión extra sería compacta, aunque no sería una variedad diferenciable como en las teorías usuales de Kaluza-Klein sino un *orbifold*, y de nuevo se tendría un espectro masivo discreto de gravitones en 4 dimensiones. En un segundo artículo observaron que si se eliminara la segunda 3-brana, aunque el espectro de gravitones masivos sería continuo, por un lado el modo sin masa estaría *confinado* en la 3-brana dando lugar a una interacción gravitatoria 4-dimensional acorde a la ley de Newton.

Este tipo de modelos de Randall-Sundrum son, pues, una alternativa a la compactificación *à la Kaluza-Klein*. En este trabajo vamos a estudiar los modelos originales de Randall y Sundrum, vamos a buscar generalizaciones y vamos a ver cómo podrían además resolver el problema de la constante cosmológica. A continuación hacemos un resumen detallado de los contenidos de esta tesina.

En el capítulo 1 estudiamos los modelos que propusieron originalmente Randall y Sundrum [1, 2].

El primer modelo [1] se propuso, como hemos dicho, con la idea de entender el problema de las jerarquías gauge desde un punto de vista diferente. Veremos cómo la escala débil es generada por una escala del orden de la escala de Planck por medio de

---

<sup>3</sup>Este modelo está en cierto sentido inspirado en el de Horawa y Witten para obtener la cuerda heterótica a partir de la *teoría M*.

un factor exponencial debido a la métrica 5-dimensional que no es factorizable, y que será un trozo de  $aDS$ . Básicamente, este mecanismo se fundamenta en la existencia de una dimensión extra. En definitiva, el escenario en el que este problema se ve resuelto será un trozo de  $aDS_5$  entre dos 3-branas. Una de estas 3-branas, a la que llamaremos *oculta*, contiene los campos del Modelo Estándar.

En el segundo modelo [2], muy similar al anterior, analizaremos cómo la gravedad en cuatro dimensiones se ve *confinada* en la 3-brana. El escenario en este caso es una 3-brana en  $aDS_5$ , donde la quinta dimensión es, en principio, semi-infinita. Por tanto, en este caso tenemos un escenario con cinco dimensiones no compactas. El confinamiento de la gravedad se debe a que existe un estado ligado del gravitón 5-dimensional que está localizado sobre la 3-brana. Aparte del estado ligado, existe un espectro de Kaluza-Klein continuo (es decir, una torre de gravitones masivos). El estado ligado reproduce perfectamente la Ley de Newton, mientras que los modos masivos dan lugar a una corrección muy pequeña a la misma.

Los modelos de Randall-Sundrum consideran que el espacio-tiempo en cuatro dimensiones es el espacio-tiempo de Minkowski. Es inmediato generalizar estos escenarios al caso en que la brana sea curva; la única condición que debe satisfacerse es que el espacio 4-dimensional sea *Ricci-flat*, es decir, que el tensor de Ricci asociado a la métrica en cuatro dimensiones sea cero [17, 19, 20].

El propósito de la sección 2.1 es generalizar estos modelos a aquellos casos en los que la curvatura de la brana pueda ser no nula, lo que básicamente significa que ésta pueda albergar una constante cosmológica distinta de cero [3, 16]. Consideraremos también la posibilidad de que la constante cosmológica 5-dimensional pueda ser positiva, negativa o cero, a fin de obtener todos los posibles escenarios. Una de las propiedades más importantes de estas soluciones es que cuando la métrica en cuatro dimensiones es maximalmente simétrica (y es, por tanto, el vacío de la teoría efectiva 4-dimensional), entonces la métrica correspondiente en cinco dimensiones es también maximalmente simétrica (es decir, el vacío 5-dimensional).

En la sección 2.3 centraremos nuestro estudio en las propiedades de supersimetría de los escenarios tipo Randall-Sundrum que construimos en la sección 2.1 [3]. No todos los escenarios posibles (dependiendo de las constantes cosmológicas en cuatro y cinco dimensiones) pueden ser supersimétricos. De hecho, antes de introducir las fuentes (branas), únicamente existen dos casos en los que se puede tener supersimetría no rota: el escenario original de Randall y Sundrum, y un escenario con constante cosmológica 5-dimensional nula y De Sitter en cuatro dimensiones. En ambos casos, la cantidad de supersimetría preservada dependerá de la métrica 4-dimensional. Si ésta es maximalmente simétrica, entonces la supersimetría preservada será maximal.

Al introducir las branas rompemos la supersimetría en el *bulk* (espacio entre las branas). Sin embargo, en estos casos la supersimetría en el *bulk* no se rompe localmente, ya que la solución es ahí igual que si no existieran las branas. Pero queremos que la supersimetría no rota sea global, y no sólo entre las branas. Esto requiere, de nuevo, considerar que las constantes cosmológicas son en realidad constantes *a intervalos*, es decir, que éstas puedan ser diferentes a ambos lados de la brana. La condición necesaria para tener supersimetría global no rota será poder empalmar las soluciones de la ecuación de Killing a ambos lados de la brana. Esta condición implica directamente que la constante cosmológica 4-dimensional debe ser nula. Esto no crea problemas en el caso de Randall-Sundrum, aunque resulta imprescindible imponer una condición sobre el espinor de Killing, una proyección

que rompe la mitad de la supersimetría. En el segundo caso, por el contrario, toda la supersimetría se rompe a no ser que la solución sea trivial.

Llegados a este punto, nos planteamos si podemos reproducir los modelos de Randall-Sundrum utilizando una formulación que nos acerque a las teorías de cuerdas. La idea consiste en encontrar una formulación de estos escenarios utilizando una acción efectiva de una brana que se comporte como una fuente para la solución de Randall-Sundrum. Partimos de la base de que una constante puede verse como el dual de una  $(\hat{d} - 1)$ -forma potencial. La ecuación de movimiento para el tensor de campo asociado a este potencial implica directamente que el dual de éste es constante *a intervalos*. Por tanto, la idea consiste en que podemos formular nuestra teoría utilizando un tensor de campo en vez de la constante cosmológica. Esta misma filosofía se utilizó en el caso de la teoría IIA masiva de Romans [8], en la que podemos sustituir el parámetro de masa por un potencial al que se acopla la D8-brana [9].

Esta formulación va a implicar una generalización de la teoría [3], dado que ahora podemos tener soluciones en las que la constante cosmológica es diferente en distintas regiones del espacio-tiempo. Los puntos de discontinuidad en la *constante* cosmológica serán *muros de dominio* (defectos topológicos de dimensión  $d = (\hat{d} - 1)$ , siendo  $\hat{d}$  la dimensión del espacio-tiempo en el que viven) que se comportan como fuentes del potencial asociado al tensor de campo, el dual de la constante cosmológica. Interpretamos estos muros de dominio como los volúmenes del universo de  $(\hat{d} - 2)$ -branas cargadas con este potencial. Trataremos esta cuestión en la sección 2.4.

En el capítulo 3 introducimos el dilatón en los escenarios tipo Randall-Sundrum [10, 11, 12, 13, 14, 15] con el objetivo de acercar aún más estos modelos a las teorías de cuerdas, ya que en estas teorías este campo escalar aparece de forma natural en el espectro. La física de estos modelos es diferente que la de aquéllos sin dilatón, ya que éste introduce una singularidad desnuda en el espacio 5-dimensional que puede alcanzarse en tiempo finito. De nuevo, existirá un estado ligado del gravitón localizado en la brana, cuya función de onda asociada decae al alejarse de ésta, es decir, que la probabilidad de encontrar al gravitón fuera de la brana es muy pequeña.

Un problema importante que surge en los escenarios tipo Randall-Sundrum es que la tensión de la brana queda fijada en función de los parámetros de la teoría 5-dimensional. Si la tensión de la brana cambia debido a fluctuaciones cuánticas, entonces la alguno de estos parámetros (o varios) también debe cambiar. Este resultado no parece lógico, ya que no resultaría natural que un parámetro de la acción variase. En la sección 3.4 explicamos un mecanismo que podría resolver esta cuestión [10, 11], y que además nos permitiría entender el problema de la constante cosmológica desde una perspectiva diferente. El mecanismo se basa en acoplar un campo escalar a la brana y a la gravedad (nos centraremos en el caso en el que el campo escalar es el dilatón). La idea consiste en que este campo escalar se *autoajuste* para compensar las variaciones de la tensión de la brana. Veremos los diferentes casos en los que este mecanismo se puede aplicar. En todos ellos, el dilatón absorbe las variaciones de la tensión de la brana de forma que la constante cosmológica 5-dimensional no se ve afectada por estos cambios. Además, la constante cosmológica 4-dimensional no varía. Si ésta es nula, seguirá siendo nula, de modo que un observador que viva en la brana no notará cambio alguno. La generalización de este mecanismo al caso en el que la constante cosmológica sobre la brana es distinta de cero [15] implica que las variaciones en la tensión de la brana debidas a fluctuaciones cuánticas se



ven absorbidas por el campo escalar, la constante cosmológica 4-dimensional y un re-escalado de la métrica, compensándose estos dos últimos, de forma que en la teoría efectiva en cuatro dimensiones todo parecería seguir exactamente igual. Por tanto, lo que estamos diciendo es que la constante cosmológica sobre la brana no está relacionada con la energía de vacío, sino que únicamente es la curvatura de la brana, es decir, una propiedad puramente geométrica.

Nos preguntamos ahora cómo un observador que viva en 5 dimensiones ve un objeto localizado en la brana. En concreto, centraremos nuestro interés en objetos tipo agujero negro [17, 18, 19, 20], aunque perfectamente pueden estudiarse otra clase de soluciones<sup>4</sup>.

Nos centraremos primero en aquellas soluciones con constante cosmológica nula en cuatro dimensiones. Por simplicidad y a modo de ejemplo ilustrativo analizaremos el caso de un agujero negro tipo Schwarzschild en la brana. Esta solución se extenderá en la quinta dimensión dando lugar a una *cuerda negra*. De hecho, interpretamos la solución de Schwarzschild como la intersección de esta cuerda negra con la brana, induciendo así un agujero negro tipo Schwarzschild sobre ésta. Este tipo de soluciones tiene una singularidad de curvatura en el horizonte de  $aDS_5$ ,  $z = \infty$ , que, en el caso de Schwarzschild, se acopla a la masa del agujero negro. Un análisis detallado de la solución nos permite entender lo que sucede. La cuerda negra intersecta con la brana, situada en  $z = 0$ , dando lugar al agujero negro en la brana. Sin embargo, cerca del horizonte la cuerda negra tiende a convertirse en una *ristra de agujeros negros*<sup>5</sup>, para finalmente dar lugar a una línea de agujeros negros. La forma de “puro” que adopta esta solución hace que la llamemos *puro negro*.

El problema que surge en la solución anterior es que no sabemos cómo interpretar físicamente la singularidad en el horizonte de  $aDS_5$ . Esta singularidad puede evitarse introduciendo una constante cosmológica sobre la brana. De esta forma, la solución no tiene singularidades, y de nuevo la interpretamos como una cuerda negra intersectando con la brana, de forma que se induce sobre ésta un agujero negro, en este caso, asintóticamente  $(a)DS$ .

---

<sup>4</sup>Los modelos cosmológicos en este tipo de escenarios han sido objeto de gran interés, aunque en este trabajo no entraremos en el estudio de este tipo de soluciones.

<sup>5</sup>Con la forma de una *ristra de chorizos*.

# Capítulo 1

## La idea original

### 1.1 El problema de las jerarquías gauge

En esta sección vamos a explicar el trabajo que originalmente llevaron a cabo Randall y Sundrum en [1]<sup>1</sup>, en el que propusieron una forma alternativa de entender el problema de las jerarquías gauge considerando métricas no factorizables de la forma<sup>2</sup>:

$$d\hat{s}^2 = a^2(y)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dy^2, \quad (1.1)$$

donde  $\eta_{\mu\nu}$  es el vacío de Minkowski en  $(\hat{d} - 1)$  dimensiones y  $a(y)$  es un factor que únicamente depende de la coordenada extra  $y$ , conocido como el factor *warp*. Esta métrica es solución de las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica  $\hat{\Lambda}$  para un factor *warp* concreto.

La acción de gravedad con constante cosmológica  $\hat{\Lambda}$  es:

$$\hat{S}_{grav} = \frac{1}{2\hat{\kappa}} \int d^{\hat{d}}x \sqrt{|\hat{g}|} \left[ \hat{R} - (\hat{d} - 2)\hat{\Lambda} \right] \quad (1.2)$$

Esta acción nos da las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\hat{R}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \hat{\Lambda}\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \quad (1.3)$$

Con el Ansatz tipo *warped* (1.1), las ecuaciones de movimiento (1.3) en  $\hat{d} = 5$  se traducen en:

$$\begin{aligned} 0 &= (a')^2 + \frac{\hat{\Lambda}}{4}a^2 \\ 0 &= a'' + \frac{\hat{\Lambda}}{4}a, \end{aligned} \quad (1.4)$$

donde  $a' \equiv \partial_y a(y)$ . La solución de (1.4) es:

$$d\hat{s}^2 = e^{-2\hat{g}y}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dy^2, \quad (1.5)$$

---

<sup>1</sup>En adelante nos referiremos a este escenario como RS1.

<sup>2</sup>De forma general, utilizamos los convenios propuestos en [25]. Todos los objetos que aparecen con *sombrecito* son objetos  $\hat{d}$ -dimensionales, mientras que los que no aparecen con *sombrecito* son  $d = (\hat{d} - 1)$ -dimensionales. Los índices curvos se expresan con letras griegas ( $\mu, \nu, \dots$ ) (o mediante el subrayado), mientras que para los índices planos utilizamos el alfabeto latino ( $a, b, \dots$ ). En la mayor parte del trabajo particularizaremos a  $\hat{d} = 5$ .

donde  $\hat{g}^2 = -\frac{\hat{\Lambda}}{4}$ , siendo  $\hat{g}$  el inverso del radio de  $aDS$ . Esta solución es  $aDS_5$ . La dimensión extra  $y$  en estas coordenadas es infinita.

Introducimos ahora dos 3-branas en  $y = 0$  e  $y = \ell$  y hacemos la identificación  $(x^\mu, y)$  con  $(x^\mu, -y)$ , es decir, trabajamos con el orbifold  $S^1/\mathbb{Z}_2$  en la dimensión extra  $y$ . El rango de  $y$  es  $-\ell \leq y \leq \ell$ , con  $\ell \propto \pi$ , aunque la métrica quedará completamente especificada con el rango  $0 \leq y \leq \ell$ . Entonces, las posiciones de las branas son los puntos fijos del orbifold  $y = 0, \ell$ , es decir, que son las fronteras del espacio-tiempo 5-dimensional. Supongamos que el universo que conocemos (4-dimensional) vive en una de las branas, que llamaremos *visible*, y llamaremos brana *oculta* a la otra. Después de hacer el orbifolding, el intervalo de la dimensión extra es  $\ell$ . En la sección 2.1 veremos que este escenario proviene en realidad de considerar una red infinita de branas y anti-branas, y recuperaremos el escenario que acabamos de describir al restringir nuestro estudio a una región fundamental cuya frontera serán dos branas (anti-branas) con una anti-brana (brana) en medio.

Las 3-branas se acoplan a las componentes 4-dimensionales de la métrica 5-dimensional, es decir, sobre las branas se inducen las siguientes métricas:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}^{vis} &= \hat{g}_{\mu\nu}(x^\rho, y = \ell) = \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(x^\rho, y = \ell) \delta_{\hat{\mu}}^{\hat{\rho}} \delta_{\hat{\nu}}^{\hat{\rho}}, \\ g_{\mu\nu}^{oc} &= \hat{g}_{\mu\nu}(x^\rho, y = 0) = \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(x^\rho, y = 0) \delta_{\hat{\mu}}^{\hat{\rho}} \delta_{\hat{\nu}}^{\hat{\rho}}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

donde  $\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$  es la métrica 5-dimensional.

La acción clásica que describe este tipo de escenario viene dada por:

$$\hat{S} = \hat{S}_{grav} + \int_{y=\ell} d^{\hat{d}-1} x \sqrt{|g_{vis}|} (\mathcal{L}_{vis} - V_{vis}) + \int_{y=0} d^{\hat{d}-1} x \sqrt{|g_{oc}|} (\mathcal{L}_{oc} - V_{oc}), \quad (1.7)$$

En la acción (1.7) hemos separado los lagrangianos sobre las branas en dos partes.  $\mathcal{L}_{vis}$  y  $\mathcal{L}_{oc}$  son las partes de los lagrangianos de las teorías gauge que pueden vivir sobre las branas cuyos  $vev$ <sup>3</sup> son cero.  $V_{vis}$  y  $V_{oc}$  son las contribuciones a la energía de vacío de los campos de estas teorías gauge cuyos  $vev$  son distintos de cero. Las partes de los lagrangianos sobre las branas cuyas energías de vacío son distintas de cero actúan como fuentes gravitatorias incluso en ausencia de excitaciones de las partículas de la teoría gauge. Por tanto, la forma explícita de los lagrangianos  $\mathcal{L}_{vis}$  y  $\mathcal{L}_{oc}$  no será necesaria para determinar la métrica 5-dimensional (clásica) en el estado fundamental (solución de vacío), ya que las únicas partes de los lagrangianos sobre las branas cuyas contribuciones a la energía de vacío son distintas de cero son, por definición,  $V_{vis}$  y  $V_{oc}$ .

Por tanto, la parte de la acción de cada una de las branas cuya contribución será distinta de cero a la hora de encontrar soluciones de vacío de la teoría 5-dimensional es de la forma:

$$-V \int d^{\hat{d}-1} x \sqrt{|g_{vis}|}, \quad (1.8)$$

---

<sup>3</sup>Valores esperados de vacío.

que podemos interpretar como la acción de una brana con tensión  $V$ . De este modo, interpretamos las energías de vacío  $V_{vis}$  y  $V_{oc}$  como las tensiones de las branas visible y oculta, respectivamente.

Las ecuaciones de movimiento que obtenemos de la acción  $\hat{S}$  son:

$$0 = \sqrt{|\hat{g}|} \left[ \hat{R}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \frac{1}{2} \hat{R} \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} + \frac{\hat{d}-2}{2} \hat{\Lambda} \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \right] + \sqrt{|g_{vis}|} \hat{\kappa} V_{vis} g_{\mu\nu}^{vis} \delta_{\hat{\nu}}^{\mu} \delta_{\hat{\nu}}^{\nu} \delta(y - \ell) + \sqrt{|g_{oc}|} \hat{\kappa} V_{oc} g_{\mu\nu}^{oc} \delta_{\hat{\nu}}^{\mu} \delta_{\hat{\nu}}^{\nu} \delta(y), \quad (1.9)$$

que con el Ansatz (1.1) en  $\hat{d} = 5$  quedan:

$$0 = (a')^2 + \frac{\hat{\Lambda}}{4} a^2$$

$$0 = a'' + \frac{\hat{\Lambda}}{4} a + \frac{2\hat{\kappa}}{3} a V_{vis} \delta(y - \ell) + \frac{2\hat{\kappa}}{3} a V_{oc} \delta(y) \quad (1.10)$$

La solución de estas ecuaciones que respeta la simetría del *orbifold*  $y \rightarrow -y$  y la invariancia Poincaré 4-dimensional es:

$$d\hat{s}^2 = e^{-2\hat{g}|y|} \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} - dy^2. \quad (1.11)$$

donde de nuevo  $\hat{g}^2 = -\frac{\hat{\Lambda}}{4}$ . Hemos hecho cero la constante de integración arbitraria que aparece en el factor *warp*  $a(y)$ , ya que puede absorberse en un *re-escaleo* del espacio-tiempo 4-dimensional. Esta solución sólo tiene sentido si  $\hat{\Lambda} < 0$ , lo que asumiremos a lo largo de todo este capítulo. El espacio que queda entre las branas es, por tanto, un *trozo* de  $aDS_5$ .

Las tensiones de las branas quedan fijadas mediante:

$$V_{oc} = -V_{vis} = \frac{3}{\hat{\kappa}} \sqrt{\frac{-\hat{\Lambda}}{4}}, \quad (1.12)$$

es decir, las ecuaciones de movimiento se satisfacen si y sólo si se verifica (1.12). En principio esta identidad puede parecer poco natural, ya que implica que si la tensión de la brana varía (debido a fluctuaciones cuánticas), entonces  $\hat{\Lambda}$  o  $\hat{\kappa}$  deben cambiar para acomodar estas variaciones. Sin embargo,  $\hat{\Lambda}$  y  $\hat{\kappa}$  son parámetros de la acción, de modo que no resulta lógico que varíen. Por el momento olvidaremos este problema. En la sección 3.4 explicaremos una posible solución.

Básicamente, la idea es que tenemos teorías en cuatro dimensiones viviendo sobre la brana, que habita en un espacio-tiempo 5-dimensional. Entonces, la teoría de gravedad sobre la brana debe estar relacionada con aquella en el *bulk*: la constante de Newton de la teoría de gravedad 4-dimensional está dada en función de los parámetros del *bulk* y del tamaño de la dimensión extra. Podemos ver esto de una forma sencilla a partir de la acción de la teoría.

Sustituyendo nuestra solución (1.11) en la acción (1.7) podemos ver, después de algún cálculo, que el término de la constante cosmológica 5-dimensional se cancela con el término de la brana y los que aparecen al reducir de  $\hat{R}$  a  $R$  con el Ansatz

tipo *warped*. De esta forma, obtenemos la acción efectiva de gravedad 4-dimensional sobre la brana:

$$S = \frac{1}{2\hat{\kappa}} \int a^2 dy \int d^4x \sqrt{|g|} R, \quad (1.13)$$

donde  $R$  es el escalar de Ricci asociado a la métrica 4-dimensional  $g_{\mu\nu}$ . Haciendo la integral en  $y$  obtenemos la acción efectiva 4-dimensional, lo que nos induce a pensar que las constantes gravitatorias  $\hat{\kappa}$  y  $\kappa$  deben estar relacionadas de la forma:

$$\kappa = \frac{\hat{\kappa}}{\int a^2 dy}. \quad (1.14)$$

Teniendo en cuenta que

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(|y|) dy = 2 \int_0^{\ell} f(y) dy, \quad (1.15)$$

obtenemos

$$\kappa = \frac{\hat{g}}{1 - e^{-2\hat{g}\ell}} \hat{\kappa}. \quad (1.16)$$

Nos interesa conocer la relación existente entre las masas de Planck en 4 y 5 dimensiones  $M$  y  $\hat{M}$ , respectivamente. La masa de Planck en  $d$  dimensiones viene dada por [25]

$$M_d = \left( \frac{\hbar^{d-3}}{G_N^{(d)} c^{d-5}} \right)^{\frac{1}{d-2}}, \quad (1.17)$$

de modo que, teniendo en cuenta que  $\kappa \propto G_N$  y trabajando en unidades  $\hbar = c = 1$ , la relación entre las masas de Planck en 4 y 5 dimensiones es:

$$M^2 = \hat{M}^3 \int a^2 dy. \quad (1.18)$$

Por tanto, en nuestro caso:

$$M^2 = \frac{\hat{M}^3}{\hat{g}} [1 - e^{-2\hat{g}\ell}]. \quad (1.19)$$

En este último resultado vemos cómo depende la masa de Planck 4-dimensional  $M$  de la constante cosmológica  $\hat{\Lambda}$  (dada por  $\hat{g}$ ) y el intervalo de la quinta dimensión ( $\ell$ ). En el límite con  $\hat{g}\ell$  grande, la exponencial en (1.19) es muy pequeña, de modo que no influye de manera apreciable a la hora de determinar la escala de Planck 4-dimensional.

Aunque, como hemos visto, la exponencial tiene un efecto muy pequeño al determinar la escala de Planck cuando  $\ell \gg 1$ , veremos que juega un papel fundamental a la hora de determinar las masas del sector visible, es decir, la escala de masas sobre la brana que hemos llamado *visible*.

Las branas oculta y visible están situadas en  $y = 0$  e  $y = \ell$ , respectivamente. Entonces, en (1.6) vemos que  $g_{\mu\nu}^{oc} = g_{\mu\nu}$ , mientras que  $g_{\mu\nu}^{vis} = e^{-2\hat{g}\ell} g_{\mu\nu}$ . Vamos a ver que normalizando adecuadamente los campos podemos determinar las masas físicas.

Consideremos un ejemplo sencillo: un campo Higgs  $H$  fundamental que vive en la brana visible. La acción para este campo de Higgs es:

$$S_{vis} \supset \int d^4x \sqrt{|g_{vis}|} \left[ g_{vis}^{\mu\nu} \nabla_\mu H^\dagger \nabla_\nu H - \lambda (|H|^2 - v_0^2)^2 \right], \quad (1.20)$$

donde  $v_0$  es un parámetro de masa. Sustituyendo  $g_{\mu\nu}^{vis} = e^{-2\hat{g}\ell} g_{\mu\nu}$  en esta acción obtenemos

$$S_{vis} \supset \int d^4x e^{-4\hat{g}\ell} \sqrt{|g|} \left[ e^{2\hat{g}\ell} g^{\mu\nu} \nabla_\mu H^\dagger \nabla_\nu H - \lambda (|H|^2 - v_0^2)^2 \right]. \quad (1.21)$$

Podemos renormalizar el Higgs de la forma  $H \rightarrow e^{\hat{g}\ell} H$ , de forma que la acción efectiva que obtenemos es

$$S_{ef} \supset \int d^4x \sqrt{|g|} \left[ g^{\mu\nu} \nabla_\mu H^\dagger \nabla_\nu H - \lambda (|H|^2 - e^{-2\hat{g}\ell} v_0^2)^2 \right]. \quad (1.22)$$

Por tanto, las escalas de masa física quedan fijadas por una escala de ruptura de simetría,

$$v \equiv e^{-\hat{g}\ell} v_0. \quad (1.23)$$

Este resultado es completamente general:

*Cualquier parámetro de masa  $m_0$  en la brana visible corresponderá a una masa física*

$$m \equiv e^{-\hat{g}\ell} m_0 \quad (1.24)$$

*medida con la métrica  $g_{\mu\nu}$ , que es la métrica que aparece en la acción efectiva de Einstein.*

Si  $e^{\hat{g}\ell}$  es del orden de  $10^{16}$ , entonces este mecanismo produce escalas de masa física del orden del TeV a partir de parámetros de masa fundamentales del orden de la masa de Planck,  $10^{19}$  GeV.

Hasta aquí hemos considerado  $\hat{M}$  como la escala fundamental, y la escala del TeV como una escala derivada a consecuencia del factor exponencial que aparece en la métrica. Sin embargo, podríamos haber considerado la escala del TeV como la fundamental y la de Planck como la escala derivada. Este punto de vista es básicamente el punto de vista natural para un observador 4-dimensional que viva en la brana visible. Técnicamente este cambio de punto de vista se establece con una redefinición de las coordenadas 4-dimensionales de la forma  $x^\mu \rightarrow e^{\hat{g}\ell} x^\mu$ . En este caso, el factor *warp* en  $y = \ell$  es la unidad, mientras que en  $y = 0$  es  $e^{2\hat{g}\ell}$ . De esta forma, ya que no hay rescaleo del parámetro de masa  $v$  en el potencial de Higgs (puesto que el Higgs está canónicamente normalizado), la escala  $v$  toma su valor físico. Por tanto, como estamos asumiendo que todos los parámetros de masa fundamentales son del mismo orden, todos estos parámetros son del orden del TeV.

Experimentalmente este modelo resulta muy interesante, ya que el acoplo de una excitación de Kaluza-Klein individual a materia o a otros modos gravitatorios queda fijado por la escala débil, y no por la escala de Planck. Es decir, en vez de acoplos gravitatorios  $\sim \text{energía}/M_{Planck}$ , el acoplo de cada estado excitado es  $\sim \text{energía}/\text{TeV}$ , de modo que pueden detectarse individualmente. Si el modelo fuese correcto, estas

resonancias gravitatorias podrían detectarse en la próxima generación de aceleradores a través de productos de desintegración, lo que nos permitiría determinar el espín y la masa de estos modos gravitatorios.

## 1.2 Confinando la gravedad

El universo que observamos se manifiesta en cuatro dimensiones que no son compactas (tres dimensiones espaciales y una temporal). Por tanto, podemos aceptar que el universo realmente sólo tiene cuatro dimensiones e intentar explicar los fenómenos que observamos a partir de teorías 4-dimensionales.

Adoptando una visión alternativa, podríamos considerar que en realidad la Naturaleza vive en más de cuatro dimensiones, de las que únicamente vemos cuatro que no son compactas, es decir, que las teorías que describen el comportamiento del universo viven en más de cuatro dimensiones, y que, por algún motivo, tiene lugar un “proceso de compactificación” que da lugar a teorías efectivas 4-dimensionales.

Uno de los mecanismos más poderosos que se conocen para *reducir* el número de dimensiones (es decir, obtener teorías 4-dimensionales a partir de teorías en dimensiones más altas) es la *compactificación à la Kaluza-Klein*. Utilizando este tipo de compactificación se han propuesto muchos modelos que describen el espacio-tiempo como producto de dos subespacios. Uno de estos subespacios representaría el espacio-tiempo 4-dimensional no compacto que describe el universo que observamos, mientras que el otro subespacio es compacto y muy pequeño, de forma que no podríamos percibirlo.

En un segundo modelo muy parecido al de la sección anterior, Randall y Sundrum [2] propusieron una alternativa a la compactificación *à la Kaluza-Klein* basada en la suposición de que el universo podría describirse como un espacio-tiempo 5-dimensional no factorizable (es decir, que no fuese el producto directo de dos subespacios) en el que el universo 4-dimensional que observamos estaría localizado en una hipersuperficie (3-brana)<sup>4</sup>.

En la sección anterior hemos visto que una solución de gravedad con constante cosmológica en 5 dimensiones (en este caso, la solución de vacío,  $aDS_5$ ) es

$$d\hat{s}^2 = e^{-2\hat{g}y} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dy^2. \quad (1.25)$$

Perturbando la métrica (1.5) en el gauge de RS y trabajando en el gauge transversal sin traza (TT)<sup>5</sup>, hallamos que el modo no masivo del gravitón en la expansión:

$$\hat{h}_{\mu\nu}(x, y) = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}(y) h_{\mu\nu}^{(\alpha)}(x) \quad (1.26)$$

es:

$$\psi_0 = e^{-2\hat{g}y}, \quad (1.27)$$

---

<sup>4</sup>Nos referiremos a este modelo como RS2.

<sup>5</sup>En el apéndice A desarrollamos detalladamente el cálculo del gravitón sin masa en el caso más general posible.

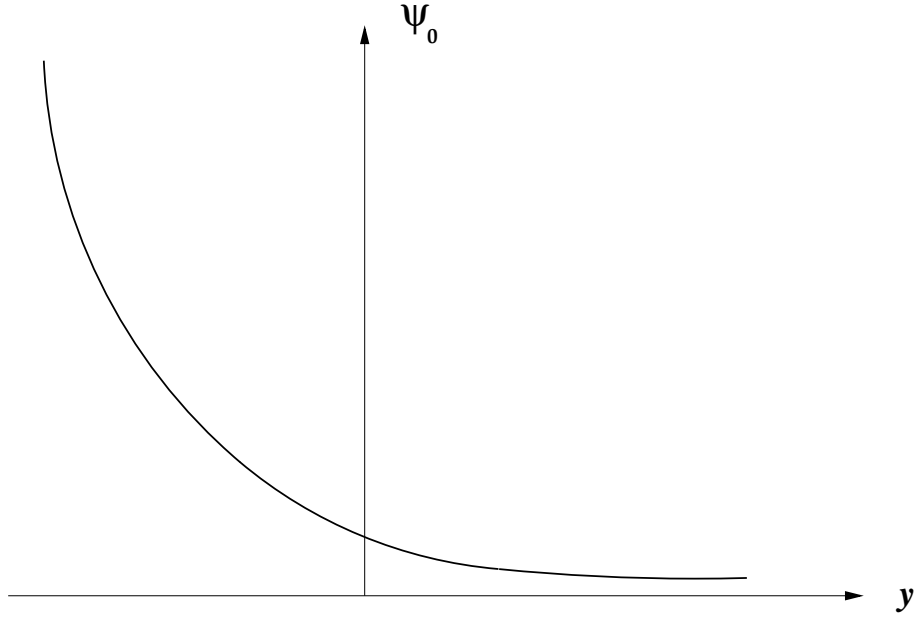


Figura 1.1: *Comportamiento del modo no masivo  $\psi_0$  del gravitón antes de introducir el corte: vemos que no es normalizable, ya que se crece exponencialmente en una región del espacio.*

que no es normalizable en todo el espacio, como vemos en la figura 1.1. Para que este gravitón sea normalizable, necesitamos introducir un corte en algún punto de la quinta coordenada, que elegimos, sin pérdida de generalidad, en  $y = 0$ . Este corte elimina la parte del espacio con  $y < 0$ , donde  $\psi_0$  se vuelve no normalizable. Podemos reemplazar la parte que hemos cortado del espacio con una copia de la parte que no hemos cortado, es decir,  $y > 0$  (ver figura 1.2). A efectos de la solución, esto representa hacer un cambio de variable  $y \rightarrow |y|$ , de modo que el factor *warp* ahora depende  $|y|$  en vez de  $y$ . Esto genera un comportamiento tipo delta de Dirac en las ecuaciones de movimiento, que compensamos introduciendo en la acción un término tipo *muro de dominio*, de forma que la acción de la teoría es ahora

$$\hat{S} = \hat{S}_{grav} + \int_{y=0} d^{\hat{d}-1}x \sqrt{|\tilde{g}|} (\mathcal{L}_0 - V_0). \quad (1.28)$$

donde  $\mathcal{L}_0$  es la parte del lagrangiano de la teoría gauge que vive en la brana cuyo *vev* es cero,  $V_0$  la parte del Lagrangiano cuyo *vev* es distinto de cero (como en la sección anterior, interpretamos  $V_0$  como la tensión de la brana) y  $\tilde{g}_{\mu\nu} = \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(y=0)\delta_{\hat{\mu}}^{\mu}\delta_{\hat{\nu}}^{\nu}$  es la métrica inducida sobre la brana. La única parte del lagrangiano de la teoría gauge localizada en la brana cuya contribución es distinta cero al considerar soluciones clásicas de vacío es  $V_0$ , ya que la energía de vacío de  $\mathcal{L}_0$  es cero.

Las ecuaciones de movimiento que obtenemos a partir de la acción (1.28) son, por tanto:

$$0 = \sqrt{|\hat{g}|} \left[ \hat{R}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \frac{1}{2} \hat{R} \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} + \frac{\hat{d}-2}{2} \hat{\Lambda} \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \right] + \sqrt{|\tilde{g}|} \hat{\kappa} V_0 \tilde{g}_{\mu\nu} \delta_{\hat{\nu}}^{\nu} \delta(y), \quad (1.29)$$

que con el Ansatz tipo *warped* (1.1) en  $\hat{d} = 5$  se traducen en:



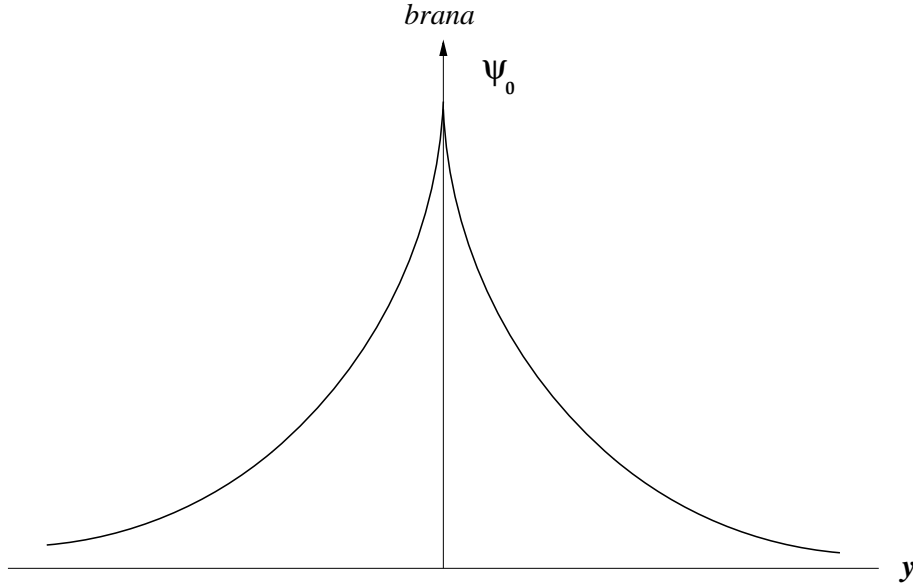


Figura 1.2: *Comportamiento del modo no masivo  $\psi_0$  del gravitón después de introducir el corte: en este caso sí que es normalizable, y además decae exponencialmente al alejarse de la brana, de modo que podemos considerar que está “confinado”.*

$$0 = (a')^2 + \frac{\hat{\Lambda}}{4}a^2 \quad (1.30)$$

$$0 = a'' + \frac{\hat{\Lambda}}{4}a + \frac{2\hat{\kappa}}{3}aV_0\delta(y)$$

La solución de estas ecuaciones que respeta la simetría  $y \rightarrow -y$  además de la invariancia Poincaré 4-dimensional es:

$$d\hat{s}^2 = e^{-2\hat{g}|y|}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dy^2. \quad (1.31)$$

La tensión de la brana viene dada por:

$$V_0 = \frac{3}{\hat{\kappa}}\sqrt{\frac{-\hat{\Lambda}}{4}} \quad (1.32)$$

que es exactamente la tensión de la brana oculta que obtuvimos en la sección anterior. Por tanto, hemos conseguido que el modo no masivo  $\psi_0$  del gravitón sea normalizable, y además que esté *confinado* en la brana, es decir, que tiende a cero al alejarse de ésta (en este caso decae exponencialmente), lo que nos hace pensar que este es un mecanismo para confinar la gravedad (en la brana).

Hasta aquí hemos visto que el gravitón no masivo de la teoría 4-dimensional está confinado en la brana. Pero, ¿qué sucede con los modos masivos? Vamos a estudiar estos modos con el propósito de conocer el espectro completo de las fluctuaciones tensoriales lineales de  $\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ , es decir,  $\hat{g}_{\mu\nu} = a^2(y)g_{\mu\nu} + \hat{h}_{\mu\nu}$ , donde en este caso tenemos  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ .

En el apéndice A derivamos la ecuación de movimiento de un gravitón 4-dimensional para métricas tipo *warped*, que, en los gauges TT y de RS, es:

$$a^{-2} \left[ \nabla^2 \hat{h}_{\mu\nu} + 2R^\rho_{(\mu\nu)\sigma} \hat{h}^{\rho\sigma} \right] - \hat{h}''_{\mu\nu} \quad (1.33)$$

$$-(\hat{d} - 5)a^{-1}a'\hat{h}'_{\mu\nu} + 2[(\hat{d} - 4)a^{-2}(a')^2 + a^{-1}a'']\hat{h}_{\mu\nu} = 0.$$

Con  $\hat{d} = 5$  y haciendo la separación de variables  $\hat{h}_{\mu\nu} = \psi(y)e^{ip \cdot x}\epsilon_{\mu\nu}$ , con  $p^2 = m^2$ , siendo  $m$  la masa 4-dimensional de la excitación de Kaluza-Klein (KK), la ecuación anterior queda:

$$\partial_y^2 \psi(y) + [m^2 e^{-2\hat{g}|y|} + 4\hat{g}\delta(y) - 4\hat{g}^2] \psi(y) = 0, \quad (1.34)$$

donde las condiciones de *orbifold* que hemos escogido nos dicen que sólo podemos considerar funciones pares de  $y$ . Haciendo una transformación de coordenadas de la forma

$$z = \text{sgn}(y) (e^{\hat{g}|y|} - 1) / \hat{g}, \quad (1.35)$$

y definiendo  $\check{\psi}(z) = \psi(y)e^{\hat{g}|y|/2}$  y  $\check{h}_{\mu\nu} = \hat{h}_{\mu\nu}e^{\hat{g}|y|/2}$ , obtenemos una ecuación análoga al de un problema de mecánica cuántica no relativista:

$$\left[ -\frac{1}{2}\partial_z^2 + V(z) \right] \check{\psi}(z) = m^2 \check{\psi}(z), \quad (1.36)$$

$$V(z) = \frac{15\hat{g}^2}{8(\hat{g}|z| + 1)^2} - \frac{3\hat{g}}{2}\delta(z).$$

Estudiar el potencial  $V(z)$  puede ayudarnos a comprender un poco mejor nuestro problema. La función  $\delta(z)$  que aparece en el potencial nos dice que existe un modo normalizable que es estado ligado, que interpretamos como el gravitón sin masa de la teoría efectiva en 4 dimensiones. El resto de los autoestados forman un continuo de modos masivos cuyas propiedades pueden entenderse a partir de la forma explícita de  $V(z)$ . En primer lugar, como el potencial tiende a cero en el límite  $|z| \rightarrow \infty$ , no existe un *gap*, y los modos continuos son asintóticamente ondas planas. Además, las amplitudes de estos modos masivos se ven suprimidas cerca del origen, ya que existe una barrera de potencial en  $z = 0$ . Finalmente, estos modos de KK pueden tener cualquier masa  $m$  tal que  $m^2 > 0$ .

Las soluciones de la ecuación (1.36) nos dicen que los modos masivos vienen dados en términos de funciones de Bessel, y son combinaciones lineales de

$$(|z| + 1/\hat{g})^{1/2} Y_2(m(|z| + 1/\hat{g})) \quad (1.37)$$

y

$$(|z| + 1/\hat{g})^{1/2} J_2(m(|z| + 1/\hat{g})). \quad (1.38)$$

El modo cero (gravitón 4-dimensional sin masa) se obtiene de estas soluciones en el límite  $m \rightarrow 0$ , que, después de hacer los cambios de variable adecuados, queda de la forma  $\psi_0(y) = e^{-2\hat{g}|y|}$ , como habíamos visto anteriormente.

Para entender bien el comportamiento de los modos masivos nos interesa los límites en los que el argumento de las funciones de Bessel,  $m(|z| + 1/\hat{g})$ , tiende a 0 y a  $\infty$ .

En el límite  $m(|z| + 1/\hat{g}) \rightarrow 0$  tenemos [26]:

$$\begin{aligned} J_2(m(|z| + 1/\hat{g})) &\sim \frac{m^2(|z| + 1/\hat{g})^2}{8}, \\ Y_2(m(|z| + 1/\hat{g})) &\sim -\frac{4}{\pi m^2(|z| + 1/\hat{g})} - \frac{1}{\pi}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Por tanto, para que se satisfaga la condición de frontera en la brana ( $z = 0$ ), en el límite  $m$  pequeño tenemos que elegir una combinación lineal de la forma

$$\check{\psi} \sim N_m (|z| + 1/\hat{g})^2 \left[ Y_2(m(|z| + 1/\hat{g})) + \frac{4\hat{g}^2}{\pi m^2} J_2(m(|z| + 1/\hat{g})) \right], \quad (1.40)$$

donde  $N_m$  es una constante de normalización adecuada.

En el límite  $m|z| \rightarrow \infty$  tenemos

$$\begin{aligned} J_2(m(|z| + 1/\hat{g})) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi m|z|}} \cos\left(m|z| - \frac{5}{4}\pi\right), \\ Y_2(m(|z| + 1/\hat{g})) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi m|z|}} \sin\left(m|z| - \frac{5}{4}\pi\right). \end{aligned} \quad (1.41)$$

Hasta ahora, en esta sección hemos trabajado en el problema en el que sólo hay una brana en el espacio-tiempo 5-dimensional. Si incluyéramos dos branas en vez de una, en analogía con la sección anterior, el resultado sería similar, pero con alguna diferencia que merece la pena mencionar. Supongamos que, efectivamente, tuviésemos una segunda brana en  $y_0 = \ell$ , es decir, en  $z_0 \equiv (e^{\hat{g}\ell} - 1)/\hat{g}$ . Esto simplemente exige una condición de frontera en  $z_0$  en relación al problema con una sola brana. Esta condición es

$$\partial_z \check{\psi}(z_0) = -\frac{3\hat{g}}{2(\hat{g}z_0 + 1)} \check{\psi}(z_0), \quad (1.42)$$

condición que satisface el modo cero que hemos hallado. Sin embargo, (1.42) impone una restricción sobre los modos continuos y cuantiza los valores permitidos de  $m$ . En el límite  $z_0 \rightarrow \infty$  todos estos modos se encuentran en el régimen asintótico (1.41) de ondas planas cuando satisfacen la nueva condición de frontera en  $z_0$ . Por tanto, sus masas quedan aproximadamente cuantizadas en múltiplos de  $z_0^{-1}$ .

Hemos obtenido el comportamiento asintótico para  $\ell$  grande pero finito. Nos interesa ahora estudiar el caso  $\ell \rightarrow \infty$ , es decir, recuperar el caso del que partíamos (una sola brana). Este límite da lugar a una teoría con una dimensión extra semi-infinita. Sin embargo, estábamos interesados en una teoría sin la condición de frontera del *orbifold*, es decir, con una dimensión extra infinita. Resulta trivial extender el escenario que hemos estudiado a aquél cuya quinta dimensión sea infinita: simplemente hay que permitir la existencia de funciones tanto pares como impares de  $z$ , en vez de considerar sólo funciones pares, restricción que proviene de las condiciones del *orbifold*.

Una vez encontrado el espectro de KK de la teoría efectiva en 4 dimensiones, podemos preguntarnos cuál es el potencial gravitatorio no relativista entre dos partículas

de masas  $m_1$  y  $m_2$  sobre la brana en  $z = 0$ , es decir, el potencial estático generado por el intercambio del modo cero y del espectro continuo de modos masivos. Este potencial viene dado por:

$$V(r) \sim G_N \frac{m_1 m_2}{r} + \int_0^\infty dm \frac{G_N}{\hat{g}} \frac{m_1 m_2 e^{-mr}}{r} \frac{m}{\hat{g}}, \quad (1.43)$$

donde el factor  $m/\hat{g}$  se debe a la supresión de las funciones de onda en  $z = 0$  en (1.39), mientras que el factor  $G_N/\hat{g}$  es simplemente el acoplo fundamental gravitatorio. Integrando, el potencial queda:

$$V(r) = G_N \frac{m_1 m_2}{r} \left( 1 + \frac{1}{\hat{g}^2 r^2} \right). \quad (1.44)$$

El término dominante se debe al estado ligado (gravitón 4-dimensional sin masa), y es simplemente el potencial gravitatorio de Newton. El espectro continuo de modos masivos da lugar una corrección a la gravedad Newtoniana. que únicamente es importante a distancias pequeñas, ya que se comporta como  $1/r^3$ . A gran escala esta corrección de la gravedad de Newton es prácticamente cero.

En el límite con  $m$  pequeña, la producción de modos gravitatorios continuos en la brana en  $z = 0$  queda suprimida por  $(dm/\hat{g})(m/\hat{g})$  debido a la supresión de las funciones de onda de los modos masivos en  $z = 0$ . Este resultado es de vital importancia, ya que significa que la amplitud para producir modos masivos en procesos de baja energía en la brana es extremadamente pequeña, mucho más pequeña que la fuerza gravitatoria. Si no fuese así podríamos estar perdiendo energía de la brana de forma continua a la quinta dimensión. Gracias a este factor de supresión, la probabilidad de producir modos KK queda suprimida por  $(p/\hat{g})^2$  en relación al modo cero, siendo  $p$  el momento de los procesos en cuestión. Si  $\hat{g}$  es del orden de la escala de Planck, esta probabilidad es muy pequeña para los procesos que hoy en día observamos.

# Capítulo 2

## Generalizaciones del escenario de Randall-Sundrum

Nos preguntamos ahora si existen otros escenarios similares al de RS que puedan tener propiedades parecidas. En este capítulo presentamos ciertas generalizaciones del modelo de RS que pueden ser utilizadas como alternativas a la compactificación de Kaluza-Klein.

En el capítulo anterior hemos visto que la solución de RS, dada por:

$$d\hat{s}^2 = e^{-2k|y|}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dy^2 \quad (2.1)$$

da lugar a una acción efectiva 4-dimensional de gravedad pura

$$S = \frac{1}{2\hat{\kappa}} \int a^2 dy \int d^4x \sqrt{|g|} R. \quad (2.2)$$

Podemos sustituir el vacío de Minkowski 4-dimensional  $\eta_{\mu\nu}$  que aparece en la solución de RS por una métrica  $g_{\mu\nu}$  que sea *Ricci-flat* (es decir, cuyo tensor de Ricci sea cero) [17, 19, 20], y el problema es exactamente igual al del capítulo anterior. Es fácil ver esta propiedad en las ecuaciones de movimiento (1.9), donde, al utilizar un *Ansatz* tipo *warp*, aparece el tensor de Ricci de la métrica 4-dimensional  $g_{\mu\nu}$ . En los escenarios originales de RS tenemos  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ , de forma que el tensor de Ricci es nulo. Por tanto, podemos considerar simplemente que la métrica 4-dimensional es *Ricci-flat* y todo funciona de forma similar. Esto significa que asumimos que la constante cosmológica sobre la brana es nula. Por tanto, un camino lógico para generalizar este tipo de soluciones es proponer que la constante cosmológica sobre la brana no sea nula [3], es decir, que la métrica 4-dimensional satisfaga las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica  $\Lambda$ :

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (2.3)$$

Las soluciones que obtenemos en este capítulo son válidas para un número de dimensiones  $\hat{d}$  arbitrario.

### 2.1 Las soluciones

De esta forma, vamos a buscar escenarios que sean solución de las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica arbitraria en  $\hat{d}$  dimensiones y que contengan

métricas que resuelvan las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica arbitraria en  $d = (\hat{d} - 1)$  dimensiones. Por tanto, estamos interesados en métricas tipo *warped* de la forma:

$$\begin{aligned} d\hat{s}^2 &= a^2(y) ds^2 - dy^2, \\ ds^2 &= g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu, \end{aligned} \tag{2.4}$$

que sean solución de

$$\begin{aligned} \hat{R}_{\hat{\rho}\hat{\nu}} &= \hat{\Lambda} \hat{g}_{\hat{\rho}\hat{\nu}}, \\ R_{\mu\nu} &= \Lambda g_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

donde  $\hat{\Lambda}$  y  $\Lambda$  son, respectivamente, las constantes cosmológicas en  $\hat{d}$  y  $d$  dimensiones, cuyos signos son, en principio, arbitrarios. Por conveniencia definimos  $\hat{g}$  y  $g$  como:

$$\hat{g}^2 = -\frac{\hat{\Lambda}}{(\hat{d} - 1)}, \quad g^2 = -\frac{\Lambda}{(d - 1)}. \tag{2.6}$$

Utilizando el ansatz (2.4) las ecuaciones de movimiento (2.5) son:

$$\begin{aligned} 0 &= a'' + \frac{\hat{\Lambda}}{\hat{d} - 1} a, \\ 0 &= (a')^2 + \frac{\hat{\Lambda}}{\hat{d} - 1} a^2 - \frac{\Lambda}{d - 1}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Podemos clasificar las soluciones de (2.7) en dos clases:

1.  $\hat{g} \neq 0$

$$a(y) = \frac{1}{2} (\mathfrak{J}_+ e^{\hat{g}y} + \mathfrak{J}_- e^{-\hat{g}y}), \tag{2.8}$$

con  $\mathfrak{J}_+ \mathfrak{J}_- = g^2/\hat{g}^2$ . Eligiendo  $\mathfrak{J}_- = \pm \mathfrak{J}_+$ , tenemos

$$a(y) = \frac{1}{2} \sqrt{\pm g^2/\hat{g}^2} (e^{\hat{g}y} \pm e^{-\hat{g}y}), \tag{2.9}$$

donde elegimos el signo de forma que  $a(y)$  sea real. Esto es siempre posible excepto en el caso  $\hat{g} \in \mathbb{I}, g \in \mathbb{R}$ . En los demás casos tenemos<sup>1</sup>, con  $g \neq 0$

(a)  $\hat{g}, g \in \mathbb{R}$

$$a = g/\hat{g} \cosh \hat{g}y, \tag{2.10}$$

(b)  $\hat{g} \in \mathbb{R}, g \in \mathbb{I}$

$$a = ig/\hat{g} \sinh \hat{g}y, \tag{2.11}$$

---

<sup>1</sup>El caso en el que  $a$  no es real puede fijarse mediante una rotación de Wick de  $y$  en una coordenada temporal.

(c)  $\hat{g}, g \in \mathbb{I}$

$$a = g/i\hat{g} \cos \hat{g}y. \quad (2.12)$$

En este caso, la coordenada  $y$  vive en un círculo de longitud  $\frac{2\pi}{i\hat{g}}$ .

Con  $g = 0$  la única posibilidad es  $\hat{g} \in \mathbb{R}$  y

$$a = e^{\pm \hat{g}y}, \quad (2.13)$$

que es el caso de RS que vimos en el capítulo anterior.

2.  $\hat{g} = 0$

$$a = igy, \quad (2.14)$$

lo que significa que debemos tener  $g \in \mathbb{I}$ .

La propiedad más importante de estas dos clases de soluciones es que si elegimos  $g_{\mu\nu}$  como la métrica maximalmente simétrica en  $d$  dimensiones con curvatura dada por  $\Lambda$ , entonces  $\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$  es la métrica maximalmente simétrica en  $\hat{d}$  dimensiones con curvatura dada por  $\hat{\Lambda}$ . La solución de RS encaja en el caso  $\hat{g} \in \mathbb{R}, g = 0$ : escogiendo  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ , *arriba*<sup>2</sup> tenemos (localmente) aDS. Las posibilidades nuevas que estamos introduciendo son:

- aDS arriba y aDS abajo;
- aDS arriba y DS abajo;
- DS arriba y DS abajo;
- Minkowski arriba y DS abajo.

En el apéndice A vemos que la parte dependiente de la dimensión extra del modo sin masa del gravitón es

$$\psi_0(y) = a^2(y), \quad (2.15)$$

que no es normalizable en todo el espacio para cualquiera de los casos que hemos visto.

Siguiendo los pasos de RS que explicábamos en el capítulo anterior, introducimos fuentes (branas) en las soluciones que acabamos de encontrar. Consideramos  $n$  fuentes con métricas inducidas  $g_{\mu\nu}^{(n)}$ . Separamos los lagrangianos de las teorías gauge que pueden vivir sobre las branas en dos partes:  $\mathcal{L}_n$ , la parte del lagrangiano cuyo *vev* es cero, y  $V_n$ , la parte del lagrangiano cuyo *vev* es diferente de cero. La nueva acción es, por tanto:

$$\hat{S} = \hat{S}_{grav} + \sum_n \int d^{\hat{d}-1}x \sqrt{|g^{(n)}|} (\mathcal{L}_n - V_n), \quad (2.16)$$

---

<sup>2</sup>Llamamos *arriba* a  $\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$  y *abajo* a  $g_{\mu\nu}$ .

donde  $\hat{S}_{grav}$  es la acción de gravedad en  $\hat{d}$  dimensiones con constante cosmológica  $\hat{\Lambda}$  dada por (1.2). Buscamos soluciones clásicas de vacío que minimicen la acción (2.16), de modo que, bajo esta consideración, no hay contribución de la parte  $\mathcal{L}_n$  de los lagrangianos sobre las branas, ya que su energía de vacío es cero. Las ecuaciones de movimiento que obtenemos son, por tanto:

$$\hat{R}^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \hat{\Lambda}\hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \hat{\kappa} \left[ g^{\rho\sigma} \delta_{\rho}^{\hat{\mu}} \delta_{\sigma}^{\hat{\nu}} - \frac{1}{\hat{d}-2} \hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}} (\hat{g}^{\rho\sigma} \hat{g}_{\rho\sigma}) \right] \sum_n V_n \delta(y - y_n), \quad (2.17)$$

y consideraremos que  $g_{\mu\nu}$  satisface

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (2.18)$$

Las constantes cosmológicas no son en realidad funciones constantes, sino que son constantes *a intervalos*. Veremos que nuestro estudio podrá restringirse a un intervalo concreto de la dimensión extra en el que  $\hat{\Lambda}$  y  $\Lambda$  toman un único valor, es decir, que en dicho intervalo podremos tratarlas como verdaderas constantes.

Escogiendo el ansatz (2.4), las ecuaciones (2.17) quedan:

$$\begin{aligned} 0 &= a'' + \frac{\hat{\Lambda}}{\hat{d}-1} a + \frac{2\hat{\kappa}}{\hat{d}-2} a \sum_n V_n \delta(y - y_n), \\ 0 &= (a')^2 + \frac{\hat{\Lambda}}{\hat{d}-1} a^2 - \frac{\Lambda}{\hat{d}-1}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Es inmediato comprobar que las soluciones toman ahora la forma

1.  $\hat{g}, g \neq 0$

$$a(y) = \frac{1}{2} \sqrt{\pm g^2 / \hat{g}^2} \left( e^{\sum_n c_n |y - y_n| + C} \pm e^{-\sum_n c_n |y - y_n| - C} \right), \quad (2.20)$$

donde  $\hat{g}$  y  $g$  quedan definidas como antes, pero ahora  $\hat{g}$  toma el valor

$$\hat{g} = \sum_n c_n [2\theta(y - y_n) - 1], \quad (2.21)$$

y  $g$  es proporcional a  $\hat{g}$  con una constante de proporcionalidad tal que  $\hat{g}/g$  es realmente una constante (real o imaginaria). Las constantes  $c_n$  vienen dadas por

$$c_n = -\frac{\hat{\kappa} V_n}{\hat{d}-2} \tanh^{\mp 1} \left( \sum_m c_m |y - y_m| + C \right) \Big|_{y=y_n}. \quad (2.22)$$

2.  $\hat{g} \neq 0, g = 0$

$$a(y) = e^{\sum_n c_n |y - y_n|}, \quad (2.23)$$

donde  $\hat{g}$  toma el valor



$$\hat{g} = \sum_n c_n [2\theta(y - y_n) - 1], \quad (2.24)$$

y las constantes  $c_n$  son

$$c_n = -\frac{\hat{\kappa} V_n}{\hat{d} - 2}, \quad (2.25)$$

de modo que

$$a(y) = e^{-\frac{\hat{\kappa}}{2(\hat{d}-2)} \sum_n V_n |y - y_n|}. \quad (2.26)$$

3.  $\hat{g} = 0$

$$a = \sum_n c_n |y - y_n| + C, \quad (2.27)$$

con

$$g = \sum_n c_n [2\theta(y - y_n) - 1], \quad (2.28)$$

y

$$c_n = -\frac{\hat{\kappa} V_n}{(\hat{d} - 2)} \frac{1}{\sum_m c_m |y - y_m| + C} \Bigg|_{y=y_n}. \quad (2.29)$$

En general, las ecuaciones para las constantes  $c_n$  sólo tienen solución si todas ellas (y, por tanto, las tensiones) tienen el mismo signo, excepto en el caso  $g = 0$  (RS), en el que se pueden obtener soluciones para valores arbitrarios de las tensiones (ecuación (2.26)). En particular, un sistema con dos branas sólo tiene solución si ambas branas tienen la misma tensión.

El problema de encontrar las diferentes  $c_n$  no aparece si consideramos una red infinita de branas y anti-branas con tensiones opuestas. Podemos restringirnos a una región fundamental cuya frontera sean dos branas (anti-branas) con una anti-brana (brana) en medio. El sistema tiene *simetría especular* con respecto a la (anti-)brana que está en medio y podemos hacer una identificación  $\mathbb{Z}_2$  que nos deja con una parte del espacio-tiempo limitado por una brana y una anti-brana en el que  $\hat{\Lambda}$  y  $\Lambda$  son constantes (y en la que sólo importa una constante  $c_n$ ). En estas condiciones, tomando como región fundamental el intervalo  $y \in [0, \ell]$  con una brana colocada en  $y = 0$  y otra en  $y = \ell$ , el factor *warp*  $a(y)$  toma la misma forma que si sólo hubiese una brana con tensión  $V_0$  en todo el espacio-tiempo. En las soluciones, incluir las branas se traduce en hacer el cambio de variable  $y \rightarrow C \pm |y|$  (el signo  $+$  o  $-$  depende de cada caso, de forma que el gravitón quede localizado alrededor de la brana en  $y = 0$ ), siendo  $C$  una constante. Por tanto, en los casos que nos interesan, tenemos:

1.  $\hat{g}, g \neq 0$

(a)  $\hat{g}, g \in \mathbb{R}$

$$a = g/\hat{g} \cosh(C - \hat{g}|y|), \quad (2.30)$$

$$\text{con } V_0 = \frac{(\hat{d} - 2)\hat{g}}{\hat{\kappa}} \tanh(C).$$

(b)  $\hat{g} \in \mathbb{R}, g \in \mathbb{I}$

$$a = ig/\hat{g} \sinh(C - \hat{g}|y|), \quad (2.31)$$

$$\text{con } V_0 = \frac{(\hat{d} - 2)\hat{g}}{\hat{\kappa}} \coth(C).$$

(c)  $\hat{g}, g \in \mathbb{I}$

$$a = g/\hat{g} \cos(C + i\hat{g}|y|), \quad (2.32)$$

$$\text{con } V_0 = \frac{(\hat{d} - 2)i\hat{g}}{\hat{\kappa}} \tan(C). \text{ En este caso, } \ell \text{ debe ser una fracci3n entera del per3odo natural de la coordenada } y, \text{ es decir, } \ell = \frac{2\pi}{in\hat{g}}.$$

2.  $\hat{g} \neq 0, g = 0. \hat{g} \in \mathbb{R}$

$$a = e^{-\hat{g}|y|}, \quad (2.33)$$

$$\text{con } V_0 = \frac{(\hat{d} - 2)\hat{g}}{\hat{\kappa}}.$$

3.  $\hat{g} = 0$

$$a = C - ig|y|, \quad (2.34)$$

$$\text{con } V_0 = \frac{(\hat{d} - 2)ig}{\hat{\kappa}C}.$$

## 2.2 Acci3n efectiva y constante de Newton en 4 dimensiones

En el cap3tulo anterior vimos c3mo la acci3n de gravedad en 5 dimensiones con constante cosmol3gica  $\hat{\Lambda}$  y con los t3rminos fuente (branas) reproduc3a la acci3n 4-dimensional de gravedad pura (1.13). Tambi3n vimos c3mo las masas de Planck en 4 y 5 dimensiones estaban relacionadas entre s3 en el modelo de RS. Veamos qu3 sucede en casos m3s generales.

La acci3n que hemos utilizado es:

$$\hat{S} = \frac{1}{2\hat{\kappa}} \int d^{\hat{d}}\hat{x} \sqrt{|\hat{g}|} \left[ \hat{R} - (\hat{d} - 2)\hat{\Lambda} \right] + \text{branas}, \quad (2.35)$$

Para métricas tipo *warped* (2.4) esta acción se reduce a:

$$S = \frac{1}{2\hat{\kappa}} \int dy a^{\hat{d}-3} \int d^d x \sqrt{|g|} [R - (d-2)\Lambda], \quad (2.36)$$

que es la acción de la teoría  $d = \hat{d} - 1$ -dimensional que obtenemos. Esto es debido a que los términos de las branas se cancelan con las constante cosmológica 5-dimensional y además contribuyen introduciendo el término de  $\Lambda$ . Para que podamos identificar la acción (2.36) con la acción 4-dimensional de gravedad con constante cosmológica  $\Lambda$ , la constante de Newton  $d$ -dimensional  $\kappa$  debe estar relacionada con la  $\hat{d}$ -dimensional  $\hat{\kappa}$  de la forma:

$$\kappa = \frac{\hat{\kappa}}{\int dy a^{\hat{d}-3}}. \quad (2.37)$$

En  $\hat{d} = 5$  obtenemos esta relación para los diferentes casos<sup>3</sup>:

1. (a)  $a = g/\hat{g} \cosh(C - \hat{g}|y|)$

En este caso hallamos:

$$\kappa = 2 \frac{\hat{g}^3/g^2}{\sinh(2\hat{g}\ell - 2C) + 2\hat{g}\ell} \hat{\kappa}. \quad (2.38)$$

- (b)  $a = ig/\hat{g} \sinh(C - \hat{g}|y|)$

En este caso obtenemos:

$$\kappa = 2 \frac{\hat{g}^3/(ig)^2}{\sinh(2\hat{g}\ell - 2C) - 2\hat{g}\ell} \hat{\kappa}. \quad (2.39)$$

- (c)  $a = g/\hat{g} \cos(C + i\hat{g}y)$

En este caso los límites de integración son 0 y  $2\pi/i\hat{g}$ , y encontramos:

$$\kappa = \frac{(i\hat{g})^3}{\pi(ig)^2} \hat{\kappa}. \quad (2.40)$$

2.  $a = e^{-\hat{g}|y|}$

Este caso es el de RS, y obtenemos (como vimos en el capítulo anterior):

$$\kappa = \frac{\hat{g}}{1 - e^{-2\hat{g}\ell}} \hat{\kappa}. \quad (2.41)$$

3.  $a = C - ig|y|$

En este caso se obtiene:

$$\kappa = \frac{3}{2} \frac{ig}{(ig\ell - C)^3 + C^3} \hat{\kappa}. \quad (2.42)$$

---

<sup>3</sup>De nuevo, integramos entre  $\ell$  y  $-\ell$  y utilizamos la propiedad  $\int_{-\ell}^{\ell} f(|y|)dy = 2 \int_0^{\ell} f(y)dy$ .

En el capítulo anterior vimos que la relación entre las masas de Planck 4 y 5-dimensionales en unidades  $\hbar = c = 1$  viene dada por

$$M^2 = \hat{M}^3 \int a^2 dy. \quad (2.43)$$

En el caso de RS la dependencia de  $M$  es muy pequeña en el límite  $\ell \gg 1$ . Sin embargo, en los casos en los que la constante cosmológica 4-dimensional  $\Lambda$  es no nula, la dependencia de  $M$  con  $\ell$  sí es importante en este límite.

## 2.3 Supersimetría de los escenarios tipo Randall-Sundrum

Vamos a estudiar ahora la supersimetría residual de las soluciones encontradas en la sección 2.1 [3]. En primer lugar veremos las propiedades de supersimetría de las soluciones antes de introducir las branas. Después estudiaremos estas propiedades en las soluciones al sistema con branas.

En cualquier dimensión y en ausencia de otros campos, la ley de transformación de supersimetría del gravitino tiene la forma<sup>4</sup>

$$\delta_\epsilon \hat{\psi}_{\hat{\mu}} = \hat{\mathcal{D}}_{\hat{\mu}} \hat{\epsilon}, \quad (2.44)$$

donde  $\hat{\mathcal{D}}_{\hat{\mu}}$  es la derivada covariante Lorentz ( $\hat{g} = 0$ ) o de  $aDS$  ( $\hat{g} \in \mathbb{R}$ )<sup>5</sup>

$$\hat{\mathcal{D}}_{\hat{\mu}} = \partial_{\hat{\mu}} - \frac{1}{4} \hat{\omega}_{\hat{\mu}}^{\hat{a}\hat{b}} \hat{\gamma}_{\hat{a}\hat{b}} - \frac{i}{2} \hat{g} \hat{\gamma}_{\hat{\mu}}. \quad (2.45)$$

Entonces, la ecuación para los espinores de Killing  $\delta_\epsilon \hat{\psi}_{\hat{\mu}} = 0$  tiene las siguientes soluciones:

1.  $\hat{g} \neq 0$

$$\hat{\epsilon} = \frac{1}{2} (e^{\hat{g}y/2} + \varphi e^{-\hat{g}y/2}) \epsilon_+ + \frac{1}{2} (e^{\hat{g}y/2} - \varphi e^{-\hat{g}y/2}) \epsilon_-, \quad (2.46)$$

con  $\varphi = (g/\hat{g})/|g/\hat{g}|$ , y donde  $\epsilon_\pm$  son dos espinores que satisfacen

$$(\mathcal{D}_\mu \mp \frac{i}{2} g \gamma_\mu) \epsilon_\pm = 0, \quad (2.47)$$

siendo  $\mathcal{D}_\mu$  la derivada covariante de Lorentz estándar y  $\gamma_a \equiv \hat{\gamma}_a$ . El número de soluciones de estas ecuaciones es maximal cuando el espacio  $d$ -dimensional es maximalmente simétrico.

2.  $\hat{g} = 0$

La solución en este caso es cualquier espinor independiente de la coordenada  $y$  que satisfaga

---

<sup>4</sup>Dependiendo de la dimensión, tendremos una u otra clase de espinores minimales asociados a las representaciones de las matrices gamma con propiedades especiales. Los resultados que exponemos aquí pueden adaptarse a todos los casos de interés.

<sup>5</sup>Formalmente también podemos considerar el caso de  $DS$  ( $\hat{g} \in \mathbb{I}$ ). Las supergravidades en  $DS$  existen, aunque sean inconsistentes como teorías cuánticas.

$$(\mathcal{D}_\mu - \frac{i}{2}g\gamma_\mu)\hat{\epsilon} = 0, \quad (2.48)$$

donde ahora  $\gamma_a \equiv \hat{\gamma}_a \hat{\gamma}_y$ .

En este caso tenemos  $g \in \mathbb{I}$  y, por tanto, es la derivada covariante de DS en  $d$  dimensiones. Esta ecuación tiene un número maximal de soluciones cuando el espacio-tiempo es DS.

Es interesante darse cuenta de que, a pesar de que la supergravedad (y, en general, cualquier teoría cuántica de campos) en DS sea inconsistente, cualquier solución de gravedad pura de esta teoría puede considerarse como una compactificación tipo *warped* de la supergravedad estándar (Poincaré) en una dimensión más.

Aunque hemos sido capaces de reducir las ecuaciones de Killing en  $\hat{d}$  dimensiones a unas ecuaciones que parecen ecuaciones de Killing en  $d = (\hat{d} - 1)$  dimensiones, esto no quiere decir que tengamos supersimetría en el espacio  $d$ -dimensional. En el caso  $\hat{g} \neq 0$ , no podemos tener dos signos diferentes de  $g$ . Tener un solo signo significa tener o  $\epsilon_+$  o  $\epsilon_-$ , pero esta truncación es consistente con invariancia Lorentz en  $d$  dimensiones si y sólo si  $g = 0$  (caso de RS). Por otra parte, en el caso con  $\hat{g} = 0$  parece que no hay problema en tener supersimetría DS.

Veamos ahora las propiedades de supersimetría de las soluciones que resuelven el sistema con branas. Ahora podemos hablar de supersimetría en el *bulk* (el espacio 5-dimensional) y en el *brane-world* (la brana). Como hemos visto, sólo podemos tener supersimetría en la brana en el caso de RS ( $\hat{g} \neq 0, g = 0$ ) y en el caso Minkowski-*DS* ( $\hat{g} = 0, g \neq 0, g \in \mathbb{I}$ ). En estos dos casos, la supersimetría preservada depende de la métrica  $d$ -dimensional  $g_{\mu\nu}$ . Si  $g_{\mu\nu}$  es maximalmente simétrica, entonces la supersimetría en la brana será maximal.

La presencia de branas rompe genéricamente la supersimetría  $\hat{d}$ -dimensional en el *bulk*<sup>6</sup>. Sin embargo, en los casos que estamos considerando, la supersimetría no se rompe *localmente* en el *bulk* entre dos pares de branas, ya que ahí la métrica tiene exactamente la misma forma que en ausencia de branas.

Pero en principio queremos tener supersimetría global no rota, y no sólo entre las branas. Primero, debemos definir la ecuación para los espinores de Killing globalmente. Para hacer esto, tenemos que permitir que  $\hat{g}$  sea una función constante *a intervalos* en vez de globalmente constante (la característica principal de estas branas es que el valor de  $\hat{g}$  es diferente en ambos lados). En el capítulo anterior aceptábamos esta consideración para obtener las soluciones. Por otra parte, podemos utilizar una formulación dual en la que la constante cosmológica se reemplaza por el potencial de una  $d$ -forma<sup>7</sup> [3, 9]. Una vez que aceptamos esta generalización, la condición necesaria para tener supersimetría global no rota es poder empalmar las soluciones de la ecuación espinorial de Killing en ambos lados de una brana dada. Consideremos, por ejemplo, una brana localizada en  $y = 0$ . Tanto  $\hat{g}$  como  $g$  cambian de signo a través de la brana. En el lado  $y > 0$  de la brana, las soluciones de la ecuación de Killing son las que hemos visto al comienzo de este capítulo. En

<sup>6</sup>No incluimos fuentes en las transformaciones de supersimetría.

<sup>7</sup>En el capítulo 2.4 desarrollaremos esta formulación en detalle.

la región  $y < 0$  encontramos soluciones de la misma forma, pero ahora los espinores  $\epsilon_{\pm}$  satisfacen

$$(\mathcal{D}_{\mu} \pm \frac{i}{2}g\gamma_{\mu}) \epsilon_{\pm} = 0, \quad (2.49)$$

y

$$(\mathcal{D}_{\mu} + \frac{i}{2}g\gamma_{\mu}) \hat{\epsilon} = 0, \quad (2.50)$$

es decir, las mismas ecuaciones pero con el signo contrario de  $g$ . Necesitamos imponer  $g = 0$ , lo que significa que en el segundo caso toda la supersimetría se rompe a menos que tengamos la solución trivial.

En el primer caso, no es suficiente imponer  $g = 0$ , lo que nos lleva al caso de RS de nuevo. Además tenemos que imponer la condición

$$i\hat{\gamma}_y \hat{\epsilon} = +\hat{\epsilon}, \quad (2.51)$$

sobre el espinor de Killing, que reduce la supersimetría a la mitad. Esta condición es la misma que impondríamos si estuviésemos haciendo un *orbifolding* del espacio entre las branas.

Es importante resaltar que estos resultados se aplican estrictamente a los casos que estamos considerando: las branas infinitamente delgadas (descritas por las soluciones que hemos visto) que hacen que la métrica a través de ellas sea discontinua. Por tanto, estos resultados no contradicen los que obtienen Kallosh y Linde [6], que no estudiaron sólo supergravedad, sino que incluyeron materia supersimétrica. En este trabajo, Kallosh y Linde intentaron, utilizando superpotenciales consistentes, encontrar muros de dominio *gruesos* supersimétricos para los que la métrica fuese *suave*, pero no encontraron ninguno.

## 2.4 Una acción de branas para el escenario de Randall-Sundrum

En esta sección vamos a buscar una formulación del escenario de RS a partir de una acción efectiva de una  $(\hat{d} - 2)$ -brana que actúa como fuente para la solución de RS [3]. Veremos que existe una relación directa con el caso de la teoría masiva IIA de Romans [8] y la D8-brana.

Podemos ver una constante como el dual de una forma de volumen que represente el tensor de campo. Una forma de volumen (es decir, una  $\hat{d}$ -forma), que denotamos por  $\hat{F}_{(\hat{d})}$ , es el tensor de campo de un potencial  $\hat{A}_{(d)}$ , que es una  $d \equiv (\hat{d} - 1)$ -forma. La ecuación de movimiento para  $\hat{F}_{(\hat{d})}$ , dada por  $\hat{\nabla}^* \hat{F}_{(\hat{d})} = 0$ , implica unívocamente que el dual de  $\hat{F}_{(\hat{d})}$  sea constante o, desde un punto de vista más general, que sea constante a intervalos. Por tanto, podemos sustituir de forma genérica una constante que aparezca en la acción (en nuestro caso, la constante cosmológica) por una  $d$ -forma  $\hat{A}_{(d)}$ , el potencial. El ejemplo más conocido es el caso de la supergravedad masiva IIA 10-dimensional de Romans, en la que podemos remplazar el parámetro de masa  $m$  por un potencial Ramond-Ramond, una 9-forma a la que la D8-brana se acopla [9].

Esto implica una generalización de la teoría, ya que ahora podemos tener soluciones en las que el valor de la constante cosmológica es diferente en diferentes regiones del espacio-tiempo: esto es exactamente lo que necesitan las soluciones tipo RS. Las discontinuidades en esta *constante* son defectos topológicos  $d$ -dimensionales (muros de dominio) que actúan como fuentes de la  $d$ -forma y pueden interpretarse como los *volúmenes del universo*<sup>8</sup> de  $(\hat{d}-2)$ -branas cargadas con el potencial  $\hat{A}_{(d)}$  (D8-branas en el caso de [9]). Por tanto, una acción tipo volumen del universo (Nambu-Goto) para estas branas debe contener un término de Wess-Zumino, que es básicamente el acoplo de una partícula al campo  $\hat{A}_{(d)}$ .

Todo esto parece funcionar perfectamente en el caso de la D8-brana y, de hecho, resulta necesario, y casi crucial, reescribir todo en función de la 9-forma (potencial). Parece natural intentar algo similar en nuestro caso. Por tanto, proponemos una acción que consista en una acción del *bulk* que contenga gravedad,  $\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ , acoplada a una  $d$ -forma  $\hat{A}_{(d)}$  y las acciones estándar tipo Nambu-Goto de  $n$   $(\hat{d}-2)$ -branas que contengan los términos de Wess-Zumino con coordenadas dinámicas (campos)  $\hat{X}_n^{\hat{\mu}}$ . La acción es, por tanto:

$$\begin{aligned} \hat{S} = & \frac{1}{2\hat{\kappa}} \int d^{\hat{d}}\hat{x} \sqrt{|\hat{g}|} \left[ \hat{R} + \frac{(-1)^{\hat{d}-2}}{2 \cdot \hat{d}!} \hat{F}_{(\hat{d})}^2 \right] \\ & + \sum_n \left\{ -\frac{V_n}{2} \int d^d\xi_n \sqrt{|\gamma_n|} \left[ \gamma_n^{ij} \partial_i \hat{X}_n^{\hat{\mu}} \partial_j \hat{X}_n^{\hat{\nu}} \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(\hat{X}_n) - (\hat{d}-3) \right] \right. \\ & \left. + \frac{(-1)^d \mu_n}{d!} \int d^d\xi_n \hat{A}_{(d)\hat{\mu}_1 \dots \hat{\mu}_d}(\hat{X}_n) \partial_{i_1} \hat{X}_n^{\hat{\mu}_1} \dots \partial_{i_d} \hat{X}_n^{\hat{\mu}_d} \epsilon^{i_1 \dots i_d} \right\}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Las soluciones que minimizan esta acción satisfacen las siguientes ecuaciones de movimiento para la métrica:

$$\begin{aligned} \hat{G}^{\hat{\mu}\hat{\nu}} + \frac{(-1)^{(\hat{d}-2)} \mu_n}{2 \cdot d!} \left[ \hat{F}_{(\hat{d})}^{\hat{\mu}\hat{\rho}_1 \dots \hat{\rho}_d} \hat{F}_{(\hat{d})}^{\hat{\nu} \hat{\rho}_1 \dots \hat{\rho}_d} - \frac{1}{2\hat{d}} \hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}} \hat{F}_{(\hat{d})}^2 \right] + \\ + \frac{\hat{\kappa}}{\sqrt{|\hat{g}|}} \sum_n V_n \int d^d\xi_n \sqrt{|\gamma_n|} \gamma_n^{ij} \partial_i \hat{X}_n^{\hat{\mu}} \partial_j \hat{X}_n^{\hat{\nu}} \delta^{\hat{d}}(\hat{x} - \hat{X}_n(\xi)) = 0, \end{aligned} \quad (2.53)$$

para la  $d$ -forma (potencial):

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}_{\hat{\mu}} \hat{F}_{(\hat{d})}^{\hat{\mu}\hat{\rho}_1 \dots \hat{\rho}_d} + \\ + \frac{2\hat{\kappa}}{\sqrt{|\hat{g}|}} \sum_n \mu_n \int d^d\xi_n \epsilon^{i_1 \dots i_d} \partial_{i_1} \hat{X}_n^{\hat{\mu}_1} \dots \partial_{i_d} \hat{X}_n^{\hat{\mu}_d} \delta^{\hat{d}}(\hat{x} - \hat{X}_n(\xi)) = 0, \end{aligned} \quad (2.54)$$

para las métricas del volumen del universo (después de algunos cálculos):

$$\gamma_{nij} - \partial_i \hat{X}_n^{\hat{\mu}} \partial_j \hat{X}_n^{\hat{\nu}} \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(\hat{X}_n) = 0, \quad (2.55)$$

---

<sup>8</sup> *Worldvolumes*.

y los escalares del volumen del universo (coordenadas):

$$\begin{aligned} \nabla^2(\gamma)\hat{X}_n^{\hat{\mu}} + \hat{\Gamma}_{\hat{\rho}\hat{\sigma}}^{\hat{\mu}}(\hat{g}) \partial_i \hat{X}_n^{\hat{\rho}} \partial_j \hat{X}_n^{\hat{\sigma}} \gamma_n^{ij} + \\ + \frac{(-1)^d \mu_n}{V_n d! \sqrt{|\gamma_n|}} \hat{F}_{(d)}^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\rho}_1 \dots \hat{\rho}_d} \partial_{i_1} \hat{X}_n^{\hat{\rho}_1} \dots \partial_{i_d} \hat{X}_n^{\hat{\rho}_d} \epsilon^{i_1 \dots i_d} = 0. \end{aligned} \quad (2.56)$$

La ecuación (2.55) simplemente nos dice que las métricas del volumen del universo son aquéllas inducidas en los volúmenes del universo por medio de las coordenadas de inmersión  $\hat{X}_n^{\hat{\mu}}$ . Utilizando la invariancia bajo reparametrizaciones en el volumen del universo podemos fijar  $d$  coordenadas (gauge estático) a los valores

$$\hat{X}_n^{\mu} = \delta_i^{\mu} \xi_n^i. \quad (2.57)$$

El Ansatz que hacemos sobre la coordenada que falta es

$$\hat{X}_n^d \equiv Y_n = y_n, \quad (2.58)$$

donde las  $y_n$  son constantes. Podemos hacer las integrales en (2.53) y (2.54) dejando sólo funciones  $\delta(y - y_n)$  1-dimensionales. Además, esto implica que para las métricas del volumen del universo tenemos (identificando los índices del volumen del universo y los del espacio-tiempo  $d$ -dimensional):

$$\gamma_{n\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\nu} = a^2(y_n) g_{\mu\nu}. \quad (2.59)$$

El Ansatz sobre el potencial es

$$\hat{A}_{(d)\mu_1 \dots \mu_d} = c a^d \frac{\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_d}}{\sqrt{|g|}}, \quad (2.60)$$

donde  $c$  es una constante en principio arbitraria (que fijaremos más adelante) y  $\epsilon$  es el tensor de Levi-Civita  $d$ -dimensional calculado con la métrica  $d$ -dimensional. Por tanto, el campo  $\hat{F}$  queda

$$\hat{F}_{(\hat{d})\underline{y}\mu_1 \dots \mu_d} = c d a^d \log' a \frac{\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_d}}{\sqrt{|g|}}. \quad (2.61)$$

Llegados a este punto, estamos preparados para resolver las ecuaciones de movimiento (2.56).  $\hat{F}_{(\hat{d})}$  sólo contribuye a las ecuaciones de las  $Y_n$ . Las ecuaciones para las coordenadas  $\hat{X}_n^{\mu}$  se satisfacen automáticamente sin imponer condición alguna. Las ecuaciones para las  $Y_n$  quedan resueltas con:

$$c = -V_n / \mu_n \equiv V / \mu. \quad (2.62)$$

Esto implica que todos los cocientes  $V_n / \mu_n$  deben tener el mismo valor, lo que es característico de los objetos BPS. Vemos que  $\mu_n$  no pueden hacerse cero, es decir, que si hubiéramos intentado resolver el problema con branas no cargadas no lo habríamos conseguido.

La ecuación para el potencial queda

$$\frac{V}{\mu} d \log'' a + 2\hat{\kappa} \sum_n \mu_n \delta(y - y_n) = 0, \quad (2.63)$$



que queda resuelta con un factor *warp* del tipo de RS

$$a = e^{-\frac{\hat{\kappa}\mu/V}{\hat{d}} \sum_n \mu_n |y - y_n|}. \quad (2.64)$$

Para resolver las ecuaciones de Einstein calculamos primero el tensor energía-momento del potencial, es decir

$$\begin{aligned} \hat{F}_{(\hat{d})}^{\hat{\mu}\hat{\rho}_1 \dots \hat{\rho}_d} \hat{F}_{(\hat{d})}^{\hat{\nu} \hat{\rho}_1 \dots \hat{\rho}_d} - \frac{1}{2\hat{d}} \hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}} \hat{F}_{(\hat{d})}^2 &= - \left( \frac{cd \log' a}{2} \right)^2 \hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \\ &= \left( \frac{\hat{\kappa}}{2} \sum_n \mu_n [\theta(y - y_n) - 1] \right)^2 \hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}}, \end{aligned} \quad (2.65)$$

que describe una *constante* cosmológica constante a trozos. Si consideramos únicamente dos branas con tensiones opuestas, entonces las ecuaciones de Einstein son idénticas a las de [1] en los intervalos en los que la constante cosmológica es constante y, por tanto, admite las mismas soluciones. De hecho, asumiendo que la métrica  $d$ -dimensional es *Ricci-flat*, entonces las ecuaciones de Einstein quedan resueltas para el factor *warp* que hemos visto si

$$(\mu/V)^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{d}{\hat{d} - 2} \right), \quad (2.66)$$

lo que implica que

$$a = e^{-\frac{\hat{\kappa}}{(d-2)} \sum_n V_n |y - y_n|}, \quad (2.67)$$

como vimos en el capítulo 2, que es exactamente el resultado que obtienen Randall y Sundrum en [1].

# Capítulo 3

## Escenarios tipo Randall-Sundrum con dilatón

En este capítulo extendemos el escenario de RS introduciendo el dilatón. La razón más importante que motiva este estudio es acercar este tipo de modelos a las teorías de cuerdas, en las que el dilatón aparece de forma natural. La física de estos modelos es diferente a la de RS, pues aparece una singularidad desnuda en el *bulk* que puede alcanzarse desde el muro de dominio en tiempo finito.

Analizaremos, con un espíritu generalizador, todos los casos posibles en función de las constantes cosmológicas en 4 y 5 dimensiones.

### 3.1 Branas con constante cosmológica nula

En este primer caso analizamos un escenario con una brana con constante cosmológica nula en un *bulk* con constante cosmológica no nula [11, 13, 14], es decir, la generalización del escenario de RS a “gravedad dilatónica”.

Partimos de la acción de un campo escalar (dilatón) acoplado a la gravedad en presencia de una constante cosmológica:

$$\hat{S}_{grav-\phi} = \frac{1}{2\hat{\kappa}} \int d^{\hat{d}}x \sqrt{|\hat{g}|} \left[ \hat{R} + \frac{4}{\hat{d}-2} \left( \hat{\nabla}\phi \right)^2 - (\hat{d}-2)\hat{\Lambda}e^{\frac{\alpha}{\hat{d}-2}\phi} \right], \quad (3.1)$$

donde  $\alpha$  es un parámetro libre que determina el acoplo del dilatón a la constante cosmológica. Esta acción nos da las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{R}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} + \frac{4}{\hat{d}-2} \hat{\nabla}_{\hat{\mu}}\phi \hat{\nabla}_{\hat{\nu}}\phi - \hat{\Lambda}e^{\frac{\alpha}{\hat{d}-2}\phi} \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \\ 0 &= \hat{\nabla}^2\phi + \frac{(\hat{d}-2)\alpha}{8} \hat{\Lambda}e^{\frac{\alpha}{\hat{d}-2}\phi} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Proponemos ahora el Ansatz

$$\begin{aligned}
d\hat{s} &= a^2(y)g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dy^2 \\
\phi &= \phi(y) = q \log a(y) \\
R_{\mu\nu} &= 0
\end{aligned} \tag{3.3}$$

siendo  $q$  una constante, en  $\hat{d} = 5$  las ecuaciones de movimiento (3.2) se traducen en<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned}
0 &= \phi'' + 4a^{-1}a'\phi' - \frac{3\alpha}{8}\hat{\Lambda}e^{\frac{\alpha}{3}\phi} \\
0 &= a^{-2}(a')^2 - \frac{1}{9}(\phi')^2 + \frac{\hat{\Lambda}}{4}e^{\frac{\alpha}{3}\phi} \\
0 &= a^{-1}a'' + \frac{1}{3}(\phi')^2 + \frac{\hat{\Lambda}}{4}e^{\frac{\alpha}{3}\phi}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

La solución de las ecuaciones de movimiento (3.4) es:

$$\left\{ \begin{aligned}
d\hat{s}^2 &= [N(\alpha)(y + y_0)]^{\frac{32}{\alpha^2}} g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dy^2 \\
e^{-2\phi} &= [N(\alpha)(y + y_0)]^{\frac{12}{\alpha}} \\
N(\alpha) &= \frac{\alpha^2}{4} \sqrt{\frac{\hat{\Lambda}}{\alpha^2 - 64}}
\end{aligned} \right. \tag{3.5}$$

donde  $y$  toma valores en  $[0, \infty)$  e  $y_0$  es una constante de integración arbitraria. Dependiendo del signo de la constante cosmológica  $\hat{\Lambda}$ , la solución sólo tendrá sentido para ciertos rangos del acoplo  $\alpha$ . Esta solución tiene una singularidad desnuda en  $y = y_0$ , ya que:

$$\hat{R} = 2^7 \frac{\alpha^2 - 40}{\alpha^4(y + y_0)^2} \tag{3.6}$$

$$\hat{R}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}}\hat{R}^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}} = a^{-4}R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} + 2^{12} \left[ \frac{\alpha^4 - 32\alpha^2 + 640}{\alpha^8(y + y_0)^4} \right]$$

Perturbando la solución que hemos obtenido podemos hallar el perfil del modo no masivo del gravitón, dado por:

$$\psi_0(y) = [N(\alpha)(y + y_0)]^{\frac{32}{\alpha^2}}, \tag{3.7}$$

que no es normalizable en todo el espacio. Siguiendo los pasos de RS, introducimos un corte en  $y = N(\alpha)^{-1}$ , que tiene el efecto de eliminar la parte del espacio con  $y > N(\alpha)^{-1}$ , donde el modo no masivo del gravitón se vuelve no normalizable. Podemos reemplazar la parte *cortada* por una copia de la parte con  $y < N(\alpha)^{-1}$ .

---

<sup>1</sup>El Ansatz que escogemos para el dilatón implica que sólo depende de la dimensión extra, es decir, que la teoría 5-dimensional sí tenemos un campo escalar acoplado a la gravedad, pero en la teoría efectiva de gravedad 4-dimensional que vive sobre la brana no aparece ningún campo escalar

En la solución esto se traduce a cambiar la variable  $y$  por  $N(\alpha)^{-1} - |y|$ , donde ahora  $|y|$  varía entre 0 y  $N(\alpha)^{-1}$ . Para que el gravitón se haga cero en la singularidad, tomamos  $y_0 = 0$ . Como hemos visto en los capítulos anteriores, esto genera un comportamiento tipo delta de Dirac en las ecuaciones de movimiento, que podemos compensar introduciendo en la acción un término tipo muro de dominio:

$$\hat{S} = \hat{S}_{grav-\phi} + \int d^{\hat{d}-1}x \sqrt{|\tilde{g}|} \left( \mathcal{L}_0 - V_0 e^{\frac{\beta}{\hat{d}-2}\phi} \right) \quad (3.8)$$

donde ahora la teoría gauge que vive sobre la brana tiene acoplado el dilatón (podríamos considerar que es una generalización del Modelo Estándar en la que tenemos un campo escalar acoplado, el dilatón).  $\mathcal{L}_0$  es la parte del lagrangiano de la teoría que vive en la brana cuya contribución a la energía de vacío es cero,  $\beta$  es una constante que regula el acoplo del dilatón a la tensión de ésta,  $V_0$  (que básicamente es la contribución a la energía de vacío de aquellos campos cuyo *vev* es distinto de cero), y  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  la métrica inducida sobre la brana. La parte del lagrangiano sobre la brana que es relevante a la hora de obtener soluciones clásicas de vacío en este escenario es  $V_0$ . De esta forma, las ecuaciones de movimiento que obtenemos de la acción  $\hat{S}$  son:

$$\begin{aligned} 0 &= \sqrt{|\hat{g}|} \left[ \hat{R}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \frac{1}{2} \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \hat{R} + \frac{4}{\hat{d}-2} \hat{\nabla}_{\hat{\mu}} \phi \hat{\nabla}_{\hat{\nu}} \phi - \frac{2}{\hat{d}-2} \left( \hat{\nabla}^2 \phi \right)^2 \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} + \frac{\hat{d}-2}{2} \hat{\Lambda} e^{\frac{\alpha}{\hat{d}-2}\phi} \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \right] \\ &\quad + \sqrt{|\tilde{g}|} \hat{\kappa} V_0 e^{\frac{\beta}{\hat{d}-2}\phi} \tilde{g}_{\mu\nu} \delta_{\hat{\nu}}^{\mu} \delta_{\hat{\nu}}^{\nu} \delta(y) \\ 0 &= \hat{\nabla}^2 \phi + \frac{(\hat{d}-2)\alpha}{8} \hat{\Lambda} e^{\frac{\alpha}{\hat{d}-2}\phi} + \frac{\beta \hat{\kappa}}{4} V_0 e^{\frac{\beta}{\hat{d}-2}\phi} \delta(y), \end{aligned} \quad (3.9)$$

que con el *Ansatz* tipo *warp* en  $\hat{d} = 5$  y  $\phi = \phi(y)$  quedan:

$$\begin{aligned} 0 &= \phi'' + 4a^{-1}a'\phi' - \frac{3\alpha}{8} \hat{\Lambda} e^{\frac{\alpha}{3}\phi} - \frac{\beta \hat{\kappa}}{4} V_0 e^{\frac{\beta}{3}\phi} \delta(y) \\ 0 &= a^{-2} (a')^2 - \frac{1}{9} (\phi')^2 + \frac{\hat{\Lambda}}{4} e^{\frac{\alpha}{3}\phi} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$0 = a^{-1}a'' + \frac{1}{3} (\phi')^2 + \frac{\hat{\Lambda}}{4} e^{\frac{\alpha}{3}\phi} + \frac{\hat{\kappa}}{3} V_0 e^{\frac{\beta}{3}\phi} \delta(y)$$

La solución queda de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} d\hat{s}^2 = [1 - N(\alpha)|y|]^{\frac{32}{\alpha^2}} g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} - dy^2 \\ e^{-2\phi} = [1 - N(\alpha)|y|]^{\frac{12}{\alpha}} \\ N(\alpha) = \frac{\alpha^2}{4} \sqrt{\frac{\hat{\Lambda}}{\alpha^2 - 64}} \end{array} \right. \quad (3.11)$$

y la tensión de la brana viene dada por:

$$V_0 = \frac{24}{\hat{\kappa}} \sqrt{\frac{\hat{\Lambda}}{\alpha^2 - 64}} \quad (3.12)$$

y el acoplo del dilatón a ésta satisface  $\beta = \alpha/2$ .

En el sistema de referencia holográfico, que es el que estamos utilizando, el límite de RS  $\alpha \rightarrow 0$  es singular. Sin embargo, podemos ver que este límite está bien definido en el sistema de referencia conforme. Para verlo, hacemos una transformación de coordenadas de la forma

$$[1 - N(\alpha)|y|]^{\frac{\alpha^2-16}{\alpha^2}} \rightarrow [1 - O(\alpha)|z|] , \quad (3.13)$$

donde  $|z| \in [0, O(\alpha)^{-1})$  y  $O(\alpha) = \frac{16 - \alpha^2}{\alpha^2} N(\alpha)$ . Por tanto, en estas coordenadas la solución es

$$\begin{cases} d\hat{s}^2 &= [1 - O(\alpha)|z|]^{\frac{32}{\alpha^2-16}} (g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dz^2) , \\ e^{-2\phi} &= [1 - O(\alpha)|y|]^{\frac{12\alpha}{\alpha^2-16}} . \end{cases} \quad (3.14)$$

Por tanto, vemos que efectivamente en el límite  $\alpha \rightarrow 0$  recuperamos el caso original de RS [1, 2]. Haciendo un análisis sencillo de esta familia de soluciones y del comportamiento del modo cero del gravitón encontramos [13]:

- En el límite de RS  $\alpha \rightarrow 0$  el modo cero del gravitón viene dado por:

$$\psi_0(z) = [1 - O(\alpha)|z|]^{-\frac{3}{2}} . \quad (3.15)$$

- En los casos  $0 < \alpha^2 < 16$  tenemos:

$$\psi_0(z) = [1 - O(\alpha)|z|]^{-\frac{24}{\alpha^2-16}} . \quad (3.16)$$

que confina cada vez más cuando nos acercamos a  $\alpha = \pm 4$ , pero sin alcanzar estos valores, ya que el cambio de coordenadas (3.13) es singular para  $\alpha = \pm 4$ . El caso de RS es el menos confinante de esta familia.

- Si  $16 < \alpha^2 < 64$  vemos que el modo cero sólo es normalizable en un intervalo finito de la quinta coordenada, pero podemos hacer un cambio de coordenadas de forma que el rango de la  $z$  se haga infinito. Sin embargo, esta transformación de coordenadas hace que la solución ya no esté en el sistema de referencia conforme, de modo que la comparación con el caso de RS ya no puede verse de forma tan sencilla.
- Para  $\alpha = \pm 4$  el cambio de coordenadas dado por (3.13) deja de ser válido. En estos dos casos, la solución en el sistema conforme es:

$$\begin{aligned} d\hat{s}^2 &= e^{-2\sqrt{-\hat{\Lambda}/3}|z|} (g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dz^2) , \\ e^{-2\phi} &= e^{\mp\sqrt{-3\hat{\Lambda}}|z|} . \end{aligned} \quad (3.17)$$

De nuevo, este caso no podemos compararlo con el caso de RS.

## 3.2 Branas con constante cosmológica no nula

En esta sección nos proponemos extender los resultados de la sección anterior al caso en el que la constante cosmológica 4-dimensional es no nula [15].

El Ansatz que proponemos ahora es

$$\begin{aligned} d\hat{s} &= a^2(y)g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dy^2 \\ \phi &= \phi(y) = q \log a(y) \\ R_{\mu\nu} &= \Lambda g_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{3.18}$$

que se diferencia de (3.3) en que la métrica 4-dimensional no es *Ricci-flat*, sino que tiene curvatura escalar constante distinta de cero. Las ecuaciones de movimiento (3.4) se ven ahora modificadas por el término de la constante cosmológica 4-dimensional  $\Lambda$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 0 &= \phi'' + 4a^{-1}a'\phi' - \frac{3\alpha}{8}\hat{\Lambda}e^{\frac{\alpha}{3}\phi} \\ 0 &= a^{-2}(a')^2 - \frac{1}{9}(\phi')^2 + \frac{\hat{\Lambda}}{4}e^{\frac{\alpha}{3}\phi} - \frac{\Lambda}{3}a^{-2} \\ 0 &= a^{-1}a'' + \frac{1}{3}(\phi')^2 + \frac{\hat{\Lambda}}{4}e^{\frac{\alpha}{3}\phi} \end{aligned} \tag{3.19}$$

La solución a estas ecuaciones de movimiento es:

$$\left\{ \begin{aligned} d\hat{s}^2 &= [\mathcal{N}(\alpha)(y + y_0)]^2 g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dy^2 \\ e^{-2\phi} &= [\mathcal{N}(\alpha)(y + y_0)]^{\frac{12}{\alpha}} \\ \mathcal{N}(\alpha) &= \frac{\alpha}{4}\sqrt{\frac{-\hat{\Lambda}}{3}} \end{aligned} \right. \tag{3.20}$$

donde  $y_0$  es una constante de integración arbitraria.

Por consistencia de las soluciones, las constantes cosmológicas 4 y 5-dimensionales satisfacen:

$$\Lambda = \frac{16 - \alpha^2}{16}\hat{\Lambda} \tag{3.21}$$

Esta solución tiene una singularidad desnuda en  $y = -y_0$ :

$$\begin{aligned} \hat{R} &= -\frac{192}{\alpha^2(y + y_0)^2} \\ \hat{R}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}}\hat{R}^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}} &= a^{-4}R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} + 24\left[\frac{\alpha^2 - 32}{\alpha^2(y + y_0)^4}\right] \end{aligned} \tag{3.22}$$

En este caso, la parte dependiente de la dimensión extra del modo sin masa del gravitón viene dada por:

$$\psi_0(y) = [\mathcal{N}(\alpha)(y + y_0)]^2, \quad (3.23)$$

que no es normalizable en todo el espacio. Siguiendo los pasos del apartado anterior, introducimos un corte en  $y = \mathcal{N}(\alpha)^{-1}$ , que, igual que antes, tiene el efecto de eliminar la parte del espacio con  $y > \mathcal{N}(\alpha)^{-1}$ , donde el modo no masivo del gravitón se vuelve no normalizable. Reemplazamos la parte *cortada* por una copia de la parte con  $y < \mathcal{N}(\alpha)^{-1}$ . De nuevo, esto se traduce en hacer en la solución el cambio de variable  $y \rightarrow \mathcal{N}(\alpha)^{-1} - |y|$ , donde ahora  $y$  varía entre 0 y  $\mathcal{N}(\alpha)^{-1}$  (igual que en la sección anterior, haremos  $y_0 = 0$ ). Introduciendo en la acción un término tipo *muro de dominio* para compensar las deltas de Dirac generadas por el corte, obtenemos las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} 0 &= \phi'' + 4a^{-1}a'\phi' - \frac{3\alpha}{8}\hat{\Lambda}e^{\frac{\alpha}{3}\phi} - \frac{\beta\hat{\kappa}}{4}V_0e^{\frac{\beta}{3}\phi}\delta(y) \\ 0 &= a^{-2}(a')^2 - \frac{1}{9}(\phi')^2 + \frac{\hat{\Lambda}}{4}e^{\frac{\alpha}{3}\phi} - \frac{\Lambda}{3}a^{-2} \\ 0 &= a^{-1}a'' + \frac{1}{3}(\phi')^2 + \frac{\hat{\Lambda}}{4}e^{\frac{\alpha}{3}\phi} + \frac{\hat{\kappa}}{3}V_0e^{\frac{\beta}{3}\phi}\delta(y) \end{aligned} \quad (3.24)$$

cuya solución es:

$$\left\{ \begin{array}{l} d\hat{s}^2 = [1 - \mathcal{N}(\alpha)|y|]^2 g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dy^2 \\ e^{-2\phi} = [1 - \mathcal{N}(\alpha)|y|]^{\frac{12}{\alpha}} \\ \mathcal{N}(\alpha) = \frac{\alpha}{4}\sqrt{\frac{-\hat{\Lambda}}{3}} \end{array} \right. \quad (3.25)$$

La tensión de la brana es

$$V_0 = \frac{\alpha}{2\hat{\kappa}}\sqrt{-3\hat{\Lambda}} \quad (3.26)$$

y el acoplo del dilatón a las branas viene dado por  $\beta = 8/\alpha$ .

En principio esperaríamos que las soluciones de la sección anterior pudieran recuperarse en el límite  $\Lambda \rightarrow 0$  a partir de las que acabamos de obtener. Sin embargo, la familia de soluciones (3.25) no se reduce genéricamente a la familia (3.14) de la sección anterior. Si hacemos  $\Lambda = 0$  en (3.21) vemos que existen dos posibles soluciones:  $\hat{\Lambda} = 0$  y  $\alpha = \pm 4$ , pero la solución sólo se reduce a (3.14) en el caso  $\alpha = 4$ . Por tanto, no podemos recuperar las soluciones de la sección anterior en el límite  $\Lambda = 0$ , ya que las familias de soluciones (3.14) y (3.25) son disconexas en el espacio de soluciones, aunque, como hemos visto, están conectadas por el caso  $\alpha = 4$ , caso en el que la métrica, el dilatón y la tensión de la brana coinciden obteniéndolo a partir de una solución u otra. Esto es fácil de entender mediante un análisis del sistema de ecuaciones diferenciales para  $a(y)$  y  $\phi(y)$ .

Llegados a este punto, nos gustaría comparar estos casos con el de RS y los de la sección anterior para ver en cuáles el confinamiento es más o menos *fuerte*. Sin embargo, sólo podemos comparar con las soluciones con  $\alpha = \pm 4$  obtenidas entonces, pues son las únicas que podemos obtener a partir de éstas, como hemos visto.

### 3.3 Escenarios con constante cosmológica en cinco dimensiones nula

Hasta ahora hemos trabajado con la suposición de que  $\hat{\Lambda} \neq 0$ . Para completar el estudio llevado a cabo en este capítulo debemos estudiar aquellos casos en los que la constante cosmológica 5-dimensional sea nula,  $\hat{\Lambda} = 0$ , para lo que existen dos posibilidades: que la constante cosmológica 4-dimensional  $\Lambda$  sea cero [10, 11, 13], y que no lo sea [12].

Las ecuaciones antes de introducir las branas son

$$\begin{aligned} 0 &= \phi'' + 4a^{-1}a'\phi' \\ 0 &= a^{-2}(a')^2 - \frac{1}{9}(\phi')^2 - \frac{\Lambda}{3}a^{-2} \\ 0 &= a^{-1}a'' + \frac{1}{3}(\phi')^2. \end{aligned} \tag{3.27}$$

De la primera de ellas obtenemos

$$\phi' = \gamma a^{-4}, \tag{3.28}$$

siendo  $\gamma$  una constante de integración arbitraria. Las dos ecuaciones restantes se reducen a la única ecuación

$$(a')^2 = \frac{\gamma^2}{9}a^{-6} + \frac{\Lambda}{3} \tag{3.29}$$

Para el caso  $\Lambda = 0$  la solución es

$$\begin{cases} d\hat{s}^2 = \left[\frac{4}{3}\gamma(y+y_0)\right]^{1/2} g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dy^2 \\ e^{-2\phi} = (y+y_0)^{\pm\frac{3}{2}} \end{cases}. \tag{3.30}$$

De nuevo vemos que el modo no masivo del gravitón viene dado por:

$$\psi_0(y) = \left[\frac{4}{3}\gamma(y+y_0)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{3.31}$$

Siguiendo los pasos de las demás secciones, introducimos un corte en  $y = \frac{3}{4\gamma}$  para normalizar el gravitón, lo que se traduce en hacer el cambio de variable  $y \rightarrow \frac{3}{4\gamma} - |y|$ . Introduciendo el término de la 3-brana, la acción (3.8) nos da las ecuaciones de movimiento



$$\begin{aligned}
0 &= \phi'' + 4a^{-1}a'\phi' - \frac{\beta\hat{\kappa}}{4}V_0e^{\frac{\beta}{3}\phi}\delta(y) \\
0 &= a^{-2}(a')^2 - \frac{1}{9}(\phi')^2 \\
0 &= a^{-1}a'' + \frac{1}{3}(\phi')^2 + \frac{\hat{\kappa}}{3}V_0e^{\frac{\beta}{3}\phi}\delta(y),
\end{aligned} \tag{3.32}$$

cuya solución es

$$\begin{cases} d\hat{s}^2 = [1 - \frac{4}{3}\gamma|y|]^{1/2} g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dy^2 \\ e^\phi = [1 - \frac{4}{3}\gamma|y|]^{\frac{3}{4}}. \end{cases} \tag{3.33}$$

donde de nuevo  $\gamma$  es una constante de integración arbitraria. La tensión de la brana viene fijada por:

$$V_0 = \frac{2\gamma}{\hat{\kappa}}, \tag{3.34}$$

y el acoplo del dilatón a la brana es  $\beta = -4$ .

El caso con  $\Lambda \neq 0$  fue estudiado en [11]. Hemos visto que las ecuaciones de movimiento se reducen a (3.28) y (3.29). Esta última ecuación puede reescribirse como

$$a' = \epsilon \sqrt{\frac{\gamma^2}{9}a^{-6} + \frac{\Lambda}{3}}, \tag{3.35}$$

donde  $\epsilon = \pm 1$  simplemente determina el signo que escogemos de la raíz. Es interesante darse cuenta de que esta solución sólo tiene sentido cuando el radicando en (3.35) es positivo. Si  $\Lambda > 0$  es positivo, es decir, si la brana es  $DS$ , el radicando siempre es positivo. Sin embargo, si la brana es  $aDS$ ,  $\Lambda < 0$ , esta condición nos dará una restricción sobre  $\Lambda$  [12].

Integrando (3.35) obtenemos:

$$\int \frac{\epsilon da}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{9}a^{-6} + \frac{\Lambda}{3}}} = y + y_0, \tag{3.36}$$

que queda resuelta de la forma

$$\frac{3}{4}\epsilon \frac{1}{|\gamma|} a^4 {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{3\Lambda}{\gamma^2}a^6\right) = y + y_0, \tag{3.37}$$

siendo  ${}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \varsigma\right) \equiv F(\varsigma)$  una función hipergeométrica.  $F(\varsigma)$  es analítica en  $\mathbb{C} - \{[1, \infty)\} \subset \mathbb{R}$ , y aumenta monótonamente desde  $F(-\infty) = 0$  pasando por  $F(0) = 1$  hasta alcanzar su máximo en  $F(1) = F_{max} = \frac{\Gamma(\frac{5}{3})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{7}{6})} = 1.725$ . Debido a que  $F \geq 0$ , la solución que hemos obtenido sólo es válida a un lado de  $y = -y_0$ . En  $y = -\frac{4}{3}y_0$  nuestra solución tiene una singularidad de curvatura.

Introducimos ahora un muro de dominio en  $y = 0$ . Las ecuaciones de movimiento que obtenemos son:

$$\begin{aligned}
0 &= \phi'' + 4a^{-1}a'\phi' - \frac{\beta\hat{\kappa}}{4}V_0e^{\frac{\beta}{3}\phi}\delta(y) \\
0 &= a^{-2}(a')^2 - \frac{1}{9}(\phi')^2 - \frac{\Lambda}{3}a^{-2} \\
0 &= a^{-1}a'' + \frac{1}{3}(\phi')^2 + \frac{\hat{\kappa}}{3}V_0e^{\frac{\beta}{3}\phi}\delta(y).
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Debemos ahora empalmar las soluciones a ambos de la brana. Llamamos  $y_{01}$ ,  $\gamma_1$  y  $c_1$  a las constantes de integración en el lado izquierdo ( $y < 0$ ), e  $y_{02}$ ,  $\gamma_2$  y  $c_2$  en el lado derecho ( $y > 0$ ). Las constantes  $d_i$  ( $i = 1, 2$ ) se refieren al modo cero  $\phi(0)$  del dilatón en el lado  $i$  de la brana.

Definiendo

$$\tilde{y}_{0i} = \frac{y_{0i}}{F|_{y=0}} \tag{3.39}$$

obtenemos la tensión de la brana:

$$V_0 = -\frac{4}{\hat{\kappa}\beta} (\tilde{y}_{01}^{-1} + \tilde{y}_{02}^{-1}) e^{-\frac{\beta}{3}\phi(0)} \tag{3.40}$$

y la expresión para el acoplo  $\beta$  del dilatón en función de las constantes de integración:

$$\beta = -4 \frac{\tilde{y}_{01}^{-1} + \tilde{y}_{02}^{-1}}{\sqrt{\tilde{y}_{01}^{-2} + \Lambda} + \sqrt{\tilde{y}_{02}^{-2} + \Lambda}}. \tag{3.41}$$

En los cálculos que hemos llevado a cabo en esta sección nos hemos centrado en un acoplo del dilatón a la brana de la forma  $f(\phi) = V_0e^{\frac{\beta}{3}\phi}$ , pero pueden generalizarse a un acoplo  $f(\phi)$  arbitrario [10, 11, 12].

### 3.4 El problema de la constante cosmológica

En el marco de las teorías tipo RS con dilatón, no existe una relación entre la energía del vacío de la teoría gauge que vive sobre la brana y la constante cosmológica 4-dimensional, sino que esta última es una propiedad puramente geométrica, que interpretamos como la curvatura de la brana. Esto hace desaparecer el problema de la constante cosmológica.

En [10, 11] se observó que las fluctuaciones de la tensión de la brana debidas a las correcciones cuánticas de la teoría que vive sobre ésta no generan una constante cosmológica 4-dimensional. Por medio del mecanismo conocido como *autoajuste*<sup>2</sup>, estas fluctuaciones en la tensión de la brana pueden absorberse en ajustes del dilatón (o de un campo escalar acoplado a nuestra teoría de gravedad), de modo que las correcciones cuánticas no generan una constante cosmológica sobre la brana. Por tanto, comenzando con branas *Ricci-flat*, no se genera curvatura.

Partimos de la acción (3.8) con  $\hat{\Lambda} = 0$  y proponemos el Ansatz

---

<sup>2</sup>*Self-tuning.*

$$ds^2 = a(y)^2 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dy^2 \quad (3.42)$$

$$\phi = q \log a(y) + \phi_0,$$

donde  $q$  y  $\phi_0$  son constantes arbitrarias, y  $g_{\mu\nu}$  es una métrica *Ricci-flat*. Es fácil ver que la única diferencia con la sección 3.3 es el valor del dilatón sobre la brana  $\phi_0$ . De nuevo, las soluciones quedan:

$$\begin{cases} d\hat{s}^2 = [1 - \frac{4}{3}\gamma|y|]^{1/2} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dy^2 \\ e^{-2\phi} = [1 - \frac{4}{3}\gamma|y|]^{\frac{3}{2}}. \end{cases} \quad (3.43)$$

y la tensión de la brana:

$$V_0 = \frac{2\gamma}{\hat{\kappa}} e^{\frac{4}{3}\phi_0} \quad (3.44)$$

donde  $\gamma$  es una constante de integración arbitraria. Las variaciones de la tensión de la brana  $V_0 \rightarrow \xi V_0$  debidas a las fluctuaciones cuánticas puede absorberse mediante un ajuste del campo escalar de la forma:

$$\phi_0 \rightarrow \phi_0 + \frac{3}{4} \log \xi, \quad (3.45)$$

de modo que no se genera una constante cosmológica 4-dimensional, es decir, que los habitantes de la brana siguen midiendo constante cosmológica nula. Podemos hacer este tipo de transformaciones (ajustes del valor esperado del campo del dilatón sobre la brana  $\phi_0$ ), gracias a que las ecuaciones de movimiento (3.32) son invariantes bajo ellas. En este caso, además, también la acción (3.8) (con  $\hat{\Lambda} = 0$ ) es invariante.

Sin embargo, recientes observaciones astronómicas parecen indicar la existencia de una constante cosmológica positiva pequeña, pero distinta de cero. Por tanto, resulta interesante estudiar si existe un mecanismo de auto-ajuste para el caso de branas con constante cosmológica 4-dimensional no nula. A partir de las soluciones tipo RS con dilatón con constante cosmológica en la brana que construimos en la sección 3.2 anterior, analizaremos las correcciones procedentes de las fluctuaciones de la tensión de la brana y definiremos una generalización del mecanismo de auto-ajuste para este tipo de soluciones.

El mecanismo de auto-ajuste no funciona en el caso de branas que sean *Ricci-flat* si incluimos una constante cosmológica 5-dimensional. Sin embargo, sí es posible generalizar este mecanismo al caso con constante cosmológica 5-dimensional no nula. La condición necesaria para poder generalizar el mecanismo de auto-ajuste es considerar que la constante cosmológica 4-dimensional es distinta de cero, es decir, que las branas tengan curvatura constante. Veamos cómo sucede esto.

Consideremos, pues, el caso en el que las branas albergan constante cosmológica no nula  $\Lambda$ . Al construir la solución proponemos el Ansatz (3.42), donde ahora la métrica  $g_{\mu\nu}$  no es *Ricci-flat*, sino que tiene curvatura constante distinta de cero. La única diferencia en este caso con la sección (3.2) es la constante  $\phi_0$ . La familia de soluciones que se obtiene es, por tanto:

$$d\hat{s}^2 = \left[ 1 - \frac{\alpha}{4} \sqrt{-\frac{\hat{\Lambda}}{3}} |y| \right]^2 e^{\frac{\alpha}{3}\phi_0} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dy^2 \quad (3.46)$$

$$\phi = -\frac{6}{\alpha} \log \left[ 1 - \frac{\alpha}{4} \sqrt{-\frac{\hat{\Lambda}}{3}} |y| \right].$$

Las constantes cosmológicas satisfacen:

$$\Lambda = \frac{16 - \alpha^2}{16} \hat{\Lambda} e^{\frac{\alpha}{3}\phi_0}, \quad (3.47)$$

donde  $\Lambda$  es la constante cosmológica 4-dimensional, es decir, las ecuaciones de Einstein sobre las brana son:

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (3.48)$$

La tensión de la brana viene dada por

$$V_0 = \frac{\alpha}{2\hat{\kappa}} \sqrt{-3\hat{\Lambda}} e^{\frac{\alpha^2-16}{6\alpha}\phi_0} \quad (3.49)$$

y el acoplo del dilatón a ésta es  $\beta = \frac{8}{\alpha}$ .

Veamos ahora cómo las variaciones de la tensión  $V_0$  afectan a la solución. Hemos visto que, en ausencia de la constante cosmológica 5-dimensional, las variaciones de  $V_0$  son absorbidas en ajustes del dilatón, de modo que no se genera constante cosmológica 4-dimensional. Debido al acoplo del dilatón a la constante cosmológica 5-dimensional, los ajustes del dilatón ya no son una simetría de la teoría. Sin embargo, en modelos con branas cuya constante cosmológica es distinta de cero, es posible absorber los ajustes del dilatón en cambios de  $\Lambda$  y  $g_{\mu\nu}$ .

El mecanismo funciona de la siguiente forma. Variando la tensión de la brana de la forma  $V_0 \rightarrow \xi V_0$ , se induce el cambio:

$$\phi_0 \rightarrow \phi_0 + \frac{6\alpha}{\alpha^2 - 16} \log \xi, \quad (3.50)$$

de forma que el ajuste de  $\Lambda$  que absorbe este cambio es

$$\Lambda \rightarrow \Lambda \xi^{\frac{2\alpha^2}{\alpha^2-16}}. \quad (3.51)$$

En la solución (3.46), el ajuste (3.50) es absorbido por la métrica 4-dimensional  $g_{\mu\nu}$  redefiniéndola de la forma

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} \xi^{\frac{-2\alpha^2}{\alpha^2-16}}, \quad (3.52)$$

de modo que la ecuación (3.48) queda invariante bajo esta transformación, ya que (3.51) y (3.52) se cancelan entre sí.

Por tanto, para los habitantes de la brana, la constante cosmológica no cambia bajo ajustes del dilatón que compensen los cambios en la tensión de la brana. La métrica 5-dimensional se adapta para acomodar las variaciones de los valores esperados de vacío de la teoría que vive en la brana. De nuevo, las ecuaciones de movimiento son invariantes bajo ajustes del dilatón.

Algo que podría llamarnos la atención en esta generalización del mecanismo de auto-ajuste es que las transformaciones (3.50), (3.51) y (3.52) son singulares para  $\alpha = \pm 4$ . Esto se debe a que para estos valores del acoplo  $\alpha$  la constante cosmológica sobre la brana es nula, como puede verse en (3.47).

# Capítulo 4

## Agujeros negros en la brana

Supongamos que realmente el universo en cuatro dimensiones que conocemos es una 3-brana 4-dimensional que vive en un espacio 5-dimensional. Queremos ahora estudiar algunas de las posibles implicaciones de esta hipótesis. Si la materia que vive confinada en la brana sufre un proceso de colapso gravitatorio, entonces se formará un agujero negro sobre la brana. Entonces, el horizonte de dicho agujero negro se extenderá a lo largo de la quinta dimensión, es decir, el agujero negro será un objeto 5-dimensional.

En primer lugar analizaremos un escenario con un agujero negro asintóticamente plano en la brana [17]. Completaremos nuestro análisis considerando agujeros negros asintóticamente  $(a)DS$  [23].

### 4.1 Agujeros negros asintóticamente planos

Los modelos de RS que consideramos utilizan  $aDS_5$ , cuya métrica en coordenadas holográficas viene dada por:

$$d\hat{s}^2 = e^{-2\hat{g}y} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dy^2, \quad (4.1)$$

donde  $\eta_{\mu\nu}$  es la métrica de Minkowski 4-dimensional. Hemos visto en el capítulo 2 que podemos sustituir  $\eta_{\mu\nu}$  por una métrica que sea *Ricci-flat* y la solución sigue siendo válida. Vamos a estudiar qué sucede si  $g_{\mu\nu}$  es una solución tipo agujero negro, es decir, cómo se ve este objeto desde el punto de vista 5-dimensional (en concreto, estudiaremos la solución de Schwarzschild).

Nos interesa trabajar en el sistema de referencia conforme, para lo que hacemos la transformación de coordenadas  $y \rightarrow z$  dada por

$$z = \frac{1}{\hat{g}} e^{\hat{g}y}, \quad (4.2)$$

de modo que la métrica (4.1) queda

$$d\hat{s}^2 = \frac{1}{(\hat{g}z)^2} [g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dz^2], \quad (4.3)$$

que representa una solución de cuerda negra, y que en este caso tiene dos singularidades:  $z = 0$  (frontera de  $aDS$ ) y  $z = \infty$  (horizonte de  $aDS$ ).

Tanto el escalar de curvatura como el tensor de Ricci son siempre finitos para esta solución, de modo que, para analizar las singularidades, calculamos el tensor de Riemann al cuadrado. Para la solución (4.3) tenemos:

$$\hat{R}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}}\hat{R}^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}} = 40\hat{g}^4 + (\hat{g}z)^4 R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (4.4)$$

que es singular en  $z = \infty$ , el horizonte de  $aDS$ .

Para estudiar la singularidad que aparece en esta solución haremos un análisis de las geodésicas del espacio-tiempo 5-dimensional. Concentraremos nuestro estudio principalmente en las geodésicas *null* o *tipo luz*, ya que describen el movimiento de la luz en un campo gravitatorio dado.

Sea  $\hat{u}^{\hat{\mu}}$  el vector velocidad a lo largo de una geodésica tipo luz o tipo tiempo con respecto a un parámetro afín  $\tau$ . La condición de compatibilidad de la métrica implica que, a lo largo de la trayectoria, la cantidad

$$\hat{\varepsilon} = \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \frac{dx^{\hat{\mu}}}{d\tau} \frac{dx^{\hat{\nu}}}{d\tau} \quad (4.5)$$

es constante [24]. Nos concentramos en geodésicas tipo luz, para las que  $\hat{\varepsilon} = 0$ . La ecuación general de las geodésicas es:

$$\frac{d^2 x^{\hat{\rho}}}{d\tau^2} + \hat{\Gamma}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{\hat{\rho}} \frac{dx^{\hat{\mu}}}{d\tau} \frac{dx^{\hat{\nu}}}{d\tau} = 0 \quad (4.6)$$

Para un Ansatz tipo *warped* en el sistema conforme:

$$d\hat{s}^2 = A^2(z) [g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dz^2] , \quad (4.7)$$

la componente  $\hat{\rho} = y$  de la ecuación (4.6) es:

$$\frac{d}{d\tau} \left[ A^2(z) \frac{dz}{d\tau} \right] = 0 , \quad (4.8)$$

de donde

$$\frac{dz}{d\tau} = \aleph A^{-2}(z) , \quad (4.9)$$

siendo  $\aleph$  es una constante de integración arbitraria. Definiendo un cambio del parámetro afín  $\tau \rightarrow \sigma(\tau)$  de la forma

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = \aleph A^{-2}(z(\tau)) \quad (4.10)$$

y usando (4.9), la ecuación radial (4.5) queda:

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} = 1 , \quad (4.11)$$

que es exactamente la ecuación radial de una partícula masiva en el espacio-tiempo 4-dimensional (geodésica tipo tiempo,  $\varepsilon = 1$ ), de modo que  $\sigma$  es el tiempo propio a lo largo la geodésica. Un cálculo sencillo nos dice que la ecuación de las geodésicas (4.6) con  $\hat{\rho} = \rho$  con el nuevo parámetro  $\sigma$  es:

$$\frac{d^2 x^\rho}{d\sigma^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0 , \quad (4.12)$$

que es la ecuación de las geodésicas para la métrica  $g_{\mu\nu}$ . Por tanto, a partir de las geodésicas tipo luz en el espacio 5-dimensional (*bulk*) hemos obtenido geodésicas tipo tiempo en el espacio-tiempo 4-dimensional, que describen el movimiento de una partícula masiva. Este resultado resulta lógico, ya que el movimiento no trivial en la quinta dimensión genera una masa en 4 dimensiones.

En el caso que nos interesa tenemos  $A(z) = (\hat{g}z)^{-1}$ , de modo que la ecuación (4.9) queda resuelta con:

$$z(\tau) = -(\aleph \hat{g}^2 \tau)^{-1}. \quad (4.13)$$

Teniendo en cuenta que el cambio de parámetro (4.10) queda

$$\sigma = -(\aleph \hat{g}^2 \tau)^{-1}, \quad (4.14)$$

obtenemos  $z(\sigma) = \sigma$ .

Estamos interesados en el comportamiento cerca de la singularidad en  $z = \infty$ , es decir,  $\tau \rightarrow 0_-$ , que es equivalente a  $\sigma \rightarrow \infty$ . Por tanto, necesitamos estudiar el comportamiento de las geodésicas 4-dimensionales a tiempos muy grandes.

Para entender bien lo que sucede en la singularidad, usaremos un ejemplo sencillo: Schwarzschild. En este caso, tenemos:

$$d\hat{s}^2 = \frac{1}{(\hat{g}z)^2} [U(r)dt^2 - U^{-1}(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 - dz^2], \quad (4.15)$$

con  $U(r) = 1 - \frac{2M}{r}$ , siendo  $M$  la masa del agujero negro. La métrica (4.15) tiene dos vectores de Killing asociados,  $\hat{k} = \partial_t$  y  $\hat{m} = \partial_\varphi$ , que dan lugar a dos cantidades conservadas,  $\hat{E} = \hat{k} \cdot \hat{u}$  y  $\hat{L} = -\hat{m} \cdot \hat{u}$ . Restringiendo el movimiento al plano ecuatorial,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , obtenemos:

$$\hat{E} = A^2(z)U(r)\frac{dt}{d\tau}, \quad \hat{L} = A^2(z)r^2\frac{d\varphi}{d\tau}. \quad (4.16)$$

En función del nuevo parámetro  $\sigma$ , (4.16) son:

$$E = U(r)\frac{dt}{d\sigma}, \quad L = r^2\frac{d\varphi}{d\sigma}, \quad (4.17)$$

donde  $\hat{E} = \aleph E$  y  $\hat{L} = \aleph L$ , e interpretamos  $\hbar E$  como la energía total del fotón 5-dimensional, y  $\hbar L$  como su momento angular total [24]. La ecuación de movimiento que finalmente obtenemos es la ecuación

$$\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 + \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = E^2, \quad (4.18)$$

que es exactamente la ecuación radial de una geodésica tipo tiempo (partícula masiva) para la solución de Schwarzschild en 4 dimensiones. En general, interpretamos  $E$  como la energía total por unidad de masa de una partícula moviéndose a lo largo de éstas geodésicas con respecto a un observador estático en el infinito, ya que es la energía que necesitaría tal observador para colocar una partícula de prueba (masa unidad) en dicha órbita. Interpretamos  $L$  como el momento angular total de la partícula por unidad de masa [24].



Hemos visto que para entender qué sucede cerca de la singularidad tenemos que estudiar el comportamiento de las geodésicas 4-dimensionales a tiempos  $\sigma$  muy grandes ( $\sigma \rightarrow \infty$ ). Si éstas geodésicas *chocan* contra la singularidad de Schwarzschild en  $r = 0$ , lo hacen en  $\sigma$  finito. Para  $\sigma$  infinito existen dos posibilidades [24]. La primera es que la geodésica alcance  $r = \infty$ . La segunda sólo tiene lugar si  $L^2 > 12M^2$ , cuando es posible tener estados ligados ligados (es decir, órbitas restringidas a un rango finito de  $r$ ) fuera del horizonte de Schwarzschild.

Las órbitas que alcanzan  $r = \infty$  tienen un comportamiento a  $\sigma$  grande del tipo

$$r \sim \sigma \sqrt{E^2 - 1}, \quad (4.19)$$

es decir,

$$r \sim -\frac{1}{\aleph \hat{g}^2 \tau} \sqrt{E^2 - 1} \quad (4.20)$$

para  $\tau \rightarrow 0_-$ . A lo largo de estas geodésicas el tensor de Riemann al cuadrado no diverge. Los estados ligados se comportan de forma diferente. Éstos permanecen a  $r$  finita, de forma que el tensor de Riemann al cuadrado diverge cuando  $\tau \rightarrow 0_-$ , y lo que sucede es que orbitan la *cuerda negra* infinitas veces antes de chocar con la singularidad, lo que sucede en parámetro afín finito.

Da la impresión de que algunas geodésicas se encuentran una singularidad en el horizonte de  $aDS$ , mientras que otras no se la encuentran, ya que los invariantes de curvatura no divergen a lo largo de ellas. Podemos pensar que sólo una parte de la superficie  $z = \infty$  es singular. Para ver esto claramente, simplemente tenemos que calcular el tensor de Riemann en un sistema de referencia ortonormal que se propague paralelamente a lo largo de una geodésica tipo tiempo que alcance  $z = \infty$ , pero para la que el tensor de Riemann al cuadrado no diverja (es decir, una geodésica que no sea estado ligado). Haciendo este cálculo [17] vemos que efectivamente nuestra solución tiene una singularidad de curvatura en  $z = \infty$ .

Las soluciones tipo cuerda negra en espacios asintóticamente planos son inestables ante perturbaciones de longitud de onda grande [21]. La entropía de un agujero negro es mayor que la de un segmento lo suficientemente grande de una cuerda, de modo que la cuerda tiende a convertirse en una *ristra de agujeros negros*, para después formar una línea de agujeros negros. Podemos pensar que algo parecido sucede en nuestra solución. Sin embargo,  $aDS$  actúa como una caja confinante que previene de las fluctuaciones de longitud de onda mucho mayor que su radio  $R_{aDS} = \hat{g}^{-1}$ . Si se da una inestabilidad, tiene que ser a longitudes de onda más pequeñas.

Si el radio de curvatura del horizonte de la cuerda es suficientemente pequeño, entonces la curvatura de  $aDS$  será despreciable, de modo que la cuerda se comporta como si estuviese en un espacio asintóticamente plano. Esto que significa que será inestable ante perturbaciones con longitudes de onda del radio del horizonte ( $\sim z^{-1}$ ), es decir, para  $z$  suficientemente grande, estas perturbaciones *caben* en la caja de  $aDS$ . Por tanto, cerca del horizonte puede tener lugar una inestabilidad. Sin embargo, para  $z$  pequeñas la inestabilidad se da con longitudes de onda mucho mayores que el radio de  $aDS$ , es decir, que *no caben* en la caja. Si únicamente introducimos una brana (RS2) en el espacio, la singularidad en el horizonte puede verse desde

la brana. También podemos plantearnos introducir dos branas (RS1) en nuestro espacio en vez de una, de forma que la quinta coordenada sea compacta, evitando así la singularidad que aparece en el horizonte.

Concluyendo, la solución de cuerda negra es estable lejos del horizonte de  $aDS$ , pero inestable cerca de él, donde el horizonte de la cuerda tiende a cerrarse. Después de que el horizonte de la cuerda se cierre, la cuerda se convierte en un *puro negro* estable, que se extendería hacia el infinito en  $aDS$  si el muro de dominio no estuviese presente, pero que no llegaría al horizonte. Lejos del éste, la métrica de la cuerda negra describe aproximadamente el puro, de modo que la solución inducida en la brana es Schwarzschild (*casi-Schwarzschild*) en 4 dimensiones.

## 4.2 Agujeros negros asintóticamente (a)DS

Vamos a intentar ahora completar el estudio comenzado en la sección anterior. Estudiaremos agujeros negros en la brana con constante cosmológica no nula  $\Lambda$  [23].

En el capítulo 2 vimos que la solución con constantes cosmológicas 4 y 5-dimensionales es:

$$\begin{aligned} d\hat{s}^2 &= a^2(y)g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dy^2 \\ a(y) &= \frac{1}{2} (\mathfrak{I}_+ e^{\hat{g}y} + \mathfrak{I}_- e^{-\hat{g}y}) \\ \mathfrak{I}_+ \mathfrak{I}_- &= g^2/\hat{g}^2. \end{aligned} \tag{4.21}$$

La transformación de coordenadas dada por

$$z = \frac{2}{g} \arctan \left( \mathfrak{I}_+ \frac{\hat{g}}{g} e^{\hat{g}y} \right), \tag{4.22}$$

con  $0 \leq z \leq \frac{\pi}{g}$ , nos permite escribir la métrica en el sistema de referencia conforme:

$$d\hat{s}^2 = \left( \frac{g/\hat{g}}{\sin(\hat{g}z)} \right)^2 [g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dz^2]. \tag{4.23}$$

Esta solución tiene dos singularidades:  $z = 0$  (frontera de  $aDS$ ) y  $z = \frac{\pi}{g}$  (horizonte de  $aDS$ ). En este sistema de coordenadas también resulta fácil ver que la solución se reduce a la solución (4.3) en el límite  $g \rightarrow 0$ .

El tensor de Riemann al cuadrado en este caso queda:

$$\hat{R}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}}\hat{R}^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}} = 40\hat{g}^4 + \hat{g}^4 \left( \frac{\sin(gz)}{g} \right)^4 R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} \tag{4.24}$$

que no tiene singularidades en  $z$ , ya que  $\sin(gz)$  es finita  $\forall z$ . Las únicas singularidades verdaderas de la solución serán aquéllas que lo sean de  $g_{\mu\nu}$ . Por tanto, la presencia de una constante cosmológica no nula sobre el muro de dominio elimina la singularidad en el horizonte de  $aDS$  que aparecía en el caso de un muro con constante cosmológica nula.

Al introducir la constante cosmológica 4-dimensional estamos haciendo desaparecer la singularidad que aparecía en el horizonte de  $aDS$  en el caso de branas *Ricci-flat*,

de forma que no necesitamos hacer el estudio de las geodésicas que hicimos en la sección anterior.

# Conclusiones

Los escenarios tipo RS son modelos basados en geometrías no-factorizables del espacio-tiempo. Esta clase de geometrías permiten proponer soluciones a dos importantes problemas de la física teórica de altas energías. En primer lugar, podrían dar una solución al problema de las jerarquías gauge basada en un escenario con dos 3-branas separadas entre sí por una porción de  $aDS$ . En una de las branas *vive* el universo 4-dimensional que conocemos. La geometría del espacio-tiempo 5-dimensional genera una jerarquía entre las dos branas que explica el porqué de la enorme diferencia entre la escala débil y la escala de Planck. En segundo lugar, en un modelo con una sola brana es posible confinar la gravedad 4-dimensional, es decir, que se reproduce la gravedad 4-dimensional en un escenario con cinco dimensiones no-compactas, lo que representa una alternativa a la compactificación de Kaluza-Klein.

Si el modelo de RS es correcto, será posible detectar experimentalmente gravitones y excitaciones de KK (modos masivos). Entre otras manifestaciones de los mismos, habría una corrección a la ley de Newton debida a los modos de KK. Este es, quizá, uno de los flancos más débiles de este tipo de modelos, ya que esta ley de Newton ha sido verificada experimentalmente en un rango de distancias enorme.

En el escenario original de RS tenemos una ( $n$ ) 3-brana plana en  $aDS_5$ . En este trabajo hemos generalizado estos modelos, obteniendo así todos los posibles escenarios de este tipo en función de las constantes cosmológicas 4 y 5-dimensionales. También hemos estudiado las propiedades de supersimetría de estos modelos y una formulación de branas que los acerca a las teorías de cuerdas. Hemos dado un paso más allá introduciendo el dilatón en este tipo de escenarios, lo que nos permite proponer una solución al problema de la constante cosmológica. Finalmente, hemos querido entender qué sucede cuando la materia confinada en la brana sufre un proceso de colapso gravitatorio, es decir, cuando se forma un agujero negro en la brana. Un agujero negro en la brana se extiende a lo largo de la quinta dimensión dando lugar a diferentes objetos, dependiendo de si el agujero negro es asintóticamente plano o  $(a)DS$ .

# Apéndice A

## Ecuación de movimiento del gravitón

En este apéndice vamos a obtener la ecuación de movimiento del gravitón para métricas generales tipo *warped*:

$$d\hat{s}^2 = a^2(y)g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dy^2, \quad (\text{A.1})$$

donde consideramos que la métrica  $g_{\mu\nu}$  no depende de la quinta coordenada ( $y$ ) y satisface las ecuaciones de movimiento de Einstein con constante cosmológica arbitraria  $\Lambda$ . Obtendremos también la solución para el modo no masivo del gravitón.

Partimos de la acción de gravedad con constante cosmológica en  $\hat{d}$  dimensiones, que viene dada por:

$$\hat{S}_{grav} = \frac{1}{2\hat{\kappa}} \int d^{\hat{d}}\hat{x} \sqrt{|\hat{g}|} \left[ \hat{R} - (\hat{d} - 2)\hat{\Lambda} \right], \quad (\text{A.2})$$

De esta acción se derivan las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\hat{R}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \hat{\Lambda}\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}. \quad (\text{A.3})$$

Perturbando la métrica de la forma  $\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \rightarrow \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} + \hat{h}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$  alrededor de un *background*  $\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$  que satisface (A.3), y quedándonos a primer orden en  $\hat{h}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ , encontramos que las ecuaciones de movimiento para  $\hat{h}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$  en el gauge transversal sin traza (TT)<sup>1</sup>

$$\hat{\nabla}^{\hat{\mu}}\hat{h}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \hat{h} = 0, \quad (\text{A.4})$$

siendo  $\hat{h} = \hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}}\hat{h}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$  es la traza de la perturbación, son:

$$\hat{\nabla}^2\hat{h}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} + 2\hat{R}_{\hat{\rho}(\hat{\mu}}\hat{h}^{\hat{\rho}}_{\hat{\nu})} + 2\hat{R}^{\hat{\lambda}}_{(\hat{\mu}\hat{\nu})\hat{\sigma}}\hat{h}_{\hat{\lambda}\hat{\sigma}} = 2\hat{\Lambda}\hat{h}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}. \quad (\text{A.5})$$

Usando (A.3) obtenemos:

$$\hat{\nabla}^2\hat{h}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} + 2\hat{R}^{\hat{\lambda}}_{(\hat{\mu}\hat{\nu})\hat{\sigma}}\hat{h}_{\hat{\lambda}\hat{\sigma}} = 0. \quad (\text{A.6})$$

Introducimos ahora el gauge de RS

$$\hat{h}_{\hat{\mu}y} = \hat{h}_{yy} = 0. \quad (\text{A.7})$$

---

<sup>1</sup>*Transverse Traceless gauge.*

En realidad éste no es un gauge, ya que no respeta el número de grados de libertad de la perturbación. Es decir,  $\hat{h}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$  en 5 dimensiones tiene cinco grados de libertad, dos del tensor  $\hat{h}_{\mu\nu}$ , dos del vector  $\hat{h}_{\mu y}$  y uno del escalar  $\hat{h}_{yy}$ . Al hacer el *gauge* de RS estamos perdiendo tres grados de libertad (dos del vector y uno del escalar), de modo que éste no es un verdadero gauge. Sin embargo, la condición  $\hat{h}_{\mu y} = 0$  es necesaria al hacer el *orbifolding*<sup>2</sup>, ya que el vector se transforma como  $\hat{h}_{\mu y} \rightarrow -\hat{h}_{\mu y}$  bajo  $y \rightarrow -y$ .

Utilizando entonces el gauge de RS y trabajando con la métrica tipo *warped* general (A.1), vemos que las ecuaciones para  $\hat{h}_{\mu y}$  y  $\hat{h}_{yy}$  se satisfacen idénticamente, de modo que la ecuación de movimiento para el resto de la perturbación queda:

$$a^{-2} \left[ \nabla^2 \hat{h}_{\mu\nu} + 2R^\rho_{(\mu\nu)}{}^\sigma \hat{h}_{\rho\sigma} \right] - \hat{h}_{\mu\nu}'' - (\hat{d} - 5)a^{-1}a' \hat{h}'_{\mu\nu} + 2[(\hat{d} - 4)a^{-2}(a')^2 + a^{-1}a''] \hat{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{A.8})$$

Asumimos que la perturbación puede expandirse en modos de la forma

$$\hat{h}_{\mu\nu}(x, y) = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}(y) h_{\mu\nu}^{(\alpha)}(x). \quad (\text{A.9})$$

Sólo estamos interesados en el modo no masivo  $h_{\mu\nu}^{(0)} \equiv h_{\mu\nu}$ . La ecuación de movimiento (sin fuentes) de un gravitón sin masa en el gauge TT en un *background*  $g_{\mu\nu}$  que satisface las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica  $\Lambda$  viene dada por:

$$\nabla^2 h_{\mu\nu} + 2R^\rho_{(\mu\nu)}{}^\sigma h_{\rho\sigma} = 0, \quad (\text{A.10})$$

de modo que la ecuación (A.8) queda:

$$\hat{h}_{\mu\nu}'' = (5 - \hat{d})a^{-1}a' \hat{h}'_{\mu\nu} + 2 \left[ a^{-1}a'' + (\hat{d} - 4)a^{-2}(a')^2 \right] \hat{h}_{\mu\nu}, \quad (\text{A.11})$$

que en  $\hat{d} = 5$  con  $\hat{h}_{\mu\nu} = \psi_0(y) h_{\mu\nu}$  queda resuelta por

$$\psi_0(y) = a^2(y). \quad (\text{A.12})$$

En general este gravitón no será normalizable en todo el espacio. Para que el modo cero  $\psi_0$  del gravitón sea normalizable necesitamos introducir un *cut-off* en algún punto de la quinta coordenada. La inclusión del *cut-off* tiene dos efectos a tener en cuenta. En primer lugar, *corta* la parte del espacio donde el gravitón se vuelve no normalizable. Podemos reemplazar la parte del espacio que hemos cortado con una copia de la parte que no hemos quitado. Matemáticamente, esto se traduce básicamente en sustituir  $y$  por  $|y|$  en la solución (A.1). Esto genera un comportamiento tipo delta de Dirac en las ecuaciones de movimiento, que puede compensarse introduciendo en la acción términos de fuente tipo muro de dominio en las fronteras. El segundo efecto al que da lugar el *cut-off* es que discretiza el espectro de KK, que es continuo antes de introducir el *cut-off*<sup>3</sup>.

Introducimos entonces los términos de fuente tipo muro en la acción, de modo que la nueva acción es:

<sup>2</sup>Esto implica que tengamos invariancia  $y \rightarrow -y$ .

<sup>3</sup>Esto se debe a que el espacio de Hilbert de un espacio compacto es discreto.

$$\hat{S} = \hat{S}_{grav} + \sum_n \int d^{\hat{d}-1}x \sqrt{|g^{(n)}|} (\mathcal{L}_n - V_n) \quad (\text{A.13})$$

donde  $\mathcal{L}_n$  son los lagrangianos sobre las branas,  $V_n$  sus tensiones y  $g_{\mu\nu}^{(n)}$  las métricas inducidas sobre ellas. Las ecuaciones de movimiento que se obtienen a partir de la acción (A.13) son:

$$\hat{R}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \hat{\Lambda} \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \hat{\kappa} \left[ g_{\rho\sigma} \delta^{\rho}_{\hat{\mu}} \delta^{\sigma}_{\hat{\nu}} - \frac{1}{\hat{d}-2} \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} (\hat{g}^{\rho\sigma} \hat{g}_{\rho\sigma}) \right] \sum_n V_n \delta(y - y_n). \quad (\text{A.14})$$

Si expandimos estas ecuaciones alrededor de un *background* que las satisfaga, la ecuación de movimiento que obtenemos para la perturbación es:

$$\begin{aligned} & \hat{\nabla}^2 \hat{h}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} + 2\hat{R}_{\hat{\rho}(\hat{\mu}} \hat{h}^{\rho}_{\hat{\nu})} + 2\hat{R}^{\hat{\lambda}}_{(\hat{\mu}\hat{\nu})} \hat{h}_{\hat{\lambda}\hat{\sigma}} - 2\hat{\Lambda} \hat{h}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \\ & + 2\hat{\kappa} \left\{ \hat{g}^{\rho\sigma} \left[ 2\hat{h}_{\rho(\hat{\mu}} \hat{g}_{\hat{\nu})\sigma} - \frac{1}{\hat{d}-2} (\hat{h}_{\rho\sigma} \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} + \hat{h}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \hat{g}_{\rho\sigma}) \right] \right. \\ & \left. - \hat{h}^{\rho\sigma} \left( \hat{g}_{\rho\hat{\mu}} \hat{g}_{\sigma\hat{\nu}} - \frac{1}{\hat{d}-2} \hat{g}_{\rho\sigma} \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \right) \right\} \sum_n V_n \delta(y - y_n) = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Usando la primera ecuación de (A.14) para eliminar  $\hat{R}_{\hat{\rho}\hat{\mu}}$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} & \hat{\nabla}^2 \hat{h}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} + 2\hat{R}^{\hat{\lambda}}_{(\hat{\mu}\hat{\nu})} \hat{h}_{\hat{\lambda}\hat{\sigma}} + 2\hat{\kappa} \left[ (\hat{g}^{\rho\sigma} \hat{h}_{\rho(\hat{\mu}} - \hat{h}^{\rho\sigma} \hat{g}_{\rho(\hat{\mu}}) \hat{g}_{\hat{\nu})\sigma} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\hat{d}-2} (\hat{h}^{\rho\sigma} \hat{g}_{\rho\sigma} - \hat{g}^{\rho\sigma} \hat{h}_{\rho\sigma}) \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \right] \sum_n V_n \delta(y - y_n) = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Utilizando el gauge de RS (A.7) y teniendo en cuenta el hecho de que la métrica (A.1) es diagonal por bloques, vemos que los términos de las fuentes se cancelan. De nuevo, las ecuaciones para  $\hat{h}_{\mu y}$  y  $\hat{h}_{y y}$  se satisfacen idénticamente, y la ecuación para el resto de la perturbación es:

$$\begin{aligned} & a^{-2} \left[ \hat{\nabla}^2 \hat{h}_{\mu\nu} + 2R^{\rho}_{(\mu\nu)\sigma} \hat{h}_{\rho\sigma} \right] - \hat{h}''_{\mu\nu} \\ & - (\hat{d} - 5) a^{-1} a' \hat{h}'_{\mu\nu} + 2[(\hat{d} - 4) a^{-2} (a')^2 + a^{-1} a''] \hat{h}_{\mu\nu} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Si asumimos la expansión de la perturbación en modos de RS (A.9), y tenemos en cuenta que la ecuación de movimiento de un gravitón no masivo sin fuentes en el gauge TT viene dada por (A.10), tenemos de nuevo:

$$\hat{h}''_{\mu\nu} = (5 - \hat{d}) a^{-1} a' \hat{h}'_{\mu\nu} + 2 \left[ a^{-1} a'' + (\hat{d} - 4) a^{-2} (a')^2 \right] \hat{h}_{\mu\nu}, \quad (\text{A.18})$$

cuya solución en  $\hat{d} = 5$  es:

$$\psi_0(y) = a^2(y). \quad (\text{A.19})$$

El confinamiento de la gravedad 4-dimensional dependerá de la forma explícita de la solución. En general, la inclusión de las branas y el *orbifolding* es necesario para que se produzca confinamiento en una sola brana, ya que  $a^2$  tiene más de un máximo en el intervalo de interés. La única excepción parece ser el caso de RS.



# Agradecimientos

*Con el corazón en la mano, grito una y otra vez...gracias a (y por supuesto aquí no hay orden de preferencia)...*

...Tomás Ortín, *Nitro Mot*, por escucharme, por entenderme, por apoyarme, por animarme, por ayudarme a entender miles de cosas... en definitiva: por ser un jefe cojonudo.

...Patrick Andreas Anna, el pequeño genio llorón, por ser tan especial, por estar ahí desde el principio y porque sí, por enseñarme un *güebo* de cosas, por escuchar cada una de mis chorradas (que son muchas) y por perder el tiempo conmigo divagando sobre la lluvia, el amor o el aire.

...Bert, por ser tan buena persona y tan encantador, por dedicarme horas y horas para resolver las preguntas más chorras que revoloteaban por mi cabeza y por ser tan buen amigo.

...Ernesto (*er yonki*), Pedro (*el del hep-ph*) por ser geniales en el curro y fuera de él.

...el Instituto de Física Teórica (IFT-UAM/CSIC) y el Departamento de Física Teórica (UAM).

...toda la gente maravillosa que nunca se apartó de mí y que me apoyó muchísimo en todo, incluida esta historia... Papá Javier, Mamá Alicia, Javi, Tatxi, Romy (*Luna Lunera*), Atilano (*el rey de los Brunos*), Vero, Jaime (*el mariquita*), Lucía (*la de los loros*), Yago (*Api*), Juanjo (*jes un sauro!*), Rocío (*Ricitos de oro*)...

# Bibliografía

- [1] L. Randall, R. Sundrum, *A Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension*, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 3370-3373; hep-ph/9905221.
- [2] L. Randall, R. Sundrum, *An Alternative to Compactification*, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 4690-4693; hep-th/9906064.
- [3] N. Alonso-Alberca, P. Meessen and T. Ortín, *Supersymmetric Brane-Worlds*, *Phys. Lett. B* To appear; hep-th/0003248.
- [4] R. Altendorfer, J. Bagger, D. Nemeschansky, *Supersymmetric Randall-Sundrum Scenario*, hep-th/0003117.
- [5] T. Gherghetta, A. Pomarol, *Bulk Fields and Supersymmetry in a Slice of AdS*, hep-ph/0003129.
- [6] R. Kallosh, A. Linde, *Supersymmetry and the Brane World*, *JHEP* **0002** (2000) 005; hep-th/0001071.
- [7] C. Csaki, J. Erlich, T.J. Hollowood, Y. Shirman, *Universal Aspects of Gravity Localized on Thick Branes*, hep-th/0001033.
- [8] L.J. Romans, *Massive  $N = 2A$  Supergravity in Ten-Dimensions*, *Phys. Lett.* **B169** (1986) 374.
- [9] E. Bergshoeff, M. de Roo, M.B. Green, G. Papadopoulos, P.K. Townsend, *Duality of Type II 7-Branes and 8-Branes*, *Nucl. Phys.* **B470** (1996) 113-135; hep-th/9601150.
- [10] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, N. Kaloper, R. Sundrum, *A Small Cosmological Constant from a Large Extra Dimension*, *Phys. Lett. B* To appear; hep-th/0001197.
- [11] S. Kachru, E. Silverstein, M. Schulz, *Self-tuning flat domain walls in 5d gravity and string theory*, hep-th/0001206.
- [12] S. Kachru, E. Silverstein, M. Schulz, *Bounds on curved domain walls in 5d gravity*, hep-th/0002121.
- [13] C. Gómez, B. Janssen, P.J. Silva, *Dilatonic Randall-Sundrum Theory and renormalization group*, *JHEP* 0004 (2000) 024; hep-th/0002042.
- [14] D. Youm, *Solitons in Brane Worlds*, hep-th/9911218.
- [15] N. Alonso-Alberca, B. Janssen, Pedro J. Silva, *Curved Dilatonic Brane-Worlds and the Cosmological Constant Problem*, hep-th/0005116.

- [16] S.W. Hawking, T. Hertog, H.S. Reall, *Brane New World*, hep-th/0003052.
- [17] A. Chamblin, S.W. Hawking, H.S. Reall, *Brane-World Black Holes*, *Phys. Rev. D* **61** (2000), 065007; hep-th/9909205.
- [18] S. Nojiri, O. Obregón, S.D. Odintsov, S. Ogushi, *Dilatonic Brane-World Black Holes*, *Gravity Localization and Newton Constant*, hep-th/0003148.
- [19] R. Emparan, G.T. Horowitz, R.C. Myers, *Exact Description of Black Holes on Branes*, *JHEP* 0001 (2000) 007; hep-th/9911043.
- [20] R. Emparan, G.T. Horowitz, R.C. Myers, *Exact Description of Black Holes on Branes II: Comparison with BTZ Black Holes and Black Strings*, *JHEP* 0001 (2000) 021; hep-th/9912135.
- [21] R. Gregory, R. Laflamme, *Black Strings and p-Branes are Unstable*, *Phys. Rev. Lett.* **70** 2837 (1993); hep-th/9301052.
- [22] R. Gregory, *Black string instabilities in anti-de Sitter space*, hep-th/0004101.
- [23] N. Alonso-Alberca, *Curved Black String Instabilities*, en preparación.
- [24] R.M. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press (1984).
- [25] P. Meessen, T. Ortín, *A Pedagogical Introduction to Semiclassical String Gravity*, en proceso de gestación.
- [26] Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press (1970).