Universidad Autónoma de Madrid
Facultad de Ciencias
Departamento de Física Teórica

La familia general de soluciones tipo agujero negro en Supergravedad $N = 4$, $d = 4$

Memoria del Trabajo de Iniciación a la Investigación realizado por
D. Ernesto Lozano Tellechea,
presentada ante el Departamento de Física Teórica
de la Universidad Autónoma de Madrid
para la obtencion del Diploma de Estudios Avanzados.

Trabajo de Iniciación a la Investigación tutelado por el
Dr. D. Tomás Ortín Miguel,
Científico Titular del Consejo Superior de Investigaciones Científicas.

Madrid, Junio 2000.

Índice General

1 Introducción

En los últimos años ha tenido lugar un intenso estudio de las soluciones tipo agujero negro que aparecen en el límite de baja energía de la Teoría de Cuerdas. Los agujeros negros son un tipo de objetos que predice la Teoría de la Relatividad General que poseen una serie de propiedades físicas que la teoría clásica no sabe explicar. Existen básicamente dos problemas fundamentales en la física de agujeros negros:

- el comportamiento supuestamente termodinámico de los mismos, puesto que no entendemos el origen y el significado de la entropía de Bekenstein-Hawking del agujero negro [1, 2].

- El problema de la posible pérdida de información en el proceso de absorción y reemisión de materia por parte de un agujero negro [3, 4].

Quizá ambas cosas no sean más que un problema de interpretación de la física involucrada en ellas. Pero si realmente los agujeros negros existen[1], y si la entropía de Bekenstein es realmente una entropía tal y como aparece en cualquier otra parte en física, las cuestiones arriba señaladas no poseen explicación conocida ni en la teoría clásica ni en las aproximaciones semiclásicas que se han hecho al tratamiento de estos problemas. De esta manera, la pregunta natural es: *¿Puede una teoría cuántica consistente de la gravitación proporcionarnos una respuesta satisfactoria a estas cuestiones?* La creencia generalizada es que *sí*. Hasta la fecha, el candidato más firme a dicha teoría cuántica es la Teoría de Cuerdas y, si bien al día de hoy estos problemas siguen sin una respuesta definitiva, ha habido avances considerables al tratar el problema desde este punto de vista. En particular, el cálculo de la degeneración de estados en sistemas ligados de D-branas ha conseguido reproducir espectacularmente bien la entropía de Bekenstein en el caso de ciertos agujeros negros extremos supersimétricos [5], así como la entropía y la tasa de emisión en ciertos casos próximos al límite extremo [6, 7].

Si bien la resolución de estas cuestiones es interesante por sí misma, su estudio posee ventajas añadidas. Por un lado, es seguramente muy posible que todo lo relacionado con el proceso de almacenamiento de información en un agujero negro esté relacionado muy directamente con primeros principios. El punto de vista adoptado por 't Hooft [8], y desarrollado por Susskind y otros, ha conducido a la introducción del denominado "principio holográfico" [9], el cual ha recibido mucha atención en los últimos dos años (en gran parte gracias al trabajo de Maldacena [10], que ha propuesto una relación nueva y prometedora entre las teorías *gauge* y la gravitación). Por otro lado, la Teoría de Cuerdas es una teoría

[1] Desde luego que esto siempre ha sido fuente de controversias, aunque actualmente una inmensa mayoría no lo pone en duda. Por un lado, son objetos que predice la Relatividad General, la cual parece describir correctamente el límite clásico la interacción gravitatoria. Por otra parte, parece haber evidencias astrofísicas que difícilmente admiten otra explicación.

aún en construcción, y quizá afrontar estos problemas nos pueda dar pistas acerca de su eventual formulación definitiva. De esta manera, los agujeros negros parecen ser un paradigma desde muchos puntos de vista. Su estudio en Teoría de Cuerdas se ha visto fuertemente potenciado en los últimos años gracias, en una gran parte, al descubrimiento hacia mediados de la pasada década de las dualidades en las Teorías de Cuerdas. Los agujeros negros son soluciones no perturbativas (en un sentido que se explicará más adelante), y un avance considerable en los aspectos no perturbativos de la teoría ha sido alcanzado justamente gracias al estudio de dualidades.

El nexo entre lo que sabemos -soluciones tipo agujero negro y sus propiedades en la teoría clásica- y lo que pretendemos encontrar -una correcta descripción cuántica, al menos en el marco de la Teoría de Cuerdas- está en las teorías de Supergravedad (las cuales son extensiones supersimétricas de la Relatividad General), pues éstas son el límite de baja energía de la Teoría de Cuerdas. Por ello es importante encontrar soluciones de este tipo en las teorías de Supergravedad y formularlas de una manera que permita el estudio de sus propiedades. Es en este aspecto, modesto pero necesario, en el que se centra el trabajo que presentamos a continuación. La motivación, más allá de los aspectos genéricos que hemos señalado aquí, así como la descripción en líneas generales del mismo requieren algunos detalles técnicos que introduciremos brevemente en la siguiente sección. Por este motivo pospondremos la descripción somera de las características y particularidades de nuestro estudio hasta el final de la misma.

2 Agujeros negros y Teoría de Cuerdas

2.1 Descripción termodinámica

Como acabamos de comentar, uno de los hechos más significativos de la física de agujeros negros es su (supuesto) comportamiento termodinámico. Consideremos la solución exterior de Schwarzschild en cuatro dimensiones:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2MG_N^{(4)}}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2MG_N^{(4)}}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega_{(2)}^2 \qquad (2.1)$$

($G_N^{(4)}$ es la constante de Newton en cuatro dimensiones, $d\Omega_{(2)}^2$ es la métrica sobre S^2 y M es la masa atribuida al agujero negro. Hemos hecho $c = 1$). Sabemos que esta solución presenta un horizonte de sucesos en

$$r_S = 2G_N^{(4)} M \qquad (2.2)$$

(*radio de Schwarzschild*). Para objetos suficientemente densos dicho radio se encuentra fuera de la distribución de materia que provoca el campo gravitatorio, por lo que (2.1) puede extenderse a $r < r_S$, y sabemos que cualquier cuerpo que se encuentre en dicha región no podrá nunca traspasar el horizonte. Existen dos cantidades asociadas al agujero negro que poseen fuertes analogías con la temperatura T y la entropía S de un sistema termodinámico. Dichas cantidades son, respectivamente, la **gravedad de superficie** en el horizonte de sucesos κ_H

$$\kappa_H = \frac{1}{4G_N^{(4)} M}\,, \qquad (2.3)$$

y el **área** del horizonte A_H

$$A_H = 16\pi \left(G_N^{(4)} M\right)^2 . \qquad (2.4)$$

¿Dónde está la analogía?

En primer lugar, la gravedad de superficie κ_H (que físicamente es la fuerza por unidad de masa que debe ejercer un observador en el infinito para mantener un cuerpo en $r \simeq r_S$) es una cantidad que es *constante* sobre todo el horizonte, así como la temperatura de un cuerpo en equilibrio térmico con el entorno es constante sobre aquél (ley "cero" de la termodinámica). En segundo lugar, Hawking demostró [11], bajo supuestos bastante generales, que el área del horizonte es una función *no decreciente* del tiempo en cualquier proceso físico que implique a agujeros negros. Esto nos trae a la cabeza la segunda ley de la termodinámica, que establece que la entropía de un sistema físico nunca disminuye con el tiempo. Sin embargo, lo que realmente hizo que alguna gente se empezase a tomar en serio las analogías entre las leyes de la termodinámica y las que parecen regir el comportamiento de los agujeros negros fue la relación que gobierna las variaciones de energía en un agujero negro:

$$dM = \frac{1}{8\pi G_N^{(4)}} \kappa dA_H \,. \tag{2.5}$$

Dado que es natural asociar la masa del agujero negro con la energía total del sistema, la expresión de arriba es exactamente análoga a la primera ley de la termodinámica:

$$dE = TdS \,, \tag{2.6}$$

si efectivamente hacemos las identificaciones señaladas, es decir:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \kappa_H & \sim & T \,, \\ A_H & \sim & S \,. \end{array} \right.$$

No obstante, hasta aquí todo esto no parece ser más que una serie de coincidencias sorprendentes pero injustificadas: clásicamente, no tiene sentido suponer que un agujero negro es un objeto en equilibrio térmico con el entorno (sólo absorbe y no puede radiar nada, por lo que, en cualquier caso, de asociarle una temperatura ésta habría de ser exactamente cero). Por otro lado, parece difícil argumentar a favor de adjudicarle una entropía: la misma está relacionada con la degeneración de los estados microscópicos que se corresponden con un mismo estado macroscópico. ¿Cuáles son los estados microscópicos de un agujero negro clásico?

La situación cambió radicalmente tras el descubrimiento de Hawking [3] de que un agujero negro *efectivamente radia con el espectro de un cuerpo negro* a una temperatura dada por

$$T_H = \frac{\hbar \kappa_H}{2\pi} \tag{2.7}$$

(*temperatura de Hawking*). La derivación original de Hawking está hecha teniendo el cuenta el comportamiento semiclásico de un campo cuántico en una geometría con horizonte (es un efecto inusual que se debe a las fluctuaciones del vacío en las proximidades del horizonte de sucesos). Nótese que

$$T_H \sim \kappa_H \sim \frac{1}{M} \,,$$

por lo que al radiar, dado que el agujero negro pierde masa, su temperatura aumenta, se incrementa la tasa de emisión y en consecuencia el final del agujero negro de Schwarzschild es explosivo, "evaporándose" completamente. En el cálculo no se tienen en cuenta los efectos de reacción sobre el campo gravitatorio, por lo que en principio el mismo sólo es fiable para masas grandes, y falla en los estados finales de la evaporación.

De esta manera, un agujero negro parece poseer *realmente* un comportamiento térmico. El cálculo del coeficiente de proporcionalidad entre la temperatura y la gravedad de superficie nos permite calcular, a partir de la primera ley, la relación exacta entre el área del horizonte y la entropía atribuida al agujero negro. La misma es:

$$S_{BH} = \frac{A_H}{4\hbar G_N^{(4)}} \tag{2.8}$$

(*entropía de Bekenstein-Hawking*), esto es, un cuarto del área del horizonte en unidades de Planck.

Todas estas relaciones poseen generalizaciones en el caso de agujeros negros cargados y con rotación, pero el comportamiento termodinámico aquí descrito parece ser algo común a todas las familias conocidas de agujeros negros. En particular, la expresión para la entropía de B-H parece ser universal.

Finalmente, señalaremos otro fenómeno clásico que sustenta la interpretación termodinámica: el "teorema" de "**no pelos**". Podemos considerar agujeros negros en teorías que poseen más campos acoplados -campos escalares o electromagnéticos, por ejemplo-, así como agujeros negros con rotación. Sin embargo, en todos los casos supuestamente físicos, esto es, en todos los casos en los que la singularidad está cubierta por un horizonte de sucesos (lo que constituye la hipótesis del "**censor cósmico**" [12]), la geometría parece no estar determinada más que por la masa, el momento angular y las cargas *gauge*. En este sentido, no parece haber muchos agujeros negros posibles. Esto se ha visto apoyado por diferentes teoremas de unicidad de las soluciones conocidas (teorema de Birkhoff, etc.), y habitualmente se formula diciendo que "los agujeros negros no tienen pelo" [13]. El "pelo" del agujero negro serían otros posibles parámetros físicos que caracterizasen la solución[2]. Esta afirmación no ha sido nunca probada de manera general pero, en caso de ser cierta, parece no ser más que un reflejo de la imagen termodinámica que acabamos de describir: al igual que un sistema térmico con muchos grados microscópicos de libertad sólo está descrito macroscópicamente por unas pocas cantidades (temperatura y entropía, por ejemplo), la descripción clásica, macroscópica, de un agujero negro parece no venir dada por más que unos pocos parámetros. El "pelo" y los detalles de su supuesta estructura interna desaparecen en la descripción clásica, y todas las posibles pistas acerca de su estrucura microscópica quedan codificadas en la entropía y la temperatura.

[2]En el caso de soluciones estacionarias esto parece ser correcto. Por otro lado, podríamos pensar que debería haber más parámetros en un caso físico real de colapso gravitatorio debido a posibles irregularidades en el proceso (un colapso no exactamente esférico, por ejemplo). Parece ser, sin embargo [14], que en todos los modelos de colapso el estado estacionario al que se supone que tiende la solución asintóticamente (y que ha de describirla suficientemente bien para tiempos grandes) se alcanza relativamente rápido, y en el proceso en el que se alcanza dicho estado final el agujero negro se libera de todas las irregularidades.

2.2 Agujeros negros, Teoría de Cuerdas y Supergravedad

Parece ser, por tanto, que necesitamos una teoría microscópica de la física de los agujeros negros si queremos explicar sus propiedades clásicas. Tal teoría microscópica habría de ser una teoría cuántica de la gravedad, y hasta el momento la teoría más potente que conocemos al respecto es la teoría de cuerdas. Sin embargo, la idea habitual que tenemos de un agujero negro es la de un cuerpo supermasivo. ¿Cómo podemos usar una teoría que describe objetos fundamentales para explicar la física del colapso gravitatorio de, por ejemplo, una estrella que tiene cuatro veces la masa del Sol? La cuestión radica en que esperamos tener un agujero negro cuando el objeto es suficientemente *denso*, y no necesariamente suficientemente masivo. Si consideramos que la extensión de una partícula de masa m es la que nos da la longitud de la onda Compton asociada

$$\lambda \sim \lambda_C = \frac{\hbar}{mc}\,,$$

veremos que para partículas ordinarias (electrones o quarks) su extensión es mucho mayor que el radio de Schwarzschild asociado a su masa. Dichos objetos no poseen horizonte y no son un agujero negro. Sin embargo, sí debemos esperar que el horizonte aparezca en una partícula sufucientemente masiva. De hecho, una partícula cuya masa fuese del orden de la masa de Planck

$$M_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G_N^{(4)}}}$$

($\sim 10^{19}$ GeV $\sim 10^{-5}$ gr.) tendría una longitud de onda asociada del mismo orden que su radio de Schwarzschild

$$\lambda_C(M_P) \sim r_S(M_P) \sim 10^{-35}\ \mathrm{m}\,.$$

A partir de esta escala los efectos de la gravedad no pueden despreciarse, y es razonable pensar que para objetos suficientemente masivos efectivamente aparecerá un horizonte de sucesos. A partir de una cierta escala de masas y al menos a distancias suficientemente lejanas, habríamos de tener un objeto "fundamental" que admite una descripción de agujero negro.

El caso es que la Teoría de Cuerdas *predice tales estados masivos*, y es por este motivo por el que podemos esperar obtener una descripción cuántica en Teoría de Cuerdas de un agujero negro. Sin embargo, los agujeros negros aparecen en Relatividad General, que es una teoría de campos clásica. Lo que permite relacionar ambas descripciones de lo que pensamos que ha de ser un mismo fenómeno son las **teorías de Supergravedad**, puesto que las mismas constituyen el límite de baja energía de las teorías de cuerdas y son, básicamente, Relatividad General acoplada a más campos. En las teorías de Supergravedad sí tenemos soluciones tipo agujero negro del mismo tipo de las de RG, y podemos esperar encontrar su contrapartida cuántica estudiando la Teoría de Cuerdas particular de la que son límite.

¿En qué sentido es límite una teoría de Supergravedad de una Teoría de Cuerdas? El espectro de una Teoría de Cuerdas posee un número finito de campos sin masa y una torre infinita de estados arbitrariamente masivos. Entre los estados sin masa siempre aparece el gravitón $g_{\mu\nu}$, una 2-forma o tensor antisimétrico $B_{\mu\nu}$ y un campo escalar ϕ (dilatón). Podemos considerar la dinámica de una cuerda propagándose en una configuración dada de dichos campos sin masa, la cual podemos entender como un condensado de los modos no masivos (un condensado de modos masivos es incompatible con la invariancia conforme). Por ejemplo, en el caso de la cuerda bosónica, la acción usual de Polyakov para una cuerda propagándose en tal *background* de campos se generaliza a

$$\begin{aligned} S &= \frac{-1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma \left(\sqrt{\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu g_{\mu\nu}(X) + \epsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu B_{\mu\nu}(X)\right) + \\ &\quad + \frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma \sqrt{\gamma} R^{(2)}\phi(X)\,, \end{aligned} \tag{2.9}$$

donde $\gamma^{\alpha\beta}$ es la métrica en el *worldsheet* de la cuerda, $R^{(2)}$ es el escalar de curvatura de la misma y $\epsilon^{\alpha\beta}$ es el correspondiente símbolo antisimétrico (μ, ν son índices espaciotemporales, mientras que α, β son índices en el *worldsheet*). En la teoría sólo existe un parámetro físico con dimensiones, α', que es el inverso de la tensión de la cuerda. Nadie sabe cuánto vale, pero sabemos ha de ser muy pequeño dado que una cuerda se "convierte" en una partícula en el límite $\alpha' \to 0$. Esto hace que sea un parámetro apropiado en torno al cual hacer teoría de perturbaciones.

Existe una restricción sobre las configuraciones de campos sin masa en los que la cuerda puede propagarse, la cual es el resultado de *imponer* invariancia conforme a la teoría que define la acción (2.9)[3], en la que dichos campos juegan el papel de acoplos locales. Puede verse que la invariancia conforme se obtiene si y sólo si se anulan las funciones beta asociadas a estos campos [15, 16]. El cálculo de estas funciones beta es perturbativo, siendo α' el parámetro de expansión. Pues bien, las relaciones así obtenidas, a orden más bajo[4] en α':

$$\beta_g = \beta_B = \beta_\phi = 0\,, \tag{2.10}$$

resultan ser ecuaciones dinámicas para estos campos que *coinciden con las ecuaciones de Euler-Lagrange de una cierta teoría de Supergravedad* (a determinar, en este caso, *a posteriori*, y la cual dependerá de la Teoría de Cuerdas particular en la que estemos trabajando). Cualquier solución a las mismas es por tanto un vacío admisible de la Teoría de Cuerdas en el cual una cuerda puede propagarse[5]. Hay, por otra parte, tres suposiciones

[3] O en la correspodiente generalización, según la supercuerda que estemos considerando.

[4] El cálculo a orden más alto en α' de las funciones β introduce las correcciones correspondientes en la acción efectiva.

[5] La acción efectiva de los campos sin masa también puede obtenerse tratando de construir una acción que reproduzca los elementos de la matriz S obtenidos en la teoría de cuerdas para el *scattering* de estos campos en el límite de baja energía -momentos pequeños- [17]. En ambos casos, el resultado es el mismo.

implícitas en todo este razonamiento, que son las siguientes:

- la dinámica efectiva así obtenida es necesariamente válida en el límite de *baja energía*, ya que no podemos suponer un *background* estable de campos sin masa si consideramos que los mismos pueden interaccionar a alta energía, porque en este caso se excitarían los modos masivos de la cuerda.

- La acción efectiva es una aproximación *a nivel árbol* en el *scattering* de los modos sin masa que estamos considerando. Esto se ve explícitamente cuando usamos el método de la matriz S para calcular la acción efectiva, puesto que expresamente sólo se consideran los diagramas que contribuyen a orden más bajo. Esta aproximación, de cualquier manera, también está implícita en el cálculo de las funciones β [16].

- La descripción de Supergravedad deja de ser válida *a distancias del orden de la escala de la cuerda* l_s. En particular, consideraremos que para que una solución tipo agujero negro proporcione una descripción correcta del campo gravitatorio, la curvatura en el horizonte habrá de ser $R_H << 1/l_s$. Es decir, admitiremos que si vamos a distancias tan pequeñas que "vemos" las cuerdas, deja de tener sentido la solución de Supergravedad.

De esta manera, la imagen que hemos de tener es la siguiente: en la Teoría de Cuerdas podemos considerar una cuerda inmersa en un condensado de sus excitaciones no masivas. La dinámica de este sistema viene dada por una acción del estilo de (2.9), y hemos visto que *las configuraciones de condensados aceptables en los que la cuerda puede propagarse quedan descritas*, en el régimen de baja energía y dentro de los límites discutidos arriba, *por una teoría de Supergravedad.* Ahora bien, supongamos que en dicha teoría de Supergravedad tenemos soluciones que describen agujeros negros. La teoría permite calcular, conocidos los campos, los parámetros de masa, rotación, cargas, ...etc., que atribuimos a la fuente de dichos campos. La cuestión es *si podemos identificar la supuesta fuente* de los campos *con una configuración de cuerdas dada*, de manera que:

- sus números cuánticos se correspondan con las cargas que caracterizan la solución de Supergravedad, y

- el estudio de sus propiedades microscópicas explique, en particular, la temperatura y entropía asignadas al agujero negro.

Cuando decimos "configuración de cuerdas" nos estamos refiriendo a cualquier posible estructura (simple o compuesta) de los objetos predichos por la teoría (por ejemplo, excitaciones masivas de una cuerda o estados ligados de D-branas). En el caso de trabajar con teorías compactificadas, supondremos que dichas configuraciones se encuentran enrolladas en las dimensiones compactas, de modo que la configuración vista en dimensiones bajas es puntual y una descripción de agujero negro (por oposición a p-brana) es apropiada. Básicamente, ha habido dos aproximaciones al problema de encontrar configuraciones en Teoría de Cuerdas que reproduzcan las propiedades de los agujeros negros de las correspondientes teorías de Supergravedad: tratar de identificarlos, por un lado, con **estados masivos de la cuerda** [20, 21] y, por otro, con **estados ligados de D-branas** [5, 18]. Este último tratamiento ha resultado particularmente fructífero al tratar de reproducir la entropía de Bekenstein, pues se ha conseguido reproducir el coeficiente exacto de proporcionalidad para algunos casos.

2.3 Estados BPS y estados no BPS

Tenemos pues una relación entre teorías que en principio nos puede proporcionar una descripción microscópica de un agujero negro. Hay sin embargo una dificultad que resolver para relacionar los cálculos en uno y otro límite, que es el siguiente: los cálculos que sabemos llevar a cabo en Teoría de Cuerdas son cálculos *perturbativos en la constante de acoplo de la cuerda*, g, de modo que pueden llevarse a cabo en la región de acoplo débil, cuando $g << 1$. Sin embargo, puede argumentarse [19] que este no es nunca el caso para una solución tipo agujero negro, pues en este caso el campo gravitatorio es intenso, y para alcanzar el límite en el cual la descripción de Supergravedad es válida es necesario incrementar el valor del acoplo. En cuerdas la constante de acoplo es algo especial. Como siempre, es una constante adimensional que aparece en una amplitud de *scattering* una vez por cada vértice de interacción. Sin embargo, no se trata de un parámetro a determinar dado por la Naturaleza, sino que es algo "dinámico", en el sentido de que es el valor esperado en el vacío del campo del dilatón

$$g = e^{<\phi>} \,, \tag{2.11}$$

lo cual se debe a la forma en que dicho campo se acopla al *worldsheet* de la cuerda, dado por el último término de (2.9). Esto quiere decir que nos encontramos en distintos rangos de acoplamiento (fuerte o débil) según cuál sea el estado fundamental del dilatón. Esta constante es la que determina, a su vez, la constante de acoplo gravitatoria (constante de Newton).

Para contar estados microscópicos hemos de trabajar en la región de acoplo débil, en la cual no esperamos tener un agujero negro[6]. Para comparar el resultado con el que proporciona la entropía de Bekenstein hemos de ir a la región de acoplo fuerte (muchas veces se dice que al ir de un régimen de acoplamiento a otro lo que ocurre es que el sistema de cuerdas o de D-branas que estemos considerando "colapsa", se forma el horizonte y obtenemos un agujero negro). Para poder comparar el contaje de estados en ambas descripciones hemos de poder identificar las cargas que describen al sistema en uno y otro

[6]Sí que tenemos una *solución* tipo agujero negro, pues siempre podemos considerar la solución de la teoría de Supergravedad. Lo que ocurre es que dicha solución no tiene sentido en tal régimen de acoplo, porque el supuesto horizonte se encuentra a distancias comparables a la longitud típica de una cuerda, y $R_H \sim 1/l_s$.

límite, y esta identificación sólo puede darse por válida si estamos seguros de que *no hay correcciones gravitacionales* o efectos de renormalización cuando cambiamos el régimen de acoplo. Tal garantía o "teorema no renormalización" sólamente está asegurado en el caso de los estados BPS.

En una teoría de Supergravedad, el álgebra de supersimetría impone una serie de restricciones sobre los estados, las cuales pueden expresarse de la siguiente manera:

$$M \geq |\mathcal{Z}_i| \tag{2.12}$$

(*cotas de Bogomol'nyi*), donde M es la masa ADM y $\mathcal{Z}_i$ son los autovalores de la matriz de cargas centrales del álgebra, los que pueden expresarse en términos del resto de cargas del sistema. Esto convierte a (2.12) en ligaduras, impuestas por supersimetría, a satisfacer entre la masa y el resto de las cargas. Las configuraciones que saturan alguna de estas cotas se denominan **estados BPS**, y son especiales por varias razones. En primer lugar, son estables: no pueden decaer dado que su energía es mínima. Por otro lado, "viven" en supermultipletes más pequeños que los del resto de las representaciones masivas que no satisfacen la igualdad [22]. Estas soluciones también se denominan *supersimétricas*, pues puede verse que siempre que se satura alguna de las cotas de Bogomol'nyi la solución presenta "supersimetría residual", en el sentido de que es invariante bajo algunas de las transformaciones de supersimetría del álgebra (el número de supersimetrías que conserva la solución depende de cuántas cotas estén saturadas). Pero, sobre todo, puede demostrarse que *su masa no está sujeta a correcciones cuánticas de ninguna clase* [23]. Esto es lo que hace que el estudio de configuraciones BPS sea tan importante para obtener una derivación microscópica fiable de las propiedades de los agujeros negros.

2.4 Agujeros negros extremos y no extremos

Así pues, los agujeros negros cuyas cargas saturan la cota de Bogomol'nyi son útiles porque podemos estudiar sus propiedades microscópicas en base a los principios explicados anteriormente. Por otra parte, estas soluciones son más fáciles de obtener, pues poseen más simetrías que una solución genérica y están sujetas a más restricciones además de las ecuaciones de movimiento. Por ejemplo, en el caso de configuraciones puramente bosónicas, que son en las que nosotros estaremos interesados, se han de satisfacer, además de las ecuaciones de Euler-Lagrange, las ecuaciones diferenciales de primer orden que hacen las transformaciones supersimétricas de los fermiones iguales a cero. En los últimos años han sido obtenidas toda una serie de familias de soluciones supersimétricas de diferentes teorías de Supergravedad. En particular, la familia más general de soluciones BPS en la teoría de supergravedad pura $N = 4$ en $d = 4$ ha sido obtenida en [24].

Sin embargo, las soluciones clásicas tipo agujero negro que se corresponden con algún límite BPS resultan ser siempre soluciones *extremas*[7], y esto supone algunos inconve-

[7] De hecho, cuando se expresa en términos de las cargas, el límite BPS es análogo a las expresiones

nientes, que se deben a que este límite es algo peculiar en varios sentidos. Como es bien sabido, la temperatura de los agujeros negros extremos es exactamente nula (lo que cabe esperar cuando dicho límite se corresponde con el límite supersimétrico, dada la estabilidad que hemos comentado que caracteriza a los estados BPS). Esto implica que la derivación de la entropía de Bekenstein, la cual se hace a partir de la primera ley (una generalización apropiada de (2.5) para agujeros negros cargados), no puede efectuarse en este caso. Los argumentos clásicos de Relatividad General para tratar de derivar una entropía en estos casos proporcionan una entropía igual a cero [25]. Además, no todos los agujeros negros presentan un horizonte regular (de área finita) en el límite extremo y, por otra parte, los cálculos que se han llevado a cabo en Teoría de Cuerdas para este tipo de objetos (con horizonte regular) dan un resultado que se corresponde con un cuarto del área del horizonte, en oposición a los resultados de la teoría clásica que acabamos de mencionar. Al lado de esta serie de inconvenientes molestos, los agujeros negros extremos presentan una deficiencia fundamental: no radian, por lo que si bien podemos intentar derivar una expresión para su entropía, no podemos esperar obtener ninguna información acerca del proceso de emisión de Hawking.

Por otra parte, en lo que respecta a los agujeros negros no extremos, la dificultad estriba en que difícilmente se puede obtener de ellos una descripción microscópica en la cual confiar dado que, al no constituir estados BPS, no controlamos las correcciones cuánticas a las que posiblemente estén sujetos. Pero estos objetos poseen en cambio una física mucho más interesante y un comportamiento clásico mucho más fiable. Es por ello que ha habido intentos de describir su estructura microscópica en la medida de lo posible. En particular, se ha estudiado el límite próximo al caso extremo, dado que hay argumentos que indican que en dicho límite las posibles correcciones cuánticas son pequeñas. En estos intentos se han obtenido resultados que reproducen exitosamente tanto la entropía clásica como la tasa de emisión de Hawking [6, 7, 18]. Otros tratamientos exitosos del problema se han basado en encontrar configuraciones duales a agujeros negros no extremos, en las cuales sí puedan contarse grados de libertad microcópicos [26]. Es de esperar que en un futuro no muy lejano se desarrollen técnicas sistemáticas que permitan una descripción microscópica correcta de este tipo de soluciones no extremas.

---

que satisfacen los agujeros negros extremos, y la cota de Bogomol'nyi en sí (que en este caso es una consecuencia *derivada* de la teoría de representaciones del álgebra de supersimetría) nos recuerda a la relación que en Relatividad General *imponemos* a las soluciones supuestamente físicas, es decir, sin singularidades desnudas. La relación entre ambos límites, así como el papel que juega supersimetría en relación con la hipótesis del “censor cósmico” se discutirá en la sección 5.2.

2.5 La solución general en $N = 4$, $d = 4$

El primer paso para poder estudiar soluciones no extremas es, por tanto, encontrar su contrapartida correspondiente en Supergravedad. En el estudio cuyos detalles se encuentran a continuación se presenta la familia de soluciones estacionarias tipo agujero negro más general posible de la teoría de Supergravedad pura $N = 4$, $d = 4$ [27]. Esta teoría es una truncación consistente de la acción efectiva de baja energía de la cuerda Heterótica compactificada a cuatro dimensiones en un seis-toro. Es importante que puntualicemos lo siguiente: por soluciones "tipo agujero negro" nos estamos refiriendo a todas aquellas en la que la fuente es de tipo puntual, ya los objetos que describen nuestras soluciones van desde verdaderos agujeros negros con horizonte regular, hasta soluciones tipo Taub-NUT, singularidades desnudas, etc. Nuestras soluciones

- incluyen *todos* los posibles casos (extremos y no-extremos, BPS y no-BPS, estáticos y estacionarios) que podemos esperar en la teoría compatibles con el teorema de "no-pelos", puesto que

- *todos* los parámetros físicos de la teoría son *libres* y no están sujetos a ninguna ligadura (en particular, no saturan la cota de Bogomol'nyi).

- Todas las constantes que parametrizan la familia de soluciones que presentamos aquí *tienen significado físico bien definido* (es decir, son cargas, masa, momento angular, etc. La solución no está dada, por ejemplo, en términos de ángulos que parametrizan rotaciones o *boosts* del grupo de dualidad de la teoría).

- La solución posee *propiedades de transformación bajo dualidad bien definidas* y es, de hecho, *invariante* (como familia) bajo los grupos de dualidad S y T. Este hecho será discutido extensivamente en la sección 4.3.

- Desde luego, nuestro resultado *incluye todas las soluciones particulares* de esta teoría (y de alguna de sus versiones simplificadas con menos vectores, así como soluciones de algunas teorías de $N = 2$ acopladas a vectores) presentes en la literatura.

A continuación describimos la acción efectiva de la cuerda Heterótica y explicamos cómo se hace la compactificación toroidal a cuatro dimensiones y la truncación a Supergravedad $N = 4$, $d = 4$, estableciendo explícitamente las conexiones entre esta teoría y la teoría de la cuerda Heterótica en $d = 10$. En la sección 4 describimos la familia de soluciones y sus propiedades, haciendo especial énfasis en sus propiedades de transformación bajo dualidad, lo que consideramos que es una de sus principales características. Finalmente, en la sección 5 se describe la estructura de los casos particulares que describen verdaderos agujeros negros y se calculan sus cantidades termodinámicas, demostrando la invariancia bajo dualidad de las mismas.

3 La acción efectiva de la cuerda Heterótica y la truncación a Supergravedad $N = 4$

La acción efectiva de la cuerda Heterótica compactificada en T^6 es la de Supergravedad $N = 4$ acoplada a 22 multipletes vectoriales. La teoría en la que nosotros estamos interesados es Supergravedad $N = 4$ pura, la cual es una truncación consistente de la teoría completa[8]. Dado que, en última instancia, lo que se persigue es una interpretación desde el punto de vista de la Teoría de Cuerdas completa de las soluciones tipo agujero negro, vamos a explicar brevemente cómo se efectúa la compactificación toroidal de la teoría y en qué consiste la truncación a $N = 4$.

En diez dimensiones, la acción efectiva de la cuerda Heterótica es la de Supergravedad $N = 1$ acoplada a una teoría de Yang-Mills con grupo *gauge* $E_8 \times E_8$ ó $SO(32)/\mathbb{Z}_2$. No obstante, consideraremos sólamente la parte abeliana de estos grupos *gauge* consistente en 16 campos $U(1)$, los cuales, por otra parte, aparecen siempre en el caso de una compactificación toroidal genérica de los modos *left*. En consecuencia, lo que estamos considerando es una generalización supersimétrica en 10 dimensiones de la teoría de Einstein-Maxwell con varios campos *gauge* [29]. Estos campos de materia aparecen en la acción a primer orden en α'. La parte bosónica de la **acción** en el sistema de referencia de la cuerda es ($\hbar = c = 1$):

$$\hat{S} = \frac{1}{16\pi G_N^{(10)}} \int d^{10}\hat{x}\sqrt{|\hat{g}|}\, e^{-2\hat{\phi}} \left(\hat{R} - 4(\partial\hat{\phi})^2 + \tfrac{1}{12}\hat{H}^2 - \tfrac{1}{4}\alpha' \sum_{I=1}^{16} (\hat{F}^I)^2\right) , \qquad (3.1)$$

donde los acentos circunflejos sobre las diferentes cantidades indican que las mismas son 10-dimensionales. Los campos que aparecen en la acción son la métrica $\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$, el dilatón $\hat{\phi}$, el axión (2-forma) $\hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ (estos campos son todos ellos NS-NS cuando la teoría se interpreta como una truncación de la Tipo IIA, y conforman la parte bosónica del supermultiplete de gravedad de la teoría) más los campos de materia $\hat{A}^I$ ($\hat{F}^I_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \equiv 2\partial_{[\hat{\mu}}\hat{A}^I_{\hat{\nu}]}$). El acoplo de los campos de materia requiere, para obtener una acción supersimétrica, la adición de un término de Chern-Simons en el tensor de campo del axión. Este término aparece automáticamente (a orden α') al incluir los campos $U(1)$ obtenidos al compactificar los modos provinientes de las excitaciones *left*. De esta manera, H queda modificado respecto de su forma usual según

$$\hat{H}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}} = 3\partial_{[\hat{\mu}}\hat{B}_{\hat{\nu}\hat{\rho}]} + \tfrac{3}{2}\alpha'\hat{A}^I_{[\hat{\mu}}\hat{F}^I_{\hat{\nu}\hat{\rho}]} \,. \qquad (3.2)$$

[8]Una truncación *consistente* es una simplificación de la teoría original en la cual algunos campos se ponen iguales a cero -o se hacen constantes- "a mano", pero de tal manera que las soluciones de la teoría truncada sean también soluciones de la teoría completa. Esto no ocurre siempre así, ya que, al hacer constantes ciertos campos, algunas ecuaciones de movimiento de la teoría original pueden convertirse en ligaduras no triviales, las cuales han de ser satisfechas por los campos de la teoría simplificada si queremos que sean soluciones de las ecuaciones de movimiento de la teoría original.

3.1 Compactificación toroidal

Para efectuar la reducción dimensional a cuatro dimensiones [30] hacemos el Ansatz usual [31] para los *Vielbeins*[9]

$$(\hat{e}_{\hat{\mu}}{}^{\hat{a}}) = \begin{pmatrix} e_\mu{}^a & A^{(1)}{}_\mu{}^m e_m{}^i \\ & \\ 0 & e_m{}^i \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

el cual siempre es posible gracias a la invariancia Lorentz local, y donde suponemos que ninguna de las componentes tiene dependencia de las coordenadas internas. La métrica en cuatro dimensiones puede entonces escribirse

$$g_{\mu\nu} = e_\mu{}^a e_\nu{}^b \eta_{ab}\,, \tag{3.4}$$

mientras que la métrica del espacio interno es

$$G_{mn} = -e_m{}^i e_n{}^j \delta_{ij}\,. \tag{3.5}$$

Los campos G_{mn} son escalares y los $A^{(1)\,m}$ son vectores en la teoría cuadridimensional.

En cuanto a la reducción de la **métrica**, tenemos que la relación entre las componentes de $\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ y los campos en cuatro dimensiones es

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \hat{g}_{\mu\nu} & = & g_{\mu\nu} + A^{(1)}{}_\mu{}^m A^{(1)}{}_\nu{}^n G_{mn}\,, \\ \hat{g}_{\mu n} & = & A^{(1)}{}_\mu{}^m G_{mn}\,, \\ \hat{g}_{mn} & = & G_{mn}\,. \end{array} \right. \tag{3.6}$$

El **dilatón** en cuatro dimensiones viene dado por la expresión

$$e^{-2\hat{\phi}} = (\det G_{mn})^{-\frac{1}{2}}\, e^{-2\phi}\,. \tag{3.7}$$

Por otro lado, para poder efectuar la reducción de los campos de materia, así como la reducción del axión, tenemos que hacer uso de las siguientes definiciones de los campos en cuatro dimensiones:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^I{}_m & \equiv & \sqrt{\alpha'}\hat{A}^I{}_m\,, \\ A^I{}_\mu & \equiv & \sqrt{\alpha'}\left(\hat{A}^I{}_\mu - \hat{A}^I{}_m A^{(1)m}{}_\mu\right)\,, \\ A^{(2)}{}_{m\,\mu} & \equiv & \hat{B}_{\mu m} + \hat{B}_{mn} A^{(1)n}{}_\mu - \frac{1}{2} a^I{}_m A^I{}_\mu\,, \\ B_{mn} & \equiv & \hat{B}_{mn}\,, \\ B_{\mu\nu} & \equiv & \hat{B}_{\mu\nu} + A^{(1)m}{}_{[\mu} A^{(2)}{}_{|m|\,\nu]} - \hat{B}_{mn} A^{(1)m}{}_\mu A^{(1)n}{}_\nu + \\ & & + a^I{}_m A^{(1)m}{}_{[\mu} A^I{}_{\nu]}\,. \end{array} \right. \tag{3.8}$$

[9]Nuestros convenios son los que siguen: $\hat{\mu}, \hat{\nu}, ...$ son índices curvos en diez dimensiones, mientras que $\hat{a}, \hat{b}, ...$ representan los correspondientes índices planos. Diferenciaremos las coordenadas compactas de las no compactas de la siguiente manera: para los índices curvos, $\mu, \nu, ... = 0, 1, 2, 3$ y $m, n, ... = 4, ..., 9$; mientras que para los índices planos tendremos $a, b, ... = 0, 1, 2, 3$ y $i, j, ... = 4, ..., 9$. La signatura de la métrica es $(+, -, -, ..., -)$.

Estas definiciones son las que se corresponden con unas propiedades de transformación *gauge* adecuadas en cuatro dimensiones. Haciendo uso de ellas, obtenemos las siguientes expresiones para la reducción de los **vectores**:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \hat{F}^{I}{}_{\mu\nu} & = & \frac{1}{\sqrt{\alpha'}}\left(F^{I}{}_{\mu\nu} + a^{I}{}_{m}F^{(1)m}_{\mu\nu}\right)\,, \\ \hat{F}^{I}{}_{\mu n} & = & \frac{1}{\sqrt{\alpha'}}\partial_{\mu}a^{I}{}_{n}\,, \end{array}\right. \tag{3.9}$$

así como las siguientes relaciones para la reducción del **axión**:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \hat{H}_{aij} & = & e_{a}{}^{\mu}e_{i}{}^{m}e_{j}{}^{n}\left(\partial_{\mu}B_{mn} - \frac{1}{2}a^{I}{}_{m}\partial_{\mu}a^{I}{}_{n} + \frac{1}{2}a^{I}{}_{n}\partial_{\mu}a^{I}{}_{m}\right)\,, \\ \hat{H}_{abi} & = & e_{a}{}^{\mu}e_{b}{}^{\nu}e_{i}{}^{m}\left(F^{(2)}{}_{m\,\mu\nu} - C_{mn}F^{(1)n}{}_{\mu\nu} + a^{I}{}_{m}F^{I}{}_{\mu\nu}\right)\,, \\ \hat{H}_{abc} & = & e_{a}{}^{\mu}e_{b}{}^{\nu}e_{c}{}^{\rho}\left(3\partial_{[\mu}B_{\nu\rho]} - \frac{3}{2}L_{\Sigma\Lambda}A^{\Sigma}{}_{[\mu}F^{\Lambda}{}_{\nu\rho]}\right)\,. \end{array}\right. \tag{3.10}$$

Aquí hemos definido

$$C_{mn} \equiv B_{mn} - \frac{1}{2}a^{I}{}_{m}a^{I}{}_{n}\,, \tag{3.11}$$

y $L_{\Sigma\Lambda}$ es la métrica de $O(6,22)$ en su forma no diagonal:

$$(L_{\Sigma\Lambda}) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{6} & 0 \\ \mathbb{1}_{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbb{1}_{16} \end{pmatrix}\,. \tag{3.12}$$

Por último, basta decir que el axión cuadridimensional se define según

$$\hat{H}_{abc} \equiv H_{abc}, \tag{3.13}$$

teniendo, por tanto

$$\hat{H}^{2} = H^{2} + 3\hat{H}_{abi}\hat{H}^{abi} + 3\hat{H}_{aij}\hat{H}^{aij}\,. \tag{3.14}$$

Agrupando los vectores $A^{(1)m}$ ("modos Kaluza-Klein"), $A^{(2)}{}_{m}$ ("modos *winding*") y los A^{I} en el vector columna de 28 dimensiones

$$(A^{\Sigma}) \equiv \begin{pmatrix} A^{(1)m} \\ A^{(2)}{}_{m} \\ A^{I} \end{pmatrix}\,, \quad F^{\Sigma}_{\mu\nu} \equiv 2\partial_{[\mu}A^{\Sigma}{}_{\nu]}\,, \tag{3.15}$$

obtenemos finalmente, para la **acción** (3.1) **compactificada en** T^{6} la expresión

$$\begin{array}{rcl} S & = & \frac{1}{16\pi G_{N}^{(4)}}\int d^{4}x\sqrt{|g|}e^{-2\phi}\left\{R - 4(\partial\phi)^{2} + \frac{1}{12}H^{2} - \right. \\ & & \left. -\frac{1}{8}\mathrm{Tr}\left(\partial ML\,\partial ML\right) - \frac{1}{4}(LML)_{\Sigma\Lambda}F^{\Sigma}F^{\Lambda}\right\}\,. \end{array} \tag{3.16}$$

La constante de Newton en cuatro dimensiones $G_N^{(4)}$ se obtiene a partir de la constante 10-dimensional integrando las coordenadas compactas

$$G_N^{(4)} = \frac{G_N^{(10)}}{(2\pi)^6 \prod_{i=4}^{9} R_i}\,, \tag{3.17}$$

siendo los R_i los respectivos radios de compactificación. Por otro lado, la matriz M que aparece en (3.16) es la matriz que parametriza los escalares que aparecen en la teoría al compactificar. Su expresión explícita es

$$M = \begin{pmatrix} -G^{-1} & G^{-1}C & G^{-1}a^T \\ C^T G^{-1} & -G - C^T G^{-1} C + a^T a & -C^T G^{-1} a^T - a^T \\ a G^{-1} & -a G^{-1} C - a & \mathbb{1}_{16} - a G^{-1} a^T \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

($a \equiv ({a^I}_m)$ y $C \equiv (C_{mn})$, donde el primer índice denota las filas y el segundo las columnas en ambos casos). Nótese que $M = M^T$.

Por supuesto, (3.16) no es la expresión de la acción efectiva que obtendríamos directamente de (3.1) aplicando las reglas de reducción dimensional que hemos explicado más arriba, pero puede reordenarse para obtener la expresión dada aquí, que es la expresión estándar que encontramos normalmente para la acción efectiva de la cuerda Heterótica compactificada en un toro. La razón en reagrupar los *moduli* de la teoría de esta manera obedece a que, de este modo, la acción se muestra manifiestamente invariante bajo "dualidad T", una de las simetrías de la teoría que expondremos más abajo.

- Dualización del axión y SR de Einstein

Para finalizar esta sección, vamos a realizar un par de modificaciones en la acción cuadridimensional (3.16) que acabamos de obtener.

- En primer lugar, vamos a intercambiar el tensor de campo del axión $H_{\mu\nu\rho}$ por su dual de Hodge[10]. En $d = 4$ dimensiones, el dual de una 3-forma es una 1-forma, que a su vez puede interpretarse como el tensor de campo de una 0-forma o pseudoescalar, que denotaremos a. El procedimiento consiste en añadir a la acción original un multiplicador de Lagrange que impone las identidades de Bianchi para H, lo que permite considerar la acción como un funcional de H en vez de un funcional de B. Posteriormente, H se elimina

[10]En nuestros convenios, el dual de Hodge de una p-forma $\omega_{\mu_1\ldots\mu_p}$ en un espaciotiempo de d dimensiones es

$$^\star\omega_{\mu_1\ldots\mu_{(d-p)}} \equiv \frac{1}{p!\sqrt{|g|}}\epsilon_{\mu_1\ldots\mu_{(d-p)}\nu_1\ldots\nu_p}\omega^{\nu_1\ldots\nu_p}\,,$$

siendo el tensor antisimétrico $\epsilon^{0\cdots(d-1)} = +1$.

usando su ecuación de movimiento, la cual resulta ser justamente la sustitución de H por su dual (que a su vez resultará ser el tensor de campo del multiplicador de Lagrange que habíamos añadido). En nuestro caso, la relación resulta ser

$$H^{\mu\nu\rho} = \frac{e^{2\phi}}{\sqrt{-g}} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\sigma a \,, \tag{3.19}$$

por lo que a es justamente el "dual"[11] de B, y será éste el campo que denominaremos axión de ahora en adelante (el factor $e^{2\phi}$ arriba aparece debido a que estamos trabajando en el sistema de referencia de la cuerda).

La razón para hacer esto es fundamentalmente de carácter dinámico, ya que, en cuatro dimensiones, el axión H sólo posee un grado de libertad dinámico, que es justamente a. Existe también, por otro lado, una motivación para hacerlo relacionada con las simetrías de la teoría: en algunas dimensiones[12], llevarlo a cabo aumenta la simetría original, ya que al reescribir la acción en términos de una nueva p-forma, ésta puede tener el mismo rango que algún otro campo ya presente en la acción, siendo la (posible) nueva simetría alguna clase de redefiniciones entre ellos. En el caso que nos interesa, $d = 4$, hemos visto que el "dual" de B es el pseudoescalar a. Pues bien, resulta que la teoría dualizada presenta efectivamente una nueva simetría, la cual conlleva una redefinición entre el axión a y el dilatón ϕ. Sin embargo, como veremos, esta simetría *no* es una simetría de la acción (dualizada), sino únicamente de sus ecuaciones de movimiento.

- En segundo lugar, vamos a reescribir la acción en el llamado sistema de referencia de Einstein, que por definición es aquel en el que el escalar de curvatura no lleva prefactor conforme (adoptando por tanto la forma estándar en la que se suelen escribir las acciones en las teorías de Supergravedad o en Relatividad General). Para ello, llevamos a cabo el siguiente reescaleo conforme de la métrica

$$g_{E\ \mu\nu} = e^{-2\phi} g_{\mu\nu} \,. \tag{3.20}$$

La acción obtenida una vez realizados estos pasos adopta la siguiente forma (suprimimos todos los índices "E"):

$$\begin{aligned} S \;=\; & \tfrac{1}{16\pi G_N^{(4)}} \int d^4x \sqrt{|g|} \left\{ R + 2(\partial\phi)^2 + \tfrac{1}{2} e^{4\phi} (\partial a)^2 - \tfrac{1}{8} \mathrm{Tr}\,(\partial M L \partial M L) - \right. \\ & \left. -\tfrac{1}{4} e^{-2\phi} \left(LML\right)_{\Sigma\Lambda} F^\Sigma F^\Lambda + \tfrac{1}{4} a\, L_{\Sigma\Lambda} F^\Sigma\, {}^\star F^\Lambda \right\} . \end{aligned} \tag{3.21}$$

Esto es la acción de $N = 4$ acoplada a 22 multipletes vectoriales. Las **ecuaciones de Euler-Lagrange** de esta teoría, junto con las identidades de Bianchi para los campos

[11] Esto es un abuso de lenguaje, desde luego. Decimos que a es el "dual" de B en el sentido de que son sus tensores de campo, ∂a y H, los que son duales entre sí.

[12] Casos conocidos son los resultantes al reducir la teoría de $d = 10$ a $d = 5$ y $d = 4$ dimensiones. Nosotros nos preocuparemos sólamente de este último.

vectores, pueden ponerse en la forma siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \nabla_{\mu}\left(e^{-2\phi}\left(M^{-1}\right)_{\Sigma\Lambda} F^{\Lambda\,\mu\nu} - a\,L_{\Sigma\Lambda}{}^{\star}F^{\Lambda\,\mu\nu}\right) & = & 0\,, \\ \nabla_{\mu}{}^{\star}F^{\mu\nu} & = & 0\,, \\ \nabla^2 a + 4\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}a - \frac{1}{4}e^{-4\phi}L_{\Sigma\Lambda}F^{\Sigma}\,{}^{\star}F^{\Lambda} & = & 0\,, \\ 2\nabla^2\phi - e^{4\phi}(\partial a)^2 - \frac{1}{4}e^{-2\phi}\left(M^{-1}\right)_{\Sigma\Lambda} F^{\Sigma}F^{\Lambda} & = & 0\,, \\ \nabla_{\mu}\left(M^{-1}\partial^{\mu}M\right) - \frac{1}{2}e^{-2\phi}\left(LMLFF^{T} - LFF^{T}LM\right) & = & 0\,, \\ R_{\mu\nu} + 2\partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi + \frac{1}{2}e^{4\phi}\partial_{\mu}a\partial_{\nu}a - \frac{1}{8}\mathrm{Tr}\left(\partial_{\mu}M\partial_{\nu}M^{-1}\right) - & & \\ -\frac{1}{2}e^{-2\phi}\left(M^{-1}\right)_{\Sigma\Lambda} F^{\Sigma}_{\mu\rho}F^{\Lambda}_{\nu}{}^{\rho} + \frac{1}{8}g_{\mu\nu}e^{-2\phi}\left(M^{-1}\right)_{\Sigma\Lambda} F^{\Sigma}F^{\Lambda} & = & 0 \end{array}\right. \tag{3.22}$$

(F representa el vector columna definido en (3.15)).

3.2 Simetrías de la teoría

Una de las características fundamentales la Teoría de Cuerdas es la gran cantidad de simetría que la misma posee. Además de la invariancia conforme, invariancia bajo reparametrizaciones, supersimetría, ...etc, las teorías de cuerdas poseen una serie de simetrías que se conocen bajo el nombre genérico de *dualidades*. Su estudio en la pasada década fue intensivo y hoy se ve como uno de los avances fundamentales en el estudio de la teoría, ya que:

- ha permitido concebir una visión mucho más unificada de las diferentes teorías de cuerdas, y
- ha supuesto un gran avance en el estudio no perturbativo de las mismas.

Sabemos que existen cinco teorías de supercuerdas consistentes (Heterótica con grupo *gauge* $E_8 \times E_8$, Heterótica con grupo *gauge* $SO(32)$, Tipo I, Tipo IIA y Tipo IIB), pero hoy sabemos que las mismas se relacionan entre sí por medio de dualidades. Estas dualidades pueden entenderse, de modo generalizado, como *redefiniciones* entre los diferentes campos presentes en cada una de estas teorías. Dichas redefiniciones pueden llevarnos de una teoría a otra (de ahí el nombre genérico de *dualidades*, ya que dos teorías relacionadas entre sí de esta manera se denominan *duales*), o bien pueden mapear una teoría dada sobre ella misma, en cuyo caso son efectivamente *simetrías* de la teoría en consideración[13].

[13]Aunque, interpretadas de esta manera, ambas palabras quieren decir cosas diferentes -y el nombre apropiado para referirnos a ellas de un modo genérico es el de “dualidades”-, nosotros las usaremos como sinónimos en la mayoría de los casos. En el caso de la teoría que estamos considerando, las *dualidades* a las que nos referiremos son efectivamente *simetrías* de la teoría, como se verá.

Existen unos pocos tipos de dualidades y, se apliquen sobre la teoría que se apliquen (y nos lleven a la teoría a la que nos lleven) todos ellos tienen en esencia el mismo origen y, en consecuencia, todos ellos comparten el mismo nombre: "dualidad S", "dualidad T" o "dualidad U", por ejemplo. Sin embargo, aunque hoy en día disponemos de una lista considerable de relaciones entre las diferentes teorías de cuerdas, la equivalencia exacta de todas ellas bajo dualidades (a todos los órdenes en la teoría cuántica y más allá del límite de la acción efectiva) es, hasta donde sabemos, una conjetura hoy por hoy.

Por otro lado, un aspecto significativo en el estudio de dualidades en Teoría de Cuerdas es que las mismas se manifiestan precisamente en el límite efectivo de baja energía, esto es, en el límite de Supergravedad. Esto puede parecer paradójico pues, como hemos adelantado, la existencia de dualidades aporta gran información no perturbativa. Sin embargo, todos los estudios parecen indicar que la Teoría de Cuerdas, a todos los órdenes en teoría de perturbaciones, posee como simetrías versiones discretas de los grupos que constituyen simetrías continuas en el límite de Supergravedad.

Las dualidades que posee la teoría que estamos describiendo son:

Dualidad T. Originalmente, es una dualidad que aparece en Teoría de Cuerdas en el caso de haber compactificado una o más dimensiones. En ese caso aparecen modos de *winding* en la teoría, que son los que están asociados al "enrollado" de la cuerda en torno a las dimensiones compactas, además de los modos de momento (Kaluza-Klein) a lo largo de dichas dimensiones compactas. La dualidad T está relacionada con el intercambio de los modos *winding* con los Kaluza-Klein[14]. En el caso más sencillo (una dimensión compacta) esto se debe a que podemos identificar los espectros obtenidos al compactificar en un radio R y al compactificar en un radio $1/R$ si efectivamente identificamos los modos *winding* con los que antes eran Kaluza-Klein y viceversa. Cuando hemos compactificado varias dimensiones, todas las posibles rotaciones entre las dimensiones compactas también se incluyen en la definición de dualidad T. Por ejemplo, si compactificamos en T^6, como es el caso que estamos estudiando, hemos de esperar también una simetría que esté relacionada con el hecho de que todas las coordenadas compactas son equivalentes en la teoría reducida. Desde el punto de vista de la Teoría de Cuerdas, esta es una dualidad perturbativa en α', pero exacta orden a orden en expansiones en la constante de acoplo de la cuerda g.

Dualidad S. En general ésta suele entenderse como una generalización de la dualidad electromagnética de la teoría de Einstein-Maxwell (aunque éste no es siempre el caso). Desde el punto de vista de la Teoría de Cuerdas, la dualidad S es la que relaciona el régimen perturbativo con el régimen no perturbativo, pues su característica fundamental es que *invierte la constante de acoplo*[15]. En el límite de Supergravedad, esta dualidad

[14] El nombre proviene de que son simetrías en el *target space*, esto es, el espacio de campos.

[15] De hecho, de ahí su nombre, ya que la constante de acoplo en la teoría de cuerdas es el valor esperado

supone, además de incluir transformaciones que invierten al campo del dilatón, intercambiar los campos eléctricos que tiene la teoría con sus correspondientes campos magnéticos (o con una apropiada generalización de los mismos). Esta dualidad es intrínsecamente no perturbativa y *no es* una simetría de la acción, sino una simetría de las ecuaciones de movimiento (existen formulaciones *off-shell*, sin embargo [32]).

En algunas teorías (Tipo II), ambas dualidades pueden unificarse en un sólo grupo, que en la terminología estándar se conoce bajo el nombre de **dualidad U**, la cual es en general un grupo más grande que el producto directo de S y T [33].

A continuación vamos a describir cómo se manifiestan estas dualidades de manera precisa en la teoría de la cuerda Heterótica compactificada en un seis-toro. Aunque nosotros estamos interesados en el límite de Supergravedad de la teoría, y los términos "dualidad S" y "dualidad T" provienen originalmente del contexto de la Teoría de Cuerdas, usaremos estos nombres, pues son el reflejo en el límite de baja energía de dichas dualidades.

3.2.1 Dualidad T en la acción efectiva de la cuerda Heterótica

La acción en cuatro dimensiones (3.21) que hemos obtenido al final de la sección anterior es manifiestamente invariante bajo la acción global del grupo $O(6,22)$. Este grupo está formado por el conjunto de matrices Ω que satisfacen que

$$\Omega^T L \Omega = L\,, \tag{3.23}$$

donde L es la métrica de $O(6,22)$ (por ejemplo en la forma no diagonal dada en (3.12))[16]. Es decir, es el grupo que deja invariantes los productos escalares evaluados con dicha métrica. $O(6,22)$ es un grupo de simetría de la acción cuando actúa sobre los campos de la siguiente manera: la métrica, el axión y el dilatón son singletes, mientras que los campos vectores y la matriz M que parametriza el resto de los *moduli* se han de transformar según

$$\left\{ \begin{array}{l} F \longrightarrow \Omega F\,, \\ M \longrightarrow \Omega M \Omega^T \end{array} \right. \tag{3.24}$$

(F representa el vector de campos definido en (3.15)). Para ver que las transformaciones dadas arriba son efectivamente simetrías de la acción hemos de hacer uso de la siguiente propiedad que satisface la matriz M:

$$M^{-1} = LML\,, \tag{3.25}$$

la cual se debe a que M, además de ser una matriz simétrica, es también una matriz de $O(6,22)$[17], y a que L satisface que $L^{-1} = L$. Las ecuaciones de movimiento (3.22),

del dilatón, y la notación tradicional para el axidilatón (véase la def. más adelante) es, o solía ser, S.

[16]Más tarde, para efectuar la truncación a $N=4$, rotaremos a una base en la que la métrica es diagonal.

[17]Esto no es casualidad. Es un hecho común a las teorías de Supergravedad el que el espacio de *moduli* parametriza un *coset* del estilo G/H, donde G es el grupo clásico de simetrías y H es el subgrupo compacto maximal del mismo. En este caso, la matriz M parametriza la variedad $\frac{O(6,22)}{O(6)\times O(22)}$.

tal y como las hemos ordenado, son también manifiestamente simétricas bajo $O(6,22)$. Hay algo que haremos notar: si, además de las transformaciones (3.24), modificamos la métrica L según

$$L \longrightarrow (\Omega^{-1})^T L \Omega^{-1}\,, \tag{3.26}$$

el grupo bajo el cual es invariante la acción es $GL(28,\mathbb{R})$ (es decir, si hacemos las transformaciones (3.24), y *además* (3.26), entonces Ω ya no tiene que ser una matriz ortogonal, sino que nos vale cualquier matriz no singular). Sin embargo, cuando estamos buscando simetrías asociadas a redefiniciones de los campos, *sólamente* tenemos derecho a actuar sobre éstos. Nótese que es el último término en (3.21) el que restringe la simetría al subgrupo $O(6,22)$ de $GL(28,\mathbb{R})$. El origen del mismo es el término de Chern-Simons que aparece en el tensor de campo del axión de la teoría reducida (ver la última ecuación de (3.10)). Sin embargo, haremos uso de (3.26) cuando queramos reexpresar la acción en una base en la que la métrica L que aparece en la acción cambie a su forma diagonal.

La simetría global $O(6,22)$ que acabamos de describir tiene, efectivamente, la interpretación de dualidad T cuando analizamos esta teoría de Supergravedad desde el punto de vista de la teoría de cuerdas de la que proviene (cuánticamente, sin embargo, el grupo de dualidad se rompe en el subgrupo discreto $O(6,22;\mathbb{Z})$). Nótese que responde justamente a las caracterísicas que habíamos adelantado: rota entre sí los modos de Kaluza-Klein y los modos *winding* (ademas de los campos de materia F^I), así como los *moduli* G_{mn} y B_{mn}. Estos campos provienen de la compactificación toroidal de las dimensiones extra, y aunque en principio podríamos esperar un grupo de simetría más pequeño (por ejemplo, únicamente $O(6)$) relacionado con el intercambio de las seis coordenadas compactas, $O(6,22)$ aparece debido al particular contenido material de la teoría: de los 28 campos vectores, 6 pertenecen al multiplete de supergravedad y 22 pertenecen a los multipletes de materia que están acoplados al anterior. Esto se verá explícitamente más abajo, cuando necesitemos una identificación precisa de los campos pertenecientes al multiplete de materia y los campos pertenecientes al multiplete de gravedad.

3.2.2 Dualidad S en la acción efectiva de la cuerda Heterótica

Como ya hemos adelantado, las ecuaciones de movimiento de (3.21) presentan una simetría global extra: son invariantes, de hecho, bajo la acción del grupo $SL(2,\mathbb{R})$. Este grupo actúa sobre el axión, el dilatón (y por eso la interpretación de esta simetría desde la teoría de cuerdas es la de dualidad S), e intercambia los campos vectores con sus correspondientes duales "magnéticos". La métrica y los *moduli* M son singletes bajo la acción de este grupo. Es importante hacer notar que la métrica que es invariante bajo dualidad S es la métrica de Einstein, en términos de la cual estamos describiendo la teoría. La generalización de los duales magnéticos (también los denominaremos a veces "duales de $SL(2,\mathbb{R})$") es, para esta teoría:

$$\tilde{F}^{\Lambda}_{\mu\nu} \equiv e^{-2\phi} L^{\Lambda\Gamma} \left(M^{-1}\right)_{\Gamma\Sigma} {}^{\star}F^{\Sigma}_{\mu\nu} + aF^{\Sigma}_{\mu\nu}\,. \tag{3.27}$$

Vemos que son efectivamente una generalización de lo que serían los correspondientes campos magnéticos, puesto que si pusiésemos a cero todos los campos necesarios para quedarnos con la acción de Einstein-Maxwell (por ejemplo, quedándonos sólo con la métrica y uno de los F^I), entonces tendríamos $\tilde{F} = {}^{\star}F$ (el grupo de dualidad en la teoría de E-M es, sin embargo, $SO(2)$). Los duales magnéticos pueden definirse de manera ligeramente distinta (lo que también afectaría a las propiedades de transformación bajo $SL(2,\mathbb{R})$ dadas más abajo), pero nuestra definición tiene la ventaja de que los F^Λ y los $\tilde{F}^\Lambda$ tienen las mismas propiedades de transformación bajo $O(6,22)$. Lo último que necesitamos para describir la acción de $SL(2,\mathbb{R})$ sobre el axión y el dilatón es la siguiente definición del escalar complejo

$$\lambda \equiv a + ie^{-2\phi}\,, \tag{3.28}$$

el cual denominaremos *axidilatón*. Estos escalares parametrizan el *coset* $\frac{SL(2,\mathbb{R})}{SO(2)}$.

Pues bien, si Λ es una matriz de $SL(2,\mathbb{R})$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1\,, \tag{3.29}$$

entonces los campos se transforman de la siguiente manera:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} \tilde{F}^\Lambda \\ \\ F^\Lambda \end{pmatrix} & \longrightarrow & \Lambda \begin{pmatrix} \tilde{F}^\Lambda \\ \\ F^\Lambda \end{pmatrix}, \\ & & \\ \lambda & \longrightarrow & \dfrac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}\,. \end{array} \right. \tag{3.30}$$

De nuevo, en la teoría cuántica el grupo de dualidad es el subgrupo discreto $SL(2,\mathbb{Z})$, lo que se cree que es una simetría exacta de la Teoría de Cuerdas [34, 35].

Es mucho menos obvio que en el caso anterior comprobar que efectivamente esto constituye una simetría de la teoría, pues hace falta reordenar las ecuaciones de Euler-Lagrange (3.22) si queremos que la simetría sea manifiesta en las mismas. Esto no es del todo evidente y aquí no reproduciremos el resultado. Nótese, sin embargo, lo siguiente: las ecuaciones de Maxwell de los campos vectores que aparecen en (3.22) se pueden escribir como identidades de Bianchi para los duales magnéticos definidos en (3.27), siendo por tanto el conjunto de ecuaciones formado por las ecuaciones de Maxwell y las identidades de Bianchi invariante bajo el intercambio $F \leftrightarrow \tilde{F}$. Esto es justamente lo que ocurre en la teoría de Einstein-Maxwell y es lo que da pie a la dualidad electromagnética usual.

3.3 La truncación a $N = 4$, $d = 4$

Una vez hemos descrito la teoría de la cuerda Heterótica compactificada en un toro, y hemos estudiado las simetrías que posee, vamos a explicar cómo se realiza la truncación a la teoría de Supergravedad $N = 4$ pura. La acción (3.21) es la parte bosónica de Supergravedad $N = 4$ acoplada a 22 multipletes vectoriales. La truncación por tanto consiste en eliminar estos últimos, lo que requiere previamente la identificación de cuáles de los 28 vectores son los que están en el multiplete de gravedad (6, también llamados "gravifotones"), y cuáles son los que están en el multiplete de materia (los otros 22). Esto se ve a partir de los acoplos que aparecen en el lagrangiano cuando rotamos a una base en la que la métrica de $O(6,22)$ adopta su forma diagonal. Para ello efectuamos las siguientes redefiniciones de los campos y la métrica:

$$\left\{ \begin{array}{ccl} F & \longrightarrow & RF\,, \\ M & \longrightarrow & RMR^T\,, \\ L & \longrightarrow & (R^{-1})^T L R^{-1}\,, \end{array} \right. \tag{3.31}$$

que por supuesto dejan invariante la acción aunque, al cambiar la métrica L, cambian los acoplos en términos de los nuevos campos rotados. La forma diagonal de la métrica que queremos obtener es

$$\eta = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_6 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_6 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbb{1}_{16} \end{pmatrix}, \tag{3.32}$$

lo que se consigue por medio de la rotación dada por la matriz

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_6 & \mathbb{1}_6 & 0 \\ -\mathbb{1}_6 & \mathbb{1}_6 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}\,\mathbb{1}_{16} \end{pmatrix}, \tag{3.33}$$

la cual desde luego no es una matriz ortogonal. Los vectores se transforman por tanto según

$$\left(F^{\Sigma}\right) \longrightarrow \left(\mathcal{F}^{\Sigma}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(F^{(1)m} + F^{(2)}{}_m\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(F^{(1)m} - F^{(2)}{}_m\right) \\ F^I \end{pmatrix}, \tag{3.34}$$

y esto claramente identifica la combinación $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(F^{(1)m} + F^{(2)}{}_m\right)$ como los vectores del multiplete de gravedad, y $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(F^{(1)m} - F^{(2)}{}_m\right)$ y los F^I como los vectores de los multipletes de materia [36]. Esta identificación puede corroborarse mediante el estudio de las reglas de transfomación de supersimetría para los campos fermiónicos, las cuales sin embargo no reproduciremos aquí.

De esta manera, la truncación deseada se consigue mediante la imposición de las siguientes ligaduras:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} B_{mn} & = & 0\,, \\ G_{mn} & = & -\delta_{mn}\,, \\ a^{I}{}_{m} & = & 0\,, \\ A^{I}{}_{\mu} & = & 0\,, \\ A^{(1)m} & = & A^{(2)}{}_{m}\,, \end{array} \right. \tag{3.35}$$

lo que a su vez implica que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathbb{1}_{28}\,, \\ (\mathcal{F}^{\Sigma}) & \longrightarrow & \begin{pmatrix} \sqrt{2}F^{(1)m} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \end{array} \right. \tag{3.36}$$

Vemos que (3.35) supone poner iguales los modos de Kaluza-Klein y los modos *winding*. La acción que obtenemos al truncar la teoría es efectivamente la de **Supergravedad pura N=4, d=4**:

$$\begin{aligned} S \;=\; & \tfrac{1}{16\pi G_N^{(4)}} \int d^4x \sqrt{|g|} \left\{ R + 2(\partial\phi)^2 + \tfrac{1}{2}e^{4\phi}(\partial a)^2 - \right. \\ & \left. -e^{-2\phi} \sum_{m=1}^{6} F^{(m)} F^{(m)} + a \sum_{m=1}^{6} F^{(m)\,\star}F^{(m)} \right\} , \end{aligned} \tag{3.37}$$

donde hemos usado la definición

$$F^{(m)} \equiv 2\sqrt{2}F^{(1)m}\,. \tag{3.38}$$

Es fácil comprobar la consistencia de esta truncación usando las ecuaciones de movimiento (3.22) que obtuvimos previamente para la teoría completa. Las ligaduras (3.35) hacen trivial la ecuación de movimiento de los *moduli* M, mientras que el resto de las ecuaciones se convierten justamente en las **ecuaciones de movimiento** de la teoría de $N = 4$ pura que encontramos a partir de (3.37), a saber:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \nabla_\mu \left(e^{-2\phi} F^{(m)\,\mu\nu} - a\,{}^\star F^{(m)\,\mu\nu}\right) & = & 0\,, \\ \nabla_\mu\,{}^\star F^{(m)\,\mu\nu} & = & 0\,, \\ \nabla^2 a + 4\partial_\mu\phi\partial^\mu a - e^{-4\phi}\sum_{m=1}^{6} F^{(m)}\,{}^\star F^{(m)} & = & 0\,, \\ 2\nabla^2\phi - e^{4\phi}(\partial a)^2 - e^{-2\phi}\sum_{m=1}^{6} F^{(m)} F^{(m)} & = & 0\,, \\ R_{\mu\nu} + 2\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \frac{1}{2}e^{4\phi}\partial_\mu a\partial_\nu a - & & \\ -2e^{-2\phi}\sum_{m=1}^{6}\left(F^{(m)}{}_{\mu\rho}F^{(m)}{}_\nu{}^\rho - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^{(m)}F^{(m)}\right) & = & 0\,. \end{array}\right. \tag{3.39}$$

Nuestro objetivo es encontrar soluciones a las mismas.

3.3.1 Simetrías de $N = 4$, $d = 4$

Una de las razones para estudiar esta truncación particular de la cuerda Heterótica es que la misma proporciona una teoría suficientemente simplificada pero al mismo tiempo suficientemente rica, en el sentido de que aún posee las dualidades S y T como simetrías. Ya hemos estudiado las mismas en el contexto de la teoría completa, por lo que ahora sólamente vamos a dar una descripción breve de como actúan las mismas en la teoría truncada.

En lo que se refiere a **dualidad T**, el grupo de simetría se reduce, al haber eliminado los campos de materia, a $O(6)$. Los vectores (así como sus duales magnétricos, que definiremos más abajo) se transforman en la representación fundamental de la teoría. Es decir, la misma es invariante bajo las transformaciones del estilo

$$F \longrightarrow \Omega F\,, \tag{3.40}$$

donde Ω es ahora una matriz de $O(6)$.

En cuanto a la **dualidad S**, lo primero que hemos de notar es que los duales de $SL(2,\mathbb{R})$ que definimos en (3.27) se simplifican después de la truncación, quedando:

$$\tilde{F}^{(m)}_{\mu\nu} \equiv e^{-2\phi}\,{}^\star F^{(m)}_{\mu\nu} + aF^{(m)}_{\mu\nu}. \tag{3.41}$$

Con esta definición de duales magnéticos, $SL(2,\mathbb{R})$ actúa sobre los vectores, así como sobre el axidilatón, de manera análoga a (3.30).

Al igual que en el caso de las ecuaciones de movimiento de la cuerda Heterótica, la introducción de los duales de $SL(2,\mathbb{R})$ permite escribir las ecuaciones de movimiento de los vectores como identidades de Bianchi para los duales:

$$\nabla_\mu {}^\star\tilde{F}^{(m)\ \mu\nu} = 0\,. \tag{3.42}$$

Esto asegura la existencia (al menos localmente) de potenciales para los campos duales. Es decir, sabemos que podremos escribir éstos como

$$\tilde{F}^{(m)}_{\mu\nu} = \partial_\mu \tilde{A}^{(m)}_\nu - \partial_\nu \tilde{A}^{(m)}_\mu\,. \tag{3.43}$$

De hecho, expresaremos nuestras soluciones en términos de estos potenciales. Otra ventaja añadida es que las transformaciones de dualidad sobre los vectores, inicialmente definidas sobre los tensores de campo $F^{(m)}$ y $\tilde{F}^{(m)}$, pueden definirse ahora de forma completamente análoga sobre los potenciales.

4 La familia general de soluciones en $N = 4$, $d = 4$

A continuación describimos la forma que adopta la familia general de soluciones estacionarias tipo agujero negro en esta teoría. Sus características principales han sido comentadas en la sección 2.5.

4.1 Parámetros físicos

Los parámetros físicos de nuestra solución son:

- La masa ADM, que denotaremos por M.
- La carga NUT, N.
- 6 cargas eléctricas $Q^{(m)}$.
- 6 cargas magnéticas $P^{(m)}$[18].
- Momento angular, J.
- Valores asintóticos para los escalares, ϕ_0 y a_0.

Este es el conjunto máximo de parámetros libres que podemos esperar que tenga en esta teoría una solución tipo agujero negro que sea compatible con el teorema de "no-pelos". Como es bien sabido, la existencia soluciones puntuales con carga diónica (esto es, con carga eléctrica y magnética a la vez) se debe a que estamos trabajando en $d = 4$. En otras dimensiones esto no es posible, pues el "dual" del campo eléctrico A_μ ha de ser también una 1-forma si queremos que se acople a una línea de universo, en vez de a una p-brana de dimensión más alta. En nuestra solución aparecerán las siguientes combinaciones de estos parámetros: la masa ADM y la carga NUT las agruparemos normalmente en la siguiente "masa compleja"

$$\mathcal{M} \equiv M + iN\,; \tag{4.1}$$

las cargas electricas y magnéticas las agruparemos en la "carga diónica"

$$\Gamma^{(m)} \equiv Q^{(m)} + iP^{(m)}; \tag{4.2}$$

la rotación la parametrizaremos con el momento angular por unidad de masa

$$\alpha \equiv J/M\,; \tag{4.3}$$

y los valores asintóticos de los esclares los agruparemos en

$$\lambda_0 \equiv a_0 + ie^{-2\phi_0}\,. \tag{4.4}$$

[18]En realidad nuestras soluciones son válidas para un número *arbitrario* de campos eléctricos y magnéticos. Véase el comentario correspondiente más abajo.

También usaremos la siguiente "carga" escalar[19] Υ definida mediante el comportamiento asintótico del axidilatón según

$$\lambda \sim \lambda_0 - ie^{-2\phi_0}\frac{2\Upsilon}{r} \tag{4.5}$$

(donde r es una coordenada radial). Aunque expresemos nuestras soluciones en términos de esta "carga" escalar, la misma *no* supone la existencia de "pelo" escalar, pues en nuestras soluciones se relaciona con el resto de cargas mediante la expresión

$$\Upsilon = -\tfrac{1}{2}\sum_{m=1}^{6}\frac{(\bar{\Gamma}^{(m)})^2}{\mathcal{M}}\,. \tag{4.6}$$

En la terminología estándar esto suele denominarse "pelo escalar secundario" (por oposición a "pelo escalar primario", que supondría la existencia de algún parámetro escalar independiente del resto que caracterizase la solución).

4.2 La solución

Damos ahora la forma explícita de la solución de la que venimos hablando. Es importante que hagamos el siguiente comentario: aunque constantemente estamos hablando de *seis* campos $U(1)$, pues éste es el número de campos que aparecen en la teoría bajo conideración, nuestras soluciones son válidas para *un número arbitrario* (p, de ahora en adelante) *de campos vectores.* La generalización de la acción y de las ecuaciones de movimiento para este caso más general es la obvia, y aunque el caso interesante de cara a una interpretación en términos de la cuerda Heterótica es $p = 6$, mantendremos a partir de ahora el número de estos campos arbitrario dado que supone un caso más general. Además, esto es útil para comparar nuestras soluciones con otras existentes en la literatura en modelos más sencillos con sólo uno o dos campos vectores (*Axion-Dilaton Gravity*) así como para relacionar nuestras soluciones con otras obtenidas en la teoría de Supergravedad $N = 2$ acoplada a multipletes vectoriales. El grupo de simetría $O(6)$ se convierte, para el caso de p campos, en $O(p)$. Todos los campos de la solución pueden expresarse en términos de:

- un par de funciones armónicas (en el espacio euclídeo tridimensional) complejas $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$.
- p constantes complejas $k^{(m)}$, que son una especie de "cargas electromagnéticas generalizadas".
- Una función W de "no-supersimetría", que para valores $W \neq 1$ desplaza la solución del límite BPS.

[19]Las "cargas" escalares no son cargas en el sentido usual, ya que no definen cantidades conservadas al no estar los campos escalares protegidos por ninguna simetría *gauge*.

- Una métrica tridimensional ${}^{(3)}\gamma_{ij}$ para el espacio transverso, que se reduce a la métrica plana usual en las coordenadas de Boyer-Lindquist en el límite BPS.

Damos ahora las expresiones explícitas para estos elementos en términos de los parámetros físicos. Las **funciones armónicas** son:

$$\begin{cases} \mathcal{H}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\phi_0} e^{i\beta} \left(\lambda_0 + \dfrac{\lambda_0 \mathcal{M} + \bar{\lambda}_0 \Upsilon}{\tilde{\rho}} \right) \,, \\ \\ \mathcal{H}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\phi_0} e^{i\beta} \left(1 + \dfrac{\mathcal{M} + \Upsilon}{\tilde{\rho}} \right) \,. \end{cases} \tag{4.7}$$

Aquí $\tilde{\rho} \equiv x^2 + y^2 + (z + i\alpha)^2$ es la coordenada radial compleja que suele usarse en este tipo de soluciones con rotación, y β es un parámetro real arbitrario sin significado físico que está relacionado con las propiedades de transformacion de estas funciones bajo dualidad que explicaremos más abajo. En los casos supersimétricos [37, 38, 39, 24] las funciones armónicas en las que habitualmente se expresa este tipo de soluciones suelen ser *arbitrarias*, en cuyo caso permiten describir objetos extensos tipo p-brana (según la extensión del polo de las funciones), o soluciones con muchos agujeros negros en equilibrio (para una superposición de funciones armónicas). Este último caso sólamente es posible en el límite extremo, en el que se consigue un balance de fuerzas electromagnéticas, gravitatorias y escalares. Dado que nuestras soluciones son no-extremas en general, y dado que aspiramos a describir objetos tipo aguero negro, nuestras funciones han de ser con un solo polo puntual y no pueden ser otras que las dadas arriba.

Las **constantes complejas** son:

$$k^{(m)} = -\tfrac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\beta} \frac{\mathcal{M}\Gamma^{(m)} + \overline{\Upsilon\Gamma^{(m)}}}{|\mathcal{M}|^2 - |\Upsilon|^2} \,. \tag{4.8}$$

En cuanto a la **función de "no-supersimetría"** W, su expresión es más sencilla si en primer lugar introducimos las coordenadas "obloides" (o "esferoidales") que suelen emplearse en las soluciones con un parámtro de rotación. Éstas vienen dadas por

$$\begin{cases} x &= \sqrt{r^2 + \alpha^2}\, \sin\theta \cos\varphi \,, \\ \\ y &= \sqrt{r^2 + \alpha^2}\, \sin\theta \sin\varphi \,, \\ \\ z &= r \cos\theta \,. \end{cases} \tag{4.9}$$

En términos de estas coordenadas, el elemento de línea euclídeo se escribe

$$d\vec{x}^{\,2} = \frac{r^2 + \alpha^2 \cos^2\theta}{r^2 + \alpha^2} dr^2 + \left(r^2 + \alpha^2 \cos^2\theta\right) d\theta^2 + \left(r^2 + \alpha^2\right) \sin^2\theta \; d\varphi^2 \,. \tag{4.10}$$

La anterior coordenada radial ($\tilde{\rho}$) puede expresarse en términos de la nueva (r) mediante $\tilde{\rho} = r + i\alpha\cos\theta$. En términos de estas coordenadas, la función W se escribe

$$W = 1 - \frac{{r_0}^2}{r^2 + \alpha^2\cos^2\theta}\,, \tag{4.11}$$

donde

$$r_0^2 = |\mathcal{M}|^2 + |\Upsilon|^2 - \sum_{m=1}^{p} |\Gamma^{(m)}|^2 \tag{4.12}$$

es un "parámetro de supersimetría", que veremos que es igual a cero si y sólo si se satura la cota de Bogomol'nyi y la solución posee por tanto supersimetría residual. Normalmente, este tipo de funciones que deforman una solución supersimétrica (o extrema) suelen denominarse funciones de "no-extremalidad". Este nombre no es correcto en nuestro caso, pues veremos que existen soluciones extremas pero no-BPS (aunque en la literatura se asocian frecuentemente ambos límites, sabemos que, al menos en los casos con rotación, ambos límites no coinciden en general [42, 43]). Como se verá, en nuestras soluciones lo que realmente mide la desviación del límite extremo es el parámetro

$$R_0^2 = r_0^2 - \alpha^2, \tag{4.13}$$

que es igual a cero si y sólo si estamos en el caso extremo.

Por último, sólamente necesitamos la **métrica del espacio transverso** tridimensional ${}^{(3)}\gamma_{ij}$, que también denominaremos métrica de *background*. La misma es una deformación de la métrica plana (4.10) que se reduce a ésta en el caso supersimétrico. Su expresión es

$$\begin{aligned} d\vec{x}^{\,2} &= {}^{(3)}\gamma_{ij}dx^i dx^j = \\ &= \frac{r^2 + \alpha^2\cos^2\theta - r_0^2}{r^2 + \alpha^2 - r_0^2}\, dr^2 + \\ &\quad + (r^2 + \alpha^2\cos^2\theta - {r_0}^2)\, d\theta^2 + (r^2 + \alpha^2 - {r_0}^2)\sin^2\theta d\varphi^2\,, \end{aligned} \tag{4.14}$$

donde x^i representan las coordenadas (r, θ, φ) para i=1, 2, 3 respectivamente. Esta métrica *no es plana*, lo que constituye una de las principales diferencias entre nuestras soluciones y las soluciones tipo IWP que encontramos normalmente en la literatura [44, 45, 24].

Finalmente, **la solución** que estábamos buscando es[20]

$$\boxed{\begin{array}{rcl} ds^2 & = & e^{2U} W\left(dt+\omega_\varphi d\varphi\right)^2 - e^{-2U} W^{-1}\,{}^{(3)}\gamma_{ij}dx^i dx^j\,, \\ \tilde{A}^{(m)}{}_t & = & 2e^{2U}\,\mathrm{Re}\left(k^{(m)}\mathcal{H}_1\right)\,, \\ A^{(m)}{}_t & = & 2e^{2U}\,\mathrm{Re}\left(k^{(m)}\mathcal{H}_2\right)\,, \\ \lambda & = & \dfrac{\mathcal{H}_1}{\mathcal{H}_2}\,, \end{array}} \tag{4.15}$$

donde las funciones que aparecen en la métrica son

$$\left\{\begin{array}{rcl} e^{-2U} & = & 2\,\mathrm{Im}\left(\mathcal{H}_1\bar{\mathcal{H}}_2\right) = 1 + 2\,\mathrm{Re}\left(\dfrac{\mathcal{M}}{r+i\alpha\cos\theta}\right) + \dfrac{|\mathcal{M}|^2-|\Upsilon|^2}{r^2+\alpha^2\cos^2\theta}\,, \\ \omega_\varphi & = & -2N\cos\theta - \alpha\sin^2\theta\left(e^{-2U}W^{-1}-1\right) = \\ & = & \dfrac{-2}{r^2+\alpha^2\cos^2\theta-r_0^2}\Big(N\cos\theta\,(r^2+\alpha^2-r_0^2) + \\ & & +\,\alpha\sin^2\theta\left[Mr+\tfrac{1}{2}\left({r_0}^2+|\mathcal{M}|^2-|\Upsilon|^2\right)\right]\Big)\,. \end{array}\right. \tag{4.16}$$

La expresión de estas funciones en término de los parámetros físicos es complicada, puesto que todos ellos están presentes en la solución. Sin embargo, puede apreciarse que la expresión de e^{2U} es sencilla en términos de $\mathcal{H}_{1,2}$ y, por otro lado, ω_φ es (en estas coordenadas) la única componente no nula de la 1-forma $\omega = \omega_i dx^i$ que aparece siempre en las soluciones estacionarias, la cual ha de ser solución de la siguiente ecuación diferencial caractéristica de las soluciones tipo IWP [44, 45, 24]:

$$ {}^{(3)}\nabla\times\vec{\omega} + e^{-2U}\,{}^{(3)}\nabla\times\vec{\mu} + 2W^{-1}\,\mathrm{Re}\Big(\mathcal{H}_1\,{}^{(3)}\nabla\bar{\mathcal{H}}_2 - \bar{\mathcal{H}}_2\,{}^{(3)}\nabla\mathcal{H}_1\Big) = 0\,, \tag{4.17}$$

o, en términos de formas diferenciales (lo que quizá sea menos confuso):

$$ {}^\star d\omega + e^{-2U}\,{}^\star d\mu + 2W^{-1}\mathrm{Re}\left(\mathcal{H}_1 d\bar{\mathcal{H}}_2 - \bar{\mathcal{H}}_2 d\mathcal{H}_1\right) = 0\,. \tag{4.18}$$

Es fundamental tener en cuenta que los operadores diferenciales ${}^{(3)}\nabla$ en (4.17) (así como los duales de Hodge en (4.18)) han de tomarse en la métrica de *background* ${}^{(3)}\gamma_{ij}$. En ambas expresiones $\vec{\mu}$ es el vector correspondiente a la 1-forma cuya única componente no nula es μ_φ, dada por

$$\mu_\varphi = \frac{r_0^2}{\alpha}\,\frac{r^2+\alpha^2-r_0^2}{r^2+\alpha^2\cos^2\theta-r_0^2}\,. \tag{4.19}$$

[20] Todas las componentes de los campos $U(1)$ están determinadas conocidos $A_t^{(m)}$ y $\tilde{A}_t^{(m)}$.

Este término extra respecto de las expresiones habituales se debe justamente a que estamos más allá del límite BPS, como puede apreciarse del hecho de que es nulo cuando $r_0 = 0$. Aunque μ_φ diverge en el límite en el que no hay momento angular ($\alpha = 0$), puede verse que las expresiones (4.17 -4.18) son perfectamente regulares en dicho límite, pues la aparente divergencia desaparece al tomar las derivadas, y en cuyo caso obtenemos la expresión

$$^\star d\omega + 2W^{-1}\mathrm{Re}\left(\mathcal{H}_1 d\bar{\mathcal{H}}_2 - \bar{\mathcal{H}}_2 d\mathcal{H}_1\right) = 0\,. \tag{4.20}$$

4.3 Transformación bajo dualidad de las soluciones

4.3.1 Soluciones generales y soluciones generatrices

Siempre que tenemos soluciones de una teoría que posee algún grupo de simetría global, es en principio posible generar soluciones nuevas a partir de una solución particular dada actuando sobre la misma con el grupo de simetría de la teoría. El hecho de que el grupo en cuestión constituya una simetría supone que la solución transformada sea automáticamente otra solución válida. En consecuencia, todas las simetrías de las ecuaciones de movimiento sirven, en principio, para generar soluciones nuevas a partir de una solucion o familia de soluciones inicial. Un ejemplo clásico lo podemos encontrar en la teoría de Einstein-Maxwell, en la cual podemos generar soluciones diónicas a partir de soluciones eléctricas actuando sobre estas últimas con el grupo de dualidad electromagnética de la teoría.

Podríamos pensar, en consecuencia, que dada una solución particular a una teoría que posea un grupo de simetría U podremos generar *todas* las posibles soluciones actuando sobre la primera con todo el grupo U. Este no es siempre el caso, no obstante, ya que:

- en general, *no todos* los elementos de U transforman una solución dada, puesto que algunos elementos del grupo pueden dejar invariante dicha solución. Por tanto, primeramente hay que identificar el subgrupo $H \subset U$ que efectivamente genera soluciones nuevas.

- Por otro lado, la dimensión de H *más* el número de parametros libres en la solución de partida ha de ser igual al número de parámetros libres que esperamos encontrar en la solución general. Esto no es siempre así, ya que puede ocurrir que la solución a partir de la cual pretendemos generar el resto sea “demasiado pequeña”, esto es, que no tengamos un número suficiente de parámetros libres al principio. De este modo, la órbita de H no puede reconstruir todo el espacio de soluciones.

Una solución o familia de soluciones que posea el número suficiente de parámetros independientes para poder generar todas las soluciones haciendo actuar H sobre ella se conoce con el nombre de *solución generatriz* de la teoría[21]. En el caso de disponer de una

[21] La terminología difiere según los autores. En general, se llama solución generatriz a aquella capaz

solución tal podemos, entonces, hallar la *solución general* (i.e., la familia que incluye todo el espacio de soluciones) actuando sobre ella con H. Desde luego, una característica que necesariamente ha de poseer la familia general de soluciones de una teoría dada es que la misma sea invariante (como una familia) bajo U. Dada la dificultad de hallar soluciones generales, en los últimos años ha proliferado toda una serie de trabajos que dan cuenta de las soluciones generatrices de diferentes teorías [46, 47, 48, 49]. Como ya hemos dicho, las soluciones encontradas aquí *no* constiruyen (sólo) una solución generatriz, sino la **solución general** de la teoría de Supergravedad $N = 4$, $d = 4$. Más abajo mostramos la invariancia de las mismas bajo dualidad T y dualidad S, que son en el caso que nos ocupa las simetrías de las que disponemos.

Procede hacer un último comentario acerca de la posibilidad de generar soluciones nuevas haciendo uso de las simetrías de la teoría. En general (y, en particular, en la teoría en la que estamos trabajando), las dualidades que pueda poseer una teoría son transformaciones que *no afectan a la métrica*, sino sólo al resto de los campos, por lo que es imposible modificar las propiedades del espaciotiempo con esta técnica (e.g., no puede generarse carga NUT, rotación o cambiar la estructura causal del espaciotiempo con este procedimiento). Existe, sin embargo, una manera de generalizar esto para construir nuevas métricas a partir de una dada: consiste en compactificar una o varias dimensiones a lo largo de las cuales existe una isometría (por ejemplo, la dirección temporal en el caso de una solución estacionaria), obteniendo así una acción efectiva de dimensión más baja. Esta acción puede tener ahora unas simetrías análogas a las de la teoría original, pero que ahora *sí* que actuan sobre lo que antes eran alguna componentes de la métrica, pero que en la teoría compactificada son nuevos campos (vectores, pongamos por caso). De este modo, no hemos cambiado la métrica de la teoría compactificada pero hemos modificado la métrica de la teoría de partida. Este procedimiento, usado por Sen en la construcción de soluciones eléctricas de la cuerda Heterótica compactificada en T^6 [50], ha sido ampliamente aprovechado posteriormente [51].

4.3.2 Acción de $SL(2, \mathbb{R}) \otimes O(p)$ sobre las soluciones

La solución dada por las ecuaciones (4.15) es realmente una *familia* de soluciones parametrizada por las constantes físicas en términos de las cuales está expresada: tenemos una solución particular para cada posible elección de estos parámetros. Consideramos que una de las características fundamentales de las soluciones aquí presentadas es la que concierne a las propiedades de transformación que las mismas poseen frente a las simetrías de la teoría. Nuestra familia de soluciones se caracteriza por lo siguiente:

---

de reconstruir todo el espacio de soluciones y que posee el número *mínimo* de parámetros necesarios para hacer esto. De todos modos, una solución con más parámetros independientes de los estrictamente necesarios también puede, desde luego, engendrar todas las soluciones posibles, y a veces a estas soluciones tambien se les llama soluciones generatrices.

- *es invariante* (como una familia) *bajo las dualidades de la teoría*, en el sentido de que al aplicar las correspondientes transformaciones a una solución particular el resultado no es más que otro miembro de la misma familia. En consecuencia, es imposible ampliar las soluciones dadas aquí haciendo uso de las simetrías que la teoría posee (tal y como hemos explicado en la sección anterior). Tal invariancia se debe a que

- *estudiar las transformaciones de dualidad sobre los campos es equivalente a estudiar el efecto de las mismas sobre los parámetros físicos.* La actuación de $SL(2,\mathbb{R})$ y de $O(p)$ está definida sobre los campos de la teoría. Esto permite (véase más abajo) determinar su actuación sobre las diferentes cargas y parámetros físicos, y puede verse que el efecto de estos grupos sobre los campos puede absorberse en la sustitución, en sus respectivas expresiones, del valor de las constantes por sus correspondientes valores "duales", puesto que la dependencia funcional de los campos con respecto a las cargas transformadas no cambia. En consecuencia, *todas* las transformaciones de dualidad posibles se reducen a cambiar los parámetros físicos de la solución. Dado que, como hemos dicho, todas las constantes en nuestra solución son libres, todas las posibles rotaciones tanto de $O(p)$ como de $SL(2,\mathbb{R})$ están ya incluidas en la familia.

- Los elementos que la definen ($\mathcal{H}_{1,2}$, $k^{(m)}$, W y ${}^{(3)}\gamma_{ij}$) tienen *propiedades de transformación bien definidas* tanto bajo dualidad S como bajo dualidad T. Esto posibilita de manera fácil y directa un estudio de las soluciones en términos de sus propiedades bajo dualidad. Esta particularidad no es algo que ni mucho menos compartan habitualmente las soluciones de este tipo que se encuentran en la literatura.

- Cargas conservadas y transformación de los parámetros bajo dualidad

Dado que las soluciones se expresan en términos de las cargas y los parámetros físicos que la caracterizan, el primer paso para estudiar la transformación de las soluciones es estudiar la transformación de estos parámetros. La masa, la carga NUT y la rotación son obviamente singletes bajo dualidad S y bajo dualidad T. La acción de $SL(2,\mathbb{R})$ sobre los valores asintóticos de los escalares está ya bien definida:

$$\lambda_0 \longrightarrow \frac{\alpha\lambda_0+\beta}{\gamma\lambda_0+\delta}\,, \tag{4.21}$$

y el único punto a tener en cuenta es la transformación de las cargas *gauge* bajo uno y otro grupo.

Las transformaciones de dualidad están definidas sobre los campos $F^{(m)}$ y sus duales de $SL(2,\mathbb{R})$, $\tilde{F}^{(m)}$. Es el comportamiento asintótico de estos campos lo que define las verdaderas **cargas conservadas** eléctricas y magnéticas de la teoría, pues son ellos quienes tienen asociada una "ley de Gauss". Dichas cargas conservadas vienen dadas por

$$\left\{\begin{array}{lcl} \tilde{q}^{(m)} & \equiv & \oint_{S^2_\infty} \tilde{F}^{(m)}\,, \\[2ex] \tilde{p}^{(m)} & \equiv & \oint_{S^2_\infty} F^{(m)}\,, \end{array}\right. \tag{4.22}$$

de manera que $\tilde{q}^{(m)}$ son las cargas eléctricas generalizadas de esta teoría (asociadas a las ecuaciones de Maxwell), y $\tilde{p}^{(m)}$ son las correspondientes cargas magnéticas (asociadas a las identidades de Bianchi). En consecuencia, el comportamiento asintótico de los campos viene dado por

$$\left\{\begin{array}{lcl} {}^\star\tilde{F}^{(m)}_{tr} & \sim & \dfrac{\tilde{q}^{(m)}}{r^2}\,, \\[2ex] {}^\star F^{(m)}_{tr} & \sim & \dfrac{\tilde{p}^{(m)}}{r^2}\,. \end{array}\right. \tag{4.23}$$

De esta forma, son *éstas* las cargas que se transforman linealmente bajo la acción de ambos grupos. Con ellas podemos formar los vectores de cargas $\tilde{\boldsymbol{q}}$ y $\tilde{\boldsymbol{p}}$

$$\tilde{\boldsymbol{q}} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{q}^{(1)} \\ \tilde{q}^{(2)} \\ \vdots \\ \tilde{q}^{(p)} \end{pmatrix}\,, \quad \tilde{\boldsymbol{p}} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{p}^{(1)} \\ \tilde{p}^{(2)} \\ \vdots \\ \tilde{p}^{(p)} \end{pmatrix}\,, \tag{4.24}$$

los cuales se transforman según

$$\left\{\begin{array}{lcl} \begin{pmatrix} \tilde{q}^{(m)} \\ \\ \tilde{p}^{(m)} \end{pmatrix} & \longrightarrow & \Lambda \begin{pmatrix} \tilde{q}^{(m)} \\ \\ \tilde{p}^{(m)} \end{pmatrix}\,; \\[3ex] \tilde{\boldsymbol{q}} & \longrightarrow & \Omega\, \tilde{\boldsymbol{q}}\,, \\[2ex] \tilde{\boldsymbol{p}} & \longrightarrow & \Omega\, \tilde{\boldsymbol{p}} \end{array}\right. \tag{4.25}$$

respectivamente frente a $SL(2,\mathbb{R})$ y $O(p)$. Sin embargo, las cargas en términos de las cuales nuestra solución esta dada, *no son* las verdaderas cargas conservadas que acabamos de introducir. Por conveniencia, hemos expresado nuestros campos en término de las cargas que describen el comportamiento asntótico de $F^{(m)}$ y ${}^\star F^{(m)}$ según:

$$\left\{\begin{array}{lcl} F^{(m)}_{tr} & \sim & \dfrac{e^{\phi_0} Q^{(m)}}{r^2}\,, \\[2ex] {}^\star F^{(m)}_{tr} & \sim & -\dfrac{e^{\phi_0} P^{(m)}}{r^2}\,. \end{array}\right. \tag{4.26}$$

Estas son las cargas que definen la carga diónica $\Gamma^{(m)}$ dada por (4.2), y son las cargas "canónicas" en el sentido de que dan el comportamiento de $F^{(m)}$ y $^\star F^{(m)}$ en el infinito, tal y como se definen en la teoría de Einstein-Maxwell. La relación entre estas cargas y las cargas conservadas definidas arriba está dada por

$$\begin{pmatrix} Q^{(m)} \\ \\ P^{(m)} \end{pmatrix} = \mathcal{V}_0 \begin{pmatrix} \tilde{q}^{(m)} \\ \\ \tilde{p}^{(m)} \end{pmatrix}, \tag{4.27}$$

donde

$$\mathcal{V}_0 = e^{\phi_0} \begin{pmatrix} -1 & a_0 \\ \\ 0 & -e^{-2\phi_0} \end{pmatrix} \tag{4.28}$$

(esta matriz tiene la interpretación un *Vielbein* en la geometría de la variedad escalar $\frac{SL(2,\mathbb{R})}{SO(2)}$ que parametriza el axidilatón -en el régimen asintótico- [30]).

La expresión (4.27) demuestra que las cargas $\Gamma^{(m)}$ se transforman como un vector de $O(p)$, (dado que el axidilatón es inerte bajo dualidad T), mientras que puede verse fácilmente que se transforma según la ley

$$\Gamma^{(m)} \longrightarrow e^{i \arg(\gamma\lambda_0+\delta)}\Gamma^{(m)} \tag{4.29}$$

bajo $SL(2,R)$. En consecuencia, es inmediato obtener a partir de (4.6) que la "carga" escalar Υ se transforma bajo dualidad S en la forma

$$\Upsilon \longrightarrow e^{-2i \arg(\gamma\lambda_0+\delta)}\Upsilon\,, \tag{4.30}$$

mientras que es un singlete bajo dualidad T.

Las expresiones de arriba automáticamente implican que tanto la cantidad

$$|\Upsilon|^2$$

como

$$\sum_{m=1}^{p} |\Gamma^{(m)}|^2$$

son **invariantes** bajo la acción de $SL(2,\mathbb{R})\otimes O(p)$. Esto, a su vez, demuestra la invariancia de r_0 y R_0 bajo dualidad.

- Transformación de la solución bajo $SL(2,\mathbb{R})$

Las propiedades de (4.15) bajo $SL(2,\mathbb{R})$ están bien definidas gracias a lo siguiente: puede verse que existe una fase arbitraria a incluir en las definiciones de $\mathcal{H}_{1,2}$ y las $k^{(m)}$, puesto que si multiplicamos el valor de $\mathcal{H}_{1,2}$ por una misma fase compleja al mismo tiempo que multiplicamos a las $k^{(m)}$ por la fase opuesta, la solución no cambia. Dicha fase arbitraria es el factor $e^{i\beta}$ que explícitamente hemos incluido en la definicion de $\mathcal{H}_{1,2}$ y de $k^{(m)}$. Pues bien, si escogemos un parámetro β tal que su transformación bajo dualidad S sea

$$e^{i\beta} \longrightarrow e^{i\,\arg(\gamma\lambda_0+\delta)} e^{i\beta}\,, \tag{4.31}$$

puede fácilmente comprobarse [39] que las constantes $k^{(m)}$ son invariantes bajo $SL(2,\mathbb{R})$, mientras que las funciones $\mathcal{H}_{1,2}$ se transforman en la representación fundamental. Es decir,

$$\begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 \\ \mathcal{H}_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \Lambda \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 \\ \mathcal{H}_2 \end{pmatrix}\,, \tag{4.32}$$

para Λ en $SL(2,\mathbb{R})$. Por otro lado, tanto W como ${}^{(3)}\gamma_{ij}$ son invariantes bajo $SL(2,\mathbb{R})$.

- Transformación de la solución bajo $O(p)$

Con la elección de β que hemos indicado más arriba, lo único que se transforma bajo $O(p)$ son las constantes $k^{(m)}$. Las mismas se transforman como un vector de $O(p)$, esto es:

$$\begin{pmatrix} k^{(1)} \\ k^{(2)} \\ \vdots \\ k^{(p)} \end{pmatrix} \longrightarrow \Omega \begin{pmatrix} k^{(1)} \\ k^{(2)} \\ \vdots \\ k^{(p)} \end{pmatrix}\,, \tag{4.33}$$

para Ω en $O(6)$. El resto de los elementos es invariante bajo la acción de este grupo.

4.4 Supersimetría de las soluciones

Hemos anunciado que nuestras soluciones incluyen *todos* los casos, tanto los BPS como los no-BPS, siendo la función W la que saca la solución del límite supersimétrico. Veamos este hecho explícitamente. Los valores absolutos de los dos autovalores diferentes $\mathcal{Z}_{1,2}$ de la matriz de cargas centrales del álgebra de Supergravedad $N=4$, $d=4$ pueden expresarse en términos de las cargas eléctricas y magnéticas de la siguiente manera [24]:

$$|\mathcal{Z}_{1,2}|^2 = \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}|\Gamma^{(n)}|^2 \pm \tfrac{1}{2}\left[\left(\sum_{n=1}^{N}|\Gamma^{(n)}|^2\right)^2 - \left|\sum_{n=1}^{N}\left(\Gamma^{(n)}\right)^2\right|^2\right]^{1/2}\,. \tag{4.34}$$

Con un poco de álgebra, puede verse fácilmente que r_0 puede escribirse de la siguiente manera:

$$r_0^2 = \frac{1}{|\mathcal{M}|^2}\left(|\mathcal{M}|^2 - |\mathcal{Z}_1|^2\right)\left(|\mathcal{M}|^2 - |\mathcal{Z}_2|^2\right)\,, \tag{4.35}$$

de manera que *si y sólo si* $r_0 = 0$, *alguna de las cotas de Bogomol'nyi puede estar saturada.* Vemos pues, que es efectivamente este parámetro el que determina la supersimetría residual de las posibles soluciones particulares. Un análisis completo de las propiedades de las soluciones supersimétricas a esta teoría se encuentra en [24].

4.5 Relación con otras soluciones conocidas

Nuestras soluciones son una generalización a casos no supersimétricos de las soluciones supersimétricas más generales que presenta esta teoría, descritas en [24], donde la imposición del límite BPS se consigue restringiendo el valor de las constantes complejas de la siguiente manera

$$\sum_{m=1}^{p} (k^{(m)})^2 = 0\,, \quad \sum_{m=1}^{p} |k^{(m)}|^2 = \frac{1}{2}\,. \tag{4.36}$$

Dado que en nuestras soluciones las cargas son arbitrarias, esta restricción no es más que un caso particular. De hecho, en nuestro caso obtenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{p} (k^{(m)})^2 &= \frac{-\mathcal{M}\overline{\Upsilon}}{(|\mathcal{M}|^2 - |\Upsilon|^2)^2}\, {r_0}^2\,, \\ \sum_{m=1}^{p} |k^{(m)}|^2 &= \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{|\mathcal{M}|^2 + |\Upsilon|^2}{(|\mathcal{M}|^2 - |\Upsilon|^2)^2}\, {r_0}^2\right)\,, \end{aligned} \tag{4.37}$$

donde puede verse que se recupera el límite (4.36) cuando $r_0 = 0$, que es por otra parte lo que restaura el límite supersimétrico en toda la solución. Dado que las soluciones SWIP de [24] incluyen todos los casos extremos supersimétricos encontrados previamente, también lo hacen nuestras soluciones.

La solución más general (no extrema) a la teoría con un campo vector (*Axion-Dilaton Gravity*) fue encontrada en [40]. Puede verse que nuestras soluciones se reducen exactamente a aquellas en el caso en el que $p = 1$. La principal diferencia es que la relación entre la "carga" esclar Υ y la carga diónica se simplifica considerablemente, con lo que el parémetro r_0 se reduce a

$$r_0^2 = (|\mathcal{M}|^2 - |\Upsilon|^2)^2\,, \quad p = 1\,. \tag{4.38}$$

Una generalización *estática* de dichas soluciones con un número arbitrario de campos vectores fue encontrada en [41]. Nuestras soluciones también reproducen, en el límite de momento angular cero ($\alpha = 0$), a las encontradas por estos autores.

Finalmente, con un número de $p = 2$ campos vectores, la teoría puede interpretarse como Supergravedad $N = 2$ acoplada a un multiplete vectorial. En [37] fueron encontradas solucones estáticas extremas a Supergravedad $N = 2$ acoplada a vectores, y en este caso nuestras soluciones también se reducen a aquellas en el límite extremo y cuando $\alpha = 0$.

En dicho formalismo, las funciones armónicas se interpretan como coordenadas en el fibrado simpléctico de la variedad de Kähler que parametriza el espacio de *moduli*, y el prepotencial de la teoría en el caso de un multiplete vectorial es tal que hace que se recuperen las soluciones supersimétricas de la teoría descita aquí cuando $p = 2$. Un análisis más detallado de la relación entre las soluciones de $N = 4$ y $N = 2$ se encuentra en [24].

5 Soluciones tipo agujero negro

5.1 Estructura de las singularidades

A continuación nos proponemos estudiar las propiedades clásicas de la subclase de soluciones que representan verdaderos agujeros negros (i.e., singularidades cubiertas por un horizonte regular). Para ello, el primer paso es el estudio de la estructura de las singularidades y los posibles horizontes de la métrica, por lo que en primer lugar vamos a reescribirla en la forma usual que suele emplearse para los agujeros negros de la familia de Kerr-Newman y sus generalizaciones supersimétricas. Desplazando la coordenada radial en la que (4.15) está dada según

$$r \longrightarrow r - M, \tag{5.1}$$

y definiendo las funciones

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Delta & \equiv & (r-M)^2 + \alpha^2 - {r_0}^2 \,, \\ \\ \Sigma & \equiv & r^2 + (N + \alpha\cos\theta)^2 - |\Upsilon|^2 \,, \end{array} \right. \tag{5.2}$$

la métrica puede expresarse en la forma

$$\begin{aligned} ds^2 \;\; = \;\; & \frac{\Delta - \alpha^2 \sin^2\theta}{\Sigma} dt^2 + 2\alpha \sin^2\theta \frac{\Sigma + \alpha^2 \sin^2\theta - \Delta}{\Sigma} dt d\varphi - \\ & - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma\, d\theta^2 - \frac{\left(\Sigma + \alpha^2 \sin^2\theta\right)^2 - \Delta\alpha^2 \sin^2\theta}{\Sigma} \sin^2\theta \, d\varphi^2 \,. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Esta métrica tiene **singularidades ficticias** en

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Delta & = & 0 \,, \\ \theta & = & 0 \,, \end{array} \right. \tag{5.4}$$

y una **singularidad de curvatura** en

$$\Sigma = 0 \,. \tag{5.5}$$

De ahora en adelante, dado que estamos interesados en las soluciones que representan verdaderos agujeros negros, haremos la carga NUT N igual a cero.

Merece la pena hacer un breve comentario acerca de la forma de la singularidad (de curvatura) de la solución. Como sabemos, en los agujeros negros de la familia de Kerr, la singularidad de la solución es una singularidad con forma de anillo. Sin embargo, debido a la presencia combinada de "carga" escalar y rotación, la singularidad (usando (5.5) y (5.2)) adopta la forma:

$$r^2_{sing} = |\Upsilon|^2 - \alpha^2 \cos^2\theta \,. \tag{5.6}$$

Esto no determina, en general una singularidad unidimensional, sino una *superficie* bidimensional. La misma (según los valores de los parámetros) puede tener la topología de un toro, posiblemente degenerada en algunos casos a dos elipsoides concéntricos.

5.2 Posibles agujeros negros

Si bien r_0 era el parámetro apropiado para estudiar la supersimetría de las soluciones, el parámetro que clasifica los posibles agujeros negros es R_0 (que recordamos que está definido según $R_0^2 \equiv r_0^2 - \alpha^2$). Cuando decimos que R_0 es el parámtero apropiado para el estudio de las diferentes clases de agujeros negros, nos referimos a que es este valor el que discrimina entre las posibles *topologías* que, como sabemos, en el caso de agujeros negros cargados, se caracterizan por la presencia de dos horizontes (caso no-extremo), uno (caso extremo) o ninguno (singularidad desnuda). Queda así manifiesta la diferencia existente entre agujeros negros BPS y agujeros negros extremos. Como veremos, en los casos supuestamente físicos (i.e., compatibles con la conjetura del "censor cósmico", que prohibe la existencia de singularidades desnudas), se tiene que

$$\text{BPS} \Rightarrow \text{extremalidad},$$

pero el contrario no es siempre cierto. Es decir, existen agujeros negros extremos que *no son* supersimétricos [42, 43]. Desgraciadamente, lo contrario parece no pasar (véase la discusión en la secciones 2.3 y 2.4).

Los (posibles) horizontes son las hipersuperficies dadas por la primera de las ecuaciones (5.4), la cual se escribe en términos de R_0^2 en la forma

$$(r_H - M)^2 = R_0^2 \,. \tag{5.7}$$

Los valores de los parámetros determinan la estructura del espaciotiempo. Como siempre, hay tres casos a tener en cuenta:

I) $R_0^2 < 0$.

Aquí r_H no posee soluciones reales, por lo que no existe horizonte de sucesos y esta solución no es un agujero negro. En este caso se tiene la relación $r_0^2 < \alpha^2$, que es el caso de las soluciones supersimétricas ($r_0 = 0$) con rotación ($\alpha \neq 0$). Esto prueba que no existen agujeros negros BPS con rotación en esta teoría, de acuerdo con los resultados de [24]. El único caso que conocemos de agujeros negros BPS con rotación es en $d > 5$ [52].

II) $R_0^2 > 0$.

Ahora hay dos horizontes, situados en

$$r_\pm = M \pm R_0 \,, \tag{5.8}$$

por lo que, en principio, tenemos un agujero negro *no extremo*. No obstante, puesto que la singularidad es extensa, tenemos que asegurarnos de que la misma se encuentra en el interior del candidato a horizonte de sucesos, r_+. Esto es algo que garantiza la cota de

Bogomol'nyi (ver la discusión más abajo).

III) $R_0^2 = 0$.

Hay un único horizonte en

$$r_+ = r_- = M\,. \tag{5.9}$$

Este es el caso *extremo* que, al igual que en el caso anterior, sólo admite interpretación de agujero negro si la singularidad esta situada en el interior del horizonte. En esta clase se encuentran los agujeros negros extremos pero *no* supersimétricos ($r_0^2 = \alpha^2 \neq 0$).

- Supersimetría y singularidades desnudas

Acabamos de señalar que, en los casos en los que parece ser posible una interpretación de agujero negro (casos II) y III)), necesitamos asegurarnos de que la singularidad se encuentra convenientemente "escondida" por el horizonte, de acuerdo con la hipótesis del "censor cósmico". De (5.6) vemos que la situación de la singularidad está acotada, fijado el valor de las constantes físicas, por

$$r_{sing}^2 \leq |\Upsilon|^2\,, \tag{5.10}$$

por lo que, en el caso de que $R_0^2 \geq 0$, una condición *suficiente* para que la singularidad quede escondida ($r_+ > r_{sing}$) es

$$M > |\Upsilon|\,. \tag{5.11}$$

Por otro lado, usando (4.6) y la expresión para R_0, puede demostrarse que (en el caso de carga NUT $N = 0$)) siempre se satisface

$$(M - |\Upsilon|)^2 > \alpha^2 > 0\,, \tag{5.12}$$

por lo que caben dos posibilidades:

- o bien $M > |\Upsilon|$, con lo que en los dos casos bajo consideración tenemos verdaderos agujeros negros;

- o bien $M < |\Upsilon|$, lo que permite la existencia de singularidades desnudas.

Sin embargo, es posible demostrar, usando las expresiones para los autovalores de las cargas centrales (4.34) que

$$\begin{cases} M > |\Upsilon| \;\;\Leftrightarrow\;\; M > |\mathcal{Z}_{1,2}|\,, \\ \\ M < |\Upsilon| \;\;\Leftrightarrow\;\; M < |\mathcal{Z}_{1,2}|\,. \end{cases} \tag{5.13}$$

En el primer caso se satisfacen ambas cotas de Bogomol'nyi, mientras que en el segundo las dos son simultáneamente violadas, lo que es no está permitido por el álgebra de supersimetría (independientemente de que las soluciones sean supersimétricas o no). Por tanto, *supersimetría impide la existencia de singularidades desnudas* en los casos que estamos considerando [53, 54].

5.3 Entropía y temperatura

A continuación procedemos a evaluar las expresiones para la entropía de Bekenstein-Hawking y la temperatura de las soluciones que son verdaderos agujeros negros. En cuanto a la **entropía** (un cuarto del área del horizonte) obtenemos, en unidades en las que también hemos hecho $G_N^{(4)} = 1$, la siguiente expresión:

$$S_{BH} = \pi \left(r_+^2 + \alpha^2 - |\Upsilon|^2 \right) , \tag{5.14}$$

o, en términos de las cargas centrales:

$$S_{BH} = \pi \left\{ (M^2 - |\mathcal{Z}_1|^2) + (M^2 - |\mathcal{Z}_2|^2) + 2\sqrt{(M^2 - |\mathcal{Z}_1|^2)(M^2 - |\mathcal{Z}_2|^2) - J^2} \right\} . \tag{5.15}$$

Nótese, de nuevo, que en el caso supersimétrico la expresión sólo tiene sentido para momento angular nulo. Por otra parte, en el caso sin rotación, la entropía es nula si y sólo si ambas cotas de Bogomol'nyi están saturadas (suponiendo que la expresión para la entropía siga siendo válida en todos los casos extremos).

En lo que respecta a la **temperatura**, la misma puede ser calculada siguiendo la receta habitual [55]: hemos de imponer la regularidad de la métrica cerca del horizonte en tiempo imaginario. Haciendo $t \to i\tau$ y $\alpha \to i\tilde{\alpha}$ obtenemos la métrica euclídea. La ausencia de singularidades cónicas en la región cercana al horizonte supone identificar las coordenadas $(\tau, \varphi) \sim (\tau + \beta_H, \varphi - \tilde{\Omega}_H \beta_H)$, siendo Ω_H la velocidad angular euclídea del horizonte de sucesos y β_H el inverso de la temperatura de Hawking del agujero negro. Dado que la velocidad angular real del horizonte es

$$\Omega_H = \frac{\alpha}{r_+^2 + \alpha^2 - |\Upsilon|^2} , \tag{5.16}$$

la expresión para la temperatura queda, finalmente:

$$T_H = \frac{R_0}{2 S_{BH}} . \tag{5.17}$$

Salvo en el caso de entropía nula (1/2 de las supersimetrías sin romper), en el que esta expresión no está bien definida, vemos que la temperatura es nula sólamente en el caso extremo, como es habitual. Tanto el valor de la entropía como el de la temperatura se reducen a aquellos encontrados en la familia de Kerr-Newman cuando los parámetros correspondientes se ponen iguales a cero.

Por otra parte, dado que tanto R_0 como $|\Upsilon|^2$ son invariantes bajo dualidad, la invariancia de las cantidades termodinámicas bajo $SL(2,\mathbb{R}) \otimes O(p)$ es manifiesta.

6 Conclusiones

En el estudio que acabamos de presentar hemos encontrado la familia general de soluciones estacionarias tipo agujero negro de la teoría de Supergravedad pura $N = 4$, $d = 4$. Dicha teoría es una truncación consistente de la acción efectiva de la cuerda Heterótica compactificada en T^6. Hemos explicado cómo se hace dicha truncación, mostrando su consistencia y estableciendo las relaciones correspondientes entre el espectro de la teoría compactificada y de la teoría completa en diez dimensiones. Nuestras soluciones incluyen desde agujeros negros con horizonte regular hasta singularidades desnudas, espaciotiempos Taub-NUT, etc. Todas las cargas físicas que podemos esperar que aparezcan en la teoría (compatibles con el "teorema" de "no pelos") están presentes y pueden tomar valores arbitrarios por lo que, en general, las soluciones aquí descritas no son supersimétricas, siendo el límite BPS un caso particular de todos los posibles. Poseen la ventaja de describir agujeros negros no extremos, e incluyen todas las soluciones de esta teoría y otras relacionadas que se ecuentran en la literatura. Sus propiedades de transformación bajo dualidad están bien definidas, y la invariancia de la familia de soluciones bajo dualidad es manifiesta. Hemos calculado las cantidades termodinámicas asociadas a los agujeros negros que incluye la solución general, y hemos demostrado la invariancia de dichas cantidades bajo dualidad.

Si bien las soluciones que presentamos aquí se refieren a una simplificación considerable de la teoría de la que provienen, la cual posee un espacio de *moduli* mucho más complejo y una estructura mucho más rica, consideramos que las características que acabamos de puntualizar las hacen suficientemente interesantes. Además, la teoría de $N = 4$, $d = 4$ es sencilla, pero posee "restos" las las dos dualidades de la cuerda Heterótica (dualidad S y dualidad T). Nuestras soluciones son una generalización directa a casos no supersimétricos de las encontradas en [24]. El método que describimos para extender estas soluciones supersimétricas con rotación a casos no-extremos es novedoso, y esperamos que tenga un rango de validez más amplio y admita ser usado en teorías más generales. Por otro lado, construir soluciones *generales* es de gran interés desde el punto de vista de las teorías de Supergravedad, pues permite en principio verificar la presunta invariancia de la entropía frente a las dualidades de una teoría dada [28]. También esperamos que la forma en la que nosotros hemos conseguido construir la solución general de esta teoría (basada en gran parte en las propiedades de invariancia frente a dualidad de la familia de soluciones) pueda generalizarse a casos más interesantes.

Referencias

[1] J.D. Bekenstein, *Black Holes and Entropy*, Phys. Rev. **D7** (1973) 2333-2346.

[2] J.D. Bekenstein, *Generalized Second Law of Thermodynamics in Black Hole Physics*, Phys. Rev. **D9** (1974) 3292-3300.

[3] S.W. Hawking, *Particle Creation by Black Holes*, Commun. Math. Phys. **43** (1975) 199-220.

[4] S.W. Hawking, *Breakdown of Predictability in Gravitational Collapse*, Phys. Rev. **D14** (1976) 2460-2473.

[5] A. Strominger, C. Vafa, *Microscopic Origin of the Bekenstein-Hawking Entropy*, Phys. Lett. **B379** (1996) 99-104.

[6] S.R. Das, S.D. Mathur, *Comparing Decay Rates for Black Holes and D-Branes*, Nucl. Phys. **B478** (1996) 561-576.

[7] J.M. Maldacena, A. Strominger, *Black Hole Greybody Factors and D-Brane Spectroscopy*, Phys. Rev. **D55** (1997) 861-870.

[8] G. 't Hooft, *Dimensional Reduction in Quantum Gravity*, gr-qc/9310026.

[9] D. Bigatti, L. Susskind, *TASI Lectures on the Holographic Principle*, hep-th/0002044.

[10] J.M. Maldacena, *The Large N Limit of Superconformal Theories and Supergravity*, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 231-252.

[11] S.W. Hawking, *Gravitational Radiation from Colliding Black Holes*, Phys. Rev. Lett. **26** (1971) 1344-1346.

[12] R. Penrose, *Singularities and Time Asymmetry*, en *General Relativity, an Einstein Centenary Survey*, ed. por S.W. Hawking, W. Israel, Cambridge University Press.

[13] R. Ruffini, J.A. Wheeler, Physics Today **24** (1971) 30.

[14] P.K. Townsend, *Black Holes*, gr-qc/9707012.

[15] J. Maharana, *Recent Developments in String Theory*, hep-th/9911200.

[16] M.B. Green, J.H. Schwarz, E. Witten, *Superstring Theory*, Cambridge Monographs in Mathematical Physics, Cambridge University Press.

[17] J. Louis, K. Förger, *Holomorphic Couplings in String Theory*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **55B** (1997) 33-64.

[18] J.M. Maldacena, *Black Holes in String Theory*, Tesis Doctoral, Princeton 1996, hep-th/9607235.

[19] B.E. Baaquie, L.C. Kwek, *Superstrings, Gauge Fields and Black Holes*, hep-th/0002165.

[20] M.J. Duff, J. Rahmfeld, *Massive String States as Extreme Black Holes*, Phys. Lett. **B345** (1995) 441-447.

[21] G.T. Horowitz, J. Polchinski, *A Correspondence Principle for Black Holes and Strings*, Phys. Rev. **D55** (1997) 6189-6197.

[22] S. Ferrara, C.A. Savoy, B. Zumino, *General Massive Multiplets in Extended Supersymmetry*, Phys. Lett. **100B** (1981) 393-398.

[23] D. Olive, E. Witten, *Supersymmetry Algebras that Include Topological Charges*, Phys. Lett. **78B** (1978) 97-101.

[24] E. Bergshoeff, R. Kallosh, T. Ortín, *Stationary Axion/Dilaton Solutions and Supersymmetry*, Nucl. Phys. **B478** (1996) 156.

[25] S. Das, A. Dasgupta, P. Ramadevi, *Can Extremal Black Holes Have Non-Zero Entropy?*, Mod. Phys. Lett. **A12** (1997) 3067-3080.

[26] K. Sfetsos, K. Skenderis, *Microscopic Derivation of the Bekenstein-Hawking Entropy Formula for Non-Extremal Black Holes*, Nucl. Phys. **B517** (1998) 179-204.

[27] E. Lozano-Tellechea, T. Ortín, *The General, Duality Invariant Family of Non-BPS Black-Hole Solutions of $N = 4$, $d = 4$ Supergravity*, Nucl. Phys. **B569** (2000) 435-450.

[28] T. Mohaupt, *Black Holes in Supergravity and String Theory*, presentado en *"Quantum Aspects of Gauge Theories, Supersymmetry and Unification"*, Torino, 26-1 - 2-2, 2000, hep-th/0004098.

[29] E. Bergshoeff, M. de Roo, B. de Wit, P. Van Nieuwenhuizen, *Ten-Dimensional Maxwell-Einstein Supergravity, its Currents and the Issue of its Auxiliary Fields*, Nucl. Phys. **B195** (1982) 97-136.

[30] J. Maharana, J.H. Schwarz, *Noncompact Symmetries in String Theory*, Nucl. Phys. **B390** (1993) 3-32.

[31] J. Scherk, J.H. Schwarz, *How to Get Masses from Extra Dimensions*, Nucl. Phys. **B153** (1979) 61-88.

[32] J.H. Schwarz, A. Sen, *Duality Symmetric Actions*, Nucl. Phys. **B411** (1994) 35-63.

[33] C.M. Hull, P.K. Townsend, *Unity of Superstring Dualities*, Nucl. Phys. **B438** (1995) 109-137.

[34] J.H. Schwarz, *Dilaton-Axion Symmetry*, hep-th/9209125.

[35] A. Font, L. Ibáñez, D. Lüst, F. Quevedo, *Strong-Weak Coupling Duality and Non-perturbative Effects in String Theory*, Phys. Lett. **249B** (1990), 35.

[36] A.H. Chamseddine, *$N = 4$ Supergravity Coupled to $N = 4$ Matter and Hidden Symmetries*, Nucl. Phys. **B185** (1981) 403-415.

[37] S. Ferrara, R. Kallosh, A. Strominger, *$N = 2$ Extremal Black Holes*, Phys. Rev. **D52** (1995) 5412-5416.

[38] T. Ortín, *Electric-Magnetic Duality and Supersymmetry in Stringy Black Holes*, Phys. Rev. **D47** (1993) 3136-3143.

[39] R. Kallosh, T. Ortín, *Charge Quantization of Axion-Dilaton Black Holes*, Phys. Rev. **D48** (1993) 742-747.

[40] D.V. Gal'tsov, O.V. Kechkin, *Ehlers-Harrison Type Transformations in Dilaton-Axion Gravity*, Phys. Rev. **D50** (1994) 7394-7399.

[41] D.V. Gal'tsov, P.S. Letelier, *Ehlers-Harrison Transformations and Black Holes in Dilaton-Axion Gravity With Multiple Vector Fields*, Phys. Rev. **D55** (1997) 3580-3592.

[42] T. Ortín, *Extremality Versus Supersymmetry in Stringy Black Holes*, Phys. Lett. **B422** (1998) 93-100.

[43] E. Álvarez, P. Meessen, T. Ortín, *Black Holes, Duality and Supersymmetry*, contribución a *"Beyond the Standard Model: From Theory to Experiment"*, Valencia, 1997, hep-th/9712196.

[44] Z. Perjés, *Solutions of the Coupled Einstein-Maxwell Equations Representing the Fields of Spinning Sources*, Phys. Rev. Lett. **27** (1971) 1668.

[45] W. Israel, G.A. Wilson, *A Class of Stationary Electromagnetic Vacuum Fields*, J. Math. Phys. **13** (1972) 865.

[46] M. Cvetič, D. Youm, *Dyonic BPS Saturated Black Holes of Heterotic String on a Six-Torus*, Phys. Rev. **D53** (1996) 584-588.

[47] M. Cvetič, D. Youm, *General Static Spherically Symmetric Black Holes of Heterotic String on a Six Torus*, Nucl. Phys. **B472** (1996) 249-267.

[48] M. Cvetič, D. Youm, *Entropy of Non-Extreme Charged Rotating Black Holes in String Theory*, Phys. Rev. **D54** (1996) 2612-2620.

[49] M. Cvetič, C.M. Hull, *Black HOles and U-Duality* Nucl. Phys. **B480** (1996) 296-316.

[50] A. Sen, *Black Hole Solutions in Heterotic String on a Torus*, Nucl. Phys. **B440** (1995) 421-440.

[51] D. Youm, *Black Holes and Solitons in String Theory*, Phys. Rept. **316** (1999) 1-232.

[52] G.T. Horowitz, A. Sen, *Rotating Black Holes which Saturate a Bogomol'nyi Bound*, Phys. Rev. **D53** (1996) 808-815.

[53] R. Kallosh, *Supersymmetry and Black Holes*, presentado en SUSY 93, hep-th/9306095.

[54] R. Kallosh, A. Linde, T. Ortín, A. Peet, A. Van Proeyen, *Supersymmetry as a Cosmic Censor*, Phys. Rev. **D46** (1992) 5278-5302.

[55] G.W. Gibbons, S.W. Hawking, *Cosmological Event Horizons, Thermodynamics and Particle Creation*, Phys. Rev. **D15** (1977) 2738.

Agradecimientos

En primer lugar, quiero que quede constancia de mi más sincera gratitud hacia Tomás. Además de por lo obvio (toda la física que he aprendido con él, todo el tiempo que me ha dedicado, etc...), por haber depositado en su día su confianza en mí y, muy particularmente, por el trato tan cordial que me ha ofrecido y por estar siempre tan accesible. También quiero agradecer a Luis Ibáñez, mi responsable en el Departamento, todas las facilidades que me ha proporcionado a lo largo de este tiempo.

He de agradecer a toda la gente que trabaja en el IFT por el hecho de hacer de él un sitio agradable. Una mención especial va para los "mayores" (Bert, Patrick y Pedro), por aguantar con tanta paciencia mis dudas tontas de muchos días; para Natxo, por ser un buen compañero de fatigas; y para Lorenzo, por estar haciendo siempre esa clase de preguntas que hacen que uno ponga en duda todo lo que creía saber. Gracias también a toda la gente del Departamento (Siannah, Jaime, Alfonso, Ángel, Jorge, *et al.*) que, en mayor o menor grado, son colegas también fuera de él.

Muchas gracias por todo a David. Es difícil acotar con justicia todas las razones, de modo que no lo voy a hacer.

Y en cuanto a la gente de fuera del Departamento y del IFT, gracias a todos aquellos que alguna vez han mostrado un interés sincero acerca de cómo me van las cosas por aquí. Todos ellos saben quiénes son, por lo que no es necesario que haga ninguna lista. Sin embargo, sí mencionaré a Pablo y a Leti, a los que debo un agradecimiento especialmente cariñoso.