TEMAS DE GRAVITACIÓN AVANZADA

Hoja de problemas III

1. Construir una métrica invariante bajo el grupo $SO(2,d-1)$ (grupo de Anti-de Sitter) para el espacio de Anti-de Sitter en d dimensiones, descrito como el espacio de cosets $SO(2,d-1)/SO(1,d-1)$, y calcular la conexión, curvatura, tensor de Ricci, escalar de Ricci, tensor de Einstein y vectores de Killing. Utilizar el álgebra de $SO(n_+,n_-)$ en la forma

$$[M_{ab},M_{cd}] = -\eta_{ac}M_{bd} - \eta_{bd}M_{ac} + \eta_{ad}M_{bc} + \eta_{bc}M_{ad}\,,$$

donde $\eta_{ab} = \mathrm{diag}(+1,\cdots,+1,-1,\cdots,-1)$ con n_+ $+1$ n_- -1, utilizar los indices $a,b,=\#,0,1,\cdots d-1$ y como generadores del subgrupo de Lorents $SO(1,d-1)$ todos los M_{ab} con $a,b\neq\#$.

¿Es este espacio de cosets reductivo y/o simétrico?

2. Calcular, la base de vectores invariantes por la izquierda, la conexión, curvatura, tensor de Ricci, escalar de Ricci, tensor de Einstein y vectores de Killing del espacio de cosets G/H definido como sigue:

- G es el grupo generado por el álgebra de Lie con base

  $$\{P_u,P_v,P_1,P_2,M_1,M_2\}\,,$$

  y conmutadores

  $$[P_i,M_j] = \tfrac{1}{4}\lambda^2\delta_{ij}P_v\,,\qquad [P_u,P_i] = M_i\,,\qquad [P_u,M_i] = -\tfrac{1}{4}\lambda^2 P_i\,,$$

- H es el subgrupo de G generado por $\{M_1,M_2\}$. (¿Es este espacio de cosets reductivo y/o simétrico?)

- La métrica $B_{ab}\,,a,b,=u,v,1,2$ es

  $$(B_{ab}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

  (¿Podría utilizarse aquí la métrica de Killing?) (¿Cual es la signatura de esta métrica?)

- El representante de coset es $u(x) = e^{vP_v}e^{uP_u}e^{x^1P_1}e^{x^2P_2}$