Universidad Autónoma de Madrid

Todas las configuraciones supersimétricas de la Supergravedad $N = 4$, $d = 4$

Jorge Alejandro Bellorín Romero

Director

Tomás Ortín Miguel

Tutor

Enrique Alvarez Vázquez

Universidad Autónoma de Madrid

Todas las configuraciones supersimétricas de la Supergravedad $N = 4$, $d = 4$

Trabajo de Investigación presentado por

Jorge Alejandro Bellorín Romero

como requisito parcial para optar al Diploma de Estudios Avanzados

Director

Tomás Ortín Miguel

Tutor

Enrique Alvarez Vázquez

Agradecimientos

A Tomás quisiera darle un agradecimento, que no por corto es menos profundo. Entre muchas cosas, quisiera agredecerle el enseñarme a calcular más y filosofar menos.

A mi esposa e hija, quienes me dan el soporte emocional para continuar.

A mis amigos. A Matteo, con quien he compartido la experiencia de ser extranjero en Madrid, e igualmente a Fouad. Igualmente las gracias van para todos los demás amiguetes.

Siempre es difícil irse al extranjero. Quisiera por tanto agradecer a todas las personas que me ayudaron a establecerme, en particular, a mis amigos.

A mi bebé.

El análisis que se expone en esta monografía
ha sido previamente publicado en

Jorge Bellorín and Tomás Ortín, "*All Supersymetric Configurations of* $N = 4$, $d = 4$ *Supergravity*", Nuclear Physics B 726 (2005) 171-209.

Contenido

I

Introducción

1.1 Motivación

Las soluciones supersimétricas de las diferentes teorías de las supergravedad han jugado un papel destacado en Teoría de Cuerdas y Teoría M principalmente en tres áreas:

1. En el análisis de la termodinámica de objetos gravitantes extendidos como agujeros negros y anillos negros. Desde hace ya un buen tiempo se conoce que los agujeros negros están gobernados por leyes que son iguales en estructura a las leyes de la Termodinámica [1]. Precisamente uno de los logros de la Teoría de Cuerdas es que ofrece una descripción estadística para la mecánica de estos objetos y por lo tanto dentro del marco de la Teoría de Cuerdas la interpretación termodinámica es natural. En particular cuando se trabaja con configuraciones supersimétricas de las supergravedades se pueden hacer cálculos concretos de variables termodinámicas. Una revisión de este tema puede verse en [2] y un resumen de resultados recientes se encuentra en [3].

2. Las compactificaciones de la Teoría de Cuerdas y Teoría M de diez y once dimensiones respectivamente a cuatro dimensiones basadas en vacíos supersimétricos son interesantes para hacer fenomenología de cuerdas. Las supersimetrías preservadas por las soluciones constituyen el germen para construir modelos de partículas supersimétricos en cuatro dimensiones que han de conducir al Modelo Estándar por medio de algún mecanismo de ruptura de supersimetría. En [4] se presentan lecciones sobre el tema de las compactificaciones en Teoría de Cuerdas a nivel introductorio.

3. Los modelos de prueba para la correspondencia entre teorías cuánticas de campos conformes y la Teoría de Cuerdas colocan a la cuerda en un espacio

$\mathrm{AdS}_5 \times S^5$, el cual es una solución supersimétrica de la Supergravedad. Un análisis amplio de esta correspondecia se puede encontrar en [5].

Estas razones le otorgan sobrado interés a la clasificación de todas las soluciones supersimétricas de las teorías de supergravedad. En este trabajo se persiguen dos objetivos: en primer lugar se quiere conseguir la clasificación de todas las *configuraciones* supersimétricas de la Supergravedad $N = 4$, $d = 4$. Una vez hecho el trabajo con las configuraciones, como fin último queremos usar los resultados para encontrar nuevas *soluciones* supersimétricas de la teoría. El interés físico que nos guía es fundamentalmente el punto 1 de los mencionados anteriormente. Se podría estudiar por ejemplo la física de las soluciones supersimétricas en cuatro dimensiones haciendo cálculos de masa, área, entropía, cotas de Bogomol'nyi, etc.

Estrictamente desde el punto de vista de la Teoría de Cuerdas las supergravedades que gozan de mayor interés son aquellas que viven en diez dimensiones, las cuales son la teorías efectivas de baja energía de la Teoría de Cuerdas, y la más fundamental Supergravedad $d = 11$. En este sentido el mayor logro sería elaborar la clasificación de las configuraciones y soluciones supersimétricas en diez y once dimensiones. Sin embargo, la alta dimensionalidad de estas teorías hace que sea técnicamente muy difícil la empresa y de hecho aún no se cuenta con ninguna clasificación completa para tales dimensiones. Sólo se conoce la clasificación para once y diez dimensiones de las soluciones máximalmente supersimétricas [6]. El problema se hace más factible de resolver cuando se abordan supergravedades en dimensiones menores. Algunas de estas teorías pueden ser vistas como compactificaciones y truncaciones de las teorías en once y diez dimensiones, por lo tanto una configuración supersimétrica de esas teorías en baja dimensión es también una configuración supersimétrica de la teorías en diez u once dimensiones. Por otra parte la física de agujeros negros es claramente más interesante en cuatro dimensiones.

La Supergravedad $N = 4$, $d = 4$ está conectada directamente con la Teoría de Cuerdas. La teoría efectiva de la Cuerda Heterótica, bien sea $E_8 \times E_8$ ó $SO(32)$, es la Supergravedad $N = 1$, $d = 10$ acoplada a 16 supermultipletes vectoriales los cuales implementan la simetría gauge correspondiente [7, 8]. En el contexto de supergravedad a estos supermultipletes vectoriales se les denomina supermultipletes de materia. Si en la Supegravedad $N = 1$, $d = 10$ se realiza una compactificación toroidal sobre seis de las dimensiones espaciales se llega entonces a la Supergravedad $N = 4$, $d = 4$ acoplada a 22 multipletes de materia [9]. Los multipletes de materia se pueden desacoplar consistentemente para dejar la teoría de supergravedad.

Una propiedad importante de la Supergravedad $N = 4$, $d = 4$ es que es un modelo simple que posee simetrías relacionadas a las dualidades S y T de la Teoría de Cuerdas. El sector bosónico de la Supergravedad $N = 4$, $d = 4$ contiene el gravitón, dilatón, axión y seis vectores con simetría gauge $U(1)$ cada uno. El dilatón y el axión se pueden combinar en un escalar complejo, al cual denominaremos *axidilatón.* Hay una simetría $SL(2, \mathbb{R})$ a nivel de las ecuaciones de movimiento que rota a las partes eléctrica y magnética de los vectores y actúa sobre el axidilatón por medio de transformaciones lineales fraccionales, como veremos más adelante. En particular estas transformaciones sobre el axidilatón incluyen a las inversiones. Como hemos dicho anteriormente esta supergravedad es la teoría efectiva de baja energía de la Teoría de Cuerdas compactificada y en ésta el dilatón juega el papel de constante de acoplo. En este sentido se ha conjeturado [10–15] que este grupo de transformaciones es una simetría de la Teoría de Cuerdas que relaciona los límites de acoplo fuerte/débil. A este mecanismo se le denomina dualidad S. En realidad, la cuantización en Teoría de Cuerdas rompe el grupo $SL(2, \mathbb{R})$ al grupo discreto $SL(2, \mathbb{Z})$. Ello es debido básicamente a que bajo compactificación las cargas eléctricas y magnéticas se discretizan y el grupo de simetría actúa sobre estas cargas, de modo que al cuantizar el grupo de simetría debe ser discreto. Adicionalmente la Supergravedad $N = 4$, $d = 4$ contiene como simetría global al grupo $SU(4)$ o equivalentemente a $SO(6)$. Precisamente el grupo $O(6, 22, \mathbb{Z})$ es el grupo de dualidad T de la Teoría de Cuerdas Heterótica compactificada a cuatro dimensiones. La dualidad T básicamente dice que la Teoría de cuerdas compactificada en un círculo es la misma si se invierte el radio de compactificación.

Dada la importancia de las simetrías $SL(2, \mathbb{R})$ y $SU(4)$, en este trabajo utilizamos un lenguaje completamente covariante respecto a ellos. Incluso podemos presentar clases de soluciones agrupadas por conjuntos invariantes bajo las simetrías. Claro está, las simetrías se romperán a la hora de escribir alguna solución en concreto.

1.2 Precedentes

El trabajo pionero en la clasificación sistemática de las soluciones supersimétricas a alguna supergravedad mediante el análisis de las Ecuaciones de Espinores de Killing (KSEs, por sus siglas en inglés) fue realizado por Tod [16] hace más de veinte años, motivado por el resultado de Gibbons y Hull [17] acerca de la presencia de una cota de Bogomol'nyi en Gravitación que es saturada precisamente por las soluciones supersimétricas de la Supergravedad $N = 2$, $d = 4$. En ese trabajo Tod básicamente consiguió la forma más general de una solución supersimétrica de Supergravedad

$N = 2$, $d = 4$. Una característica fundamental de esas soluciones es que todas aceptan un vector de Killing el cual puede ser tipo tiempo o nulo, consecuentemente las soluciones se clasifican entre el caso tipo tiempo y el nulo. En líneas generales se puede decir que las soluciones del caso tipo tiempo son configuraciones masivas, agujeros negros por ejemplo, mientras que las del caso nulo son básicamente ondas gravitacionales y cuerdas cósmicas. En todos los trabajos posteriores sobre el tema, a los cuales nos referiremos más adelante, se ha conseguido un vector de Killing análogo en base al cual se separan similarmente las soluciones entre el caso tipo tiempo y el caso nulo.

Algunos años después Tod [18] ahondó en su análisis de soluciones supersimétricas. Aparte de presentar diferentes variantes de la Supergravedad $N = 2$, $d = 4$, inició el análisis para la teoría $N = 4$, $d = 4$, la cual es la que nos ocupa en este trabajo. Si bien Tod completó la clasificación de las configuraciones supersimétricas de esta teoría para el caso nulo, en el caso tipo tiempo sólo arrojó resultados parciales imponiendo una fuerte condición sobre el espacio de espinores de Killing, a la cual llamó la hipótesis de rigidez interna. Esta hipótesis básicamente rompe la supersimetría original de $N = 4$ a $N = 2$ y además rompe explícitamente la simetría $SU(4)$. Aún así las soluciones son altamente no triviales y gozan de gran interés. De forma independiente, estas mismas soluciones fueron encontradas por Bergshoeff, Kallosh y Ortín [19], quienes demostraron que estas soluciones generalizan las soluciones de Israel-Wilson-Perjés [20, 21] de la teoría de Einstein-Maxwell e incluyen a todos los agujeros negros supersimétricos de la teoría hasta entonces conocidos y que han sido obtenidos en múltiples trabajos [22–35].

El tema de las soluciones supersimétricas de las teorías de supergravedad recibió un gran empuje a partir de la publicación de [36] donde se presenta una nueva solución maximalmente supersimétrica a la Supergravedad IIB. Esta solución es análoga a una de las soluciones maximalmente supersimétricas de la Supergravedad $d = 11$ descrita por Kowalski-Glikman [37, 38]. Prontamente soluciones similares fueron encontradas para supergravedades en cinco y seis dimensiones [39] y luego se demostró [6] que todas las soluciones máximalmente supersimétricas en once y diez dimensiones son: (i) Minkowski, $\mathrm{AdS}_7 \times S^4$, $\mathrm{AdS}_4 \times S^7$ y Kowalski-Glikman para Supergravedad $d = 11$, las últimas identificadas como Hpp-waves en [36], y (ii) Minkowski, $\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ y Hpp-waves para las supergravedades en diez dimensiones. Hay una teoría, la Supergravedad IIA masiva, que no acepta ninguna solución maximalmente supersimétrica. Cabe destacar que la condición de supersimetría maximal es muy restrictiva y que tales configuraciones constituyen el caso más simple de estudiar, el hecho fundamental en este caso es que la curvatura de la superconexión es trivial.

Poco tiempo después de estos trabajos en altas dimensiones aparecieron clasificaciones completas para supergravedades en dimensiones menores, siguiendo el espíritu de los trabajos de Tod, explotar las condiciones de consistencia de las KSEs. En [40] se presentó la clasificación de todas las soluciones supersimétricas de la Supergravedad minimal $N = 1$, $d = 5$. Poco tiempo después, dos de los autores de ese trabajo extendieron en [41] el análisis para la versión gaugeada de la misma teoría. En la misma oleada, Caldarelli y Klemm [42] presentaron la clasificación de todas las soluciones supersimétricas de la Supergravedad $N = 2$, $d = 4$ gaugeada, complementando así el trabajo de Tod [18]. Similarmente se encontraron en [43], ver además [44], todas las soluciones supersimétricas para la Supergravedad minimal en seis dimensiones

1.3 Metodología

Como hemos mencionado anteriormente, en este trabajo primero queremos clasificar completamente a todas las configuraciones supersimétricas para luego ver qué podemos decir acerca de las soluciones supersimétricas. Clasificar las configuraciones supersimétricas significa escribir de forma general a las configuraciones en términos de un conjunto mínimo de variables de tal forma que las ecuaciones de espinores de Killing se satisfagan. Para concretar, llamaremos a estas variables “variables supersimétricas”. Luego se plantean las ecuaciones de movimiento para las variables supersimétricas y se buscan posibles soluciones. Siguiendo este orden las soluciones serán claramente supersimétricas.

Como veremos en el capítulo II, la condición de ser supersimétrica para una configuración en principo no está relacionada con el hecho de ser una solución de la teoría; sin embargo, uno puede ver que la supersimetría ofrece una ruta clara para encontrar soluciones. En la práctica, lo que ocurre es que la supersimetría se impone como ecuaciones diferenciales de primer orden y ecuaciones algebraicas que son relativamente más fáciles de manejar y que además sus condiciones de integrabilidad contienen información sobre las ecuaciones de movimiento. Es por esta razón que es conveniente resolver primero las KSEs y luego las ecuaciones de movimiento.

El punto de partida para resolver las KSEs es asumir la existencia de los espinores de Killing, es decir se asume que existe al menos una solución no trivial de las KSEs. Uno puede entonces obtener la forma genérica de los campos bosónicos, en particular de la métrica y de los vectores, en términos de bilineales de los espinores según lo dictan las KSEs. Una vez obtenida la expresión de los campos en términos de los bilineales, la idea entonces es interpretar a éstos como variables independientes de los espinores. A continuación se reintroduce la información que se tiene sobre los campos supersimétricos en las KSEs y se resuelven los espinores de Killing. En la resolución de las KSEs ha de imponerse las condiciones de integrabiliad de éstas la cuales restringen a las variables supersimétricas y son precisamente las condiciones que garantizan la existencia de los espinores de Killing.

Uno puede avanzar aún más dando un ansatz que resuelve completamente a la condición de integrabilidad de las KSEs. De esta manera se consigue un conjunto de configuraciones supersimétricas escritas en términos de variables supersimétricas realmente independientes. Es sobre este conjunto que se van a buscar las soluciones supersimétricas.

Una vez que las configuraciones supersimétricas están dadas en términos de las variables supersimétricas independientes pasamos a buscar soluciones. Una ventaja es que se cuenta con información acerca de las ecuaciones de movimiento para una configuración supersimétrica proveniente de las identidades de espinores de Killing (KSIs, por sus siglas en inglés). Estas nos dicen que para cualquier configuración supersimétrica algunas de las ecuaciones de movimiento se resuelven si se resuelven las demás, es decir, que no todas las ecuaciones de movimiento han de imponerse por separado. Este hecho nos ahorra mucho trabajo, en particular nos evita el tener que enfrentarnos directamente a las ecuaciones de Einstein. En este trabajo reproducimos el algoritmo para derivar las KSIs, las cuales se encontraron en [45]. Las KSIs también se pueden derivar de las condiciones de integrabilidad de las KSEs, pero ya no de manera tan simple.

El análisis que presentamos permite caracterizar a todas las configuraciones supersimétricas de la Supergravedad $N = 4$, $d = 4$. Nuestro estudio nos permite además dar nuevas soluciones supersimétricas y también encaminar el estudio de otras teorías relacionadas, como la versión gaugeada de la misma y la teoría con acoplo a materia. El acoplo a supermultipletes de materia es de particular interés ya que, como mencionamos anteriormente, establece la conexión con la Teoría de Cuerdas Heterótica. Actualmente se está trabajando en esa dirección.

II

Marco teórico

2.1 Unas palabras sobre supersimetría y supergravedad

La Relatividad General plantea a la gravitación como la interacción del espacio-tiempo con la energía. En líneas generales se puede decir que en Relatividad General la "forma" del espacio tiempo es dinámica y cambia de acuerdo a la distribución de energía. El campo dinámico de la Relatividad General es por tanto una métrica

La forma conceptualmente correcta de formular a la Relatividad General es a partir de postulados que engloban la independencia de la física respecto a todos los observadores. Esto técnicamente se formula como la invariancia bajo el grupo de difeomorfismos del espacio-tiempo. En contraposición, la Teoría Cuántica de Campos se formula sobre un espacio-tiempo fijo, el espacio de Minkowski. La cinemática de esta teoría es la Relatividad Especial.

Heurísticamente se le puede dar un enfoque a la gravitación de tal forma que las simetrías subyacentes sean la simetrías del espacio de Minkowski, concretamente presentar a la Gravitación como la teoría *gauge* del grupo de Poincaré [46, 47], un revisión reciente de este tema se puede encontrar en [48]. En este enfoque la Gravitación "se parece" a las teorías gauge que se utilizan en la Teoría Cuántica de Campos.

Conforme avanzó nuestro conocimiento sobre el mundo de las partículas en el siglo XX aprendimos que éstas se dividen en dos grandes grupos claramente diferenciados de acuerdo a su comportamiento colectivo: bosones y fermiones. Las últimas se rigen por el Principio de Exclusión de Pauli mientras que las primeras no. A nivel teórico, en Teoría Cuántica de Campos, los bosones se modelan con campos con conmutan entre sí y los fermiones con campos que anticonmutan. Al mismo tiempo, hay una estrecha conexión entre el carácter estadístico de las partículas y un rasgo cinemático de ellas, el espín. El espín caracteriza la representación en la cual transforma el campo bajo el grupo de Lorentz. Los bosones tienen espín entero mientras que los fermiones tienen espín semientero.

Si bien la diferenciación entre bosones y fermiones es un hecho, en las últimas décadas del pasado siglo y en lo que va de éste ha venido madurando una idea, si se quiere, de filosofía unificadora: que exista una simetría bajo la cual bosones y fermiones puedan ser entendidos como dos versiones de un mismo elemento. A esta idea de unificación se le llama supersimetría. Los trabajos pioneros son [49, 50]. Sobre la supersimetría se ha trabajado bastante a nivel teórico. Sin embargo, aún no se cuenta con evidencia experimental de que la supersimetría exista. Tal vez a algún un nivel de energía por encima de los que se consiguen actualmente en los aceleradores de partículas se pueda hallar evidencia de supersimetría.

La Supersimetría está ligada a las simetrías del propio espacio-tiempo. Resulta entonces concebible que la simetría fundamental del espacio-tiempo plano no sea el grupo de Poincaré sino el de *SuperPoincaré*, el cual contiene los componentes de la simetría de Poincaré pero además incorpora un sector fermiónico formado precisamente, a nivel del álgebra, por los generadores de la Supersimetría. Uno puede entonces repetir el programa de presentar la Gravitación como teoría gauge, pero esta vez del grupo de SuperPoincaré. Con este programa lo que se consigue es la teoría de Supergravedad, como mostraremos más adelante.

Casi paralelamente al desarrollo de la Supersimetría y muy ligada a ésta nace la Teoría de Cuerdas con la promesa, aún vigente, de convertirse en la "teoría del todo". La progresiva diversificación de los elementos del Modelo Estándar de Partículas hace desear que, como ha ocurrido antes en la historia de la Física, exista una estructura más elemental que los describa a todos. Con esta premisa se emprendió la teoría cuántica que describe objetos unidimensionales incorporando de entrada a la supersimetría y a la cual se le llamó la Teoría de (Super)Cuerdas. La Teoría de Cuerdas viene con un valor agregado: contiene a la Supergravedad como su límite de bajas energías. La descripción cuántica de la gravitación ha sido un viejo problema en la Física fundamental y que la Teoría de Cuerdas ofrezca un mecanismo para resolverlo constituye indudablemente un punto fuerte a favor de ella. En cualquier caso, la Supergravedad es una teoría clásica consistente en sí misma, de hecho es una extensión de la Relatividad General, y como tal es estudiada en este trabajo.

2.2 Gaugear un álgebra

A continuación presentaremos una teoría de supergravedad en el caso más simple de interés: un espacio-tiempo de cuatro dimensiones con el mínimo contenido del sector fermiónico, la Supergravedad $N = 1$, $d = 4$. Vamos a hacer una construcción de la supergravedad como teoría gauge. Debemos decir que ésta es una visión heurística que conceptualmente no es totalmente consistente.

La supergravedad la presentaremos como la teoría gauge del grupo de Super-Poincaré. En este enfoque la parte del grupo que realmente interesa es el álgebra. Un álgebra de Lie es el espacio vectorial que corresponde al espacio tangente a un grupo de Lie en el elemento identidad. Buena parte de la información de un grupo de Lie está contenida en su álgebra. Para describir a un álgebra se introduce una base a cuyos elementos se les denomina generadores. La éstructura de la álgebra queda codificada entonces en las relaciones de conmutación que verifican los generadores. El conmutador es una aplicación bilineal antisimétrica el cual le asigna un elemento de la álgebra a cada par de la misma y que verifica la identidad de Jacobi. En términos físicos los generadores de una álgebra están asociados a campos bosónicos en una forma que mostraremos pronto, por lo tanto para introducir fermiones se debe extender el concepto de álgebra al de superálgebra. En un superálgebra de Lie hay generadores que verifican relaciones en términos de conmutadores y otros en términos de anticonmutadores. La identidad de Jacobi se generaliza para incluir anticonmutadores. Consecuentemente, los generadores que anticonmutan se asocian a fermiones.

Un ejemplo de álgebra de Lie sencillo y que nos es útil es precisamente el álgebra de Poincaré cuyos generadores son las rotaciones de Lorentz M_{ab} y las traslaciones P_a. Las relaciones de conmutación son

$$[M_{ab}, M_{cd}] = 2\eta_{a[c}M_{d]b} - 2\eta_{b[c}M_{d]a} \tag{2.1}$$

$$[P_a, M_{bc}] = 2\eta_{a[b}P_{c]} \tag{2.2}$$

$$[P_a, P_b] = 0 \tag{2.3}$$

La primera de estas relaciones es un álgebra en sí misma, en este caso de rotación $so(1,3)$ (Lorentz). La segunda nos dice que P se transforma como un vector bajo transformaciones de Lorentz y la última expresa el hecho de que las traslaciones son independientes entre sí.

Si bien un álgebra como la anterior pertenece a un grupo que a su vez representa las simetrías de una variedad base, en este caso el grupo de Poincaré y el espacio-tiempo plano, uno puede trasladar la álgebra a una variedad base más general por medio del *gaugeo*. A cada elemento de la álgebra se le asocia un campo sobre la variedad base, es decir se introduce un campo que toma valores en el álgebra. Por ejemplo el campo vectorial

$$A_\mu = \frac{1}{2}\omega_\mu{}^{ab} M_{ab} + e_\mu{}^a P_a \tag{2.4}$$

realiza el gaugeo del álgebra de Poincaré sobre una variedad pseudoriemanniana (de signatura lorentziana). De este modo uno construye una colección de álgebras, una por cada punto sobre la variedad. Por supuesto, los tipos de álgebras que se puedan gaugear dependerán de la variedad base. Bajo una transformación generada por los elementos del álgebra la conexión se transforma como

$$\delta_\Lambda A_\mu = \partial_\mu \Lambda + [\Lambda, A_\mu] \tag{2.5}$$

donde $\Lambda(x)$ es el parámetro de la transformación, que también toma valores en el álgebra. Sobre este mecanismo descansa la estructura matemática de las teorías gauge de interacción de partículas.

La extensión supersimétrica más simple que uno puede hacer del álgebra de Poincaré es añadir un generador de fermiónico Q, el cual es el generador de la supersimetría. La superálgebra de SuperPoincaré se compone entonces de los generadores $\{M_{ab}, P_a, Q\}$. Como convenio vamos a usar que Q es un espinor de Majorana de cuatro componentes y sus componentes las denotamos como Q_A, $A = 1, \ldots, 4$. En este punto de la discusión es importante aclarar si los espinores son variables que conmutan o anticonmutan. En esta sección vamos a usar espinores que anticonmutan ya que esta es la forma correcta de representar a fermiones. Sin embargo, en los captítulo siguientes usaremos espinores que conmutan aprovechando el hecho de que éste carácter no afecta la construcción de las configuraciones supersimétricas. La razón para ello que las ecuaciones que definen a las configuraciones supersimétricas son lineales en los espinores.

Las relaciones de conmutación y anticonmutación del álgebra son, aparte de (2.1)-(2.3),

$$[Q_A, M_{ab}] = [\Sigma_{ab}]_{AB} Q_B \tag{2.6}$$

$$[Q_A, P_a] = 0 \tag{2.7}$$

$$\{Q_A, Q_B\} = \left[\gamma^a \gamma^0\right]_{AB} P_a \tag{2.8}$$

donde los corchetes representan el conmutador y las llaves el anticonmutador. La primera de ellas indica que Q es un espinor, en efecto

$$\Sigma_{ab} \equiv \frac{1}{2}\gamma_{ab} \tag{2.9}$$

es la representación espinorial de las rotaciones $so(1,3)$. El aspecto cinemático fundamental de la supersimetría está expresado en la relación (2.8): las supersimetrías son las raíces cuadradas de las traslaciones.

Se puede extender la superálgebra anterior añadiendo más generadores de supersimetría, en ese caso se dice que la supersimetría es *extendida.*

La superálgebra de arriba se gaugea por medio de la conexión

$$A_\mu = \frac{1}{2}{\omega_\mu}^{ab} M_{ab} + {e_\mu}^a P_a + \bar{\psi}_\mu Q \tag{2.10}$$

y una transformación infinitesimal generada por el álgebra es

$$\Lambda = \frac{1}{2}\lambda^{ab} M_{ab} + \varepsilon^a P_a + \bar{\epsilon} Q \tag{2.11}$$

donde λ, ε y $\bar{\epsilon}$ son parámetros infinitesimales. ψ_μ y ϵ son espinores de espín 3/2 y 1/2 respectivamente, ambos de Majorana. En la denominación tradicional ${\omega_\mu}^{ab}$ es la conexión de espín o de Lorentz, ${e_\mu}^a$ los vielbein (gravitón) y ψ_μ el gravitino. Aunque en la presentación que estamos haciendo de la gravitación como teoría gauge la conexión de espín aparece como un campo independiente, estrictamente no lo es. En la formulación rigurosa de la gravitación la conexión de espín se escribe en términos de los vielbeins y en el caso de la supergravedad en términos de los vielbeins y el gravitino. Se dice entonces que el gravitón ${e_\mu}^a$ y el gravitino ψ_μ forman el *supermultiplete* de esta supergravedad. Como puede verse de (2.11), $\lambda(x)$ es el parámetro de una transformación de Lorentz infinitesimal, $\varepsilon(x)$ el de una translación y $\epsilon(x)$ el parámetro de la supersimetría. Bajo una eventual cuantización, los campos ${e_\mu}^a$ y ${\omega_\mu}^{ab}$ asociados a generadores bosónicos son también bosones mientras que ψ_μ es un fermión; la conexión es por tanto un supercampo par. Como ya hemos dicho, estamos usando espinores de Majorana de cuatro componentes. Sin embargo, cuando pasemos a analizar la Supergravedad $N=4$, $d=4$ vamos a utilizar espinores de Weyl de cuatro componentes.

De la transformación gauge general (2.5) se obtiene en particular la transformación de supersimetría del supermultiplete[1]

$$\delta_\epsilon {e_\mu}^a = -\mathrm{i}\bar{\epsilon}\gamma^a \psi_\mu \,, \tag{2.12}$$

$$\delta_\epsilon {\omega_\mu}^{ab} = 0 \,, \tag{2.13}$$

$$\delta_\epsilon \psi_\mu = \left(\partial_\mu - \frac{1}{4}{\omega_\mu}^{ab}\gamma_{ab}\right)\epsilon \,. \tag{2.14}$$

La construcción $\partial_\mu - \frac{1}{4}{\omega_\mu}^{ab}\gamma_{ab}$ es la derivada covariante de Lorentz, que haya aparecido es un reflejo de que la supersimetría es parte de la simetría de SuperPoincaré

[1]Si el corchete $[\Lambda, A_\mu]$ ha de calcularse sobre dos fermiones entonces se entiende como el anticonmutador.

local. Nótese que en estas transformaciones está recogido el espíritu de la Supersimetría: bosones pasan a fermiones y viceversa. Véase además que el conmutador de dos transformaciones de supersimetría es una traslación

$$[\delta_\epsilon, \delta_{\epsilon'}]e_\mu{}^a = \delta_\varepsilon e_\mu{}^a \ , \tag{2.15}$$

donde el parámetro de la traslación está dado por los parámetros de supersimetría

$$\varepsilon^a = \mathrm{i}\bar{\epsilon}'\gamma^a\epsilon \tag{2.16}$$

El hecho de que dos transformaciones de supersimetría generen una traslación está codificado en (2.8).

Hasta ahora hemos hablado de las simetrías sobre las que se basa la Supergravedad, ahora debemos preguntarnos por la *dinámica* que gobierna a estos campos. Como es natural, la dinámica (clásica) del supermultiplete de la supergravedad se resume en una acción. La acción de la Supergravedad $N = 1$, $d = 4$ [51, 52] es

$$S = \int d^4x \left(\sqrt{-g}R + 2\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\bar{\psi}_\mu\gamma_5\gamma_\nu\nabla_\alpha\psi_\beta \right) \ . \tag{2.17}$$

La acción anterior está escrita en el formalismo de 1$^{\text{er}}$ orden, en el cual se considera a la conexión de espín como campo independiente y la acción sólo contine derivadas de primer orden. Esta acción es invariante bajo la transformación de supersimetría local (2.12)-(2.14) y bajo el resto de simetrías locales de el álgebra de Poincaré, ya que esta teoría es una generalización de la Relatividad General.

2.3 Configuraciones supersimétricas

Por definición, una configuración supersimétrica es aquella que es invariante bajo una transformación de supersimetría con parámetro no nulo. Esquemáticamente esto es

$$\delta_\epsilon b = F\epsilon = 0 \tag{2.18}$$

$$\delta_\epsilon f = \partial\epsilon + B\epsilon = 0 \tag{2.19}$$

donde denotamos genéricamente a los campos bosónicos y fermiónicos independientes con las letras b y f respectivamente y las letras mayúsculas B y F denotan expresiones pares e impares en potencias de fermiones respectivamente. Además, como es el caso de los dilatinos en la Supergravedad $N = 4$, $d = 4$, puede haber fermiones cuya transformación de supersimetría no involucre a derivadas del parámetro,

$$\delta_\epsilon f = B'\epsilon = 0 \ . \tag{2.20}$$

En particular estudiaremos configuraciones con fermiones iguales a cero, de modo que la primera ecuación queda automáticamente resuelta y tanto B como B' sólo involucran a bosones. La razón de porqúe no consideramos fermiones es que estamos interesados en configuraciones clásicas que representan estados macroscópicos. Los fermiones son estados puramente cuánticos, es decir de escala microscópica.

Ahora podemos dejar clara la distinción entre *configuración* supersimétrica y *solución* supersimétrica. La primera, como hemos dicho, es una configuración bosónica que acepta al menos un espinor que verifica (2.19) y (2.20). La última es una configuración supersimétrica que además resuelve las ecuaciones de movimiento de la teoría.

Una configuración supersimétrica que no sea solución siempre puede ser interpretada como solución de las ecuaciones de campo con fuentes externas. En este caso la supersimetría impone restricciones sobre las fuentes.

2.4 Fracción de supersimetrías preservadas

Podemos exponer brevemente un aspecto importante frecuentemente mencionado en toda la literatura relativa a la supersimetría: la fracción de supersimetrías preservadas por una solución (*unbroken supersymmetries*). Una extensa discusión sobre este punto se puede hallar en [53].

Toda teoría posee un cierto número de simetrías, sean estas de cualquier naturaleza. Sin embargo, una solución dada a las ecuaciones de movimiento en general rompe algunas simetrías y preserva otras, en particular puede haber soluciones que las rompan todas. Con la supersimetría ocurre lo mismo. No toda configuración acepta al menos un espinor que resuelva el sistema (2.19)-(2.20). En el caso de que no lo acepte la configuración no sería supersimétrica.

Las KSEs son ecuaciones lineales en los espinores de Killing. Por lo tanto, para un configuración dada, los espinores de Killing forman un espacio vectorial. Una forma simple de calcular la fracción de supersimetrías preservadas por una configuración consiste en calcular el cociente de la dimensión del espacio de soluciones de las KSEs entre dos veces el número de supercargas de la teoría. Las supercargas las contamos doblemente porque cada una tiene dos grados de libertad reales. Por ejemplo, la Supergravedad $N = 1$, $d = 4$ posee dos supercargas las cuales forman un espinor de Majorana, por lo tanto la fracción de supersimetrías preservadas por las configuraciones supersimétricas vendrán dadas por $n/4$, $n = 1, \ldots, 4$. Una configuración se dice que es *maximalmente* supersimétrica si la fracción de supersimetrías es justamente igual a uno.

2.5 Configuraciones supersimétricas de las supergravedades

Para nosotros es importante especializar las ecuaciones que definen a una configuración supersimétrica para el caso de las supergravedades. El gravitino es el campo fermiónico asociado a los generadores de supersimetría y por ello su variación siempre incluye a la derivada del parámetro de supersimetría, además la regla de conmutación (2.6) incopora a la conexión de espín. Estos dos hechos ya los hemos visto en (2.14). Además habrá otras conexiones dependiendo de los ingredientes de la álgebra. La variación de los otros fermiones será algebraica puesto que los demás fermiones no están asociados a los generadores de supersimetría. Entonces tenemos que una configuración supersimétrica de supergravedad es aquella que acepta al menos un espinor ϵ que verifica

$$\nabla_\mu \epsilon + B_\mu \epsilon = 0 \tag{2.21}$$

$$B' \epsilon = 0 \tag{2.22}$$

donde ∇_μ es la derivada covariante de Lorentz y B_μ contiene a las conexiones del resto de simetrías del álgebra. En ciertos contextos se suele introducir la derivada supercovariante $\mathcal{D}$ tal que la ec. (2.21) se escribe

$$\mathcal{D}_\mu \epsilon = 0 \ . \tag{2.23}$$

Los términos en (2.21) y (2.22) involucran, dependiendo de la teoría en cuestión, productos entre campos bosónicos y matrices gamma e incluso a diferentes espinores si la supersimetría es extendida. En la nomenclatura, a los espinores que verfican (2.21) y (2.22) se les denomina espinores de Killing y a estas ecuaciones "Ecuaciones de Espinores de Killing" (KSEs, por sus siglas en inglés), ya que son el análogo espinorial de las ecuaciones de vectores de Killing de la Geometría Riemanniana.

2.6 Holonomía especial

Las KSEs son fuertemente restrictivas sobre las posibles configuraciones bosónicas que las verifican. Veamos por ejemplo la KSE más simple en el cual el supermultiplete sólo incluye al gravitón y el gravitino, es decir los términos B_μ y B' de (2.21) y (2.22) son cero,

$$\nabla_\mu \epsilon = 0 \ . \tag{2.24}$$

Este es el caso, como hemos visto, de la Supergravedad $N = 1$, $d = 4$. La ecuación anterior nos dice que hay un espinor covariantemente constante y esta condición implica que la métrica tiene holonomía especial. La holonomía de una métrica es el grupo de las transformaciones lineales generadas por el transporte paralelo a lo largo de lazos en cada punto. Para una variedad Riemanniana orientable el grupo de holonomía más grande posible es $SO(n)$, donde n es la dimensión de la variedad.

Berger ha dado una clasificación de los posibles grupos de holonomías para variedades Riemannianas simplemente conexas que son irreducibles, esto es que no son el producto de otros espacios, y que no son espacios Riemannianos simétricos, es decir que el tensor de curvatura de Riemann no sea covariantemente constante. la clasificación de acuerdo a la dimensión es

1. Dimensión cualquiera n: $SO(n)$.
2. Dimensiones pares $2n$:
   (a) $U(n)$: variedades de Kähler.
   (b) $SU(n)$: variedades de Calabi-Yau.
3. Dimensiones $4n$:
   (a) $Sp(n) \cdot Sp(1)$: variedades cuaterniónicas Kähler.
   (b) $Sp(n) \cong U(n, \mathbb{H})$: variedades Hiper-Kähler.
4. Siete dimensiones: Holonomía G_2
5. Ocho dimensiones: Holonomía $Spin(7)$.

De acuerdo con esta clasificación las métricas Riemannianas que admiten un espinor covariantemente constante caen en los grupos 2.b, 3.b, 4 y 5. Las variedades pseudo-Riemannianas ofrecen aún más posibilidades y la holonomía en ese caso es menos conocida, algunos resultados interesantes se muestran en [54, 55].

Motivados por los fuertes resultados sobre la holonomía especial para supergravedades sin campos extra, Gauntlett y colaboradores (véase por ejemplo [56] y sus referencias) han promovido el análisis del caso con campos adicionales usando “estructuras-G”. Las holonomías especiales se caracterizan por tensores como las formas de Kähler, estructuras complejas y formas holomorfas, entre otros, los cuales verifican ciertas ecuaciones diferenciales. La idea de las estructuras-G es relajar las ecuaciones diferenciales que cumplen las estructuras fundamentales incluyendo los campos adicionales.

2.7 Indentidades de Espinores de Killing

Anteriormente hemos mencionado que existen identidades que relacionan las ecuaciones de movimiento de una teoría entre sí cuando éstas se evalúan sobre una configuración supersimétrica. Estas identidades fueron presentadas en [45] y se denominaron identidades de espinores de Killing (KSIs, por sus siglas en inglés). En ese trabajo las KSIs se aplicaron para determinar cómo la supersimetría restringe a las fuentes externas de los campos. En particular las fuentes externas podrían corresponderse con correcciones cuánticas a las soluciones clásicas.

En [57] se mostró cómo las KSIs se corresponden precisamente con los vínculos ente las ecuaciones de movimiento que habían sido utilizados en diversos trabajos anteriores sobre la clasificación de las soluciones supersimétricas. Estos vínculos fueron hallados en aquellos trabajos a partir de las condiciones de integrabilidad de las KSEs. Estas relaciones son súmamente útiles para simplificar la búsqueda de soluciones supersimétricas. En [40], por ejemplo, se utilizaron para concluir que las ecuaciones de Einstein de la Supergravedad minima $d = 5$ se resuelven para una configuración supersimétrica, en el caso tipo tiempo, si ésta resuelve a las ecuaciones de Maxwell.

La desventaja de usar las condiciones de integrabilidad es que ésta no es una ruta sistemática para determinar los vínculos entre las ecuaciones de movimiento. Por su parte, las KSIs se basan en una simple condición de consistencia de un acción supersimétrica y por lo tanto resultan conceptualmente más claras. Más adelante veremos la relación entre las KSIs y las condiciones de integrabilidad de las KSEs para el caso concreto de la Supergravedad $N = 4$, $d = 4$.

A continuación reproducimos la construcción de las KSIs presentada en [45]. Sea S una acción supersimétrica dada en términos de una densidad de lagrangiano como

$$S[b, f] = \int d^D x \mathcal{L} \tag{2.25}$$

No consideramos efectos de borde en la acción. En la construcción que vamos a hacer de las KSIs, S puede ser cualquier acción supersimétrica, no necesariamente supergravedad. Por hipótesis S es invariante bajo una variación supersimétrica infinitesimal arbitraria,

$$\delta_\epsilon S = 0 \; , \tag{2.26}$$

donde la variación supersimétrica es generada por el espinor infinitesimal ϵ, llamado el parámetro de supersimetría. Este espinor puede o no ser constante, dependiendo de si la supersimetría es global o local. El tipo específico de espinor, bien sea Dirac, Weyl o Majorana dependerá de la teoría en cuestión.

Cualquier variación infinitesimal de la acción puede ser escrita en términos de las ecuaciones de movimiento, las cuales se definen genéricamente como

$$\mathcal{E}(b) \equiv \frac{\delta S}{\delta b} \quad , \quad \mathcal{E}(f) \equiv \frac{\delta S}{\delta f} \tag{2.27}$$

Aquí es apropiado aclarar que en todo este trabajo le damos la denominación de "ecuación de movimiento" a expresiones de los campos definidas como derivadas funcionales de la acción. Puede haber lugar a confusión por el uso de la palabra "ecuación", ha de tenerse siempre en cuenta que éstas son en realidad expresiones de los campos. Claro está, una solución es aquella que hace a las ecuaciones de movimiento iguales a cero. Evaluando la ecuación (2.26) tenemos que

$$0 = \int d^D x \left(\sum_b \mathcal{E}(b) \delta_\epsilon b + \sum_f \mathcal{E}(f) \delta_\epsilon f \right) . \tag{2.28}$$

El siguiente paso consiste en derivar la expresión anterior con respecto a los fermiones. Resulta útil por lo tanto inspeccionar dónde están éstos. La acción es una funcional par por lo tanto los fermiones sólo pueden aparecer en ella formando potencias pares. Está claro entonces que $\mathcal{E}(b)$ es par en fermiones mientras que $\mathcal{E}(f)$ es impar. Por otra parte, por definición $\delta_\epsilon b$ es impar en potencias de fermiones mientras que $\delta_\epsilon f$ es par. Luego de tomar la derivada funcional de (2.28) con respecto a un fermión cualquiera, evaluamos la expresion resultante con todos los fermiones iguales a cero, tal que sólo sobreviven términos bosónicos. Obtenemos

$$\left[\sum_b \mathcal{E}(b) \frac{\partial \delta_\epsilon b}{\partial f_2} + \sum_{f_1} \frac{\partial \mathcal{E}(f_1)}{\partial f_2} \delta_\epsilon f_1 \right]_{\text{Fer.}=0} = 0 . \tag{2.29}$$

Si bien las identidades anteriores se cumplen para cualquier configuración de campos bajo cualquier parámetro de supersimetría, nuestra intención es obtener identidades para configuraciones supersimétricas, las cuales por definición verifican $\delta_\epsilon f = 0$. Si aplicamos la identidad de arriba a una configuración supersimétrica el último término desaparece y entonces llegamos a las KSIs

$$\sum_b \left[\mathcal{E}(b) \frac{\partial \delta_\epsilon b}{\partial f} \right]_{\text{Fer}=0} = 0 , \tag{2.30}$$

donde ahora b representa a una configuración bosónica supersimétrica y ϵ es un espinor de Killing. Insistimos en que en general trabajamos con varios fermiones en una teoría y que tenemos una identidad como la de arriba para cada fermión, etiquetado como f.

Como puede verse, la utilidad de las KSIs radica en que contienen información acerca de las ecuaciones de movimiento para una configuración supersimétrica, lo cual es sumamente útil a la hora de buscar soluciones supersimétricas. En general cada KSI involucra a varias de las ecuaciones de movimiento, todas aquellas para las cuales la variación supersimétrica del bosón b dependa en el fermión f. Esta es la razón de por qué las soluciones supersimétricas de una teoría típicamente vienen dadas en términos de un reducido número de funciones los cuales resuelven a un núcleo de ecuaciones simples; por ejemplo, todas las ecuaciones para soluciones asociadas a p-branas son proporcionales al laplaciano de una única cantidad.

III

La Supergravedad $N = 4$, $d = 4$

3.1 Los campos y la acción

El supermultiplete de Supergravedad $N = 4$, $d = 4$ incluye en su sector bosónico a los vierbeins $e_\mu{}^a$, seis campos vectoriales con simetría gauge $U(1)$ denotados por A_{IJ}, $I = 1, \ldots, 4$, y el axidilatón τ cuyas partes real e imaginaria se corresponden con el axión y el dilatón respectivamente. El sector fermiónico lo forman los gravitinos $\psi_{\mu I}$ y los dilatinos χ_I.

El axidilatón τ parametriza al espacio coset $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$. El grupo de simetría $SL(2, \mathbb{R})$ de este espacio coset aparece como simetría de las ecuaciones de movimiento de la teoría, como veremos más adelante. τ se escribe en términos del axión y el dilatón como

$$\tau = a + \mathrm{i}e^{-\phi} \,, \tag{3.1}$$

de modo que

$$\Im\mathrm{m}\tau > 0 \,. \tag{3.2}$$

El valor de vacío del axidilatón viene dado por $\tau = \mathrm{i}$.

La matriz de campos vectoriales A_{IJ} es antisimétrica, $A_{(IJ)} = 0$ y satisface la siguiente condición de "realidad":

$$A^{IJ} = \frac{1}{2}\epsilon^{IJKL} A_{KL} \,. \tag{3.3}$$

donde $A^{IJ} \equiv (A_{IJ})^*$[1]. Decimos que éste es un vínculo de realidad porque nos dice que los complejos conjugados no son campos independientes. De tal forma que como grados de libertad físicos sólo se tienen seis campos vectoriales reales.

[1] En el apéndice A.2 comentamos acerca de subir y bajar índices de $SU(4)$.

Los gravitinos son cuatro espinores quirales de espín $\frac{3}{2}$ con quiralidad negativa

$$\gamma_5 \psi_{\mu\, I} = -\psi_{\mu\, I} \tag{3.4}$$

y los dilatinos son cuatro espinores quirales de espín $\frac{1}{2}$ con quiralidad positiva

$$\gamma_5 \chi_I = +\chi_I \,. \tag{3.5}$$

La parte bosónica de la acción de la Supergravedad $N = 4$, $d = 4$, presentada por primera vez en [58], es

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[R + \frac{1}{2} \frac{\partial\tau \cdot \partial\bar{\tau}}{(\Im\mathrm{m}\tau)^2} - \frac{1}{16} \Im\mathrm{m}\tau F^{IJ} \cdot F_{IJ} - \frac{1}{16} \Re\mathrm{e}\tau\, {}^\star F^{IJ} \cdot F_{IJ} \right] \tag{3.6}$$

donde $F_{IJ} = dA_{IJ}$. A F_{IJ} le denominaremos “el campo de Maxwell”.

3.2 Las ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones de movimiento de la teoría las definimos como

$$\mathcal{E}_a{}^\mu = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta e_\mu{}^a} \quad , \quad \mathcal{E} = -\frac{2\Im\mathrm{m}\tau}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta\tau} \quad , \quad \mathcal{E}^{IJ\mu} = \frac{8}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta A_{IJ\mu}} \,. \tag{3.7}$$

Los factores que hemos introducido en la definición de las ecuaciones de campo permiten eliminar factores globales en la forma explícita de éstas. Evaluando estas ecuaciones de campo se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\mu\nu} &= G_{\mu\nu} - T_{\mu\nu} \,, && (3.8)\\
T_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2(\Im\mathrm{m}\tau)^2} \left(\partial_{(\mu}\tau\partial_{\nu)}\bar{\tau} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial\tau \cdot \partial\bar{\tau} \right) \\
&\qquad + \frac{1}{8} \Im\mathrm{m}\tau \left(F^{IJ\alpha}_{(\mu} F_{IJ\nu)\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^{IJ} \cdot F_{IJ} \right) && (3.9)\\
\mathcal{E} &= D \cdot \frac{\partial\bar{\tau}}{\Im\mathrm{m}\tau} - \frac{\mathrm{i}}{8} \Im\mathrm{m}\tau F^{+IJ} \cdot F^+_{IJ} && (3.10)\\
\mathcal{E}^{\nu\, IJ} &= \nabla_\mu \left(\Im\mathrm{m}\tau F^{\mu\nu\, IJ} + \Re\mathrm{e}\tau\, {}^\star F^{\mu\nu\, IJ} \right) \,. && (3.11)
\end{aligned}$$

A la ecuación (3.10) la llamaremos ecuación del axidilatón, mientras que a (3.11) la denominaremos ecuaciones de Maxwell. Las ecuaciones de Maxwell se completan con las identidades de Bianchi

$$\mathcal{B}^{\nu\, IJ} \equiv \nabla_\mu {}^\star F^{\mu\nu\, IJ} \,. \tag{3.12}$$

Estas identidades son automáticamente cero cuando se trabaja con el potencial gauge A_{IJ}, que es el caso siempre que haga un análisis funcional. Sobre el análisis funcional descansa la supersimetría que hemos mostrado, la deducción de las ecuaciones de movimiento así como también las Identidades de Espinores de Killing. Sin embargo, el potencial gauge A_{IJ} no aparece explícitamente en las KSEs de esta teoría (básicamente los miembros derechos de (3.16) y (3.17)). Por esta razón, en nuestro análisis de las KSEs se trabaja con la intensidad de campo F_{IJ} en lugar del potencial, de modo que las identidades de Bianchi anteriores han de imponerse a la hora de buscar soluciones supersimétricas.

El tensor de energía-momento puede ser simplificado con la ayuda de las identidades

$$F^{+IJ\,\alpha}_{(\mu}F^{+}_{IJ\,\nu)\alpha} = \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^{+IJ}\cdot F^{+}_{IJ} \tag{3.13}$$

$$F^{-IJ\,\alpha}_{(\mu}F^{-}_{IJ\,\nu)\alpha} = \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^{-IJ}\cdot F^{-}_{IJ} \tag{3.14}$$

tal que

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2(\Im\mathrm{m}\tau)^2}\left(\partial_{(\mu}\tau\partial_{\nu)}\bar{\tau} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial\tau\cdot\partial\bar{\tau}\right) + \frac{1}{4}\Im\mathrm{m}\tau F^{+IJ\,\alpha}_{\mu}F^{-}_{IJ\,\nu\alpha} \tag{3.15}$$

Nótese que contracciones del tipo $A^{+\alpha}_{\mu}B^{-}_{\nu\alpha}$ son automáticamente simétricas en μ y ν.

3.3 Simetrías

La acción completa de Supergravedad es invariante bajo la supersimetría local dada por

$$\delta_\epsilon\psi_{\mu I} = (\nabla_\mu - iQ_\mu)\,\epsilon_I + \frac{\mathrm{i}}{8\sqrt{2}}\sqrt{\Im\mathrm{m}\tau}\,\not{F}^{+}_{IJ}\gamma_\mu\epsilon^J \tag{3.16}$$

$$\delta_\epsilon\chi_I = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\not{\partial}\tau}{\Im\mathrm{m}\tau}\epsilon_I - \frac{1}{8}\sqrt{\Im\mathrm{m}\tau}\,\not{F}^{-}_{IJ}\epsilon^J \tag{3.17}$$

$$\delta_\epsilon e_\mu{}^a = -\frac{\mathrm{i}}{4}\left(\bar{\epsilon}^I\gamma^a\psi_{I\mu} + \bar{\epsilon}_I\gamma^a\psi^I_\mu\right) \tag{3.18}$$

$$\delta_\epsilon\tau = -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\Im\mathrm{m}\tau\bar{\epsilon}^I\chi_I \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon A_{IJ\mu} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\Im\mathrm{m}\tau}}\Bigg[&\bar{\epsilon}_{[I}\psi_{J]\mu} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\bar{\epsilon}_{[I}\gamma_\mu\chi_{J]} \\ &+\frac{1}{2}\epsilon_{IJKL}\left(\bar{\epsilon}^K\psi^L_\mu + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\bar{\epsilon}^K\gamma_\mu\chi^L\right)\Bigg]\end{aligned} \tag{3.20}$$

donde el parámetro de supersimetría ϵ_I es un espinor de espín $\frac{1}{2}$ con quiralidad negativa

$$\gamma_5\epsilon_I = -\epsilon_I \tag{3.21}$$

y $\bar{\epsilon}^I \equiv \overline{\epsilon_I}$. En el apéndice 2 detallamos diversas propiedades de estos espinores. En las variaciones de los fermiones (3.16) y (3.17) ya hemos puesto los fermiones iguales a cero. El vector Q definido en (3.40) actúa como una conexión gauge para una transformación $U(1)$ local forzada por la simetría $SL(2,\mathbb{R})$ global, como veremos más adelante.

La acción posee la simetría global $SU(4)$ la cual actúa sobre los objetos con índices de $SU(4)$ en la forma obvia

$$X_I' = U_I{}^J X_J \ , \quad U \in SU(4) \ . \tag{3.22}$$

En el apéndice A.2 mencionamos las construcciones covariantes que se pueden hacer en $SU(4)$.

Adicionalmente hay una simetría $SL(2,\mathbb{R})$ global en la teoría, aunque esta simetría sólo se presenta a nivel de las ecuaciones de movimiento, es decir, no es una simetría de la acción. El grupo $SL(2,\mathbb{R})$ actúa sobre τ por medio de transformaciones fraccionales lineales

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \tag{3.23}$$

donde

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}) \ . \tag{3.24}$$

La transformación (3.23) engloba tres tipos de transformaciones:

1. Cambios de escala: $\tau' = a\tau$, generados por
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ . \tag{3.25}$$

2. Traslaciones sobre el eje real: $\tau' = \tau + b$, generadas por
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ . \tag{3.26}$$

3. Inversiones: $\tau' = \tau^{-1}$, generadas por
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{3.27}$$

Como hemos mencionado anteriormente, este grupo de simetría tiene una interpretación en Teoría de Cuerdas como una simetría que relaciona los acoplo fuerte/débil. Primero puntualizamos que los cambios de escala se excluyen de la simetría bajo cuantización, donde el grupo se hace discreto. En segundo lugar notamos que estrictamente las traslaciones son transformaciones sobre el axión a. Si hacemos $a = 0$ tenemos que las inversiones cambián al dilatón e^{ϕ} por $e^{-\phi}$. El valor de vacío del dilatón precisamente define la constante de acoplo de la teoría de cuerdas,

$$g_S = e^{\langle\phi\rangle}, \tag{3.28}$$

de modo que las inversiones contenidas $SL(2,\mathbb{Z})$ cambian la constante de acoplo de la forma $g_S \to g_S^{-1}$. Por lo tanto las inversiones de $SL(2,\mathbb{Z})$ hacen que la teoría pase de un régimen de acoplo débil a otro de acoplo fuerte y viceversa, a este mecanismo se le llama dualidad S. Recordamos que esta dualidad es una conjetura [10–15], de existir la simetría claramente sería no perturbativa.

La acción de $SL(2,\mathbb{R})$ sobre los campos vectoriales conceptualmente es equivalente a las rotaciones electro-magnéticas [59]. Para describir la acción de $SL(2,\mathbb{R})$ sobre los campos vectoriales se introduce el dual-$SL(2,\mathbb{R})$ de F_{IJ}

$$\tilde{F}_{IJ} \equiv -\frac{16}{\sqrt{|g|}}\frac{\delta S}{\delta\, {}^{\star}F^{IJ}}\ . \tag{3.29}$$

Evaluando esta expresión se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{IJ} &= -\Im\mathrm{m}\tau\, {}^{\star}F_{IJ} + \Re\mathrm{e}\tau F_{IJ}\ , & (3.30)\\ &= \tau F^{+}_{IJ} + \bar{\tau} F^{-}_{IJ}\ . & (3.31) \end{aligned}$$

Observese que si se lleva al axidilatón a su valor de vacío entonces el dual-$SL(2,\mathbb{R})$ no es más que el dual de Hodge. Las ecuaciones de Maxwell, incluyendo a las identidades de Bianchi, pueden escribirse de forma compacta usando el dual-$SL(2,\mathbb{R})$

$$\mathcal{E}_{IJ} = {}^{\star}d\tilde{F}_{IJ} \tag{3.32}$$

$$\mathcal{B}_{IJ} = {}^{\star}dF_{IJ}\ . \tag{3.33}$$

El par F_{IJ}, $\tilde{F}_{IJ}$ se transforma como un doblete de $SL(2,\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} \tilde{F}'_{IJ} \\ F'_{IJ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{F}_{IJ} \\ F_{IJ} \end{pmatrix}\ . \tag{3.34}$$

Podemos ver que en particular las inversiones generadas por (3.27) cambian exactamente a F_{IJ} por su dual $\tilde{F}_{IJ}$. Decimos que el grupo $SL(2,\mathbb{R})$ “rota” a un vector en el sentido de (3.34). La rotación anterior implica

$$F'^{+}_{IJ} = (c\tau + d)\, F^{+}_{IJ} \tag{3.35}$$

$$F'^{-}_{IJ} = (c\bar{\tau} + d)\, F^{-}_{IJ}\ . \tag{3.36}$$

Las transformaciones de supersimetría (3.16)-(3.20) son compatibles con la simetría $SL(2,\mathbb{R})$ si ésta transformación se compensa con una transformación $U(1)$ local dada por la fase

$$e^{2\mathrm{i}\varphi} \equiv \frac{c\tau + d}{c\bar{\tau} + d}\,. \tag{3.37}$$

Las cargas frente a esta transformación $U(1)$ se miden respecto al ángulo $\varphi/2$. Los espinores $\psi_{\mu\,I}$, χ_I y ϵ_I tienen cargas $+1$, -3 y $+1$ respectivamente,

$$\psi'_{\mu\,I} = e^{\frac{\mathrm{i}}{2}\varphi}\psi_{\mu\,I} \quad , \quad \chi'_I = e^{-\frac{3\mathrm{i}}{2}\varphi}\chi_I \quad , \quad \epsilon'_I = e^{\frac{\mathrm{i}}{2}\varphi}\epsilon_I\,. \tag{3.38}$$

Adicionalmente hay combinaciones de campos que adquieren carga frente a $U(1)$. Las más notables son

$$\frac{d\tau}{\Im\mathrm{m}\tau} \quad , \quad \sqrt{\Im\mathrm{m}\tau}F^+_{IJ} \quad \text{y} \quad \sqrt{\Im\mathrm{m}\tau}F^-_{IJ} \tag{3.39}$$

con cargas -4, $+2$ y -2 respectivamente.

La combinación

$$Q \equiv \frac{1}{4}\frac{d\Re\mathrm{e}\tau}{\Im\mathrm{m}\tau} \tag{3.40}$$

se transforma como una conexión gauge bajo $SL(2,\mathbb{R})$

$$Q' = Q + \frac{1}{2}d\varphi \tag{3.41}$$

y esto nos permite introducir una derivada covariante respecto a $U(1)$

$$D_\mu \equiv \nabla_\mu - \mathrm{i}qQ_\mu \tag{3.42}$$

donde q es la carga $U(1)$ del campo respectivo. Con la transformación $U(1)$ local compensando a la transformación $SL(2,\mathbb{R})$ se ve claramente que la supersimetría (3.16)-(3.20) es compatible con esta última.

La ecuación de Einstein (3.8) es inerte frente a $SL(2,\mathbb{R})$. La ecuación del axidilatón (3.10) adquiere una fase $U(1)$ local con una carga $+4$. Claramente, $SL(2,\mathbb{R})$ rota a las dos ecuaciones de Maxwell (3.32) y (3.33). De esta forma se ve que la transformación $SL(2,\mathbb{R})$ es una simetría de las ecuaciones de movimiento. En la acción bosónica (3.6) los dos primeros términos son invariantes bajo $SL(2,\mathbb{R})$, sin embargo los dos últimos términos que involucran a los campos vectoriales no lo son.

3.4 La ecuación de Maxwell compleja

Resulta súmamente útil tratar a las ecuaciones de Maxwell, incluyendo a las identidades de Bianchi, como una única ecuación que se transforme covariantemente bajo

$U(1)$, es decir que tenga carga definida. El punto básico a notar es que las ecuaciones de Maxwell (3.32) y (3.33) son "reales" en el sentido de que verifican el vínculo (3.3) y se pueden combinar en una variable compleja. Ya que el par $(\mathcal{E}_{IJ}, \mathcal{B}_{IJ})$ se transforma como un doblete bajo $SL(2, \mathbb{R})$, la combinación

$$\mathcal{M}_{IJ} \equiv \frac{1}{2\sqrt{2\Im\mathrm{m}\tau}} \left(\mathcal{E}_{IJ} - \tau\mathcal{B}_{IJ}\right) \tag{3.43}$$

y su dual-$SU(4)$

$$\tilde{\mathcal{M}}_{IJ} = \frac{1}{2\sqrt{2\Im\mathrm{m}\tau}} \left(\mathcal{E}_{IJ} - \bar{\tau}\mathcal{B}_{IJ}\right) \tag{3.44}$$

están cargadas frente al $U(1)$ local con cargas -2 y $+2$ respectivamente. $\mathcal{M}_{IJ}$ es equivalente a las ecuaciones de Maxwell ya que

$$\mathcal{E}_{IJ} = \frac{\sqrt{2}\mathrm{i}}{\sqrt{\Im\mathrm{m}\tau}} \left(\bar{\tau}\mathcal{M}_{IJ} - \tau\tilde{\mathcal{M}}_{IJ}\right) \tag{3.45}$$

$$\mathcal{B}_{IJ} = \frac{\sqrt{2}\mathrm{i}}{\sqrt{\Im\mathrm{m}\tau}} \left(\mathcal{M}_{IJ} - \tilde{\mathcal{M}}_{IJ}\right) . \tag{3.46}$$

El factor numérico particular que hemos incluido en (3.43) sirve para dividir aquél que contienen los potenciales escalares supersimétricos, como veremos en la sección II.5, dedicada a las soluciones supersimétricas. Con esta construcción, las tres ecuaciones de movimiento que nos ocupan, $\mathcal{E}_{\mu\nu}$, $\mathcal{E}$ y $\mathcal{M}_{IJ}$ tienen carga definida frente a $U(1)$, las cuales son 0, $+4$ y -2 respectivamente.

3.5 KSIs de la Supergravedad $N = 4$, $d = 4$

Ahora vamos a obtener las KSIs de la Supergravedad $N = 4$, $d = 4$. Las ecuaciones de movimiento y las variaciones de supersimetría que se necesitan se muestran en las secciones 3.2 y 3.3. Aplicando directamente la fórmula (2.30) para los gravitinos $\psi_{\mu I}$ y los dilatinos χ_I obtenemos las identidades

$$\mathrm{i}\bar{\epsilon}^I \gamma^a \mathcal{E}_a{}^\mu + \frac{1}{\sqrt{2\Im\mathrm{m}\tau}} \bar{\epsilon}_J \mathcal{E}^{JI\mu} = 0 \tag{3.47}$$

$$\bar{\epsilon}^I \mathcal{E} + \frac{1}{\sqrt{2\Im\mathrm{m}\tau}} \bar{\epsilon}_J \not{\mathcal{E}}^{JI} = 0 \, . \tag{3.48}$$

Como hemos mencionado anteriormente, en las KSIs no aparece explícitamente la identidad de Bianchi porque se está trabajando con el vector potencial A_{IJ}. La eliminación de las identidades de Bianchi tiene como incoveniente la pérdida de la covariancia $SL(2, \mathbb{R})$ explícita de las KSIs, si se recuerda que $\mathcal{B}_{IJ}$ es la pareja de $\mathcal{E}_{IJ}$ en el doblete de $SL(2, \mathbb{R})$. Sin embargo, uno puede intuir rápidamente cuál es la versión covariante-$SL(2, \mathbb{R})$ de las KSIs ya que se sabe cuales son las combinaciones de las ecuaciones de Maxwell que se transforman covariantemente bajo $U(1)$. Estas son $\mathcal{M}_{IJ}$ y $\tilde{\mathcal{M}}_{IJ}$ dadas en (3.43) y (3.44), de modo que para hacer covariantes de $SL(2,\mathbb{R})$ a (3.47) y (3.48) lo que hay que hacer es agregar el término proporcional a $\mathcal{B}_{IJ}$ apropiado para que esas ecuaciones adquieran carga definida frente a $U(1)$. Las versiones covariantes de $SL(2,\mathbb{R})$ de las KSIs son

$$\mathcal{E}^{\mu}{}_{a}\gamma^{a}\epsilon_{I} - 2\mathrm{i}\tilde{\mathcal{M}}^{\mu}_{IJ}\epsilon^{J} = 0\ , \tag{3.49}$$

$$\mathcal{E}\epsilon^{I} + 2\mathcal{M}^{IJ}_{a}\gamma^{a}\epsilon_{J} = 0\ . \tag{3.50}$$

Aunque la versión covariante de las KSIs se ha hecho *ad hoc*, el resultado se confirma con las condiciones de integrabilidad de las KSEs, como veremos al final de esta sección.

Para extraer de las KSIs (3.49) y (3.50) información más precisa acerca de las EOM es necesario separar los casos tipo tiempo y nulo. En el apéndice 2 presentamos la definición de cada caso así como los bilineales de los espinores de Killing que usaremos a continuación.

1. Caso Tipo Tiempo

   De la identidad (3.50) se puede obtener una identidad vectorial contrayendo con $\mathrm{i}\bar{\epsilon}_{I}\gamma^{b}$, el resultado es

   $$V\mathcal{E} + 2\mathrm{i}M_{IJ}\mathcal{M}^{IJ} = 0\ . \tag{3.51}$$

   Como el vector V no es cero, la identidad anterior implica que toda configuración supersimétrica que sea solución de las ecuaciones de Maxwell es también solución a la ecuación del axidilatón. Este hecho lo comprobaremos explícitamente más adelante.

   Información similar se puede obtener de la KSI (3.49). Contrayendo a esta identidad con $M^{KI}\bar{\epsilon}_{K}\gamma^{b}$ y usando la identidad de Fierz (B.21) llegamos a las tres identidades

   $$|M|^{2}\mathcal{E}_{\mu\nu} + M^{IJ}V_{(\mu}\tilde{\mathcal{M}}_{\nu)IJ} = 0\ , \tag{3.52}$$

   $$\Im\mathrm{m}\left(M^{IJ}V_{(\mu}\tilde{\mathcal{M}}_{\nu)IJ}\right) = 0\ , \tag{3.53}$$

   $$M^{IJ}\tilde{\mathcal{M}}_{IJ}\wedge V = 0\ . \tag{3.54}$$

   La última KSI implica que la contracción $M^{IJ}\tilde{\mathcal{M}}_{IJ}$ es proporcional a V. Considerando este hecho en la KSI (3.52) concluimos entonces que todas las configuraciones supersimétricas resuelven a las ecuaciones de Einstein excepto por la componente tipo tiempo $\mathcal{E}_{00}$. A su vez esta componente es proporcional a la componente temporal de las ecuaciones de Maxwell. Por lo tanto cualquier solución supersimétrica de las ecuaciones de Maxwell es también solución de las ecuaciones de Einstein. Más aún, en la sección 5.2 veremos que de hecho las propias ecuaciones de Maxwell son proporcionales al vector V, de modo que la única ecuación de movimiento a resolver para que una configuración supersimétrica sea una solución es la componente $\mathcal{M}^0_{IJ}$.

2. Caso Nulo
   Contrayendo a la KSI (3.49) con ϕ^I se llega a

$$\mathcal{E}_{\mu\nu}\gamma^\nu\epsilon = 0 \; . \tag{3.55}$$

Contrayendo a esta ecuación primero con γ^μ se ve que la traza de la ecuación de Einstein supersimétrica siempre está *on shell*, $\mathcal{E}_\alpha{}^\alpha = 0$. Contrayendo luego con los espinores $\bar{\epsilon}$ y $\bar{\eta}$ se obtiene

$$\mathcal{E}_{\mu\nu}l^\nu = \mathcal{E}_{\mu\nu}m^\nu = \mathcal{E}_{\mu\nu}\bar{m}^\nu = 0 \tag{3.56}$$

lo cual implica que todas las configuraciones supersimétricas resuelven las ecuaciones de Einstein excepto por una componente

$$\mathcal{E}_{\mu\nu} = \mathcal{E}_{ll}l_\mu l_\nu \; . \tag{3.57}$$

Reinsertando a (3.55) en la KSI (3.49) se obtiene

$$\tilde{\mathcal{M}}_{IJ}\phi^J = 0 \; . \tag{3.58}$$

Por último, contrayendo a la KSI (3.50) con ϕ^I se deduce que todas las configuraciones supersimétricas resuelven a la ecuación del axidilatón

$$\mathcal{E} = 0 \; . \tag{3.59}$$

A continuación veamos esquemáticamente cómo surgen las condiciones de integrabilidad para luego aplicar el programa a la Supergravedad $N = 4$, $d = 4$. Supongamos que trabajamos con un sistema de ecuaciones diferenciales escritas en forma covariante como

$$\mathcal{D}_\mu\epsilon = 0 \; , \tag{3.60}$$

donde la derivada $\mathcal{D}_\mu$ incluye diversas conexiones. Las condiciones de integrabilidad de este sistema se plantean como la condición de que la curvatura de la conexión se anule

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu]\epsilon = 0 \; . \tag{3.61}$$

Aplicada a las KSEs de supergravedad, esta condición involucra a las curvaturas de todas las conexiones que aparezcan en la transformación de supersimetría $\delta_\epsilon \psi_\mu$ del gravitino. En particular entre ellas estará, por tener la Supergravedad a la simetría de Lorentz local, la conexión de espín, de modo que en las condiciones de integrabilidad emergerá naturalmente el tensor de Riemann y ello nos conducirá a las ecuaciones de Einstein. De manera muy esquemática ya podemos vislumbrar una relación entre las condiciones de integrabilidad y las ecuaciones de movimiento. De modo similar se puede plantear la compatibilidad en presencia de ecuaciones algebraicas.

Ahora vamos a deducir las condiciones de integrabilidad de las KSEs de la Supergravedad $N = 4$, $d = 4$. Luego de operar con D_μ en la ecuación (3.16), sustituir las ecuaciones (3.16) y (3.17) y antisimetrizar se obtiene

$$\begin{aligned}\left[\left(R_{\mu\nu}{}^{ab}\gamma_{ab} + 8\mathrm{i}\partial_{[\mu}Q_{\nu]}\right)\delta_I{}^K - \Im\mathrm{m}\tau F^+_{IJ\,a[\mu}F^{-JK}_{\nu]b}\gamma^{ab}\right]\epsilon_K & \\ +2\sqrt{2}\mathrm{i}D_{[\mu}\left(\sqrt{\Im\mathrm{m}\tau}F^+_{IJ\nu]a}\right)\gamma^a\epsilon^J &= 0\,. \end{aligned} \tag{3.62}$$

Para asegurar la compatibilidad de la KSE algebraica (3.17) con la KSE diferencial (3.16) se opera con D_μ sobre la primera y se sustituye la segunda, el resultado es

$$\begin{aligned}&\left[D_\mu\left(\frac{\partial_\nu\tau}{\Im\mathrm{m}\tau}\right)\delta_I{}^K - \frac{\mathrm{i}}{8}\Im\mathrm{m}\tau \not{F}^-_{IJ}F^{-JK}_{\mu\nu}\right]\gamma^\nu\epsilon_K \\ &-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[D_\mu\left(\sqrt{\Im\mathrm{m}\tau}F^-_{IJ\alpha\beta}\right) - \mathrm{i}\frac{\partial_\alpha\tau}{\sqrt{\Im\mathrm{m}\tau}}F^+_{\mu\beta\,IJ}\right]\gamma^\alpha\gamma^\beta\epsilon^J = 0\,. \end{aligned} \tag{3.63}$$

Las dos ecuaciones anteriores constituyen las condiciones de integrabilidad de nuestra teoría.

Ahora vamos a obtener las KSIs a partir de las condiciones de integrabilidad. Esta vez las KSIs sí aparecerán de forma covariante de $SL(2,\mathbb{R})$ ya que en las KSEs es la intensidad de campo F_{IJ} y no el potencial vectorial A_{IJ} lo que se maneja explícitamente, por lo tanto las identidades de Bianchi no son automáticamente cero en este formalismo. Contrayendo a (3.62) con γ^ν a la izquierda se llega a

$$\left(\mathcal{E}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{E}_\alpha{}^\alpha\right)\gamma^\nu\epsilon_I - \mathrm{i}\tilde{\mathcal{M}}^a_{IJ}\gamma_a\gamma_\mu\epsilon^J = 0\,. \tag{3.64}$$

Contrayendo ahora con γ^μ y usando el resultado para eliminar la traza $\mathcal{E}_\alpha{}^\alpha$ obtenemos la KSI $SL(2,\mathbb{R})$-covariante (3.49). Similarmente, la KSI $SL(2,\mathbb{R})$-covariante (3.50) la podemos obtener al contraer a (3.63) con γ^μ.

IV

Caso tipo tiempo: configuraciones supersimétricas

Vamos a emprender el análisis de las KSEs. Es conveniente estudiar los casos tipo tiempo y nulo por separado. En este capítulo vamos a estudiar las KSEs para el caso tipo tiempo.

Antes de comenzar vale la pena hacer un esquema de cuáles son los pasos a seguir para obtener las configuraciones supersimétricas. Básicamente hay tres etapas:

1. Ecuaciones para los bilineales
   A partir de las KSEs se construyen ecuaciones diferenciales y algebraicas para los bilineales de los espinores de Killing, M_{IJ} y $V_I{}^J$. Estas ecuaciones son tensoriales y además son ecuaciones para los campos bosónicos.

2. Forma genérica de los campos
   Se establece la forma genérica de lo campos bosónicos en términos de los bilineales a partir de las ecuaciones deducidas en el paso anterior. Esto se hará en particular para la métrica y para el campo de Maxwell. El axidilatón juega el papel de variable independiente. Es muy importante tener en cuenta que una vez que se han escrito a los campos en términos de los bilineales a estos se les consideran *variables independientes* sujetas a ciertas ligaduras, es decir, nos olvidamos de su origen espinorial.

3. Resolver las KSEs
   Se introducen los campos bosónicos supersimétricos en las KSEs y se busca la solución para los espinores de Killing. En particular se verá que la KSEs algebraica se resuelve completamente para los campos bosónicos supersimétricos. La KSE diferencial exige una condición de integrabilidad sobre las variables

la cual no dirá cuál es la holonomía de la métrica espacial. Para resolver ambas KSEs será necesario imponer ciertas proyecciones sobre los espinores de Killing.

4.1 Ecuaciones de Espinores de Killing

De las ecuaciones (3.16) y (3.17) se deducen las siguientes KSEs

$$D_\mu \epsilon_I - \frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{2}} \sqrt{\Im\mathrm{m}\tau} F^{+}_{\mu\nu IJ} \gamma^\nu \epsilon^J = 0 \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial\!\!\!/ \tau}{\Im\mathrm{m}\tau} \epsilon_I - \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\Im\mathrm{m}\tau} F\!\!\!/^{-}_{IJ} \epsilon^J = 0\,. \tag{4.2}$$

Dada una configuración de campos bosónicos pueden o no existir espinores que resuelvan estas ecuaciones. De partida nosostros suponemos que la configuración es supersimétrica, es decir que existe al menos un espinor que resuelve estas ecuaciones.

Si se tienen en cuenta las propiedades de dualidad de $\gamma_{\mu\nu}$,

$$^\star\gamma_{\mu\nu} = \mathrm{i}\gamma_{\mu\nu}\gamma_5\,, \tag{4.3}$$

entonce se ve claramente que la proyección de la ecuación (4.1) a γ^μ arroja la ecuación de Dirac para un espinor cargado frente a $U(1)$

$$D\!\!\!\!/\, \epsilon_I = 0\,. \tag{4.4}$$

Mencionamos además que la ecuación (4.7) implica que todos los vectores $V_I{}^J$ tienen divergencia nula

$$\nabla \cdot V_I{}^J \tag{4.5}$$

4.2 Ecuaciones para los bilineales

De la ecuación (4.1) se deducen las ecuaciones diferenciales para los bilineales

$$D_\mu M_{IJ} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\Im\mathrm{m}\tau} F^{+}_{\mu\nu K[I} V^{\nu K}_{J]} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned} \nabla_\mu V_{\nu I}{}^J = & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\Im\mathrm{m}\tau} \Big(F^{+}_{\mu\nu KI} M^{KJ} + F^{-KJ}_{\mu\nu} M_{KI} \\ & + F^{+\alpha}_{KI\,(\mu} \Phi^{KJ}_{\nu)\alpha} + F^{-KJ\alpha}{}_{(\mu} \Phi_{KI\nu)\alpha} \Big) \end{aligned} \tag{4.7}$$

y de la ecuación (4.2) se obtiene

$$\frac{\partial_\mu \tau}{\Im\mathrm{m}\tau} M_{IJ} + \mathrm{i}\sqrt{2\Im\mathrm{m}\tau} F^{-}_{\mu\nu K[I} V^{\nu K}_{J]} = 0\,, \tag{4.8}$$

$$V_I{}^J \cdot \frac{\partial\tau}{\Im\mathrm{m}\tau} - \frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{2}} \sqrt{\Im\mathrm{m}\tau} F^{-}_{IK} \cdot \Phi^{JK} = 0\,. \tag{4.9}$$

4.2.1 El vector de Killing

De la ecuación (4.7) se obtiene la derivada covariante de V

$$\nabla_\mu V_\nu = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\Im\mathrm{m}\tau}\left(F^{+}_{\mu\nu IJ}M^{IJ} + F^{-IJ}_{\mu\nu}M_{IJ}\right) \tag{4.10}$$

y de aquí vemos que el vector V es un vector de Killing para la métrica

$$\nabla_{(\mu}V_{\nu)} = 0\ . \tag{4.11}$$

Similarmente, de la ecuacion (4.9) se ve que el vector V es una simetría para el axidilatón

$$\pounds_V\tau = V\cdot\partial\tau = 0\ . \tag{4.12}$$

Más adelante veremos que V también es una simetría para el campo de Maxwell. Igualmente el módulo de V o equivalentemente el escalar $|M|^2$ es conservado a lo largo de V

$$V\cdot\partial V^2 = 0 \tag{4.13}$$

y más adelante veremos que también los escalares M_{IJ} son también invariantes a lo largo de V y al final veremos que también lo son los espinores de Killing. Así las cosas, definimos la coordenada temporal adaptada

$$\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial t} \equiv V\ , \tag{4.14}$$

de modo que las configuraciones supersimétricas son independientes del tiempo.

4.3 Los campos supersimétricos

4.3.1 El campo de Maxwell

Con las ecuaciones (4.6) y (4.8) podemos obtener la forma más general para F_{IJ} supersimétrico en términos de los bilineales, del dilatón y de la métrica. Comenzamos con la siguiente identidad

$$F^{+}_{\mu\nu IJ}V^\nu = -2F^{+}_{\mu\nu K[I}V^{\nu K}_{J]} - \epsilon_{IJKL}F^{+MK}_{\mu\nu}V^{\nu L}_{M}\ , \tag{4.15}$$

la cual se soporta en la condición de realidad (3.3). Podemos saber qué forma adquiere el miembro derecho de esta identidad para una configuración supersimétrica. El primer término lo podemos leer de la ec. (4.6) mientras que el segundo término está básicamente dado por el complejo conjugado de la ec. (4.8). Introduciendo estas dos ecuaciones en la identidad de arriba obtenemos

$$\sqrt{\Im\mathrm{m}\tau}F^{+}_{\mu\nu IJ}V^\nu = -2\sqrt{2}D_\mu M_{IJ} + \sqrt{2}\mathrm{i}\tilde{M}_{IJ}\frac{\partial_\mu\bar{\tau}}{\Im\mathrm{m}\tau}\ , \tag{4.16}$$

donde $\tilde{M}_{IJ}$ es el dual-$SU(4)$ de M_{IJ}, ver el apéndice A.XX. Hemos usado la combinación $\sqrt{\Im\mathrm{m}\tau}F_{IJ}$ en la ec. (4.16) para seguir con el plan de trabajar con objetos que tienen carga definida frente a la transformación $U(1)$ local. En cualquier caso sabemos que el factor $\Im\mathrm{m}\tau$ es invertible.

Ya que la ecuación (4.16) nos da el producto interno de las dos-formas F^+_{IJ} con V y este vector no es nulo, podemos entonces usar la identidad (A.41) para escribir a F^+_{IJ} en términos de sus componentes eléctrica y magnética,

$$\begin{aligned}\sqrt{\Im\mathrm{m}\tau}F^+_{IJ} \;&=\; -\frac{\sqrt{2}}{|M|^2}\left\{\left(DM_{IJ}-\frac{\mathrm{i}}{2}\tilde{M}_{IJ}\frac{d\bar{\tau}}{\Im\mathrm{m}\tau}\right)\wedge V\right.\\ &\left. +\mathrm{i}\,{}^\star\left[\left(DM_{IJ}-\frac{\mathrm{i}}{2}\tilde{M}_{IJ}\frac{d\bar{\tau}}{\Im\mathrm{m}\tau}\right)\wedge V\right]\right\} \qquad (4.17)\end{aligned}$$

Las dos-formas F_{IJ} quedan completamente determinadas con esta expresión. La componente F^-_{IJ} la obtenemos al tomar el complejo conjugado y luego el dual-$SU(4)$ de (4.17),

$$\begin{aligned}\sqrt{\Im\mathrm{m}\tau}F^-_{IJ} \;&=\; -\frac{\sqrt{2}}{|M|^2}\left\{\left(D\tilde{M}_{IJ}+\frac{\mathrm{i}}{2}M_{IJ}\frac{d\tau}{\Im\mathrm{m}\tau}\right)\wedge V\right.\\ &\left. -\mathrm{i}\,{}^\star\left[\left(D\tilde{M}_{IJ}+\frac{\mathrm{i}}{2}M_{IJ}\frac{d\tau}{\Im\mathrm{m}\tau}\right)\wedge V\right]\right\} \qquad (4.18)\end{aligned}$$

Adicionalmente la ec. (4.16) no es útil para demostrar que los escalares M_{IJ} son estáticos, como habíamos mencionado, basta proyectar esa ecuación a V para obtener

$$V\cdot\partial M_{IJ}=0\,. \qquad (4.19)$$

4.3.2 Potenciales escalares

Una vía alternativa para describir al campo de Maxwell supersimétrico consiste en utilizar los potenciales escalares eléctrico y magnético, estos potenciales serán particularmente útiles para analizar las ecuaciones de movimiento.

Si a partir de la expresión supersimétrica (4.16) se calculan los vectores

$$i_V F = i_V F^+ + i_V F^-\ , \qquad (4.20)$$

donde F representa a F_{IJ} y $\tilde{F}_{IJ}$, se obtiene que éstos son exactos

$$i_V F_{IJ} = dE_{IJ}\ , \qquad (4.21)$$

$$i_V \tilde{F}_{IJ} = dB_{IJ}\ , \qquad (4.22)$$

donde

$$E_{IJ} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\Im\mathrm{m}\tau}} \left(M_{IJ} + \tilde{M}_{IJ} \right) \ , \tag{4.23}$$

$$B_{IJ} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\Im\mathrm{m}\tau}} \left(\tau M_{IJ} + \bar{\tau}\tilde{M}_{IJ} \right) \ . \tag{4.24}$$

A E_{IJ} y B_{IJ} los llamaremos los potenciales escalares eléctrico y magnético respectivamente, ambos son independientes del tiempo. Los potenciales forman un doblete de $SL(2, \mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} B_{IJ} \\ E_{IJ} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{IJ} \\ E_{IJ} \end{pmatrix} \ . \tag{4.25}$$

y se transforman como tensores de $SU(4)$.

Podemos usar la fórmula (A.41) para escribrir a los tensores F_{IJ} y $\tilde{F}_{IJ}$ en términos de los potenciales escalares como

$$\tilde{F}_{IJ} = \frac{1}{2|M|^2} \left\{ V \wedge dB_{IJ} + \frac{1}{\Im\mathrm{m}\tau} {}^\star \left[V \wedge \left(\Re\mathrm{e}\tau dB_{IJ} - |\tau|^2 dE_{IJ} \right) \right] \right\} \tag{4.26}$$

$$F_{IJ} = \frac{1}{2|M|^2} \left\{ V \wedge dE_{IJ} + \frac{1}{\Im\mathrm{m}\tau} {}^\star \left[V \wedge \left(dB_{IJ} - \Re\mathrm{e}\tau dE_{IJ} \right) \right] \right\} \ . \tag{4.27}$$

La existencia de los potenciales escalares está ligada al hecho de que el campo de Maxwell supersimétrico es estático. Si se toma a V como el tiempo de acuerdo a (4.14) se puede ver directamente de (4.17) que $F_{\mu\nu\, IJ}$ es estático: $\partial_t F_{\mu\nu\, IJ} = 0$. Se puede demostrar que V es un simetría del campo de Maxwell de una manera más general como sigue. Considérese la identidad fundamental que conecta la derivada de Lie con la derivada exterior

$$\pounds_V F = i_V dF + d i_V F \ , \tag{4.28}$$

donde V y F son un vector y una dos-forma cualesquiera. Si la aplicamos a F_{IJ} y $\tilde{F}_{IJ}$ contra el vector de Killing, entonces la existencia de los potenciales escalares implica $d i_V F = 0$ y también implica que el primer término en (4.28) es cero; de hecho, operando con d en (4.26) y (4.27) se obtiene

$$d\tilde{F}_{IJ} = \Omega \wedge dB_{IJ} + \frac{1}{2} d^\star \left[V \wedge \left(\frac{\Re\mathrm{e}\tau dB_{IJ} - |\tau|^2 dE_{IJ}}{|N|^2} \right) \right] \tag{4.29}$$

$$dF_{IJ} = \Omega \wedge dE_{IJ} + \frac{1}{2} d^\star \left[V \wedge \left(\frac{dB_{IJ} - \Re\mathrm{e}\tau dE_{IJ}}{|N|^2} \right) \right] \ . \tag{4.30}$$

La dos-forma Ω está definida en (4.36) y en (4.40) viene dada su relación con las conexiones $U(1)$. Usando las identidades (A.48) podemos escribir a este par de ecuaciones como

$$d\tilde{F}_{IJ} = {}^{\star}V\left[\frac{2}{|M|^2}(Q-\xi)\cdot\partial B_{IJ} - \frac{1}{2}\nabla\cdot\left(\frac{\Re\mathrm{e}\tau\partial B_{IJ} - |\tau|^2\partial E_{IJ}}{|N|^2}\right)\right] \quad (4.31)$$

$$dF_{IJ} = {}^{\star}V\left[\frac{2}{|M|^2}(Q-\xi)\cdot\partial E_{IJ} - \frac{1}{2}\nabla\cdot\left(\frac{\partial B_{IJ} - \Re\mathrm{e}\tau\partial E_{IJ}}{|N|^2}\right)\right] \quad (4.32)$$

y obviamente $i_V dF = 0$. Entonces concluimos que

$$\pounds_V\tilde{F}_{IJ} = \pounds_V F_{IJ} = 0\,. \quad (4.33)$$

Este resultado junto con (4.11) y (4.12) refleja el hecho de que el vector V es un generador de simetría de toda la configuración supersimétrica. En otros trabajos se han obtenido resultados análogos al anterior para otras supergravedades. Sin embargo en todos ellos se imponen las identidades de Bianchi, las cuales son parte de las ecuaciones de movimiento.

4.3.3 La métrica conforme-estacionaria

Considerando que existe un vector de Killing temporal, La métrica adquiere la forma “conforme-estacionaria”

$$ds^2 = |M|^2\left(dt + \omega_i dx^i\right)^2 - \frac{1}{|M|^2}\gamma_{ij}dx^i dx^j \quad (4.34)$$

donde γ_{ij} es una métrica espacial definida positiva e independiente del tiempo. La uno-forma espacial ω quedará determina por razones de consistencia como mostraremos a continuación. La uno-forma asociada al vector V vía la métrica es

$$V = \sqrt{2}|M|^2\,(dt+\omega)\ . \quad (4.35)$$

Definimos la dos-forma exacta

$$\Omega \equiv \frac{1}{2}d\left(\frac{V}{|M|^2}\right)\ , \quad (4.36)$$

tal que

$$d\omega = \sqrt{2}\Omega\,. \quad (4.37)$$

Por otra parte la derivada exterior de V está dada en la ec. (4.10). Si se sustituye la expresión (4.17) para F_{IJ} en (4.10) se obtiene

$$dV = \frac{1}{|M|^2}\left\{d|M|^2\wedge V - \mathrm{i}\,{}^{\star}\left[\left(M_{IJ}DM^{IJ} - M^{IJ}DM_{IJ}\right)\wedge V\right]\right\} \quad (4.38)$$

y entonces se ve claramente que

$$\Omega = -\frac{\mathrm{i}}{2|M|^4} {}^\star \left[\left(M_{IJ} D M^{IJ} - M^{IJ} D M_{IJ} \right) \wedge V \right] , \tag{4.39}$$

$$= \frac{2}{|M|^2} {}^\star \left[(Q - \xi) \wedge V \right] . \tag{4.40}$$

Con este resultado se fija a la uno-forma ω, vía (4.37), salvo por adición de uno-formas exactas. Es necesario comprobar que la uno-forma ω no se involucra en el miembro derecho de la ecuación anterior, más especificamente, que el dual de Hodge de la ecuación anterior se construye sólo con la métrica espacial γ. En efecto, si escribimos a (4.40) en componentes obtenemos

$$\partial_{[i}\omega_{j]} = -\frac{2}{|M|^2} \epsilon_{ijk} \left(Q^k - \xi^k \right) \tag{4.41}$$

donde ϵ_{ijk} está definido en el apéndice A.XX y los índices espaciales se han subido con la métrica γ. La ecuación anterior obliga a imponer las siguiente condición de integrabilidad

$$\nabla_i \left(\frac{Q^i - \xi^i}{|M|^2} \right) = 0 \tag{4.42}$$

donde todas las operaciones geométricas se refieren a la métrica espacial γ. La condición anterior ha de imponerse sobre todas las configuraciones supersimétricas.

4.4 Resolución de las KSEs

Ahora vamos a proceder a resolver las KSEs (4.1) y (4.2) utilizando toda la información que tenemos hasta ahora acerca de las configuraciones bosónicas supersimétricas. Nuestro método consiste en introducir la *forma supersimétrica* de los campos bosónicos en las KSEs, considerando que ellos vienen dados por una conjunto de variables: El axidilatón, seis escalares M_{IJ} sujetos al vínculo $\epsilon^{IJKL} M_{IJ} M_{KL} = 0$ y la métrica espacial γ_{ij}. Los escalares M_{IJ} y el vector V se consideran ahora independientes de los espinores, pero, por consistencia, debemos imponener los vínculos fundamentales entre ellos,

$$M_{[IJ}\epsilon_{K]} = 0 , \tag{4.43}$$

$$M_{IJ}\epsilon^J = \frac{\mathrm{i}}{2} V_a \gamma^a \epsilon_I . \tag{4.44}$$

Con nuestra elección de vielbeins podemos escribir a la última relación como la proyección

$$\epsilon_I + \mathrm{i}\sqrt{2}\gamma^0 \frac{M_{IJ}}{|M|} \epsilon^J = 0 \tag{4.45}$$

y esta proyección por consistencia implica que los espinores de Killing son autovectortes del proyector $\mathcal{J}_I{}^J$

$$\epsilon_I = \mathcal{J}_I{}^J \epsilon_J \tag{4.46}$$

y ésta relación a su vez implica a su vez que $\mathcal{J}_I{}^J$ es precisamente un proyector. Todos los vínculos anteriores son en realidad identidades de Fierz si se regresa al origen bilineal de M_{IJ} y V. En este enfoque son vínculos sobre los espinores y en particular la proyeccción (4.45) rompe 1/2 de las supersimetrías.

Empezamos con la KSE algebraica (4.2). Luego de utilizar la fórmula (4.18), esta KSE se lleva a

$$\frac{\partial_a \tau}{\Im\mathrm{m}\tau}\gamma^a \left(\epsilon_I + \mathrm{i}\frac{M_{IJ}}{|M|^2}V_b\gamma^b\epsilon^J\right) - \frac{2}{|M|^2}V_a\gamma^{ab}D_b\tilde{M}_{IJ}\epsilon^J = 0 \; . \tag{4.47}$$

El primer término es proporcional a la proyección (4.45). El último término puede ser reescrito como

$$V_a\gamma^{ab}D_b\tilde{M}_{IJ}\epsilon^J = V_a\gamma^a\gamma^b D_b\left(\tilde{M}_{IJ}\epsilon^J\right) - V_a\gamma^a\tilde{M}_{IJ}\gamma^b D_b\epsilon^J \; . \tag{4.48}$$

A su vez el último término de la identidad anterior es proporcional a la ecuación de Dirac y ya sabemos que esta ecuación está contenida en la KSE diferencial (4.1), de modo que podemos excluirlo de esta discusión. Además el primer término es proporcional al vínculo (4.43), de modo que la KSE algebraica queda completamente resuelta.

Para analizar la KSE diferencial necesitamos a la conexión de espín derivada de la métrica conforme-estacionaria, la conexión se muestra en el apéndice A.XX. La componente temporal de la KSE (4.1) resulta

$$\begin{aligned} \partial_t\epsilon_I - \frac{1}{2}M^{KL}D_iM_{KL}\gamma^{0i}\left(\epsilon_I + \mathrm{i}\sqrt{2}\frac{M_{IJ}}{|M|}\gamma^0\epsilon^J\right) & \\ +\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}|M|\left(\delta_I{}^K - \mathcal{J}_I{}^K\right)D_iM_{KJ}\gamma^i\epsilon^J &= 0 \; . \end{aligned} \tag{4.49}$$

Como puede verse, el segundo término es proporcional a la proyeccción (4.45). Luego de suprimir el segundo término, podemos usar al proyector $\mathcal{J}_I{}^J$ para separar a la ecuación resultante en dos ya que $\mathcal{J}_I{}^J$ es independiente del tiempo,

$$\partial_t\epsilon_I = 0 \; , \tag{4.50}$$

$$\left(\delta_I{}^K - \mathcal{J}_I{}^K\right)D_iM_{KJ}\gamma^i\epsilon^J = 0 \; . \tag{4.51}$$

La ecuación (4.50) exige por lo tanto que los espinores de Killing sean estáticos. La ecuación (4.51) puede ser reescrita como

$$\mathcal{J}_I{}^J\gamma^iD_i\epsilon_J = \gamma^iD_i\epsilon_I \tag{4.52}$$

y ésta ecuación está contenida en las componenetes espaciales de la KSE (4.1). Esta ecuación de hecho se anula automáticamente si se escibren a M_{IJ} y V como bilineales de ϵ_I.

Las componentes espaciales de la KSE (4.1), luego de usar la proyección (4.45) y usar la independencia en el tiempo de los espinores de Killing, se reducen a

$$\left(\nabla_i - \frac{1}{2|M|^2} M^{KL} \partial_i M_{KL}\right) \epsilon_I = 0 \,, \tag{4.53}$$

donde la derivada covariante ∇_i se construye con la conexión de espín tridimensional $o_i{}^j$, ver el apéndice A.XX. Observe que esta ecuación puede ser extendida trivialmente a

$$D_i \epsilon_I - \frac{1}{2|M|^2} M^{KL} D_i M_{KL} \epsilon_I = 0 \tag{4.54}$$

y operando a ésta última con $\mathcal{J}_I{}^J \gamma^i$ se llega a (4.52).

La ecuación (4.53) puede ser reescrita como

$$(\nabla_i - \mathrm{i}\xi_i) \left(\frac{\epsilon_I}{\sqrt{|M|}}\right) = 0 \,. \tag{4.55}$$

La condición de integrabilidad de la KSE espacial anterior es

$$\left[R_{ij}{}^{kl} \gamma_{kl} + 4\mathrm{i}\,(d\xi)_{ij}\right] \epsilon_I = 0 \,. \tag{4.56}$$

La solución de esta ecuación es bastante simple. En primer lugar notamos que cuándo ξ es trivial ($d\xi = 0$) la condición anterior implica que la métrica espacial es plana. Vamos a analizar a (4.56) considerando esta posibilidad. De la estructura espinorial de esta ecuación podemos ver que la matriz que multiplica a ϵ_I debe ser singular si queremos mantener la hipótesis de al menos una supersimetría preservada. Para una componente espacial dada, podemos representar esquemáticamente a esta matriz como

$$a\mathbb{I} + b\gamma_{12} + c\gamma_{13} + d\gamma_{23} \tag{4.57}$$

en donde hemos reemplazado a la derivada $d\xi$ y al tensor de Riemann por letras. La matriz anterior es singular si y sólo si

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0 \tag{4.58}$$

de modo que la ecuación (4.56) implica vínculos algebraicos simples entre $R_{\underline{ij}}{}^{ij}$ y $d\xi$. Más aún, podemos valernos de la simetría de transformaciones de Lorentz locales, que no son más que rotaciones en el plano tangente espacial, para eliminar por ejemplo las componentes $R_{\underline{ij}}{}^{13}$ y $R_{\underline{ij}}{}^{23}$. Luego las identidades de Bianchi implican que sólo una de las componentes del tensor de Riemann sobrevive. Podemos expresar entonces las dos soluciones de (4.56), tanto para el caso en que ξ es trivial como para el que no, como

$$R_{\underline{12}}{}^{12} = \pm 2\,(d\xi)_{\underline{12}} \ , \tag{4.59}$$

$$d\xi\,(1 \mp \mathrm{i}\gamma_{12})\,\epsilon_I = 0 \ , \tag{4.60}$$

módulo transformaciones de Lorentz locales. La proyección anterior que se impone para el caso en que ξ no es trivial rompe 1/4 de las supersimetrías.

La relación (4.59) entre las curvaturas de la conexión de espín espacial y la de $U(1)$ ξ implica que éstas a su vez se relacionan, en el marco de Lorentz apropiado, por

$$\xi = \pm\frac{1}{2}o^{12}(x^1, x^2) + \frac{1}{2}d\lambda(x^1, x^2, x^3) \tag{4.61}$$

para alguna función real escalar λ arbitraria, y siendo nulas las otras componentes de $o_i{}^j$. Observe que el grado de libertad que corresponde a λ no tiene contenido físico ya que ésta no es más que una fase de $U(1)$; en efecto, para que la ecuación (4.61) sea compatible con $SL(2,\mathbb{R})$ λ debe modificarse bajo la acción de este grupo según

$$\lambda' = \lambda + \alpha \tag{4.62}$$

donde α es la fase de $U(1)$. Podemos decir entonces que la presencia de λ en las configuraciones supersimétricas sirve para preservar el $U(1)$ contenido en $SL(2,\mathbb{R})$.

Con toda la información que hemos extraído de la condición de integrabilidad, es decir la relaciones (4.60) y (4.61), la KSE espacial (4.55) deviene en

$$\partial_i\left(\frac{\epsilon_I}{\sqrt{|M|}}\right) - \frac{\mathrm{i}}{2}\partial_i\lambda\frac{\epsilon_I}{\sqrt{|M|}} = 0 \tag{4.63}$$

y su solución es

$$\epsilon_I = \sqrt{|M|}e^{\frac{\mathrm{i}}{2}\lambda}\epsilon_I^{(0)} \ , \tag{4.64}$$

$$d\xi\,(1 \mp \mathrm{i}\gamma_{12})\,\epsilon_I^{(0)} = 0 \tag{4.65}$$

donde $\epsilon_I^{(0)}$ son espinores constantes que se transforman como un vector bajo el $SU(4)$ global.

La relación (4.61) entre la conexión de espín y la conexión de $U(1)$ ξ nos dice que la métrica espacial tiene holonomía $U(1)$, lo cual a su vez implica, según la clasificación de Berger, que es factorizable como el producto directo de una métrica unidimensional y otra bidimensional, esto es

$$\gamma_{ij}dx^i dx^j = dx^2 + 2e^{2U(z,\bar{z})}dz d\bar{z} \ . \tag{4.66}$$

Comparando con (4.61) vemos que la conexión ξ se escribe como

$$\xi = \pm\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\partial_z U dz - \partial_{\bar{z}} U d\bar{z}\right) + \frac{1}{2}d\lambda \,. \tag{4.67}$$

Claro está, esta condición es la solución general a la condición de integrabilidad (4.56).

4.5 Configuración supersimétrica general

Ahora podemos establecer nuestro resultado más general acerca de las configuraciones supersimétricas: Todas las configuraciones supersimétricas de la Supergravedad $N = 4$, $d = 4$ están determinas por el axidilatón τ, sujeto a la cota $\Im\mathrm{m}\tau > 0$, un conjunto de seis escalares M_{IJ} sujetos a $\epsilon^{IJKL}M_{IJ}M_{KL} = 0$, el parámetro real λ y el factor conforme U. Estas cantidades están sujetas a la condición (4.67) y a la condición de integrabilidad de la uno-forma ω, ec. (4.42). Vamos a presentar a toda la configuración supersimétrica en términos de estas variables

$$ds^2 = |M|^2\left(dt + \omega_i dx^i\right)^2 - \frac{1}{|M|^2}\gamma_{ij}dx^i dx^j \tag{4.68}$$

$$\partial_{[i}\omega_{j]} = -\frac{2}{|M|^2}\epsilon_{ijk}\left(Q^k - \xi^k\right) \tag{4.69}$$

$$Q = \frac{1}{4}\frac{d\Re\mathrm{e}\tau}{\Im\mathrm{m}\tau}\ , \quad \xi = \frac{\mathrm{i}}{4|M|^2}\left(M_{IJ}dM^{IJ} - M^{IJ}dM_{IJ}\right) \tag{4.70}$$

$$\gamma_{ij}dx^i dx^j = dx^2 + 2e^{2U(z,\bar{z})}dzd\bar{z} \tag{4.71}$$

$$E_{IJ} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\Im\mathrm{m}\tau}}\left(M_{IJ} + \tilde{M}_{IJ}\right)\ , \tag{4.72}$$

$$B_{IJ} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\Im\mathrm{m}\tau}}\left(\tau M_{IJ} + \bar{\tau}\tilde{M}_{IJ}\right) \tag{4.73}$$

$$\epsilon_I = \sqrt{|M|}e^{\frac{\mathrm{i}}{2}\lambda}\epsilon_I^{(0)}\ . \tag{4.74}$$

La simetrías actún sobre las variables de la siguiente manera: $SU(4)$ sólo actúa sobre M_{IJ} como tensores mientras que $SL(2,\mathbb{R})$ actúa por medio de transformaciones fraccionales-lineales sobre τ, las M_{IJ} tienen peso $+2$ frente a $U(1)$, λ sufra una translación frente a este grupo y U es inerte.

4.6 Una clase particular de configuraciones supersimétricas

Una solución explícita a la condición (4.67) viene dada por el siguiente *ansatz*

$$M_{IJ} = e^{\mathrm{i}\lambda}Mk_{IJ}\ , \quad U = \mp\frac{1}{2}\ln|k|^2\ , \tag{4.75}$$

donde

$$\lambda(x,z,\bar{z}) = \bar{\lambda}(x,z,\bar{z}) \quad , \quad M(x,z,\bar{z}) = \bar{M}(x,z,\bar{z}) \quad , \quad k_{IJ} = k_{IJ}(z) \tag{4.76}$$

y $|k|^2 \equiv k^{IJ}(\bar{z})k_{IJ}(z)$. Además los escalares holomorfos k_{IJ} han de verificar el vínculo algebraico derivado de aquel de las M_{IJ},

$$\epsilon^{IJKL}k_{IJ}k_{KL} = 0 \; . \tag{4.77}$$

Como estamos en el caso tipo tiempo tenemos que $|M|^2 = M^2|k|^2$ y por lo tanto $M > 0$, $|k|^2 > 0$. Nótese que en estas configuraciones todo el peso $U(1)$ de M_{IJ} queda contenido en λ.

El ansatz (4.75) nos será útil en particular para encontrar soluciones supersimétricas, para tal fin resultará util hacer un cambio de variable que nos permite refinar el número de parámetros independientes de una configuración supersimétrica, sean las dos funciones complejas $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ dadas por

$$\mathcal{H}_1 \equiv \frac{e^{\mathrm{i}\lambda}}{\sqrt{\Im\mathrm{m}\tau}M} \; , \tag{4.78}$$

$$\mathcal{H}_2 \equiv \tau\mathcal{H}_1 \; , \tag{4.79}$$

tal que uno puede determinar a τ, λ y M en términos de $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$,

$$\tau = \frac{\mathcal{H}_2}{\mathcal{H}_1} \; , \tag{4.80}$$

$$e^{2\mathrm{i}\lambda} = \frac{\mathcal{H}_1}{\bar{\mathcal{H}}_1} \; , \tag{4.81}$$

$$M^2 = \frac{1}{\Im\mathrm{m}\left(\mathcal{H}_2\bar{\mathcal{H}}_1\right)} \; . \tag{4.82}$$

Este cambio de variable es sugerido por las ecuaciones de movimiento de la teoría, como veremos más adelante.

Una virtud de estas variables es que la condición de integrabilidad para ω, ec. (4.42), aún por resolver, adquiere una forma muy simple

$$\Re\mathrm{e}\left[|k|^{\mp 2}\left(\bar{\mathcal{H}}_1\triangle\mathcal{H}_2 - \bar{\mathcal{H}}_2\triangle\mathcal{H}_1\right) + 2|k|^{-2}\partial_z|k|^2\left(\mathcal{H}_2\partial_{\bar{z}}\bar{\mathcal{H}}_1 - \mathcal{H}_1\partial_{\bar{z}}\bar{\mathcal{H}}_2\right)\right] = 0 \; , \tag{4.83}$$

donde $\triangle$ es el laplaciano de la métrica tridimensional γ_{ij},

$$\triangle\mathcal{H}_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\partial_i\left(\sqrt{\gamma}\gamma^{ij}\partial_j\mathcal{H}_1\right) = \left(\partial_x^2 + 2|k|^{\pm 2}\partial_z\partial_{\bar{z}}\right)\mathcal{H}_1 \; . \tag{4.84}$$

En el capítulo de las soluciones supersimétricas veremos que la ecuación (4.83) es muy similar a las ecuaciones de movimiento sobre estas variables y de hecho veremos varias clases de soluciones de estas ecuaciones.

Ahora es conveniente resumir. Para la solución (4.75) de la condición de integrabilidad (4.67), las configuraciones supersimétricas están dada por los siguientes parámetros:

1. dos funciones complejas $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$,

2. un conjunto de escalares independientes de x y holomorfos: $k_{IJ} = k_{IJ}(z)$,

los cuales verifican los vínculos algebraicos:

$$\Im\mathrm{m}\left(\mathcal{H}_2\bar{\mathcal{H}}_1\right) > 0 \tag{4.85}$$

$$\epsilon^{IJKL}k_{IJ}k_{KL} = 0 \tag{4.86}$$

y está sujetos a la ecuación diferencial (4.83) Estos parámetros determinan a la configuración bosónica supersimétrica de la siguiente manera

$$ds^2 = \frac{|k|^2}{\Im\mathrm{m}\left(\mathcal{H}_2\bar{\mathcal{H}}_1\right)}\left(dt + \omega_i dx^i\right)^2 - \left[\frac{|k|^2}{\Im\mathrm{m}\left(\mathcal{H}_2\bar{\mathcal{H}}_1\right)}\right]^{-1}\gamma_{ij}dx^i dx^j\ , \tag{4.87}$$

$$\gamma_{ij}dx^i dx^j = dx^2 + 2|k|^{\mp 2}dzd\bar{z} \tag{4.88}$$

$$\tau = \frac{\mathcal{H}_2}{\mathcal{H}_1} \tag{4.89}$$

$$E_{IJ} = \frac{2\sqrt{2}}{\Im\mathrm{m}\left(\mathcal{H}_2\bar{\mathcal{H}}_1\right)}\left(k_{IJ}\mathcal{H}_1 + \tilde{k}_{IJ}\bar{\mathcal{H}}_1\right) \tag{4.90}$$

$$B_{IJ} = \frac{2\sqrt{2}}{\Im\mathrm{m}\left(\mathcal{H}_2\bar{\mathcal{H}}_1\right)}\left(k_{IJ}\mathcal{H}_2 + \tilde{k}_{IJ}\bar{\mathcal{H}}_2\right) \tag{4.91}$$

$$\epsilon_I = \left[\frac{|k|^2}{\Im\mathrm{m}\left(\mathcal{H}_2\bar{\mathcal{H}}_1\right)}\frac{\mathcal{H}_1}{\bar{\mathcal{H}}_1}\right]^{1/4}\epsilon_I^{(0)} \tag{4.92}$$

donde

$$\partial_{[i}\omega_{j]} = \frac{2\Im\mathrm{m}\left(\mathcal{H}_2\bar{\mathcal{H}}_1\right)}{|k|^2}\epsilon_{ijk}\left(\xi^k - Q^k\right) \tag{4.93}$$

$$\xi = -\frac{\mathrm{i}}{4}\left[\left(\partial - \bar{\partial}\right)\ln|k|^2 + d\ln\left(\frac{\mathcal{H}_1}{\bar{\mathcal{H}}_1}\right)\right]\ . \tag{4.94}$$

$$Q = \frac{1}{4}\frac{|\mathcal{H}_1|^2}{\Im\mathrm{m}\left(\mathcal{H}_2\bar{\mathcal{H}}_1\right)}d\Re\mathrm{e}\left(\frac{\mathcal{H}_2}{\mathcal{H}_1}\right)\ . \tag{4.95}$$

Las simetrías actúan sobre los parámetros de la siguiente manera: Bajo $SL(2,\mathbb{R})$ las dos funciones complejas se transforman como un doblete

$$\begin{pmatrix}\mathcal{H}_2\\ \mathcal{H}_1\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathcal{H}_2\\ \mathcal{H}_1\end{pmatrix}\ , \tag{4.96}$$

mientras que k_{IJ} permanece inerte. Por el contrario, bajo $SU(4)$ k_{IJ} se transforma como un tensor mientras que $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ permanencen inertes. Es notable el hecho de que los dos vínculos (4.85) y (4.86) son estrictamente invariantes bajo estas dos simetrías. En el caso de (4.86) ello es explícito y en el caso de (4.85) puede verse por cálculos directos que bajo $SL(2,\mathbb{R})$

$$\left[\Im\mathrm{m}\left(\mathcal{H}_2\bar{\mathcal{H}}_1\right)\right]' = \Im\mathrm{m}\left(\mathcal{H}_2\bar{\mathcal{H}}_1\right) \ . \tag{4.97}$$

El proyector $\mathcal{J}_I{}^J$ viene determinado sólo por las k_{IJ},

$$\mathcal{J}_I{}^J = \frac{2}{|k|^2} k_{IK} k^{JK} \ , \tag{4.98}$$

de modo que sólo es función del plano $(z,\bar{z})$.

V

Caso tipo tiempo: soluciones supersimétricas

En este capítulo analizaremos a las ecuaciones de campo de Supergravedad $N = 4$, $d = 4$ para el caso tipo tiempo, una vez que se tiene suficiente información acerca de las configuraciones supersimétricas de la teoría.

5.1 Ecuación de axidilatón

Si bien las KSIs mostradas en la sección 3.5, ecuaciones (3.51) y (3.52), nos dicen que sólo hay que considerar a las ecuaciones de Maxwell para tener una solución supersimétrica, resulta ilustrativo comenzar con el análisis para la ecuación del axidilatón (3.10).

Para el F_{IJ} supersimétrico dado en (4.17) encontramos

$$\Im\mathrm{m}\tau F^{+}_{IJ} \cdot F^{+IJ} = -\frac{16\mathrm{i}}{|M|^2}\left(M^{IJ}DM_{IJ} \cdot \frac{\partial\bar{\tau}}{\Im\mathrm{m}\tau} + \mathrm{i}\partial M_{IJ} \cdot \partial\tilde{M}^{IJ}\right) . \tag{5.1}$$

Evaluando entonces la ecuación del axidilatón (3.10) para el caso supersimétrico se obtiene

$$\begin{aligned} |M|^{-2}\mathcal{E} &= \left[D + 2\frac{1}{|M|^2}\left(M_{IJ}DM^{IJ} - M^{IJ}DM_{IJ}\right)\right] \cdot \left(\frac{\partial\bar{\tau}}{|N|^2}\right) \\ &\quad - \frac{2\mathrm{i}}{|M|^2}\frac{\partial N_{IJ} \cdot \partial\tilde{N}^{IJ}}{|N|^2} , && (5.2) \\ &= (\nabla - 4\mathrm{i}\xi) \cdot \left(\frac{\partial\bar{\tau}}{|N|^2}\right) + 2\mathrm{i}|M|^{-2}\tilde{N}^{IJ}\nabla \cdot \left(\frac{\partial N_{IJ}}{|N|^2}\right) , && (5.3) \end{aligned}$$

en donde hemos introducido una nueva variable dada por un cambio de escala en los bilineales escalares

$$N_{IJ} \equiv \sqrt{\Im\mathrm{m}\tau}M_{IJ} , \quad |N|^2 \equiv N_{IJ}N^{IJ} . \tag{5.4}$$

La combinación $|N|^{-2}d\tau$ tiene carga -4 frente al $U(1)$ local de $SL(2,\mathbb{R})$. Recordamos además que la conexión ξ es invariante bajo cambios de escala, $\xi(N_{IJ}) = \xi(M_{IJ})$, igualmente el término

$$\frac{\partial M_{IJ} \cdot \partial \tilde{M}^{IJ}}{|M|^2} \tag{5.5}$$

es invariante bajo cambios de escala. La ecuación (5.3) es claramente covariante bajo $U(1)$, pero ahora la conexión que aparece es la asociada a los espinores de Killing, ξ, en lugar de Q.

Parte de nuestro objetivo se ha alcanzado en la ecuación (5.3): Reducir las ecuaciones de campo a un conjunto de ecuaciones más simples. Definimos

$$e \equiv (\nabla_\mu - 4\mathrm{i}\xi_\mu)\left(\frac{\partial^\mu \bar{\tau}}{|N|^2}\right) , \tag{5.6}$$

$$n^{IJ} \equiv (\nabla_\mu + 4\mathrm{i}\xi_\mu)\left(\frac{\partial^\mu N^{IJ}}{|N|^2}\right) \tag{5.7}$$

tal que la ecuación del axidilatón se escribe como

$$\mathcal{E} = |M|^2 e + 2\mathrm{i}\tilde{N}^{IJ} n_{IJ} \, . \tag{5.8}$$

De modo que una condición suficiente para tener una solución supersimétrica a la ecuación del axidilatón es tener una solución para las ecuaciones más simples e y n_{IJ}. Seguiremos este mismo plan con las ecuaciones de Maxwell.

Debemos comentar acerca de la covarianza $SL(2,\mathbb{R})$ de (5.8). Las ecuaciones e y n_{IJ} poseen la estructura de divergencia covariante de $U(1)$; e de hecho es covariante bajo $U(1)$ con carga $+4$. Sin embargo, el término de (5.7) proporcional a la conexión ξ desparece en la contracción $\tilde{N}^{IJ} n_{IJ}$ ya que en ella desaparecen las primeras derivadas de N_{IJ}. Por la misma razón esta contracción es covariante bajo $U(1)$ con carga $+4$, de modo que la ecuación supersimétrica del axidilatón (5.8) es efectivamente covariante bajo $SL(2,\mathbb{R})$. Pese a esto hemos definido a n_{IJ} en la forma dada en (5.7) porque así aparecerá en las ecuaciones de Maxwell.

5.2 *Ecuaciones de Maxwell*

Las ecuaciones de Maxwell en la versión “real” (3.32) y (3.33) para el caso supersimétrico han sido calculadas en términos de los potenciales escalares en (4.31) y (4.32), las retomamos aquí

$$\mathcal{E}_{IJ} = V\left[\frac{2}{|M|^2}(Q-\xi)\cdot\partial B_{IJ} - \frac{1}{2}\nabla\cdot\left(\frac{\Re\mathrm{e}\tau\partial B_{IJ} - |\tau|^2\partial E_{IJ}}{|N|^2}\right)\right] \tag{5.9}$$

$$\mathcal{B}_{IJ} = V\left[\frac{2}{|M|^2}(Q-\xi)\cdot\partial E_{IJ} - \frac{1}{2}\nabla\cdot\left(\frac{\partial B_{IJ} - \Re\mathrm{e}\tau\partial E_{IJ}}{|N|^2}\right)\right] \, . \tag{5.10}$$

Podemos ver que, para configuraciones supersimétricas, las ecuaciones de Maxwell tienen sólo a la componente tipo tiempo distinta de cero.

Ahora veamos la forma que adquiere la ecuación $\mathcal{M}_{IJ}$ para una configuración supersimétrica. Para simplificar la notación, aprovechando que V no es cero, introducimos la ecuación de Maxwell escalar haciendo el cambio $\mathcal{M}_{IJ} \to V\mathcal{M}_{IJ}$, de modo que ahora $\mathcal{M}_{IJ}$ es un escalar. Escrita en términos de los potenciales escalares la ecuación $\mathcal{M}_{IJ}$ resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{IJ} &= \frac{1}{2\sqrt{2\Im\mathrm{m}\tau}}\left\{\frac{\mathrm{i}}{2}\nabla\cdot\left[\frac{\partial\left(B_{IJ}-\tau E_{IJ}\right)}{|M|^2}\right]+\frac{2}{|M|^2}\left(Q-\xi\right)\cdot\partial\left(B_{IJ}-\tau E_{IJ}\right)\right. \\ &\quad -\frac{1}{2|N|^2}\partial\tau\cdot\partial\left(B_{IJ}-\tau E_{IJ}\right)+\frac{\mathrm{i}}{2}\Im\mathrm{m}\tau E_{IJ}\nabla\cdot\left(\frac{\partial\tau}{|N|^2}\right) \\ &\quad \left.+E_{IJ}\frac{2}{|M|^2}\left(Q-\xi\right)\cdot\partial\tau-\frac{1}{2}E_{IJ}\partial\tau\frac{\partial\Re\mathrm{e}\tau}{|N|^2}\right\} \end{aligned} \tag{5.11}$$

De las expresiones explícitas de los potenciales (4.23) y (4.24) obtenemos

$$B_{IJ}-\tau E_{IJ} = -4\sqrt{2}\mathrm{i}\tilde{N}_{IJ} \tag{5.12}$$

y luego de introducirla en (5.11) llegamos a la expresión supersimétrica de $\mathcal{M}_{IJ}$

$$\mathcal{M}_{IJ} = \sqrt{\Im\mathrm{m}\tau}\tilde{n}_{IJ}+\frac{\mathrm{i}}{2}\left(M_{IJ}+\tilde{M}_{IJ}\right)\bar{e}\,. \tag{5.13}$$

La cual es proporcional a las ecuaciones n_{IJ} y e. Comparando a (5.8) con (5.13) podemos comprobar directamente la KSI (3.51).

La ecuación n_{IJ} no es covariante bajo $U(1)$ ya que la combinación $|N|^{-2}dN_{IJ}$ no tiene carga definida sino que se transforma inhomogéneamente bajo $SL(2,\mathbb{R})$:

$$\left(\frac{dN_{IJ}}{|N|^2}\right)' = e^{2\mathrm{i}\varphi}\left[\frac{dN_{IJ}}{|N|^2}\left(c\bar{\tau}+d\right)-cN_{IJ}\frac{d\bar{\tau}}{|N|^2}\right] \tag{5.14}$$

tal que

$$n'_{IJ} = e^{2\mathrm{i}\varphi}\left[\left(c\bar{\tau}+d\right)n_{IJ}-cN_{IJ}e\ .\right] \tag{5.15}$$

Resulta entonces que el primer y el tercer término de (5.13) sumados se transforman con la carga apropiada bajo $U(1)$, el segundo término de por sí posee la carga apropiada de modo que la carga -2 de $\mathcal{M}_{IJ}$ está asegurada en la expresión (5.13).

Antes de continuar es conveniente plantear el problema en términos estrictamente espaciales. Las ecuaciones e y n_{IJ} son básicamente divergencias covariantes espaciales, sean

$$e_{(3)} \equiv \left(\nabla_i - 4\mathrm{i}\xi_i\right)\left(\frac{\partial^i\bar{\tau}}{|N|^2}\right)\,, \tag{5.16}$$

$$n^{IJ}_{(3)} \equiv \left(\nabla_i + 4\mathrm{i}\xi_i\right)\left(\frac{\partial^i N^{IJ}}{|N|^2}\right) \tag{5.17}$$

donde todos los objetos geométricos se refieren a la métrica tridimensional γ_{ij}, entonces se tiene que

$$e = -|M|^2 e_{(3)} \; , \tag{5.18}$$

$$n^{IJ} = -|M|^2 n^{IJ}_{(3)} \; . \tag{5.19}$$

5.3 Soluciones supersimétricas generales

Como ya sabemos de las KSIs, las ecuaciones de Einstein y del axidilatón quedan automáticamente resueltas para una configuración supersimétrica si ésta resuelve a las ecuaciones de Maxwell, por lo tanto podemos enunciar nuestro resultado más general acerca de las soluciones supersimétricas para el caso tipo tiempo: La condición necesaria y suficiente para que una configuración supersimétrica sea además una solución supersimétrica es que resuelva a la siguiente ecuación escalar

$$\sqrt{\Im\mathrm{m}\tau}\, n^{(3)}_{IJ} - \frac{\mathrm{i}}{2}\left(M_{IJ} + \tilde{M}_{IJ}\right) e_{(3)} = 0 \; . \tag{5.20}$$

5.4 Soluciones supersimétricas particulares

Claro está, y esta es la razón de haber introducido las ecuaciones e y n_{IJ}, una condición suficiente para tener una solución de (5.20) es que se cumpla el par

$$e_{(3)} = 0 \tag{5.21}$$

$$n^{(3)}_{IJ} = 0 \tag{5.22}$$

La invarianza $SL(2,\mathbb{R})$ del conjunto de soluciones de este sistema está garantizada ya que e tiene carga $U(1)$ y la transformación de $n^{(3)}_{IJ}$, dada en (5.15), es proporcional a ella misma y a e.

A partir de ahora buscaremos soluciones explícitas a $e_{(3)}$ y $n^{(3)}_{IJ}$. Sabemos que la métrica espacial supersimétrica factoriza de la forma (4.66). Podemos además utilizar la condición (4.67) para resolver a la conexión ξ en términos de U y λ. Si ello lo usamos en $e_{(3)}$ y $n^{IJ}_{(3)}$ obtenemos, luego de una redefinición por una fase,

$$\begin{aligned}
\bar{e}_{(3)} &= \partial_x\left(e^{2\mathrm{i}\lambda}\frac{\partial_x\tau}{|N|^2}\right) + e^{-2U}\left[\partial_z\left(e^{2\mathrm{i}\lambda}\frac{\partial_{\bar{z}}\tau}{|N|^2}\right) + \partial_{\bar{z}}\left(e^{2\mathrm{i}\lambda}\frac{\partial_z\tau}{|N|^2}\right)\right. \\
&\qquad\left. \mp\frac{2e^{+2\mathrm{i}\lambda}}{|N|^2}\left(\partial_z U\partial_{\bar{z}}\tau - \partial_{\bar{z}}U\partial_z\tau\right)\right] \qquad (5.23)\\
n^{IJ}_{(3)} &= \partial_x\left(e^{2\mathrm{i}\lambda}\frac{\partial_x N^{IJ}}{|N|^2}\right) + e^{-2U}\left[\partial_{\bar{z}}\left(e^{2\mathrm{i}\lambda}\frac{\partial_z N^{IJ}}{|N|^2}\right) + \partial_z\left(e^{2\mathrm{i}\lambda}\frac{\partial_{\bar{z}} N^{IJ}}{|N|^2}\right)\right. \\
&\qquad\left. \pm\frac{2e^{2\mathrm{i}\lambda}}{|N|^2}\left(\partial_{\bar{z}}U\partial_z N^{IJ} - \partial_z U\partial_{\bar{z}}N^{IJ}\right)\right] \; . \qquad (5.24)
\end{aligned}$$

Podemos avanzar más en la búsqueda de soluciones supersimétricas si utilizamos el ansatz (4.75), el cual resuelve explícitamente a la condición de integrabilidad (4.67); tenemos entonces que bajo (4.75)

$$N^{IJ} = \sqrt{\Im\mathrm{m}\tau}e^{-\mathrm{i}\lambda}Mk^{IJ} \ , \tag{5.25}$$

$$|N|^2 = \Im\mathrm{m}\tau M^2|k|^2 \ . \tag{5.26}$$

Tal y como habíamos anticipado en la sección 4.6, las ecuaciones (5.23) y (5.24) sugieren la introducción de las variables complejas $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ dadas en (4.78) y (4.79), de forma tal que

$$e_{(3)} = |k|^{-2}\left(\mathcal{H}_1\triangle\mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_2\triangle\mathcal{H}_1\right) - 2|k|^{\pm 2-4}\partial_z|k|^2\partial_{\bar{z}}\tau \ , \tag{5.27}$$

$$n^{IJ}_{(3)} = \frac{k^{IJ}}{|k|^2}\left(\triangle\mathcal{H}_1 - 2|k|^{\pm 2-2}\partial_{\bar{z}}|k|^2\partial_z\mathcal{H}_1\right) \ , \tag{5.28}$$

donde $\triangle$ es el Laplaciano de la métrica espacial,

$$\triangle = \partial_x^2 + 2|k|^{\pm 2}\partial_z\partial_{\bar{z}} \ . \tag{5.29}$$

Recordamos las variables $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ y k_{IJ} están sujetas a los vínculos algebraicos

$$\Im\mathrm{m}\left(\mathcal{H}_2\bar{\mathcal{H}}_1\right) > 0 \tag{5.30}$$

$$\epsilon^{IJKL}k_{IJ}k_{KL} = 0 \ , \tag{5.31}$$

y a la condición de integrabilidad de ω

$$\Re\mathrm{e}\left[|k|^{\mp 2}\left(\bar{\mathcal{H}}_1\triangle\mathcal{H}_2 - \bar{\mathcal{H}}_2\triangle\mathcal{H}_1\right) + 2|k|^{-2}\partial_z|k|^2\left(\mathcal{H}_2\partial_{\bar{z}}\bar{\mathcal{H}}_1 - \mathcal{H}_1\partial_{\bar{z}}\bar{\mathcal{H}}_2\right)\right] = 0 \ . \tag{5.32}$$

Es evidente que los operadores que aparecen en esta ecuación son los mismos de las ecuaciones e y n_{IJ}.

Ahora podemos presentar tres clases de soluciones de las ecuaciones (5.27), (5.28) y (5.32) y que por lo tanto son soluciones supersimétricas de la teoría, agrupadas en conjuntos invariantes bajo $SL(2,\mathbb{R})$:

1. $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ constantes, k_{IJ} arbitraria
   Hay una solución no trivial para el sistema (5.27)-(5.28) que salta inmediatamente a la vista: $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, y por lo tanto τ, constantes. Las funciones holomorfas k_{IJ} quedan libres excepto, claro está, por el vínculo algebraico entre ellas. Por simplicidad tomamos

$$\Im\mathrm{m}\left(\mathcal{H}_2\bar{\mathcal{H}}_1\right) = 1 \ . \tag{5.33}$$

La fase $U(1)$ asociada a $SL(2,\mathbb{R})$ sobre estas soluciones se hace global. La métrica cuadrimensional adquiere la forma

$$ds^2 = |k|^2 \left(dt + \omega_i dx^i\right)^2 - \frac{1}{|k|^2}\left(dx^2 + 2|k|^{\mp 2} dz d\bar{z}\right) \tag{5.34}$$

y los potenciales escalares resultan

$$E_{IJ} = 2\sqrt{2}\left(k_{IJ}\mathcal{H}_1 + \tilde{k}_{IJ}\bar{\mathcal{H}}_1\right) \tag{5.35}$$

$$B_{IJ} = 2\sqrt{2}\left(k_{IJ}\mathcal{H}_2 + \tilde{k}_{IJ}\bar{\mathcal{H}}_2\right) \tag{5.36}$$

tal que el campo de Maxwell adquiere la forma

$$F_{IJ} = \frac{\sqrt{2}}{|k|^2}\left\{V \wedge \left(\mathcal{H}_1 dk_{IJ} + \bar{\mathcal{H}}_1 d\tilde{k}_{IJ}\right) + \mathrm{i}\,^\star\left[V \wedge \left(\mathcal{H}_1 dk_{IJ} - \bar{\mathcal{H}}_1 d\tilde{k}_{IJ}\right)\right]\right\} \tag{5.37}$$

$$\tilde{F}_{IJ} = \frac{\sqrt{2}}{|k|^2}\left\{V \wedge \left(\mathcal{H}_2 dk_{IJ} + \bar{\mathcal{H}}_2 d\tilde{k}_{IJ}\right) + \mathrm{i}\,^\star\left[V \wedge \left(\mathcal{H}_2 dk_{IJ} - \bar{\mathcal{H}}_2 d\tilde{k}_{IJ}\right)\right]\right\} \tag{5.38}$$

2. <u>$\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ lineales en x, k_{IJ} arbitraria</u>
   Si hacemos que $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ sean funciones sólo de x y que sean lineales en ella, tenemos entonces una solución con las funciones holomorfas k_{IJ} libres. En general se tiene

   $$\mathcal{H}_2 = Ax + B\ , \quad \mathcal{H}_1 = Cx + D\ , \tag{5.39}$$

   donde las constante complejas están sujetas a

   $$\Im\mathrm{m}\left(A\bar{D} + B\bar{C}\right) = 0\ , \quad \Im\mathrm{m}\left(B\bar{D}\right) > 0\ , \quad \Im\mathrm{m}\left(A\bar{C}\right) \geq 0\ . \tag{5.40}$$

   En particular

   $$\Im\mathrm{m}\left(\mathcal{H}_2\bar{\mathcal{H}}_1\right) = \Im\mathrm{m}\left(A\bar{C}\right)x^2 + \Im\mathrm{m}\left(B\bar{D}\right) \tag{5.41}$$

   La métrica viene dada por

   $$ds^2 = M^2|k|^2\left(dt + \omega_x dx\right)^2 - \frac{1}{M^2|k|^2}dx^2 - \frac{2}{M^2}dzd\bar{z}\ . \tag{5.42}$$

   En este caso y el anterior el proyector $\mathcal{J}_I{}^J$ dado en (4.98) es una función arbitraria de z y $\bar{z}$.

3. <u>$\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ armónicas, k_{IJ} constante</u>
   Por simplicidad tomamos $|k|^2 = 1$. En este caso tenemos que el factor conforme de la métrica bidimensional,

   $$U = \mp\frac{1}{2}\ln|k|^2\ , \tag{5.43}$$

es trivial , $U = 0$, de modo que la métrica tridimensional γ_{ij} es completamente plana. Las ecuaciones e y n_{IJ} resultan

$$e_{(3)} = \mathcal{H}_1 \triangle \mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_2 \triangle \mathcal{H}_1 \ , \tag{5.44}$$

$$n^{IJ}_{(3)} = k^{IJ} \triangle \mathcal{H}_1 \tag{5.45}$$

donde $\triangle$ es el laplaciano de la métrica tridimensional plana. La solución de este sistema es que $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ sean dos funciones armónicas complejas.

En este caso se tiene que el proyector $\mathcal{J}_I{}^J$ es constante. $\mathcal{J}_I{}^J$ constante es la condición que caracteriza a las soluciones supersimétricas presentadas por Tod [18] y paralelamente por Bergshoeff, Kallosh y Ortín [19]. Para asegurarnos de que las soluciones de Tod coincidan exactamente con nuestro grupo de soluciones 3, debemos exigir que las funciones holomorfas k_{IJ} en los grupos 1 y 2 no conducen a un $\mathcal{J}_I{}^J$ constante.

VI

Caso nulo

El caso nulo de la Supergravedad $N = 4$, $d = 4$ fue esencialmente resuelto por Tod [18]. Sin embargo, nosotros lo presentamos para darle completitud al problema, analizando el caso nulo con nuestra metodolgía. Este enfoque nos permite refinar aún más los resultados de lo que lo hizo Tod.

El caso nulo se caracteriza por la condición

$$|M|^2 = 0 \,, \tag{6.1}$$

en un abierto del espacio-tiempo. Como se expone en el apéndice 2, en el caso nulo todos los espinores de $SU(4)$ son proporcionales entre sí y se pueden parametrizar por medio de los escalares ϕ_I y el espinor ϵ, adicionalmente se introduce el espinor η.

6.1 Configuraciones supersimétricas

Retomamos las KSEs,

$$D_\mu \epsilon_I - \frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{2}} \sqrt{\Im\mathrm{m}\tau} F^+_{\mu\nu IJ} \gamma^\nu \epsilon^J = 0 \tag{6.2}$$

$$\frac{\not{\partial}\tau}{\Im\mathrm{m}\tau} \epsilon_I - \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\Im\mathrm{m}\tau} \not{F}^-_{IJ} \epsilon^J = 0 \,. \tag{6.3}$$

La proyección a ϕ^I separa en dos a la KSE diferencial (6.2)

$$(D_\mu + \mathrm{i}\zeta_\mu)\, \epsilon = 0 \,, \tag{6.4}$$

$$(\partial_\mu - \mathrm{i}\zeta_\mu)\, \phi_I \epsilon - \frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{2}} \sqrt{\Im\mathrm{m}\tau} F^+_{\mu\nu IJ} \phi^J \gamma^\nu \epsilon^* = 0 \,. \tag{6.5}$$

Note que la última ecuación es algebraica en el espinor ϵ. Similarmente, la KSE algebraica (6.3) se separa en dos al proyectar a ϕ^I,

$$\frac{\not{\partial}\tau}{\Im\mathrm{m}\tau}\epsilon = 0 \ , \tag{6.6}$$

$$\not{F}^-_{IJ}\phi^J\epsilon^* = 0 \ . \tag{6.7}$$

El sistema se completa con una ecuación diferencial para η. Para que la condición de normalización (B.40) sea compatible con la KSE (6.4) es necesario que

$$(D_\mu - \mathrm{i}\zeta_\mu)\,\eta + a_\mu\epsilon = 0 \tag{6.8}$$

donde a_μ es un vector que posee las cargas de η duplicadas. El vector a_μ queda determinado por las condiciones de integrabilidad de esta ecuación, las cuales deben ser compatibles con aquellas de la ecuación diferencial de ϵ, ec. (6.4).

Antes de comenzar el análisis sistemático de las ecuaciones anteriores es interesante comparar la ec. (6.4) con la ec. (4.55), así como sus respectivas condiciones de integrabilidad. Ambas condiciones de integrabilidad son muy similares en estructura, las dos relacionan a la conexión de espín con conexiones $U(1)$. Sin embargo, se distinguen por la dimensionalidad y signatura. Se espera entonces conseguir en el caso nulo dos tipos de soluciones: Configuraciones con una métrica de holonomía $U(1)$ sobre un subespacio bidimensional tipo espacial, como en el caso tipo tiempo, y configuraciones con holonomía $U(1)$ en un subespacio bidimensional nulo, la cual es la nueva posibilidad que permite la signatura Lorentziana. A estas dos posibilidades las denominaremos B y A, respectivamente, por razones que quedarán claras más adelante.

De la ec. (6.4) podemos ver que l es covariantemente constante

$$\nabla_\mu l_\nu = 0 \tag{6.9}$$

Por lo tanto es a la vez un vector de Killing y un gradiente. Introducimos las coordenadas

$$du = l \ , \tag{6.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial v} = l\cdot\partial \ . \tag{6.11}$$

Rápidamente se puede extraer de las KSEs (6.4)-(6.7) información acerca de la forma que adquieren los campos supersimétricos. La KSE (6.6) implica que

$$d\tau = Al + B\bar{m} \tag{6.12}$$

Esta ecuación divide al problemas en dos casos: El caso A en el cual $B = 0$ y el caso B en el cual $A = 0$. Se puede ver que el caso en el que ninguna de las dos variables sea igual a cero es equivalente al caso B haciendo una transformación de Lorentz local. Debido a que la conexión Q depende de τ, la holonomía es diferentes en estos dos casos.

Si se contrae a (6.5) con $\bar{\epsilon}$ y al complejo conjugado de (6.7) con $\bar{\epsilon}\gamma^{\mu}$ se obtiene el par

$$\phi^I F^+_{\mu\nu\, IJ} l^{\nu} = 0 \,, \tag{6.13}$$

$$\epsilon^{IJKL} \phi_J F^+_{\mu\nu\, KL} l^{\nu} = 0 \,. \tag{6.14}$$

Estas dos ecuaciones implican que

$$i_l F^+_{IJ} = 0 \tag{6.15}$$

y la solución más general a esta ecuación sobre la tétrada nula es

$$F^+_{IJ} = \mathcal{F}_{IJ} l \wedge \bar{m} \quad , \quad F^-_{IJ} = \tilde{\mathcal{F}}_{IJ} l \wedge m \tag{6.16}$$

donde $\mathcal{F}_{IJ}$ es una matriz antisimétrica de escalares que se transforma como un tensor bajo $SU(4)$ y $\tilde{\mathcal{F}}_{IJ}$ es su dual-$SU(4)$. Con este resultado la KSE (6.5) deviene en una ecuación puramente tensorial,

$$\left(\partial_{\mu} - \mathrm{i}\zeta_{\mu}\right) \phi_I - \frac{1}{4\sqrt{2}} \sqrt{\Im\mathrm{m}\tau}\, \mathcal{F}_{IJ} \phi^J l_{\mu} = 0 \tag{6.17}$$

y la KSE (6.7) queda completamente resuelta.

Observe que previamente, en la sección II.3, se han obtenido las condiciones de integrabilidad de esta teoría, específicamente la ec. (3.62), independientemente de la parametrización (B.32). Por otra parte tenemos la KSE (6.4) la cual incluye a la conexión ζ, pero su presencia en ella no es más que el reflejo de esta parametrización. Por lo tanto, si se compara a la condición de integrabilidad de (6.4) con la condición general (3.62) se puede extraer información acerca de ζ, al menos en términos de su curvatura. Primero advertimos que si se usa la expresión supersimétrica para el campo de Maxwell (6.16) en el segundo término de la condición de integrabilidad (3.62),

$$F^+_{IJ[\mu}{}^{a} F^{-KJ\, b}_{\nu]} \gamma_{ab} \epsilon \tag{6.18}$$

entonces resulta que éste es cero; la siguiente identidad de Fierz

$$l_a \gamma^{ab} \epsilon = 3 l^b \epsilon \,, \tag{6.19}$$

la cual implica

$$m_a l_b \gamma^{ab} \epsilon = \bar{m}_a l_b \gamma^{ab} \epsilon = 0 \tag{6.20}$$

puede ser útil para tal fin. La proyección a ϕ^I divide a la ec. (3.62) en dos, si se sustituye en las dos condiciones resultantes la expresión para el campo de Maxwell supersimétrico se obtiene (usando $l \cdot \gamma\epsilon = 0$)

$$\left[R_{\mu\nu}{}^{ab}\gamma_{ab} + 4\mathrm{i}\,(dQ)_{\mu\nu}\right]\epsilon = 0\ , \tag{6.21}$$

$$\left(\partial_{[\mu}\mathcal{F}_{IJ}l_{\nu]} + B\mathcal{F}_{IJ}\bar{m}_{[\mu}l_{\nu]}\right)\phi^J = 0 \tag{6.22}$$

Comparando la condición de integrabilidad (6.21) con aquella de (6.4) se obtiene que la conexión ζ es trivial,

$$d\zeta = 0 \tag{6.23}$$

y puede ser anulada con una fijación gauge apropiada de la simetría de parametrización (B.34).

Una vez que la conexión ζ ha sido eliminada replanteamos las KSEs que nos quedan por resolver

$$D_\mu\epsilon = 0\ , \tag{6.24}$$

$$\partial_\mu\phi_I - \frac{1}{4\sqrt{2}}\sqrt{\Im\mathrm{m}\tau}\mathcal{F}_{IJ}\phi^J l_\mu = 0 \tag{6.25}$$

$$D_\mu\eta + a_\mu\epsilon = 0\ . \tag{6.26}$$

La KSE (6.26) se soporta sobre la condición de integrabilidad

$$\left[R_{\mu\nu}{}^{ab}\gamma_{ab} - 4\mathrm{i}\,(dQ)_{\mu\nu}\right]\eta - 4\,(da)_{\mu\nu}\,\epsilon = 0\ . \tag{6.27}$$

La KSE (6.25) implica que ϕ_I y la combinación $\sqrt{\Im\mathrm{m}\tau}\mathcal{F}_{IJ}$ son funciones sólo de u. Más aún, podemos resolver a esta ecuación para $\mathcal{F}_{IJ}$ como sigue

$$\sqrt{\Im\mathrm{m}\tau}\mathcal{F}_{IJ} = 8\sqrt{2}\dot{\phi}_{[I}\phi_{J]} \tag{6.28}$$

donde el punto denota derivación respecto de u.

Podemos arrojar la forma genérica de la métrica. El hecho más importante es que existe un vector nulo, l, covariantemente constante. Las métricas que admiten un vector nulo covariantemente constante son conocidas como métricas *pp-wave* y fueron introducidas por Brinkmann [60]. Una métrica *pp*-wave cuadridmensional genérica tiene la forma

$$ds^2 = 2du\,(dv + Kdu + \omega) - 2e^{2U}dzd\bar{z}\ , \tag{6.29}$$

$$\omega = \omega_z dz + \omega_{\bar{z}}d\bar{z} \tag{6.30}$$

donde todas las funciones en la métrica son independientes de v (ya que l es un vector de Killing). Bien K o la uno-forma ω podrían, en principio, ser eliminadas por una transformación de coordenadas. Sin embargo hay que tener cuidado en considerar que hemos usado parte de la libertad para redefinir a la tétrada nula, por lo tanto hay que asegurar que las condiciones de integrabilidad de la tétrada se verifican al escoger a U, K y ω.

Para hacer a la tétrada nula compatible con la métrica de la *pp*-wave es necesario que la tétrada nula se escriba en las coordenadas como

$$l = du \tag{6.31}$$

$$n = dv + Kdu + \omega \tag{6.32}$$

$$m = e^{U} dz \tag{6.33}$$

en cuanto a uno-formas, y como vectores tangentes

$$l = \partial_v \tag{6.34}$$

$$n = \partial_u - K\partial_v \tag{6.35}$$

$$m = -e^{-U}\left(\partial_{\bar{z}} - \omega_{\bar{z}}\partial_v\right) \; . \tag{6.36}$$

A partir de ahora estudiaremos los casos A y B por separado, en todo el análisis se suprimirán términos proporcionales a productos del tipo AB.

1. Caso A
   La ecuación (6.12) implica que $\tau = \tau(u)$ y $A = \dot{\tau}$. La conexión Q se hace trivial, $dQ = 0$ y puede ser anulada fijando la simetría $U(1)$ local asociada a $SL(2,\mathbb{R})$. Consequentemente también $\mathcal{F}_{IJ}$ depende sólo de u y la condición de integrabilidad (6.22) queda automáticamente resuelta.

   Una vez que la conexión Q se ha eliminado, las KSEs remanentes son

$$\nabla_\mu \epsilon = 0 \; , \tag{6.37}$$

$$\nabla_\mu \eta + a_\mu \epsilon = 0 \tag{6.38}$$

   y sus condiciones de integrabilidad

$$R_{\mu\nu}{}^{ab}\gamma_{ab}\epsilon = 0 \tag{6.39}$$

$$R_{\mu\nu}{}^{ab}\gamma_{ab}\eta - 4\left(da\right)_{\mu\nu}\epsilon = 0 \; . \tag{6.40}$$

   De las KSEs (6.37) y (6.38) se derivan las ecuaciones

$$dm = l \wedge a \tag{6.41}$$

$$dn = m \wedge \bar{a} + \bar{m} \wedge a \tag{6.42}$$

las cuales han de ser compatibles con (6.31)-(6.33), por tanto la primera de ellas implica

$$du \wedge a - e^U dU \wedge dz = 0 \tag{6.43}$$

y esta ecuación implica a su vez $\partial_{\bar{z}} U = \partial_z U = 0$, de modo que U es sólo función de u. Además a sólo tiene dos componentes

$$a = a_u du + a_z dz \tag{6.44}$$

donde $a_z = e^U \dot{U}$ es real. La ec. (6.42) implica

$$e^U du \wedge (\bar{a}_u dz + a_u d\bar{z}) + dK \wedge du + d\omega = 0 \ . \tag{6.45}$$

Gracias a la simetría gauge que se tiene sobre ω podemos establecer la solcuión a la ecuación anterior como

$$\omega = 0 \ , \tag{6.46}$$

$$a_u = e^{-U} \partial_{\bar{z}} K \ . \tag{6.47}$$

Ahora vamos a estudiar qué nos dicen las condiciones de integrabilidad (6.39) y (6.40). Si contraemos la primera con $\bar{\epsilon}\gamma^\nu$ y $\bar{\eta}\gamma^\nu$ obtenemos

$$R_{\mu\nu} l^\nu = R_{\mu\nu} m^\nu = R_{\mu\nu} \bar{m}^\nu = 0 \tag{6.48}$$

de modo que sólo tenemos una componente no nula del tensor de Ricci, R_{uu}. Las mismas contracciones aplicadas ahora a (6.40) nos dicen que

$$(da)_{\mu\nu} \, l^\nu = 0 \tag{6.49}$$

$$(da)_{\mu\nu} \, \bar{m}^\nu = -\frac{1}{2} R_{\mu\nu} n^\nu \ . \tag{6.50}$$

Todas estas condiciones sobre el tensor de Ricci y el vector a se cumplen automáticamente con lo que tenemos hasta ahora para U, ω y a.

Resumimos las propiedades de una configuración supersimétrica para el caso A:

(a) El axidilatón es función sólo de u.

(b) El campo de Maxwell queda determinado por los escalares $\mathcal{F}_{IJ}$, los cuales son funciones sólo de u,

(c) La uno-forma ω es cero, la función K es arbitraria.

(d) El factor conforme U es función sólo de u.

(e) La métrica de *pp*-wave adquiere la forma

$$ds^2 = 2du\,(dv + Kdu) - 2e^{2U}dzd\bar{z}\ . \tag{6.51}$$

2. Caso B
La ec. (6.12) implica que $\tau = \tau(\bar{z})$ y $B = e^{-U}\tau'$. Las KSEs para este caso son

$$D_\mu\epsilon = 0\ , \tag{6.52}$$

$$D_\mu\eta + a_\mu\epsilon = 0\ . \tag{6.53}$$

y sus condiciones de integrabilidad

$$\left[R_{\mu\nu}{}^{ab}\gamma_{ab} + 4\mathrm{i}\,(dQ)_{\mu\nu}\right]\epsilon = 0\ , \tag{6.54}$$

$$\left[R_{\mu\nu}{}^{ab}\gamma_{ab} - 4\mathrm{i}\,(dQ)_{\mu\nu}\right]\eta - 4\,(da)_{\mu\nu}\,\epsilon = 0\ . \tag{6.55}$$

B resulta

$$B = \frac{\bar{h}(\bar{z})}{\sqrt{\Im\mathrm{m}\tau}f(u)} \tag{6.56}$$

y el factor conforme

$$e^U = \sqrt{\Im\mathrm{m}\tau}f(u) \tag{6.57}$$

donde $h(z)$ y $f(u)$ son funciones arbitrarias, f siendo real. K se hace cero y ω es cerrada

$$\partial_{[z}\omega_{\bar{z}]} = 0 \tag{6.58}$$

lo cual implica que es localmente exacta y podemos eliminarla. a es proporcional ahora tanto a l como a m, sus componentes están dadas por

$$D = -e^{-U}\dot{\omega}_{\bar{z}} \quad , \quad a_m = \frac{\dot{f}}{f}\ . \tag{6.59}$$

Ahora este valor de a debe verificar la condición de integrabilidad del espinor η la cual se obtiene de (6.26). La conclusión es que f debe ser constante. Además todas la ϕ_I deben ser constantes y el campo de Maxwell $\mathcal{F}_{IJ}$ se hace cero.

Resumimos las propiedades de las configuraciones supersimética del caso B:

1. El axidilatón sólo depende del subespacio espacial bidimensional y sobre éste es antiholomorfo.

2. El campo de Maxwell es cero.

3. Los objetos K y ω de la métrica son cero.

4. El factor conforme U viene dado por el dilatón en la forma

$$U(z,\bar{z}) = -\frac{1}{2}\phi(z,\bar{z}) \tag{6.60}$$

5. La métrica se escribe como

$$ds^2 = 2dudv - 2e^{-\phi(z,\bar{z})}dzd\bar{z} \tag{6.61}$$

donde el factor $e^{-\phi(z,\bar{z})}$ es armónico sobre el plano $(z,\bar{z})$.

6.2 Soluciones supersimétricas

En el caso nulo las KSIs, ecs. (3.55)-(3.59), nos dicen que todas las configuraciones supersimétricas resuelven a la ecuación del axidilatón y a todas las ecuaciones de Einstein excepto por la componente $\mathcal{E}_{uu}$. Ahora veamos los dos situaciones posibles en el caso nulo.

1. Caso A
En este caso se verifican también las ecuaciones de Maxwell. La ecuación de Einstein remanente $\mathcal{E}_{uu}$ se resuelve si U es constante y

$$2\partial_z\partial_{\bar{z}}K = \frac{|\dot{\tau}|^2}{(\Im\mathrm{m}\tau)^2} + \frac{1}{16}\Im\mathrm{m}\tau\mathcal{F}_{IJ}\mathcal{F}^{IJ} \; . \tag{6.62}$$

La métrica adquiere entonces la forma

$$ds^2 = 2du\,(dv + Kdu) - 2dzd\bar{z} \; . \tag{6.63}$$

2. Caso B
En este caso todas las ecuaciones de movimiento se satisfacen. La métrica supersimétrica que es solución de las ecuaciones de Einstein es (6.61). Estas soluciones supersimétricas corresponden a cuerdas cósmicas del tipo de Teoría de Cuerdas (*stringy cosmic strings*), las cuales fueron introducidas en [61]. Si se cambian las coordenadas nulas por cordenadas de espacio y tiempo se tiene la solución (6.61) se reescribe como

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - 2e^{-\phi(z,\bar{z})}dzd\bar{z} \tag{6.64}$$

y podemos ver que la solución tiene simetría a lo largo de x. Esta solución es una cuerda solitónica a lo largo del eje x. En Supergravedad IIB hay una solución análoga que representa a una D7-brana, una discusión de esta solución puede verse en [53].

VII

Resultados y Conclusiones

Por medio del análisis exhaustivo de las Ecuaciones de Espinores de Killing hemos podido caracterizar a todas las configuraciones supersimétricas de la Supergravedad $N = 4$, $d = 4$. En la construcción hemos preservado las dos simetrías globales de la teoría: $SU(4)$ y $SL(2,\mathbb{R})$. La clasificación se divide en dos grupos dependiendo de si el vector de Killing $V^a = \mathrm{i}\bar{\epsilon}^I\gamma^a\epsilon_I$, donde ϵ_I son los espinores de Killing, es tipo tiempo o tipo luz.

1. Caso Tipo Tiempo

   En el caso tipo tiempo V define la traslación temporal y es una simetría de toda la configuración supersimétrica

   $$\pounds_V g = \pounds_V \tau = \pounds_V F_{IJ} = 0 \; .$$

   La mé-trica cuadridimensional adquiere la forma conformestacionaria y la métrica espacial tridimensional factoriza como el producto de una metríca unidimensional por otra bidimensional. De esta manera todas las configuraciones supersimétricas están caracterizadas por:

   (a) El axidilatón τ, el cual puede tomar valores arbitrarios,

   (b) seis escalares complejos M_{IJ},

   (c) el factor conforme de la métrica bidimensional espacial $U(z,\bar{z})$ y

   (d) una variable real λ.

   Los seis escalares M_{IJ} han de verificar

   $$\epsilon^{IJKL} M_{IJ} M_{KL} = 0 \; .$$

La métrica conforme-estacionaria es

$$ds^2 = |M|^2 \left(dt + \omega_i dx^i\right)^2 - \frac{1}{|M|^2}\gamma_{ij} dx^i \ ,$$

donde $|M|^2 \equiv M_{IJ}M^{IJ} = \frac{1}{2}V^2$. La uno-forma espacial ω queda determinada, módulo gradientes, por

$$\partial_{[i}\omega_{j]} = -\frac{2}{|M|^2}\epsilon_{ijk}\left(Q^k - \xi^k\right) \ ,$$

donde el dual de Hodge se refiere a la métrica espacial γ. La métrica espacial tiene holonomía $U(1)$, de modo que factoriza como el producto de una métrica unidimensional por una bidimensional

$$\gamma_{ij}dx^i dx^j = dx^2 + 2e^{2U(z,\bar{z})}dzd\bar{z} \ .$$

El campo de Maxwell supersimétrico puede ser descrito en términos de potenciales escalares eléctrico y magnético

$$i_V F_{IJ} = dE_{IJ} \ , \quad i_V \tilde{F}_{IJ} = dB_{IJ} \ ,$$

estos potenciales son

$$\begin{aligned} E_{IJ} &\equiv \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\Im\mathrm{m}\tau}}\left(M_{IJ} + \tilde{M}_{IJ}\right) \ , \\ B_{IJ} &\equiv \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\Im\mathrm{m}\tau}}\left(\tau M_{IJ} + \bar{\tau}\tilde{M}_{IJ}\right) \ , \end{aligned}$$

donde $\tilde{M}_{IJ}$ es el dual-$SU(4)$ de M_{IJ}. Estos potenciales forman un doblete de $SL(2,\mathbb{R})$ y se transforman como un tensor de $SU(4)$.

Todas estas cantidades están sujetas a las condiciones

$$\begin{aligned} \xi &= \pm\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\partial_z U dz - \partial_{\bar{z}} U d\bar{z}\right) + \frac{1}{2}d\lambda \ , \\ \nabla_i &\left(\frac{Q^i - \xi^i}{|M|^2}\right) = 0 \end{aligned}$$

la cuales garantizan la existencia de la configuración supersimétrica. Aunque λ carece de significado físico, su presencia nos garantiza que se preserva la simetría $SL(2,\mathbb{R})$.

Haber logrado la clasificación de todas las configuraciones supersimétricas de la teoría nos ha permitido perfilar el problema de encontrar soluciones supersimétricas, reduciendo las complicadas ecuaciones de campo originales a un conjunto de ecuaciones más sencillas, de hecho hemos podido reportar nuevas soluciones supersimétricas a parte de reencontrar las que presentó Tod [18] bajo su condición de rigidez interna.

Analizando las Identidades de Espinores de Killing, las cuales están contenidas dentro de las condiciones de integrabilidad de las Ecuaciones de Espinores de Killing, hemos demostrado que para una configuración supersimétrica todas las ecuaciones de movimiento son proporcionales a las ecuaciones de Maxwell, de modo que todas las soluciones supersimétricas de éstas constituyen todas las soluciones supersimétricas de la teoría. Las ecuaciones de Maxwell supersimétricas adquieren la forma simple

$$\mathcal{M}_{IJ} = |M|^2 \, {}^\star V \left[\sqrt{\Im\mathrm{m}\tau}\, \tilde{n}_{(3)\,IJ} - \frac{\mathrm{i}}{2} \left(M_{IJ} + \tilde{M}_{IJ} \right) \bar{e}_{(3)} \right]$$

donde

$$\begin{aligned} e_{(3)} &\equiv (\nabla_i - 4\mathrm{i}\xi_i) \left(\frac{\partial^i \bar{\tau}}{|N|^2} \right) \, , \\ n^{IJ}_{(3)} &\equiv (\nabla_i + 4\mathrm{i}\xi_i) \left(\frac{\partial^i N^{IJ}}{|N|^2} \right) \, . \end{aligned}$$

De modo que si el conjunto $\{\tau, M_{IJ}, U, \lambda\}$ sujeto a las condiciones expresadas anteriormente resuelve al par $\left\{ e_{(3)}, n^{IJ}_{(3)} \right\}$ entonces se tiene una solución supersimétrica de la teoría.

Hemos podido obtener soluciones supersimétricas concretas al resolver explícitamente la condición de integrabilidad con el siguiente ansatz

$$M_{IJ} = \left[\frac{|k|^2}{\Im\mathrm{m}\left(\mathcal{H}_2 \bar{\mathcal{H}}_1\right)} \frac{\mathcal{H}_1}{\bar{\mathcal{H}}_1} \right]^{1/2} k_{IJ} \quad , \quad U = \mp \frac{1}{2} \ln |k|^2$$

donde $k_{IJ} = k_{IJ}(z)$ y $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son dos funciones complejas. Los únicos vínculos sobre estas variables son la condición de integrabilidad para ω y

$$\begin{aligned} &\Im\mathrm{m}\left(\mathcal{H}_2 \bar{\mathcal{H}}_1\right) > 0 \\ &\epsilon^{IJKL} k_{IJ} k_{KL} = 0 \, , \end{aligned}$$

Hemos caracterizado tres tipos de soluciones usando estas variables. Las soluciones, agrupadas en conjuntos invariantes bajo $SL(2, \mathbb{R})$, son:

(a) $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ constantes, k_{IJ} arbitraria.

(b) $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ lineales en x, k_{IJ} arbitraria.

(c) $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ armónicas, k_{IJ} constante.

En los grupos 1 y 2 exigimos que las funciones holomorfas k_{IJ} no den lugar a que el proyector $\mathcal{J}_I{}^J$ sea constante. De esta manera el grupo 3 coincide con las soluciones de Tod [18] las cuales están caracterizadas por la hipótesis de rigidez interna, esto es, que $\mathcal{J}_I{}^J$ se constante.

2. Caso Nulo

   En este caso la métrica supersimétrica acepta un vector nulo covariantemente constante, el cual es precisamente el vector V, por lo tanto la métrica supersimétrica corresponde a una *pp*-wave la cual puede ser escrita en general como

$$\begin{aligned} ds^2 &= 2du\,(dv + Kdu + \omega) - 2e^{2U}dzd\bar{z}\ , \\ \omega &= \omega_z dz + \omega_{\bar{z}} d\bar{z}\ . \end{aligned}$$

   Una coordenada del cono de luz, v, se adapta a V y la otra, u también se obtiene de V ya que éste es un gradiente. De modo similar al caso tipo tiempo, en el caso nulo se tiene holonomía $U(1)$ en las hipersuperficies ortogonales a V, sin embargo, ahora hay dos posibilidades: el caso A en el cual la holonomía $U(1)$ corresponde a un subespacio bidimensinal nulo y el caso B que corresponde a un subespacio bidimensional espacial. Las cantidades que definen a la configuración, caso por caso son

   (a) Caso A

      i. El axidilatón es función sólo de u.
      ii. El campo de Maxwell queda determinado por los escalares $\mathcal{F}_{IJ}$, los cuales son funciones sólo de u,
      iii. La uno-forma ω es cero, la función K es arbitraria.
      iv. El factor conforme U es función sólo de u.
      v. La métrica de *pp*-wave adquiere la forma

$$ds^2 = 2du\,(dv + Kdu) - 2e^{2U}dzd\bar{z}\ .$$

   (b) Caso B

      i. El axidilatón sólo depende del subespacio espacial bidimensional y sobre éste es antiholomorfo.
      ii. El campo de Maxwell es cero.
      iii. Los objetos K y ω de la métrica son cero.
      iv. El factor conforme U viene dado por el dilatón en la forma

$$U = -\frac{1}{2}\phi$$

v. La métrica se escribe como

$$ds^2 = 2dudv - 2e^{-\phi}dzd\bar{z}\ .$$

En el caso nulo las Identidades de Espinores de Killing nos aseguran que en general la ecuación del axidilatón está resuelta para una configuración supersimétrica así como también las ecuaciones de Einstein excepto por una componente, $\mathcal{E}^{ll}$. La clasificación se refina aún más al separar los casos A y B:

(a) Caso A
Las ecuaciones de Maxwell también se satisfacen y la componente $\mathcal{E}^{ll}$ de las ecuaciones de Einstein se resuelve si

$$2\partial_z\partial_{\bar{z}}K = \frac{|\dot{\tau}|^2}{(\Im\mathrm{m}\tau)^2} + \frac{1}{16}\Im\mathrm{m}\tau\mathcal{F}_{IJ}\mathcal{F}^{IJ}\ .$$

(b) Caso B
Todas las ecuaciones de movimiento se satisfacen. La métrica se puede escribir como

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - 2e^{-\phi(z,\bar{z})}dzd\bar{z} \tag{7.1}$$

Estas soluciones supersimétricas corresponden a cuerdas cósmicas del tipo de Teoría de Cuerdas (*stringy cosmic strings*) [61] y son análogas a las D7-branas solitónicas de la Supergravedad IIB.

Apéndice A

Convenios e identidades

A.1 Definiciones básicas

- Utilizamos la signatura $(+---)$. η es la métrica de Minkowski. Las letras griegas en minúscula μ, ν, ρ... son índices tensoriales en una base coordenada cuadridimensional, en corto, índices curvos. Letras latinas en minúscula del tipo a, b, c... son índices tensoriales en una tétrada, ó índices planos. Se pasa de indices curvos a planos y viceversa con la tétrada ${e_\mu}^a$ y su inversa ${e_a}^\mu$ las cuales verifican

$$g_{\mu\nu} = {e_\mu}^a {e_\nu}^b \eta_{ab} \ , \tag{A.1}$$

$$\eta_{ab} = {e_a}^\mu {e_b}^\nu g_{\mu\nu} \tag{A.2}$$

  Cuando trabajamos en el sector espacial utilizamos índices latinos en minuscula del tipo i, j, k... con las cuales denotamos tanto componentes curvas como planas; del propio contexto debería quedar claro cuándo nos referimos a una o a otra; por ejemplo ∂_i ó dx^i se refieren a componentes curvas mientras que γ^i a planas. En el caso de que aún pueda haber confusión, en particular cuando las componenetes están mezcladas, se subraya a las componentes curvas, por ejemplo

$$g_{\underline{i}\underline{j}} = {e_{\underline{i}}}^i {e_{\underline{j}}}^j \delta_{ij} \ . \tag{A.3}$$

- Cometemos la siguiente la siguiente ligereza de notación, esperando no haya lugar a confusión: Denotamos con el mismo símbolo a un vector tangente y a la uno-forma asociada a él vía la métrica y viceversa, por ejemplo si V es un vector tangente entonces también se tiene la uno-forma $V = g(V, \ )$; en coordenadas: $V = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ y $V = V_\mu dx^\mu$, donde $V_\mu \equiv g_{\mu\nu} V^\nu$. Lo mismo hacemos para tensores en general.

- La contracción entre vectores tangentes y uno-formas la denotamos con un punto central $\cdot$. Esta contracción bien puede ser la acción de una uno forma sobre un vector,

$$\alpha \cdot A \equiv \alpha(A) = \alpha_\mu A^\mu \tag{A.4}$$

donde A es un vector tangente y α una uno-forma, o bien el producto escalar entre vectores dado por la métrica

$$A \cdot B \equiv g(A, B) = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu \tag{A.5}$$

o entre uno-formas dado por la métrica inversa

$$\alpha \cdot \beta \equiv g^{-1}(\alpha, \beta) = g^{\mu\nu} \alpha_\mu \beta_\nu ; . \tag{A.6}$$

Estas contracciones las extendemos en la forma obvia a otros tensores, por ejemplo

$$F \cdot F = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \ . \tag{A.7}$$

- El producto interno entre una k-forma y un vector se hace evaluando la primera entrada de la k-forma,

$$i_V \omega \equiv \omega(V, \ , \ldots,) \ , (i_V \omega)_{\mu_1 \cdots \mu_{k-1}} = V^\alpha \omega_{\alpha \mu_1 \cdots \mu_{k-1}} \tag{A.8}$$

- El espinor adjunto de Dirac es

$$\bar{\epsilon} = \mathrm{i} \epsilon^\dagger \gamma^0 \ . \tag{A.9}$$

- La simetrización y la antisimetrización las hacemos con peso uno,

$$(a_1 \cdots a_n) \equiv \frac{1}{n!} \sum_P P\left(a_1 \cdots a_n\right) \ , \tag{A.10}$$

$$[a_1 \cdots a_n] \equiv \frac{1}{n!} \sum_P \mathrm{sgn}(P) P\left(a_1 \cdots a_n\right) \ , \tag{A.11}$$

donde P es una permutación cualquiera. Por ejemplo $[ab] = \frac{1}{2}(ab - ba)$.

A.2 Subir y bajar índices de $SU(4)$

En $SU(4)$, el cual es un grupo unitario, una representación y su compleja conjugada se transforman de manera inversa. Por lo tanto con la operación de tomar el complejo conjugado se puede definir un producto escalar invariante de $SU(4)$. En este sentido esta operación hace el papel de métrica para tensores de $SU(4)$. Una forma apropiada de representar el complejo conjugado es entonces subiendo y bajando los índices de $SU(4)$, por ejemplo $X^I = X_I{}^*$. Por convenio queda establecido que objetos con el índice de $SU(4)$ abajo pertenecen a la representación fundamental mientras que los de índice arriba pertenecen a la inversa o antifundamental. Esta practica la hacemos con todos los tensores de $SU(4)$. Así, uno inmediatamente advierte que un producto del tipo

$$A^I B_I$$

es invariante de $SU(4)$.

Aparte de la métrica, hay otro objeto invariante en $SU(4)$: el tensor totalmente antisimétrico ϵ_{IJKL}, $\epsilon_{1234} = +1$. Este es invariante debido a que las matrices de $SU(4)$ tienen determinante igual a 1. ϵ_{IJKL} es un objeto real así que es irrelevante denotarlo con índices arriba o abajo. Para un tensor de $SU(4)$ perteneciente a la representación bifundamental antisimétrica, como es el caso de los vectores A_{IJ} y los escalares M_{IJ} y k_{IJ}, se define el dual de $SU(4)$

$$\tilde{M}_{IJ} = \frac{1}{2}\epsilon_{IJKL}M^{KL} \ , \quad \tilde{M}^{IJ} = \frac{1}{2}\epsilon^{IJKL}M_{KL} \ . \tag{A.12}$$

Oberserve que el dual de $SU(4)$ no cambia de representación. En particular el campo vectorial A_{IJ} es autodual de $SU(4)$[1].

A.3 Conexiones afín y de Lorentz

∇ es la derivada covariante total (transformaciones generales de coordenadas y transformaciones de Lorentz locales), se construye con la conexión afín compatible con la métrica $\Gamma_{\mu\nu}{}^{\alpha}$ y la conexión de espin $\omega_{\mu a}{}^{b}$ y acción sobre tensores y espinores viene dada por

$$\nabla_\mu A^\nu = \partial_\nu A^\nu + \Gamma_{\mu\alpha}{}^{\nu} A^\alpha \tag{A.13}$$
$$\nabla_\mu A^a = \partial_\nu A^a + \omega_{\mu b}{}^{a} A^b \tag{A.14}$$
$$\nabla_\mu \psi = \partial_\mu \psi - \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{ab}\gamma_{ab}\psi \ . \tag{A.15}$$

Utilizamos el formalismo 1.5 en el cual la dinámica fija a la conexión de espín (y a la afín), en particular la torsión de la conexión es proporcional a los fermiones y para el caso supersimétrico, en el cual se consideran nulos a los fermiones, la conexión no tiene torsión y por lo tanto la conexión afín es la de Levi-Civita, $\Gamma_{[\mu\nu]}{}^{\alpha} = 0$.

La curvatura de la conexión sin torsión viene definida por

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]A^\alpha = R_{\mu\nu\beta}{}^{\alpha}(\Gamma)A^\beta \tag{A.16}$$
$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\psi = -\frac{1}{4}R_{\mu\nu}{}^{ab}(\omega)\gamma_{ab}\psi \ . \tag{A.17}$$

[1]El símbolo $\tilde{F}_{IJ}$ denota el dual de $SL(2,\mathbb{R})$.

Explícitimente resulta

$$R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta}(\Gamma) = 2\partial_{[\mu}\Gamma_{\nu]\alpha}{}^{\beta} - 2\Gamma_{[\mu|\alpha}{}^{\rho}\Gamma_{\nu]\rho}{}^{\beta} \ , \tag{A.18}$$

$$R_{\mu\nu a}{}^{b}(\omega) = 2\partial_{[\mu}\omega_{\nu]a}{}^{b} - 2\omega_{[\mu|a}{}^{c}\omega_{\nu]c}{}^{b} \ . \tag{A.19}$$

Las conexiones afín y de espín están relacionadas por la condición

$$\nabla_{\mu} e_{\nu}{}^{a} = 0 \ , \tag{A.20}$$

tal que tenemos las relación inhomogénea entre conexiones

$$\omega_{\mu a}{}^{b} = \Gamma_{\mu\alpha}{}^{\beta} e_{a}{}^{\alpha} e_{\beta}{}^{b} + e_{a}{}^{\alpha}\partial_{\mu} e_{\alpha}{}^{b} \ , \tag{A.21}$$

y a su vez las curvaturas se relaciones homogéneamente

$$R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta}(\Gamma) = R_{\mu\nu a}{}^{b}(\omega) e_{\alpha}{}^{a} e_{b}{}^{\beta} \ . \tag{A.22}$$

A.4 Dual de Hodge

Las k-formas se normalizan de acuerdo a

$$F = \frac{1}{k!} F_{\mu_1 \cdots \mu_k} dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_k} \ . \tag{A.23}$$

El tensor completamente antisimétrico cuadridimensional se defiene con índices planos como

$$\epsilon^{0123} = +1 \Rightarrow \epsilon_{0123} = -1 \tag{A.24}$$

entendiéndose que trabajamos en una base real. Con índices curvos viene dado por

$$\epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_4} = \epsilon^{a_1 \cdots a_4} e_{a_1}{}^{\mu_1} \cdots e_{a_4}{}^{\mu_4} \ , \epsilon_{\mu_1 \cdots \mu_4} = g_{\mu_1 \nu_1} \cdots g_{\mu_4 \nu_4} \epsilon^{\nu_1 \cdots \nu_4} \tag{A.25}$$

$$\epsilon^{txyz} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \ , \epsilon_{txyz} = -\sqrt{|g|} \tag{A.26}$$

Por lo tanto depende de la métrica y nos da un elemento de volumen. El dual de Hodge de una k-forma F se denota por ${}^{\star}F$ y viene definido por

$${}^{\star}F^{\mu_1 \cdots \mu_{(d-k)}} = \frac{1}{k!} \epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_d} F_{\mu_{(d-k+1)} \cdots \mu_d} \tag{A.27}$$

A.5 Tétradas nulas

Para una métrica Lorentziana una tétrada nula viene dada por los cuatro vectores linealmente independientes $\{l, n, m, \bar{m}\}$ donde l y n son reales mientras que m y $\bar{m}$

con complejos conjugados uno del otro. Estos vectores verifican

$$l^2 = n^2 = m^2 = \bar{m}^2 = 0 \tag{A.28}$$

$$m \cdot l = \bar{m} \cdot l = 0 \tag{A.29}$$

$$m \cdot n = \bar{m} \cdot n = 0 \tag{A.30}$$

$$l \cdot n = 1 \tag{A.31}$$

$$m \cdot \bar{m} = -1 \tag{A.32}$$

de modo que la métrica tangente sobre esta tétrada nula toma la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.33}$$

bajo el ordenamiento $(l, n, m, \bar{m})$. En este caso el elemento de volumen local resulta

$$\epsilon^{lnm\bar{m}} = \mathrm{i}\ . \tag{A.34}$$

A.6 Componentes autoduales

Para cualquier dos-forma F definimos

$$F^+ = \frac{1}{2}\left(F + \mathrm{i}\,{}^\star F\right) \tag{A.35}$$

$$F^- = \frac{1}{2}\left(F - \mathrm{i}\,{}^\star F\right) \tag{A.36}$$

tal que

$${}^\star F^+ = -\mathrm{i} F^+ \tag{A.37}$$

$${}^\star F^- = +\mathrm{i} F^-\ . \tag{A.38}$$

Note que las condiciones de auto- o anti-auto-dualidad en cuatro dimensiones con signatura Lorentziana sólo tienen sentido en la versión compleja expresada arriba.

Las dos-formas autoduales y anti-autoduales son ortogonales respecto a la métrica

$$F^+ \cdot G^- = 0\ . \tag{A.39}$$

Ademas las siguiente propiedad es útil

$$F^+_{\alpha[\mu} G^{-\ \alpha}_{\nu]} = 0\ . \tag{A.40}$$

A.7 Componentes eléctrica y magnética

Dados una métrica, en nuestro caso Lorentziana, y un vector no nulo V uno puede descomponer a cualquier dos-forma respecto a este vector de acuerdo a la siguiente identidad

$$F = \frac{1}{V^2}\left[i_V F \wedge V - {}^\star\left(i_V {}^\star F \wedge V\right)\right] \ . \tag{A.41}$$

En particular nos interesa usar esta identidad para el caso tipo tiempo en donde V es el generador de las traslaciones temporales, de modo que la identidad anterior desglosa al campo de Maxwell en sus componentes eléctrica y magnética, en un sentido covariante.

Al aplicar la identidad anterior al campo de Maxwell es importante determinar si ella es compatible con la simetría $SL(2,\mathbb{R})$, la cual afecta a F y a ${}^\star F$ de manera distinta. Sea la matriz

$$\mathtt{M} \equiv \frac{1}{\Im\mathrm{m}\tau}\begin{pmatrix} |\tau|^2 & \Re\mathrm{e}\tau \\ \Re\mathrm{e}\tau & 1 \end{pmatrix} \ . \tag{A.42}$$

$SL(2,\mathbb{R})$ actua sobre $\mathtt{M}$ linealmente

$$\mathtt{M}' = \Lambda \mathtt{M} \Lambda^T \tag{A.43}$$

donde Λ es una matriz de $SL(2,\mathbb{R})$,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ . \tag{A.44}$$

Si se resuelve al par $\{F, {}^\star F\}$ en términos del par $\{F, \tilde{F}\}$ entonces la identidad (A.41) puede hacerse covariante bajo $SL(2,\mathbb{R})$ explícitamente,

$$\begin{pmatrix} \tilde{F} \\ F \end{pmatrix} = \left[i_V \begin{pmatrix} \tilde{F} \\ F \end{pmatrix} \wedge V - \mathtt{M} S \, {}^\star \left(i_V \begin{pmatrix} \tilde{F} \\ F \end{pmatrix} \wedge V \right) \right] \tag{A.45}$$

donde S es la mátriz antisimétrica canónica,

$$S \equiv \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.46}$$

y es preservada por $SL(2,\mathbb{R})$ según la propia definición de este grupo,

$$\Lambda^T S \Lambda = S \ . \tag{A.47}$$

A.8 De tres-formas a escalares

El hecho de que V es una simetría para cualquier configuración supersimétrica nos permite traducir las ecuaciones de Maxwell, las cuales son uno- ó tres-formas, a ecuaciones escalares que por supuesto son más sencillas de manejar. Para tal fin usamos las identidades

$$d\star(W\wedge V) = \star V\nabla\cdot W \tag{A.48}$$

$$A\wedge\star(B\wedge V) = B\wedge\star(A\wedge V) = \star V A\cdot B\ , \tag{A.49}$$

las cuales se cumplen siempre que

$$\nabla_{(\mu}V_{\nu)} = 0 \tag{A.50}$$

$$\pounds_V W = 0 \tag{A.51}$$

$$V\cdot W = V\cdot A = V\cdot B = 0\ . \tag{A.52}$$

A.9 Matrices gamma

Las matrices gamma se definen en abstracto por el álgebra de Clifford

$$\{\gamma^a,\gamma^b\} = 2\eta^{ab}\ . \tag{A.53}$$

El operador quiral lo definimos como

$$\gamma_5 = -\mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\ , \tag{A.54}$$

$$\{\gamma^a,\gamma_5\} = 0\ , {\gamma_5}^2 = 1\ . \tag{A.55}$$

El producto antisimétrico de matrices gamma lo denotamos por

$$\gamma^{ab\cdots c} = \gamma^{[a}\gamma^b\cdots\gamma^{c]} \tag{A.56}$$

y el conjunto de todos los productos verifica la muy importante relación de dualidad, en cuatro dimensiones

$$\gamma^{a_1\cdots a_n} = \frac{(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{(4-n)!}\mathrm{i}\epsilon^{a_1\cdots a_4}\gamma_{a_{n+1}\cdots a_4}\gamma_5\ , \tag{A.57}$$

para $n = 0,\ldots,4$, considerando la identidad para el valor $n = 0$. En particular tenemos la autodualidad

$$\star\gamma^{ab} = \mathrm{i}\gamma^{ab}\gamma_5 \tag{A.58}$$

y en general, en cuatro dimensiones tenemos

$$\gamma^{abcd} = \mathrm{i}\epsilon^{abcd}\gamma_5 \tag{A.59}$$

$$\gamma^{abc} = -\mathrm{i}\epsilon^{abcd}\gamma_d\gamma_5 \tag{A.60}$$

$$\gamma^{ab} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\epsilon^{abcd}\gamma_{cd}\gamma_5 \tag{A.61}$$

Utilizamos los siguientes convenios respecto a las matrices gamma: Pedimos que todas sean unitarias

$$(\gamma^a)^{-1} = \gamma^{a\dagger} \tag{A.62}$$

e imaginarias puras

$$\gamma^{a*} = -\gamma^a \ . \tag{A.63}$$

Estas condiciones implican que γ^0 es hermítica y antisimétrica mientras que las γ^i son anti-hermíticas y simétricas. γ_5 es hermítica y antisimétrica.

Una realización explícita de las matrices gamma con nuestros convenios es

$$\begin{aligned} &\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}\sigma^1 \\ -\mathrm{i}\sigma^1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \gamma^1 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \ , \ \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \ , \\ &\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \ , \ \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i}\sigma^3 \\ \mathrm{i}\sigma^3 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{A.64}$$

donde σ^i son las matrices de Pauli,

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \ , \ \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.65}$$

Con nuestros convenios se tiene a la identidad covariante

$$\gamma^0\gamma^{a\dagger}\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^{aT}\gamma^0 = \gamma^a \ . \tag{A.66}$$

A.10 Identidades de Fierz

Las identidades de Fierz nos permiten establecer relaciones entre potencias de espinores. En particular las usamos en este trabajo para relaciones cuadráticas entre bilineales y para productos cúbicos bilineal×espinor. Las identidades de Fierz se basan en el hecho de que el conjunto de todos los productos antisimétricos de matrices gamma constituye una base para todas las matrices $d \times d$, además existe un producto escalar con respecto al cual la based de matrices gamma es básicamente autodual, este producto escalar viene dado por la traza del producto de dos elementos de la base. En cuatro dimensiones del espacio-tiempo sea la base de las 16 matrices linealmente independientes

$$\{\mathcal{O}^I\} = \{1, \gamma_5, \gamma^a, \mathrm{i}\gamma_5\gamma^a, \mathrm{i}\gamma^{ab}\} \tag{A.67}$$

y su dual

$$\{\mathcal{O}_I\} = \{1, \gamma_5, \gamma_a, \mathrm{i}\gamma_5\gamma_a, \mathrm{i}\gamma_{ab}\} \tag{A.68}$$

las cuales verifican

$$\frac{1}{4}\mathrm{tr}\left(\mathcal{O}^I\mathcal{O}_J\right) = \delta^I_J \ . \tag{A.69}$$

Cualquier matriz puede ser escrita en esta base

$$[M]_{AB} = \mathcal{C}_I[\mathcal{O}^I]_{AB} \ , \tag{A.70}$$

$$\mathcal{C}_I = \frac{1}{4}\mathrm{tr}\,(M\mathcal{O}_I) \tag{A.71}$$

Considere por ejemplo un producto entre dos bilineales como el siguiente

$$(\bar{\epsilon}\mathcal{O}^I\eta)\,(\bar{\psi}\mathcal{O}^J\chi)$$

podemos reescribir a este producto a en términos de bilineales de $\bar{\epsilon}$ con χ y de $\bar{\psi}$ con η si somos capaces de reescribir al producto directo

$$[\mathcal{O}^I]_{AB}[\mathcal{O}^J]_{CD}$$

como un producto $[\cdots]_{AD}[\cdots]_{CB}$. El truco es el siguiente: Para cada valor del par de índices B, C el producto directo de arriba es una matriz en los índices A, D y por lo tanto puede ser escrita en la base de matrices gamma $[\mathcal{O}^K]_{AD}$ de tal forma que sus componentes en esa base son a su vez matrices en los índices B, C, de este modo llegamos a la expresión general de las identidades de Fierz

$$[\mathcal{O}^I]_{AB}[\mathcal{O}^J]_{CD} = [\mathcal{C}^{IJ}_K]_{CB}[\mathcal{O}^K]_{AD} \ , \tag{A.72}$$

$$\mathcal{C}^{IJ}_K = \frac{1}{4}\mathcal{O}^J\mathcal{O}_K\mathcal{O}^I \ , \tag{A.73}$$

de modo que, en la practica, para obtener las identidades de Fierz lo que hay que hacer es evaluar las posibles combinaciones del producto cúbico (A.73).

A continuación mostramos las identidades de Fierz que hemos usado en este trabajo

$$\begin{aligned}[1]_{AB}[1]_{CD} = {} & \frac{1}{4}\left([1]_{AD}[1]_{CB} + [\gamma_5]_{AD}[\gamma_5]_{CB}\right) \\ & + \frac{1}{4}\left([\gamma_a]_{AD}[\gamma^a]_{CB} - [\gamma_5\gamma_a]_{AD}[\gamma_5\gamma^a]_{CB}\right) - \frac{1}{8}[\gamma_{ab}]_{AB}[\gamma^{ab}]_{CB}\end{aligned} \tag{A.74}$$

$$\begin{aligned}[\gamma_a]_{AB}[\gamma^a]_{CD} = {} & [1]_{AD}[1]_{CB} - [\gamma_5]_{AD}[\gamma_5]_{CB} \\ & - \frac{1}{2}\left([\gamma_a]_{AD}[\gamma^a]_{CB} + [\gamma_5\gamma_a]_{AD}[\gamma_5\gamma^a]_{CB}\right)\end{aligned} \tag{A.75}$$

A.11 De $SO(6)$ a $SU(4)$

La Supergravedad $N = 4$, $d = 4$ tiene una simetría rígida que puede se descrita tanto con el grupo $SO(6)$ como con $SU(4)$, este último es el utilizado en este trabajo. Para ilustrar la traducción de $SO(6)$ a $SU(4)$ tomamos como ejemplo los campos vectoriales de la teoría, los cuales son los únicos campos bosónicos que se transforman bajo esta simetría. En lenguaje $SO(6)$ hay seis campos vectoriales reales: Tres vectores, A_n y tres vectores axiales B_n, ellos se pasan a los vectores complejos de $SU(4)$ por medio de la fórmula

$$A_{IJ\mu} = \alpha^n_{IJ} A^n_\mu - i\beta^n_{IJ} B^n_\mu \tag{A.76}$$

donde α^n y β^n son seis matrices 4×4 reales y antisimétricas las cuales realizan el álgebra $su(2) \otimes su(2)$,

$$[\alpha^m, \alpha^n] = 2\epsilon^{mnp}\alpha^p \tag{A.77}$$
$$[\beta^m, \beta^n] = 2\epsilon^{mnp}\beta^p \tag{A.78}$$
$$[\alpha^m, \beta^n] = 0 \tag{A.79}$$

y que además verifican

$$\{\alpha^m, \alpha^n\} = \{\beta^m, \beta^n\} = -2\delta^{mn} \tag{A.80}$$

así como también propiedades de dualidad $SU(4)$

$$\frac{1}{2}\epsilon^{IJKL}\alpha^n_{IJ} = \alpha^n_{KL} \tag{A.81}$$
$$\frac{1}{2}\epsilon^{IJKL}\beta^n_{IJ} = -\beta^n_{KL} \tag{A.82}$$

y relaciones de completitud

$$\alpha^n_{IJ}\alpha^n_{KL} = \delta_{IK}\delta_{JL} - \delta_{IL}\delta_{JK} + \epsilon_{IJKL} \tag{A.83}$$
$$\beta^n_{IJ}\beta^n_{KL} = \delta_{IK}\delta_{JL} - \delta_{IL}\delta_{JK} - \epsilon_{IJKL}\ . \tag{A.84}$$

En [62] se presentó una representación explícita de esas matrices en términos de matrices de Pauli

$$\begin{gathered}\alpha^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix}, \alpha^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^3 \\ \sigma^3 & 0 \end{pmatrix}, \alpha^3 = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sigma^2 & 0 \\ 0 & \mathrm{i}\sigma^2 \end{pmatrix}, \\ \beta^1 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}\sigma^2 \\ \mathrm{i}\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \beta^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \beta^3 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\sigma^2 & 0 \\ 0 & \mathrm{i}\sigma^2 \end{pmatrix}.\end{gathered} \tag{A.85}$$

Con la expresión explícita de los vectores complejos de $SU(4)$ se puede ver que ellos verifican el vínculo de “realidad”

$$\frac{1}{2}\epsilon_{IJKL}A^{IJ} = A_{KL}\ . \tag{A.86}$$

Decimos que éste es un vínculo de realidad porque implica que los complejos conjugados no son independientes.

Las fórmulas inversas para pasar de $SU(4)$ a $SO(6)$ son

$$A^n = \frac{1}{8}\alpha^n_{IJ}\left(A_{IJ} + A^{IJ}\right) \tag{A.87}$$

$$B^n = \frac{\mathrm{i}}{8}\beta^n_{IJ}\left(A_{IJ} - A^{IJ}\right) \ . \tag{A.88}$$

Apéndice B

Espinores de $SU(4)$

En este apéndice vamos a presentar una serie de propiedades de los parámetros de la supersimetría de la Supergravedad $N = 4$, $d = 4$. Todo el análisis que presentaremos es independiente de que los espinores sean de Killing o no, por lo tanto, para mantener la generalidad nos referiremos a ellos como "espinores de $SU(4)$".

En Supergravedad $N = 4$, $d = 4$ hay cuatro parámetros de supersimetría, denotados por ϵ_I, $I = 1, \ldots, 4$, los cuales son espinores de Weyl de quiralidad negativa,

$$\gamma_5 \epsilon_I = -\epsilon_I \tag{B.1}$$

El grupo $SU(4)$ actúa sobre los espinores como una "rotación"

$$\epsilon_I{}' = U_I{}^J \epsilon_J \tag{B.2}$$

donde $U_I{}^J$ es una matriz de $SU(4)$.

Los espinores de $SU(4)$ tienen carga $+1$ frente a la transformación $U(1)$ que compensa a $SL(2, \mathbb{R})$,

$$\epsilon'_I = e^{\frac{\mathrm{i}}{2}\varphi} \epsilon_I \ . \tag{B.3}$$

Introducimos el espinor complejo conjugado y el adjunto de acuerdo a nuestras reglas de subir y bajar índices de $SU(4)$,

$$\epsilon^I \equiv \epsilon_I{}^* \tag{B.4}$$

$$\bar{\epsilon}^I \equiv \overline{\epsilon_I} = \mathrm{i} {\epsilon^I}^T \gamma^0 \ . \tag{B.5}$$

Además la forma en que colocamos los indices de $SU(4)$ nos permite identificar la quiralidad de todos los espinores con que tratamos: Los espinores de $SU(4)$ y los gravitinos ambos con el índice de $SU(4)$ abajo tienen quiralidad negativa y viceversa. Por otra parte, los dilatinos con el índice de $SU(4)$ abajo tiene quiralidad positiva.

El conjunto de todos los espinores de una misma quiralidad sobre un punto del espacio-tiempo es un espacio vectorial sobre los números complejos. En cuatro dimensiones este espacio es de dos dimensiones, entendiéndose que tomamos como base a dos espinores quirales distintos. Este hecho implica que los cuatro espinores de $SU(4)$ no son linealmente independientes en un punto, a los sumo sólo lo son dos de ellos. Además, hay que darle cabida a la posibilidad de que todos los espinores de $SU(4)$ sean proporcionales entre sí, de modo que el espcio de espinores de $SU(4)$ sea unidimensional. Este hecho cambia drásticamente el enfoque que se le da a la búsqueda de configuraciones y soluciones supersimétricas. El análisis entonces se divide en dos casos de acuerdo a si los espinores de $SU(4)$, o de Killing para ser más precisos, son o no proporcionales entre sí. A ambos casos los llamaremos el caso nulo y el caso tipo tiempo respectivamente por razones que quedarán claras más adelante.

Un paso fundamental en la construcción de las configuraciones supersimétricas es la introducción de cantidades tensoriales asociadas a los espinores de Killing, las cuales son útiles para escribir algunos campos bosónicos de la teoría en términos de ellas. A partir de los espinores quirales de $SU(4)$ se pueden construir básicamente las siguientes formas diferenciales como bilineales de los espinores

$$M_{IJ} \equiv \bar{\epsilon}_I \epsilon_J \tag{B.6}$$

$$V_{\mu\, I}{}^{J} \equiv \mathrm{i}\bar{\epsilon}_I \gamma_\mu \epsilon^J \tag{B.7}$$

$$\Phi_{\mu\nu\, IJ} \equiv \bar{\epsilon}_I \gamma_{\mu\nu} \epsilon_J \ . \tag{B.8}$$

Entre los vectores, la traza

$$V \equiv V_I{}^I \tag{B.9}$$

juega un papel crucial en este trabajo; en particular es invariante bajo $SU(4)$ y $SL(2,\mathbb{R})$.

Otras formas diferenciales de mayor orden podrían ser construidas pero a la vez podrían ser trivialmente escritas en términos de las formas de arriba debido a las propiedades de dualidad de las matrices γ, véase la identidad (A.57) en los apéndices. Además, las formas (B.6)-(B.8) son las únicas combinaciones de espinores posibles, es decir, otras posibilidades como por ejemplo el escalar $\bar{\epsilon}_I \epsilon^J$ son nulas debido a la quiralidad de los espinores. Más aún, las dos-formas Φ_{IJ} también pueden ser escritas en terminos de los escalares M_{IJ} y de los vectores $V_I{}^J$ usando las identidades de Fierz, como veremos más adelante.

Siguiendo la idea de que la conjugación compleja sea equivalente a bajar y subir índices de $SU(4)$, introducimos los bilineales conjugados

$$M^{IJ} \equiv (M_{IJ})^* \tag{B.10}$$

$$\Phi^{IJ}_{\mu\nu} \equiv (\Phi_{\mu\nu\, IJ})^* \ . \tag{B.11}$$

Como matrices en los índices de $SU(4)$, M_{IJ} es antisimétrica, $V_I{}^J$ es hermítica y Φ_{IJ} es simétrica

$$M_{IJ} = -M_{JI} \tag{B.12}$$
$$V_I{}^J = \left(V_J{}^I\right)^* \tag{B.13}$$
$$\Phi_{IJ} = \Phi_{JI} \ . \tag{B.14}$$

Las dos-formas Φ_{IJ} tienen dualidad de Hodge definida. Observese que sobre un espacio Lorentziano de cuatro dimensiones la auto-dualidad de Hodge sólo tiene sentido para dos-formas complejas, en el caso de Φ_{IJ} se verifica

$$^\star\Phi_{IJ} = -\mathrm{i}\Phi_{IJ} \tag{B.15}$$
$$^\star\Phi^{IJ} = \mathrm{i}\Phi^{IJ} \ . \tag{B.16}$$

Como hemos mencionado, las identidades de Fierz de las matrices γ permiten establecer relaciones cuadráticas entre estos bilineales. Todas las identidades que usaremos se presentan en el apéndice A.10. Veamos algunas relaciones entre los espinores de $SU(4)$ derivadas de las identidades de Fierz, la dos más importantes,

$$M_{[IJ}\epsilon_{K]} = 0 \ , \tag{B.17}$$
$$M_{IJ}\epsilon^J = \frac{\mathrm{i}}{2} V_a\gamma^a\epsilon_I \tag{B.18}$$

se siguen de la identidad de Fierz (A.74). La identidad (B.17) contiene el hecho de que el espacio de espinores de $SU(4)$ es, a lo sumo, bidimensional. Debemos aclarar que, según el enfoque que le damos al análisis de las KSEs, los tensores M_{IJ} y V serán tomadas como variables independientes, la identidad (B.18) se inpondrá entonces como condición sobre los espinores.

Contrayendo a (B.18) con $\bar{\epsilon}^I$ obtenemos

$$|M|^2 \equiv M_{IJ}M^{IJ} = \frac{1}{2}V^2 \ , \tag{B.19}$$

donde $V^2 \equiv V_\mu V^\mu$. La cantidad de la izquierda en la identidad de arriba es claramente no negativa por lo tanto el vector V no es tipo espacio. Esto implica que V es tipo tiempo, tipo luz o cero. La última posibilidad queda excluida porque por hipótesis estamos trabajando con al menos un espinor ϵ_I no nulo.

Los casos en que V es tipo tiempo o tipo luz se detallan por separado a la hora de construir las configuraciones supersimétricas y a ambos casos los definimos como el caso tipo tiempo y el caso nulo respectivamente. Esta distinción se basa en una hipótesis de continuidad: Si $|M|^2 \neq 0$ en un punto entonces es distinto de cero en un entorno de ese punto y se restringe el problema a ese entorno [40]. Distinguir entre los casos nulo y tipo tiempo es equivalente a identificar la dimensión del espacio de espinores quirales punto a punto, como mencionamos anteriormente. De hecho, $|M|^2$ es una suma de módulos de números complejos por lo tanto si $|M|^2 = 0$ entonces todos los M_{IJ} son cero, esto es posible si y sólo si todos los espinores ϵ_I son proporcionales entre sí, decir que el espacio de espinores de $SU(4)$ sea unidimensional.

A partir de ahora mostraremos las propiedades algebraicas de los espinores de $SU(4)$ separando los casos nulo y tipo tiempo, empezando por este último.

1. Caso Tipo Tiempo

   La matriz antisimétrica de escalares bilineales, M_{IJ}, es singular, lo cual es equivalente a decir que su Pfaffiano se anula

   $$\epsilon^{IJKL} M_{IJ} M_{KL} = 0 \,, \tag{B.20}$$

   lo cual es consecuencia directa de (B.17). La ec. (B.20) es el vínculo más básico que deben satisfacer los escalares M_{IJ} cuando se tomen como varibales independientes para construir las configuraciones supersimétricas.

   Contayendo a (B.18) con $\mathrm{i}\bar{\epsilon}_K \gamma^b$ se obtiene una identidad importante

   $$M_{K[I} V_{J]}{}^K = -\frac{1}{2} M_{IJ} V \,. \tag{B.21}$$

   Para el caso tipo tiempo se introduce el proyector hermítico

   $$\mathcal{J}_I{}^J \equiv \frac{2}{|M|^2} M_{IK} M^{JK} \tag{B.22}$$

   el cual también puede ser escrito como

   $$\mathcal{J}_I{}^J = \frac{2}{V^2} V \cdot V_I{}^J \,. \tag{B.23}$$

   Usando identidades de Fierz se comprueba que $\mathcal{J}_I{}^J$ es un proyector

   $$\mathcal{J}_I{}^J \mathcal{J}_J{}^K = \mathcal{J}_I{}^K \,. \tag{B.24}$$

   Este proyector tiene traza igual a 2, $\mathcal{J}_I{}^I = 2$. El proyector $\mathcal{J}_I{}^J$ juega un papel central en el trabajo de Tod [18]. Su utilidad radica en que los espinores de $SU(4)$ son autovectores de él

   $$\mathcal{J}_I{}^J \epsilon_J = \epsilon_I \tag{B.25}$$

lo cual puede se deduce al multiplicar a (B.18) por M^{IK}. Naturalmente esta relación se extiende a los bilineales en la forma obvia, por ejemplo

$$\mathcal{J}_I{}^J M_{JK} = M_{IK} \ . \tag{B.26}$$

Este proyector fue usado por Tod para introducir lo que él llamó la hipótesis de rigidez interna, como veremos a continuación. El valor de la traza de $\mathcal{J}_I{}^J$ nos dice que sólo hay dos espinores de $SU(4)$ linealmente independientes, como ya sabíamos. Podemos suponer que en un punto se escoge una base de espinores tal que $\mathcal{J}_I{}^J$ se diagonaliza a $\mathcal{J}_I{}^J = \text{diag}\,(1,1,0,0)$, pero por (B.25) esto implica que dos de los cuatro espinores de $SU(4)$ son necesariamente nulos en ese punto. Esta operación se puede hacer con total libertad en un punto, sin embargo no hay garantías de que se pueda hacer en todo el espacio-tiempo. En [18] Tod supone que $\mathcal{J}_I{}^J$ es constante y por lo tanto puede hacerse diagonal en todas partes. A esta fuerte suposición la llamó la hipótesis de rigidez interna. Luego de imponer esta hipótesis la supersimetría original de la teoría pasa de $N=4$ a $N=2$ y en este caso Tod presentó la clasificación de todas las soluciones supersimétricas [18]. En este trabajo nosotros no imponemos ninguna suposición que limite a los espinores de $SU(4)$.

Como mencionamos anteriormente, las dos-formas Φ_{IJ} pueden ser escritas explícitamente en términos de los escalares y vectores en el caso tipo tiempo. Si se tiene en cuenta la identidad de Fierz

$$M_{K(I}V_{J)}{}^K = -\frac{1}{2}V \cdot \Phi_{IJ} \tag{B.27}$$

y la identidad tensorial A.41 se obtiene

$$\Phi_{IJ} = \frac{1}{|M|^2} M_{KI}\left[V_J{}^K \wedge V + \mathrm{i}\,{}^\star\left(V_J{}^K \wedge V\right)\right] \ . \tag{B.28}$$

El miembro derecho de la ecuación anterior es en efecto simétrico en I, J, ya que la parte antisimétrica de $M_{KI}V_J{}^K$ es porporcional a V.

Resulta muy útil introducir la siguiente uno-forma derivada de los escalares bilineales

$$\xi \equiv \frac{\mathrm{i}}{4|M|^2}\left(M_{IJ}dM^{IJ} - M^{IJ}dM_{IJ}\right) \ , \tag{B.29}$$

la cual se transforma bajo $U(1)$ como

$$\xi' = \xi + \frac{1}{2}d\varphi \tag{B.30}$$

de modo que puede ser usada como conexión para la transformación local $U(1)$ ligada a la simetría $SL(2,\mathbb{R})$, aparte de la conexión Q, la cual se construye en base al axidilatón. La conexión ξ ademas goza de simetría bajo cambios de escala de M_{IJ}

$$\xi\left(\Lambda(x)M_{IJ}\right) = \xi\left(M_{IJ}\right) \tag{B.31}$$

donde $\Lambda(x)$ es un escalar real arbitrario.

2. Caso Nulo

En el caso nulo, $|M|^2 = 0$, todos los espinores de $SU(4)$ son proporcionales entre sí, por lo que los podemos parametrizar como

$$\epsilon_I = \phi_I \epsilon \tag{B.32}$$

donde los cuatro escalares $\phi_I(x)$ se transforman como un vector bajo $SU(4)$. Además sabemos que los espinores ϵ_I están cargados, con carga $+1$, frente a la transformación $U(1)$ local asociada a la simetría $SL(2,\mathbb{R})$. Hay total libertad sobre cómo repartir esta carga al usar la parametrización (B.32); para nuestros propósitos lo más simple es descargar completamente a ϕ_I y asignarle carga $+1$ a ϵ. En calquier caso tods los resultados son independientes de esta asignación.

En la parametrización de arriba hay grados de libertad redundantes. De hecho, la parametrización (B.32) es invariante bajo cambios de escala de la forma

$$\phi_I{}' = \frac{1}{\rho}\phi_I \ , \quad \epsilon' = \rho\epsilon \tag{B.33}$$

donde ρ es un escalar positivo, y además goza de la siguiente simetría $U(1)$ local

$$\phi_I \to e^{i\theta}\phi_I \, , \qquad \epsilon \to e^{-i\theta}\epsilon \, . \tag{B.34}$$

La simetría (B.33) se fija con la siguiente condición de normalización invariante bajo $SU(4)$

$$\phi_I \phi^I = 1 \tag{B.35}$$

donde $\phi^I \equiv \phi_I{}^*$. La simetría (B.34) será fijada a conveniencia cuando se analicen las KSEs. De momento podemos decir que la uno-forma real

$$\zeta \equiv \mathrm{i}\phi_I d\phi^I \tag{B.36}$$

se transforma como una conexión gauge de esta simetría $U(1)$.

Análogamente al caso tipo tiempo, en el caso nulo se puede introducir el proyector hermítico

$$\mathcal{K}_I{}^J \equiv \phi_I \phi^J \tag{B.37}$$

el cual satisface

$$\mathcal{K}_I{}^J \mathcal{K}_J{}^K = \mathcal{K}_I{}^K \ , \quad \mathcal{K}_I{}^I = 1 \tag{B.38}$$

y los espinores de $SU(4)$ son sus autovectores

$$\mathcal{K}_I{}^J \epsilon_J = \epsilon_I \ . \tag{B.39}$$

La traza igual a 1 de $\mathcal{K}_I{}^J$ refleja el hecho de que hay un sólo espinor linealmente independiente.

Dado ϵ, uno puede introducir un espinor quiral auxiliar normalizado respecto a ϵ según

$$\overline{\epsilon^*}\eta = \frac{1}{2} \ , \tag{B.40}$$

Para que esta condición de normalización no rompa a las simetrías de la teoría es necesario que η tenga todas las cargas opuestas a ϵ, por lo tanto η tiene carga -1 frente a $SL(2,\mathbb{R})$ y $+1$ frente a la simetría (B.34).

En base a ϵ y η se construye la siguiente tétrada nula

$$l_\mu = \mathrm{i}\bar{\epsilon}\gamma_\mu\epsilon \tag{B.41}$$

$$n_\mu = \mathrm{i}\bar{\eta}\gamma_\mu\eta \tag{B.42}$$

$$m_\mu = \sqrt{2}\mathrm{i}\bar{\epsilon}\gamma_\mu\eta \tag{B.43}$$

$$\bar{m}_\mu = \sqrt{2}\mathrm{i}\overline{\epsilon^*}\gamma_\mu\eta^* \ . \tag{B.44}$$

l y n son vectores reales mientras que m y $\bar{m}$ con complejos conjugados uno del otro. Claramente, l coincide con el vector nulo V. Usando la identidad de Fierz (A.75) se comprueba que $\{l, n, m, \bar{m}\}$ es una tétrada nula. Las propiedades de una tétrada nula se listan en el apéndice A.5.

Por últimos mencionamos que en principio η es un espinor arbitrario el cual sólo está sujeto a la condición de normalización (B.40). Sin embargo, cuando se analicen las KSEs se impondrán condiciones diferenciales sobre η.

Apéndice C

La métrica conforme-estacionaria

La métrica conforme-estacionaria es

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} |M|^2 & |M|^2\omega_i \\ |M|^2\omega_j & -|M|^{-2}\gamma_{ij} + |M|^2\omega_i\omega_j \end{pmatrix} \tag{C.1}$$

$$[g^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} |M|^{-2} - |M|^2\omega^2 & |M|^2\omega^i \\ |M|^2\omega^j & -|M|^2\gamma^{ij} \end{pmatrix} \tag{C.2}$$

donde $\gamma^{ik}\gamma_{kj} = \delta^i_j$, $\omega^i = \gamma^{ij}\omega_j$ y $\omega^2 = \omega_k\omega^k$.

Usamos los vielbeins

$$e_a{}^\mu = \begin{pmatrix} |M|^{-1} & 0 \\ -|M|\omega_i & |M|v_i{}^{\underline{i}} \end{pmatrix} \tag{C.3}$$

$$e_\mu{}^a = \begin{pmatrix} |M| & 0 \\ |M|\omega_{\underline{i}} & |M|^{-1}v_{\underline{i}}{}^i \end{pmatrix} \tag{C.4}$$

donde $v_{\underline{i}}{}^i$ son los vielbeins de la métrica espacial γ,

$$\gamma_{\underline{ij}}v_i{}^{\underline{i}}v_j{}^{\underline{j}} = \delta_{ij}\ , \tag{C.5}$$

$$\omega_i = v_i{}^{\underline{i}}\omega_{\underline{i}} \tag{C.6}$$

$$\omega^i = v_{\underline{i}}{}^i\omega^{\underline{i}} = \delta^{ij}\omega_j\ . \tag{C.7}$$

De modo que tenemos

$$V^0 = V_0 = \sqrt{2}|M| \tag{C.8}$$

$$V^i = -V_i = 0\ . \tag{C.9}$$

Con estos vielbeins es muy fácil calcular el determinante de la métrica cuadridimensional:

$$\det g = -\frac{1}{|M|^4}\det\gamma \tag{C.10}$$

Aprovechamos para mostrar la relación entre los símbolos de Levi-Civita de cuatro y tres dimensiones, en índices planos

$$\epsilon^{0ijk} = \epsilon^{ijk} \tag{C.11}$$

$$\epsilon_{0ijk} = -\epsilon_{ijk} \tag{C.12}$$

donde

$$\epsilon^{123} = +1 \tag{C.13}$$

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon^{ijk} \,. \tag{C.14}$$

En índices curvos

$$\epsilon^{tijk} = |M|^2 \epsilon^{ijk} \tag{C.15}$$

$$\epsilon_{tijk} = -|M|^{-2} \epsilon_{ijk} \tag{C.16}$$

donde

$$\epsilon^{\underline{ijk}} = v_i{}^{\underline{i}} v_j{}^{\underline{j}} v_k{}^{\underline{k}} \epsilon^{ijk} \,, \tag{C.17}$$

$$\epsilon_{ijk} = \gamma_{il}\gamma_{jm}\gamma_{kn}\epsilon^{lmn} \tag{C.18}$$

$$\epsilon^{xyz} = (\sqrt{\gamma})^{-1} \tag{C.19}$$

$$\epsilon_{xyz} = \sqrt{\gamma} \tag{C.20}$$

Ahora vamos a presentar a los objetos relacionados con la conexión de espín y su curvatura. En todas las expresiones los objetos con índices espaciales que aparecen en el miembro derecho están asociados a la métrica espacial γ_{ij}. Coeficientes de Ricci

$$\Omega_{\mu\nu}{}^{a} \equiv \partial_{[\mu} e_{\nu]}{}^{a} \,,$$

$$\Omega_{t\underline{i}}{}^{0} = -\frac{1}{2}\partial_{\underline{i}}|M| \tag{C.21}$$

$$\Omega_{\underline{ij}}{}^{0} = \frac{1}{2}|M| f_{\underline{ij}} + \partial_{[\underline{i}}|M|\omega_{\underline{j}]} \tag{C.22}$$

$$\Omega_{t\underline{j}}{}^{i} = 0 \tag{C.23}$$

$$\Omega_{\underline{ij}}{}^{i} = |M|^{-1}\Omega_{\underline{ij}}{}^{i} + \partial_{[\underline{i}}|M|^{-1} v_{\underline{j}]}{}^{i} \tag{C.24}$$

donde

$$f_{\underline{ij}} = \partial_{\underline{i}}\omega_{\underline{j}} - \partial_{\underline{j}}\omega_{\underline{i}} \,. \tag{C.25}$$

$$\Omega_{abc} = e_a{}^{\mu} e_b{}^{\nu} \Omega_{\mu\nu c} \tag{C.26}$$

$$\Omega_{0i0} = -\frac{1}{2}\partial_i|M| \tag{C.27}$$
$$\Omega_{ij0} = \frac{1}{2}|M|^3 f_{ij} \tag{C.28}$$
$$\Omega_{0ij} = 0 \tag{C.29}$$
$$\Omega_{ijk} = -|M|\Omega_{ijk} + \partial_{[i}|M|\delta_{j]k} \,, \tag{C.30}$$

Conexión de espín

$$\omega_{abc} = -2\Omega_{a[bc]} + \Omega_{bca}, \tag{C.31}$$

$$\omega_{00i} = -\partial_i|M| \tag{C.32}$$
$$\omega_{0ij} = \frac{1}{2}|M|^3 f_{ij} \tag{C.33}$$
$$\omega_{i0j} = \frac{1}{2}|M|^3 f_{ij} \tag{C.34}$$
$$\omega_{ijk} = -|M|o_{ijk} - 2\delta_{i[j}\partial_{k]}|M| \,, \tag{C.35}$$

donde $o_{\underline{i}}{}^{ij}$ es la conexión de espín derivada de la métrica γ_{ij}.

Curvatura

$$R_{abcd} = 2\partial_{[a}\omega_{b]cd} - 2\omega_{[a|c}{}^{e}\omega_{|b]ed} + 2\Omega_{ab}{}^{e}\omega_{ecd},$$

$$R_{0i0j} = \frac{1}{2}\nabla_i\partial_j|M|^2 + \partial_i|M|\partial_j|M| - \delta_{ij}\left(\partial|M|\right)^2 + \frac{1}{4}|M|^6 f_{ik}f_j{}^k \tag{C.36}$$
$$R_{0ijk} = -\frac{1}{2}|M|^4\nabla_i f_{jk} - \frac{1}{2}f_{jk}\partial_i|M|^4 + \frac{1}{2}f_{i[j}\partial_{k]}|M|^4 - \frac{1}{4}\delta_{i[j}f_{k]}{}^l\partial_l|M|^4 \tag{C.37}$$
$$R_{ij0k} = |M|^4\nabla_{[i}f_{j]k} - f_{ij}\partial_k|M|^4 - \frac{1}{4}\delta_{k[i}f_{j]}{}^l\partial_l|M|^4 \tag{C.38}$$
$$\begin{aligned} R_{ijkl} = {} & -|M|^2 R_{ijkl} + \frac{1}{2}|M|^6\left(f_{ij}f_{kl} - f_{k[i}f_{j]l}\right) + 2|M|\delta_{k[i}\nabla_{j]}\partial_l|M| \\ & -2|M|\delta_{l[i}\nabla_{j]}\partial_k|M| - 2\delta_{k[i}\delta_{j]l}\left(\partial|M|\right)^2 \end{aligned} \tag{C.39}$$

Tensor de Ricci

$$R_{ab} = R_{acb}{}^{c} \,, \tag{C.40}$$

$$R_{00} = -\frac{1}{2}|M|^2\triangle\ln|M|^2 - \frac{1}{4}|M|^6 f^2 \tag{C.41}$$
$$R_{0i} = \frac{1}{2}\nabla_k\left(|M|^4 f_i{}^k\right) \tag{C.42}$$
$$R_{ij} = |M|^2\left[R_{ij} + \frac{1}{2}\partial_i\ln|M|^2\partial_j\ln|M|^2 - \frac{1}{2}\delta_{ij}\triangle\ln|M|^2 - \frac{1}{2}|M|^4 f_{ik}f_j{}^k\right] . \tag{C.43}$$

Escalar de Ricci

$$R = |M|^2\left[-R - 2|M|\triangle|M|^{-1} + \frac{1}{4}|M|^4 f^2\right] \tag{C.44}$$

Bibliografía

[1] J. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking. The four laws of black hole mechanics. *Commun. Math. Phys.*, 31:161, 1973.

[2] T. Mohaupt. Black hole entropy, special geometry and strings. *Fortsch. Phys.*, 49:3, 2001.

[3] B. de Wit. Supersymmetric black holes. hep-th/0511261, 2005.

[4] A. Font and S. Theisen. Introduction to string compactification. *Lect. Notes Phys.*, 668:101, 2005.

[5] O. Aharony, S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri, and Y. Oz. Large N field theories, String Theory and Gravity. *Phys. Rept.*, 323:183, 2000.

[6] J. Figueroa-O'Farrill and G. Papadopoulos. Maximally supersymmetric solutions of ten- and eleven- dimensional supergravities. *JHEP*, 03:048, 2003.

[7] D. Gross, J. Harvey, E. J. Martinec, and R. Rohm. Heterotic String Theory. 1. The free Heterotic String. *Nucl. Phys.*, B256:253, 1985.

[8] M. Green and J. Schwarz. Anomaly cancellation in supersymmetric $D = 10$ gauge theory and Superstring Theory. *Phys. Lett.*, B149:117, 1984.

[9] A. Chamseddine. $N = 4$ Supergravity coupled to $N = 4$ matter. *Nucl. Phys.*, B185:403, 1981.

[10] A. Font, L. E. Ibañez, D. Lüst, and F. Quevedo. Strong-weak coupling duality and nonperturbative effects in String Theory. *Phys. Lett.*, B249:35, 1990.

[11] J. Maharana and J. Schwarz. Noncompact symmetries in String Theory. *Nucl. Phys.*, B390:3, 1993.

[12] A. Sen. Electric magnetic duality in String Theory. *Nucl. Phys.*, B404:109, 1993.

[13] A. Sen. Quantization of dyon charge and electric magnetic duality in String Theory. *Phys. Lett.*, B303:22, 1993.

[14] J. Schwarz and A. Sen. Duality symmetries of $4-D$ heterotic strings. *Phys. Lett.*, B312:105, 1993.

[15] C. M. Hull and P. K. Townsend. Unity of superstring dualities. *Nucl. Phys.*, B438:109, 1995.

[16] K. P. Tod. All metrics admitting supercovariantly constant spinors. *Phys. Lett.*, B121:241, 1983.

[17] G. W. Gibbons and C. M. Hull. A Bogomolny bound for General Relativity and solitons in $N=2$ Supergravity. *Phys. Lett.*, B109:190, 1982.

[18] K. P. Tod. More on supercovariantly constant spinors. *Class. Quant. Grav.*, 12:1801, 1995.

[19] E. Bergshoeff, R. Kallosh, and T. Ortín. Stationary axion/dilaton solutions and supersymmetry. *Nucl. Phys.*, B478:156, 1996.

[20] Z. Perjés. Solutions of the coupled Einstein Maxwell equations representing the fields of spinning sources. *Phys. Rev. Lett.*, 27:1668, 1971.

[21] W. Israel and G. A. Wilson. A class of stationary electromagnetic vacuum fields. *J. Math. Phys.*, 13:865, 1972.

[22] G. W. Gibbons. Antigravitating black hole solitons with scalar hair in $N=4$ Supergravity. *Nucl. Phys.*, B207:337, 1982.

[23] G. W. Gibbons and K. Maeda. Black holes and membranes in higher dimensional theories with dilaton fields. *Nucl. Phys.*, B298:741, 1988.

[24] D. Garfinkle, G. Horowitz, and A. Strominger. Charged black holes in String Theory. *Phys. Rev.*, D43:3140, 1991. [D. Garfinkle, G. Horowitz, and A. Strominger, *Phys. Rev.*, D45:3888, 1992. Erratum].

[25] A. Shapere, S. Trivedi, and F. Wilczek. Dual dilaton dyons. *Mod. Phys. Lett.*, A6:2677, 1991.

[26] R. Kallosh, A. Linde, T. Ortin, A. Peet, and A. Van Proeyen. Supersymmetry as a cosmic censor. *Phys. Rev.*, D46:5278, 1992.

[27] T. Ortin. Electric - magnetic duality and supersymmetry in stringy black holes. *Phys. Rev.*, D47:3136, 1993.

[28] R. Kallosh and T. Ortin. Charge quantization of axion - dilaton black holes. *Phys. Rev.*, D48:742, 1993.

[29] T. Ortin. $SL(2, \mathbb{R})$ duality covariance of Killing spinors in axion - dilaton black holes. *Phys. Rev.*, D51:790, 1995.

[30] R. Kallosh, D. Kastor, T. Ortin, and T. Torma. Supersymmetry and stationary solutions in dilaton axion gravity. *Phys. Rev.*, D50:6374, 1994.

[31] M. Rogatko. Stationary axisymmetric axion - dilaton black holes: Mass formulae. *Class. Quant. Grav.*, 11:689, 1994.

[32] D. Gal'tsov and O. Kechkin. Ehlers-Harrison type transformations in dilaton - axion gravity. *Phys. Rev.*, D50:7394, 1994.

[33] D. Gal'tsov and O. Kechkin. U duality and symplectic formulation of dilaton - axion gravity. *Phys. Rev.*, D54:1656, 1996.

[34] D. Gal'tsov and O. Kechkin. Matrix dilaton - axion for heterotic string in three-dimensions. *Phys. Lett.*, B361:52, 1995.

[35] A. Garcia, D. Gal'tsov, and O. Kechkin. Class of stationary axisymmetric solutions of the Einstein-Maxwell dilaton - axion field equations. *Phys. Rev. Lett.*, 74:1276, 1995.

[36] M. Blau, J. Figueroa-O'Farrill, C. Hull, and G. Papadopoulos. A new maximally supersymmetric background of IIB Superstring Theory. *JHEP*, 01:047, 2002.

[37] J. Kowalski-Glikman. Vacuum states in supersymmetric Kaluza-Klein Theory. *Phys. Lett.*, B134:194, 1984.

[38] J. Kowalski-Glikman. Positive energy theorem and vacuum states for the Einstein-Maxwell system. *Phys. Lett.*, B150:125, 1985.

[39] P. Meessen. A small note on *pp*-wave vacua in 6 and 5 dimensions. *Phys. Rev.*, D65:087501, 2002.

[40] J. P. Gauntlett, J. B. Gutowski, C. Hull, S. Pakis, and H. S. Reall. All supersymmetric solutions of minimal supergravity in five dimensions. *Class. Quant. Grav.*, 20:4587, 2003.

[41] J. P. Gauntlett and J. B. Gutowski. All supersymmetric solutions of minimal gauged supergravity in five dimensions. *Phys. Rev.*, D68:105009, 2003. [J. P. Gauntlett and J. B. Gutowski, *Phys. Rev.* D70:089901, 2004. Erratum].

[42] M. Caldarelli and D. Klemm. All supersymmetric solutions of $N = 2$, $D = 4$ gauged supergravity. *JHEP*, 09:019, 2003.

[43] J. B. Gutowski, D. Martelli, and H. S. Reall. All supersymmetric solutions of minimal supergravity in six dimensions. *Class. Quant. Grav.*, 20:5049, 2003.

[44] A. Chamseddine, J. Figueroa-O'Farrill, and W. Sabra. Supergravity vacua and Lorentzian Lie groups. hep-th/0306278, 2003.

[45] R. Kallosh and T. Ortín. Killing spinor identities. hep-th/9306085, 1993.

[46] R. Utiyama. Invariant theoretical interpretation of interaction. *Phys. Rev.*, 101:1597, 1956.

[47] S. MacDowell and F. Mansouri. Unified geometric theory of gravity and supergravity. *Phys. Rev. Lett.*, 38:739, 1977.

[48] A. Chamseddine. Applications of the gauge principle to gravitational interactions. *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, 3:149, 2006.

[49] J. Wess and B. Zumino. Supergauge transformations in four-dimensions. *Nucl. Phys.*, B70:39, 1974.

[50] Y. Golfand and E. Likhtman. Extension of the algebra of Poincaré group generators and violation of P invariance. *JETP Lett.*, 13:323, 1971.

[51] D. Freedman, P. van Nieuwenhuizen, and S. Ferrara. Progress toward a theory of supergravity. *Phys. Rev.*, D13:3214, 1976.

[52] S. Deser and B. Zumino. Consistent supergravity. *Phys. Lett.*, B62:335, 1976.

[53] T. Ortín. *Gravity and Strings.* Cambridge University, Cambridge University Press, 2004.

[54] R. L. Bryant. Pseudo-Riemannian metrics with parallel spinor fields and vanishing Ricci tensor. *Global analysis and harmonic analysis* (Marseille-Luminy, 1999), 53, Smin. Congr., 4, Soc. Math. France, Paris, 2000.

[55] J. Figueroa-O'Farrill. Breaking the M-waves. *Class. Quant. Grav.*, 17:2925, 2000.

[56] J. P. Gauntlett. Classifying supergravity solutions. *Fortsch. Phys.*, 53:468, 2005.

[57] J. Bellorín and T. Ortín. A note on simple applications of the Killing spinor identities. *Phys. Lett.*, B616:118, 2005.

[58] E. Cremmer, J. Scherk, and S. Ferrara. $SU(4)$ invariant supergravity theory. *Phys. Lett.*, B74:61, 1978.

[59] M. Gaillard and B. Zumino. Duality rotations for interacting fields. *Nucl. Phys.*, B193:221, 1981.

[60] H. W. Brinkmann. Einstein spaces which are mapped conformally on each other. *Math. Ann.*, 94:119, 1925.

[61] Brian R. Greene, Alfred D. Shapere, Cumrun Vafa, and Shing-Tung Yau. Stringy cosmic strings and noncompact calabi-yau manifolds. *Nucl. Phys.*, B337:1, 1990.

[62] F. Gliozzi, J. Scherk, and D. Olive. Supersymmetry, supergravity theories and the dual spinor model. *Nucl. Phys.*, B122:253, 1977.