TEMAS DE GRAVITACIÓN AVANZADA

Hoja de problemas II

1. Comprobar que la acción adjunta del grupo $SU(2)$ sobre su álgebra es equivalente a la de la representación adjunta

$$gT_I g^{-1} = T_J \Gamma_{Adj}(g)^J{}_I \,,$$

para los elementos g del subgrupo unidimensional generado por $\Gamma_v(T_3) = \frac{i}{2}\sigma^3$, siendo los generadores del álgebra de $SU(2)$ $\Gamma_v(T_i) = \frac{i}{2}\sigma^i$ y las σ^i las matrices de Pauli, que satisfacen

$$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i\epsilon^{ijk}\sigma^k \,.$$

2. Sea un grupo de Lie G con álgebra $[T_I, T_J] = f_{IJ}{}^K T_K$, una base de vectores invariantes por la izquierda $\{e_I\}$ con $e_I(e) = -T_I$, una base dual de 1-formas invariantes por la izquierda $\{e^I\}$ y una métrica

$$ds^2 = B_{IJ} e^I \otimes e^J \,.$$

Calcular las componentes de conexión de Levi-Cività, de la correspondiente curvatura, tensor de Ricci y escalar de Ricci en dicha base.

3. Calcular la conexión, curvatura, tensor de Ricci, escalar de Ricci y vectores de Killing de la 3-esfera achatada siguiendo los siguientes pasos:

1. Calcular e^i y $\tilde{e}^i$ de las 1-forma de Maurer-Cartan invariantes por la izquierda y por la derecha de $SU(2)$ utilizando las coordenadas φ, θ, ψ (ángulos de Euler) de forma que un elemento genérico de $SU(2)$ se escriba

$$M(\varphi,\theta,\psi) = \begin{pmatrix} z_0 & z_1 \\ -\bar{z}_1 & \bar{z}_0 \end{pmatrix}, \qquad |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\,,$$

con

$$z_0 = \cos\tfrac{\theta}{2} e^{i(\varphi+\psi)/2}\,, \qquad z_1 = \sin\tfrac{\theta}{2} e^{i(\varphi-\psi)/2}\,,$$

y la base del álgebra de Lie de $SU(2)$ con relaciones de conmutación $[T_i, T_j] = -\epsilon_{ijk} T_k$.

2. Calcular los vectores duales invariantes por la izquierda y por la derecha e_i y $\tilde{e}_i$.

3. Construir la métrica Riemanniana de la 3-esfera achatada utilizando la métrica
$$(B_{ij}) = \mathrm{diag}(1, 1, \lambda)\,,$$
en la base $\{e_i\}$.

   ¿Qué subgrupo de $SU(2)$ deja invariante por la derecha esta métrica?

4. Hallar las componentes la conexión asociada a esta métrica, la 2-forma de curvatura de Riemann, el tensor de Ricci y el escalar de Ricci en la base $\{e_i\}$. ¿Para qeé valores de λ la métrica corresponde a un espacio de Einstein con $R_{ab} \propto g_{ab}$?

5. ¿Cual es el grupo de isometrías de esta métrica para todos los valores de λ? Escribir explicitamente los vectores de Killing y sus corchetes de Lie.