

AGUJEROS

NEGROS

&

Supersimetría

D. Kastor  
E. Sezginoff  
R. Kulkarni  
R. Khuri  
A. Linde  
T. O.  
A. Van Proeyen  
A. Pesti  
T. Torma


Soluciones límites de  
familias de soluciones  
de tipo agujero negro

y

Supersimetría

# Introducción - Motivación

1

¿Qué  tienen que ver los agujeros negros con la supersimetría?

Mucho.

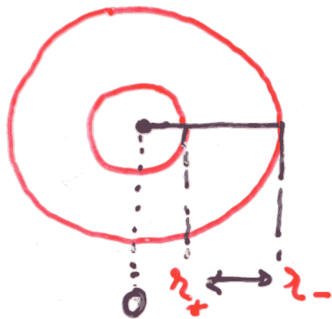
(Al menos ciertos agujeros negros)

El ejemplo más simple: Reissner-Nordström RN

$$\begin{cases} ds^2 = e^{2U} dt^2 - e^{-2U} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \\ F = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{Q}{r} dt \wedge dr, \end{cases}$$

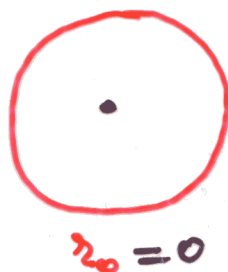
$$e^{2U} = \frac{(r-r_+)(r-r_-)}{r^2}; \quad r_{\pm} = M \pm r_0; \quad r_0 = \sqrt{M^2 - Q^2};$$

$$M^2 > Q^2$$



$$\begin{aligned} T &> 0 \\ S &> 0 \end{aligned}$$

$$M^2 = Q^2$$



$$\begin{aligned} T &= 0 \\ S &> 0 \end{aligned}$$

(S = 0 Hawking, Healy  
Kallala, Gibbons)

$$M^2 < Q^2$$

Singularidad desnuda

?

⇒ Algo especial pasa cuando  $M^2 = Q^2$  ("extremo")

⊕ Si  $M^2 = Q^2$ , podemos reescribir la solución así

$$\begin{cases} ds^2 = V^{-2} dt^2 - V^2 d\vec{x}^2; \\ F = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} dV \wedge dt; \end{cases}$$

y  $V$  ahora puede ser cualquier función armónica de  $\vec{x}$

$$V(\vec{x}) = 1 + \frac{M_1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|} + \frac{M_2}{|\vec{x} - \vec{x}_2|} + \dots$$

Esta solución (Papapetrou-Majumdar) describe varios

"agujeros" de Reissner-Nordström extremos en equilibrio.



$$\frac{M_1 M_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2} = \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2} \quad \rightsquigarrow \quad M_i = \pm Q_i$$

Este resultado (aunque viejo) es sorprendente porque

No hay partículas cargadas en la acción de Einstein-Maxwell

$$S = \int d^4x \sqrt{|g|} \left[ -R + \frac{1}{2} F^2 \right]$$

- ¿Qué pasa cuando  $M^2 = Q^2$ ?
- ¿Cómo evitar los casos  $M^2 < Q^2$ ? (Censor cósmico)
- ¿Hay alguna simetría que relacione  $J_{\mu\nu}$  y  $A_\mu$ ?  
(¿  $M$  y  $Q$  ?)



Observación: La acción de EM es la parte bosónica de la de **N=2 SUGRA**

En esta teoría  $g_{\mu\nu}$  y  $A_\mu$  forman parte del mismo supermultiplete  $(g_{\mu\nu}, \psi_\mu, A_\mu)$  y están relacionados por supersimetría (aunque el campo  $\psi_\mu$  sea cero en una solución)

$$\delta_\epsilon B \sim \epsilon F \quad \delta_\epsilon F \sim \partial \epsilon + B \epsilon \dots$$

⇒ Los agujeros de **RN** son soluciones puramente bosónicas de **N=2 SUGRA** y  $g_{\mu\nu}$  y  $A_\mu$  están relacionados por **SUSY**

Sin embargo, las simetrías de una teoría en general no son simetrías de las soluciones. Soluciones con  $F=0$

satisfacen  $\delta_\epsilon B = 0$  pero  $\delta_\epsilon F \neq 0$  en general.

No obstante, para ciertas soluciones existen ciertos  $\epsilon$  que dejan la solución invariante.

$$\delta_{\epsilon_K} F = \partial \epsilon_K + B \epsilon_K = 0 \quad \epsilon_K \rightarrow \text{Espinoz de Killing}$$

→ Tales soluciones tienen una simetría adicional que relaciona  $g_{\mu\nu}$  y  $A_\mu$ : **supersimetría residual.** RNE

# Cotas de Bogomol'nyi-Gibbons-Hull

(Olive-Witten  
Gibbons-Hull...)

Una consecuencia inmediata de "embeber" E-M en N=2 **SUGRA** es que **SUSY** nos dice cómo hacer una

construcción de Chester (Witten, Chester, Israel, Gibbons & Hull etc)

Tomando la regla de transformación de **SUSY** del gravitino

$$\delta_\epsilon \Psi_\mu = \nabla_\mu \epsilon - \frac{1}{4} F \gamma_\mu \epsilon \equiv \hat{\nabla}_\mu \epsilon;$$

se construye el tensor de Chester generalizado

$$\begin{aligned} \hat{E}^{\mu\nu} &= \bar{\epsilon} \gamma^{\mu\nu\rho} \hat{\nabla}_\rho \epsilon + c.c. = \\ &= \underbrace{E^{\mu\nu}}_{\text{Chester puro}} + 4\bar{\epsilon} (F^{\mu\nu} + i\gamma_5^* F^{\mu\nu}) \epsilon; \end{aligned}$$

que satisface

$$\nabla_\mu \hat{E}^{\mu\nu} = \bar{\epsilon} (T^\nu{}_\lambda \gamma^\lambda + J^\nu + i\gamma_5^* J^\nu) \epsilon + 4\bar{\hat{\nabla}}_\lambda \epsilon \gamma^{\nu\lambda\rho} \hat{\nabla}_\rho \epsilon$$

Integrando  $\hat{E}^{\mu\nu}$  sobre una 2-superficie, utilizando el teorema de la divergencia, el resultado anterior, el comportamiento asintótico de  $\epsilon \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \epsilon_0 + O(\frac{1}{r})$  y

la condición

$$T_{\alpha\beta} U^\alpha V^\beta \gg \left[ (J_\alpha V^\alpha)^2 + (*J_\alpha V^\alpha)^2 \right]^{1/2}; \quad V U^\alpha, V^\alpha \text{ no de tipo espacio}$$

$$\Rightarrow M \gg \sqrt{Q^2 + P^2} \quad \text{Cota de BGH}$$

5

La cota se satura  $\Leftrightarrow \hat{\nabla}_\mu \epsilon = 0 \Leftrightarrow \delta_\epsilon \psi_\mu = 0 \Rightarrow \epsilon$  es un espinor de Killing y la solución "es supersimétrica". (RNE)

En espacios asintóticamente Taub-NUT,  $M^2 + l^2 \gg Q^2 + P^2$   
(Kallosh, Kasta, Orin, Torma)

Desde el punto de vista del álgebra de SUSY

$$\{Q_\alpha^i, Q_\beta^j\} = \epsilon_{\alpha\beta} Z^{ij}; \quad \{Q_\alpha^i, Q_\beta^j\} = \delta^{ij} \sigma_{\alpha\beta}^\mu P_\mu$$

$\downarrow$   $|Z|$   $\downarrow$   $M$

En cierta base, toma la forma

$$\begin{aligned} \{Q^{\frac{1}{2}}, Q^{\dagger \frac{1}{2}}\} &= M - |Z| \geq 0; & |Z| &= (Q^2 + P^2)^{1/2} \\ \{Q^{\frac{3}{4}}, Q^{\dagger \frac{3}{4}}\} &= M + |Z| \geq 0; & & \end{aligned}$$

(Ferrara, Saucy, Zucino)

La cota  $M - |Z| \geq 0$  se satura cuando  $Q^{\frac{1}{2}} | \rangle = 0$

(el estado tiene supersimetrías residuales), pero, en cualquier caso, supersimetría prohíbe que  $M < (Q^2 + P^2)^{1/2}$ , los casos en que RN tiene singularidades desnudas, actuando como "censor cósmico", (Kallosh, Linde, Orin, Peet, Van Proeyen)

(También se pueden derivar versiones diferenciales de estas cotas "identidades de espinores de Killing")  
(Kallosh, Orin)



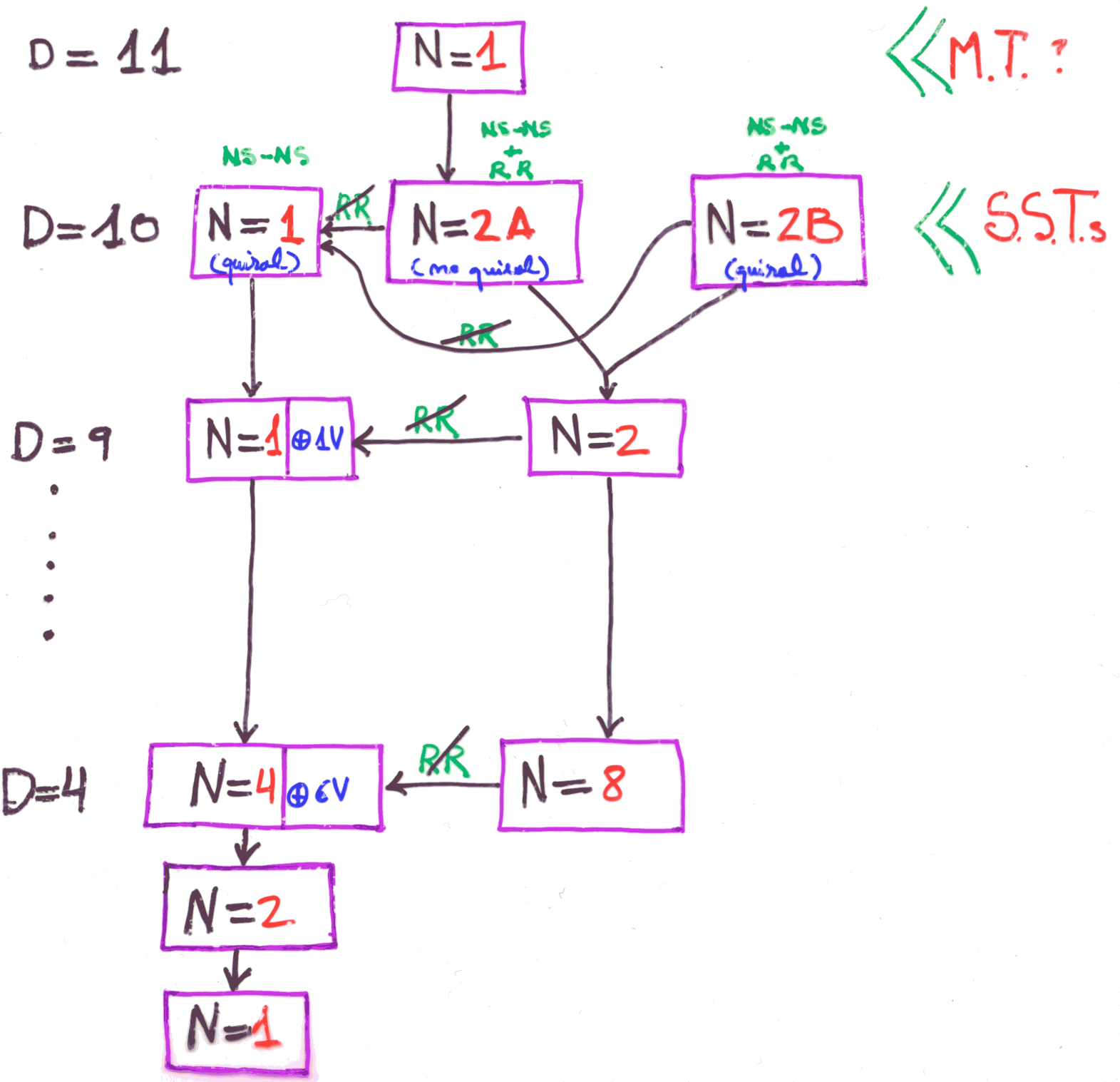
Todo esto se puede generalizar a  $N > 2$ , y nuestro objetivo es estudiar soluciones de tipo "agujero negro" desde este punto de vista :

- 1.- Buscar soluciones de tipo "AN"(E)
- 2.- "Embeberlos" en una teoría de supergravedad
- 3.- Buscar las supersimetrías residuales, evaluar las cotas de Bogomolnyi ...  
( $\frac{1}{2}$  de supersimetrías residuales: estados BPS)
- 4.- Efecto de "transformaciones generadoras de soluciones" sobre las supersimetrías residuales  
( "Dualidades" versus supersimetría )

Con particular interés en soluciones de tipo "AN" en teorías de supercuerdas.

# Supergravidades

Las teorías efectivas de supercuerdas a bajas energías son teorías de supergravidad de la parte sin masa del espectro.





El lagrangiano típico que se encuentra en  $D=4$  es de la forma general

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[ -\tilde{R} - g_{ij}(\phi) \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^j + \frac{1}{2} M_{IJ}(\phi) F_{\mu\nu}^I F_{\mu\nu}^J + \frac{1}{2} N_{IJ}(\phi) F_{\mu\nu}^I * F_{\mu\nu}^J \right]$$

$\phi^i \rightarrow$  escalares (modelo  $\sigma$  con métrica  $g_{ij}(\phi)$ )

$A_\mu^I \rightarrow$  vectores  $U(1)$

Sería suficiente estudiar soluciones "AN" de esta acción. Lo haremos de un modelo simplificado (modelo "a"). Sin embargo:

- i) Necesitamos saber qué escalar es el dilatón  $\phi$  para hallar la "métrica de la cuerda"  $g_{\mu\nu} = e^{2\phi} \tilde{g}_{\mu\nu}$
- ii) Necesitamos conocer las reglas de transformación de supersimetría (correcciones  $\alpha'$ )

Todo esto es más sencillo si derivamos el modelo y las reglas de transformación de la teoría en  $D=10$  en la métrica de la cuerda.

# Modelo "a"

(9)

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[ -\tilde{R} - 2(\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2} e^{-2a\varphi} F^2 \right];$$

Este modelo tiene soluciones AN para todo "a",  
y también soluciones **multi-AN** (extremes) en  
equilibrio. Éstas son claramente los únicos can-  
didatos a ser **supersimétricas** :

$$\begin{cases} d\tilde{s}^2 = V^{-\frac{2}{1+a^2}} dt^2 - V^{\frac{2}{1+a^2}} d\vec{x}^2; \\ e^\varphi = V^{-\frac{a}{1+a^2}}; \\ F_{ti} = \pm \sqrt{\frac{2}{1+a^2}} \theta_i V^{-1}; \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(T.O.} \\ \text{Sivairli} \\ \text{doo)} \end{matrix}$$

← (puramente eléctrico)

$$\begin{cases} a=0 \rightarrow \text{RNE} + \text{escalar constante} \\ a = \begin{Bmatrix} \sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Kalusa-Klein} / \text{manifold } H^2 \\ a=1 \rightarrow \text{AN dilatónicas extremas de teoría de} \\ \text{cuerdas. } \varphi \rightarrow \phi \text{ (dilatón)} \end{cases}$$

Éstos son los casos conocidos o esperables.

Únicamente los  $a = \sqrt{3}$  pueden ser **BPS**. (Sivairli)

Recordemos la estrategia a seguir:

- 1) Obtener la teoría supersimétrica en  $D=10$  (desde  $D=11$ )
  - a) Lagrangiano bosónico.
  - b) Reglas de supersimetría de los fermiones
- 2) Obtener el lagrangiano bosónico en  $D=4$  (y las relaciones entre los campos en  $D=10$  y  $D=4$ ).
- 3) Identificar las soluciones del modelo "a" con soluciones de la teoría supersimétrica.
- 4) Reescribir la solución en  $D=10$  y estudiar la supersimetría en  $D=10$ .

El número de supersimetrías residuales en  $D=4$  es el mismo que en  $D=10$ , multiplicado por 4.



# Reducción de D=11 a D=10

(10)  
 { Hug. & M. ...  
 De ...  
 Bergshoeff, Hull, T.O.  
 T.O.

Los campos de supergravedad  $N=1$   $D=11$  son

$$\{\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}, \hat{C}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}}\}; \quad \{\hat{\Psi}_{\hat{\mu}}\}; \quad \hat{G} = \partial \hat{C};$$

La parte bosónica de la acción es

$$\hat{S} = \int d^{11}x \sqrt{|\hat{g}|} \left[ -\hat{R} + a_1 \hat{G}^2 + a_2 \frac{\hat{G}}{\sqrt{|\hat{g}|}} \hat{G} \hat{C} \right];$$

y la regla de transformación de supersimetría de  $\hat{\Psi}_{\hat{\mu}}$  en ausencia de campos fermiónicos es

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \delta \hat{\Psi}_{\hat{\mu}} = \nabla_{\hat{\mu}} \hat{\epsilon} - \frac{6ia_2}{a_1} \left( \hat{\gamma}^{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}} \hat{\delta}_{\hat{\mu}}^{\hat{\alpha}} - 8 \hat{\gamma}^{\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}} \delta_{\hat{\mu}}^{\hat{\beta}} \right) \hat{G}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}} \hat{\epsilon}^{\hat{\alpha}}$$

la elección/hipótesis que nos lleva a la supergravedad

$N=2A$  en  $D=10$  en la métrica de la cuerda es

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_{\hat{\mu}}^{\hat{\alpha}} \\ \hat{e}_{\hat{\nu}}^{\hat{\beta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{3}\hat{\phi}} \hat{e}_{\hat{\mu}}^{\hat{\alpha}} & e^{\frac{2}{3}\hat{\phi}} \hat{A}_{\hat{\mu}}^{(1)} \\ 0 & e^{\frac{2}{3}\hat{\phi}} \end{pmatrix} \begin{cases} \hat{\epsilon} = e^{\frac{1}{6}\hat{\phi}} \hat{\epsilon}; \\ \hat{\Psi}_{\hat{\alpha}} = \frac{e^{-\frac{1}{6}\hat{\phi}}}{\sqrt{2}} \left( \hat{\Psi}_{\hat{\alpha}} - \frac{3i}{2} \hat{\delta}_{\hat{\alpha}}^{\hat{\mu}} \hat{\delta}_{\hat{\mu}}^{\hat{\nu}} \hat{\Psi}_{\hat{\nu}} \right); \\ \hat{\lambda} = \frac{-3i}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{6}\hat{\phi}} \hat{\delta}_{\hat{\mu}}^{\hat{\nu}} \hat{\Psi}_{\hat{\nu}}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{C}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}} = \hat{C}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}}; \\ \hat{C}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{x}} = \frac{2}{3} \hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{(1)}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{\gamma}^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \hat{\gamma}^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}; \\ \hat{\gamma}^{10} = -i \hat{\gamma}_{11}; \quad (\hat{\gamma}_{11})^2 = +1; \end{cases}$$

Se puede definir quiralidad

El resultado es

$$\hat{S} = \int d^{10}x \sqrt{|g|} \left\{ e^{-2\hat{\phi}} \left[ -\hat{R} + 4(\partial\hat{\phi})^2 - \frac{3}{4}(\hat{H}^{(1)})^2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{4}(\hat{F}^{(1)})^2 + \frac{3}{4}\hat{G}^2 + 6e_2 \frac{\hat{E} \partial \hat{C} \partial \hat{C} \hat{B}^{(1)}}{\sqrt{|g|}} \right\} \quad \text{(Bogoboff, Hull \& T.O.)}$$

sector NS-NS

sector RR

$$\begin{cases} \delta \hat{\psi}_{\hat{a}} = \partial_{\hat{a}} \hat{E} - \frac{1}{4} \left( \hat{\omega}_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} - \frac{3}{4} \hat{H}_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}}^{(1)} \hat{\gamma}_{\hat{d}} \right) \hat{\gamma}^{\hat{b}\hat{c}} \hat{E} - \frac{i e^{\hat{\phi}}}{16} \left( \hat{\gamma}_{\hat{a}}^{\hat{b}\hat{c}} - 2 \delta_{\hat{a}}^{\hat{b}} \hat{\gamma}^{\hat{c}} \right) \hat{\gamma}_{\hat{d}} \hat{F}_{\hat{e}\hat{f}}^{(1)} \hat{E} \\ - \frac{i}{32} e^{\hat{\phi}} \left( \hat{\gamma}_{\hat{a}}^{\hat{b}\hat{c}\hat{d}\hat{e}} - 4 \delta_{\hat{a}}^{\hat{b}} \hat{\gamma}^{\hat{c}\hat{d}\hat{e}} \right) \hat{G}_{\hat{f}\hat{g}\hat{h}} \hat{E}; \\ \delta \hat{\lambda} = \left( \partial \hat{\phi} - \frac{1}{4} \hat{H}^{(1)} \hat{\gamma}_{\hat{m}} \right) \hat{E} - \frac{i}{8} e^{\hat{\phi}} \left( 3 \hat{F}_{\hat{m}}^{(1)} + \frac{1}{2} \hat{G} \right) \hat{E}; \end{cases} \quad \text{(T.O.)}$$

Si nos quedamos únicamente con el sector NS-NS (lo cual es una truncación consistente) y dividimos los espinores en sus dos mitades quirales  $\hat{\gamma}_{\hat{m}} \hat{E}^{(\pm)} = \pm \hat{E}^{(\pm)}$ , tenemos

$$\hat{S} = \int d^{10}x \sqrt{|g|} e^{-2\hat{\phi}} \left[ -\hat{R} + 4(\partial\hat{\phi})^2 - \frac{3}{4}(\hat{H}^{(1)})^2 \right];$$

$$\begin{cases} \delta \hat{\psi}_{\hat{a}}^{(\pm)} = \nabla_{\hat{a}}^{(\pm)} \hat{E}^{(\pm)}; \\ \delta \hat{\lambda}^{(\pm)} = \left( \partial \hat{\phi} \pm \frac{1}{4} \hat{H}^{(1)} \right) \hat{E}^{(\pm)}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla_{\hat{a}}^{\pm} = \partial_{\hat{a}} - \frac{1}{4} \hat{\Omega}_{\pm \hat{a}\hat{b}\hat{c}} \hat{\gamma}^{\hat{b}\hat{c}}; \\ \hat{\Omega}_{\pm \hat{a}\hat{b}\hat{c}} = \hat{\omega}_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \mp \frac{3}{2} \hat{H}_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}}^{(1)}; \end{cases}$$

Esto describe la parte NS-NS de la N=2A. Si nos quedamos con una sola quiralidad<sup>(+)</sup> obtenemos la N=1.

$$\hat{H}^{(1)} \rightarrow -\hat{H}^{(1)} \text{ es equivalente al intercambio de quiralidad}$$



El siguiente paso para acercarnos al modelo "a" es Reducción dimensional de  $N=1, D=10$  a  $N=4, D=4 \oplus 6V$

Los campos que esperamos en  $D=4$  son

$$\begin{cases} \hat{g}_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}, A_{\mu}^{(1)m}, G_{mm}, & m=1, \dots, 6; \\ \hat{B}_{\mu\nu} \rightarrow B_{\mu\nu}, A_{\mu mm}^{(2)}, B_{mmm}; \\ \hat{\phi} \rightarrow \phi; \end{cases}$$

La acción correspondiente es, en la métrica de Einstein  $\tilde{g}_{\mu\nu}$

$$S = \int d^4x \sqrt{|\tilde{g}|} \left\{ -\tilde{R} - 2(\partial\phi)^2 - \frac{3}{4} e^{-4\phi} H^2 + \frac{1}{4} \left[ \partial G_{mm} \partial G^{mm} - G^{mm} \partial^{\mu\nu} \partial B_{\mu\nu} \partial B_{mm} \right] - \frac{1}{4} e^{-2\phi} \left[ G_{mm} F^{(1)m} F^{(1)m} + G^{mm} \tilde{F}_m \tilde{F}_m \right] \right\};$$

$$\tilde{F}_m = F_m^{(2)} + F_m^{(1)} B_{qm};$$

(Anschauen & Schema)

$$H = \partial B - \frac{1}{2} A^{(1)m} F_m^{(2)} - \frac{1}{2} A^{(2)m} F_m^{(1)};$$

REGLAS DE SUSY

$$\Rightarrow \partial H \sim \sum_m F_m^{(1)} * F_m^{(2)}; \quad (\text{Identidad de Bianchi})$$

Para acercarnos al modelo "a" es necesario hacer más truncaciones:

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu} &= 0; & H &= 0; \\ B_{mmm} &= 0; & G_{mm} &= -e^{2\phi} \delta_{mm}; \end{aligned}$$

# Reducción de las reglas de supersimetría de $D=10$ a $D=4$

Para justificar y dar una idea de por qué de  $N=1, D=10$  se obtiene  $N=4, D=4 \oplus 6V$ , vamos a realizar la reducción dimensional de las reglas de supersimetría de los fermiones. (Incompleta, porque no reducimos los  $\gamma_0$ )

$$\begin{cases} \hat{\psi}_{\hat{a}} \rightarrow \psi_a, \psi_i \\ \hat{\lambda} \rightarrow \lambda (= \hat{\lambda} - \hat{\gamma}^i \hat{\psi}_i) \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_a \rightarrow 4 \text{ gravitinos} \\ \lambda \rightarrow 4 \text{ dilatinos} \\ \psi_i \rightarrow 4 \times 6 \text{ fotinos} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{supermultiplete} \\ \text{de SUGRA} \\ N=4, D=4 \end{array}$$

$\psi_i \rightarrow 4 \times 6 \text{ fotinos} \} \rightarrow \underline{6V \text{ de } N=4}$

$$\begin{cases} \delta \psi_a = \nabla_a \hat{E} - \frac{1}{4} [F_i^{(\omega)} - \tilde{F}_i] \hat{\gamma}^i \hat{E} + (\partial_a e_{mj} + \partial_a B_{mn} e_j^m) e_i^m \hat{\gamma}^{ij} \hat{E}; \\ \delta \lambda = \left\{ \phi \phi + \frac{1}{4} H - \frac{1}{8} [F_i^{(\omega)} - \tilde{F}_i] \hat{\gamma}^i \right\} \hat{E}; \\ \delta \psi_i = \frac{1}{8} [F_i^{(\omega)} + \tilde{F}_i] \hat{E} - \frac{1}{4} (\phi g_{mn} + \phi B_{mn}) e_i^m e_j^n \hat{\gamma}^j \hat{E}; \end{cases}$$

$\psi_a$  y  $\lambda$  se transforman siempre en la combinación  $F_i^{(\omega)} - \tilde{F}_i \Rightarrow$  estas combinaciones son los vectores de SUGRA.

$\psi_i$  se transforma siempre en la combinación  $F_i^{(\omega)} + \tilde{F}_i \Rightarrow$  estas combinaciones son los vectores de los 6 supermultipletes vectoriales

$\hat{B} \rightarrow -\hat{B}$  intercambia estas combinaciones

## Observación:

$\delta\psi_i = 0$  es una ecuación muy difícil de satisfacer.

⇒ Sólo tendremos supersimetría si  $F_i^{(1)} = -\tilde{F}_i$  \*

Sin embargo esto es para la quiralidad + en D=10. Las ecuaciones de supersimetría de la otra quiralidad son las mismas, pero reemplazando  $\hat{B} \rightarrow -\hat{B}$ , que transforman  $+\tilde{F}_i \rightarrow -\tilde{F}_i$ .

Aún, si  $F_i^{(1)} = +\tilde{F}_i$ , podemos tener supersimetría en el otro sector quiral.

(También es posible tener supersimetría en situaciones más generales que  $F_i^{(1)} = \pm\tilde{F}_i$ .)

---

\* Esto es lo que todo el mundo acepta.



¡OJO! Estas truncaciones **NO** son consistentes en general: no se pueden hacer en la acción. Las ecuaciones del movimiento de los campos que hacemos cero se convierten en **ligaduras**.

$$G_{mm} = 0 \quad \forall m \neq n \Rightarrow F^{(1)}_m F^{(1)}_m = e^{-2(\rho_m + \rho_n)} F^{(2)}_m F^{(2)}_m$$

$$B_{mm} = 0 \Rightarrow F^{(1)}_m F^{(3)}_m = e^{-2(\rho_m - \rho_n)} F^{(1)}_m F^{(3)}_m$$

Además, para que  $H=0$  sea consistente, debido a la **identidad de Bianchi** (término de **Chern-Simons**)

$$\sum_m F^{(1)}_m * F^{(3)}_m = 0$$

Las ecuaciones del movimiento de los restantes campos son:

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{G}_{\alpha\beta} + 2 T_{\alpha\beta} \phi + \sum_m T_{\alpha\beta} \rho_m - \frac{1}{2} e^{-2\phi} \sum_m (e^{2\rho_m} T_{\alpha\beta}^{(1)}_m + e^{-2\rho_m} T_{\alpha\beta}^{(3)}_m) &= 0; \\ \tilde{\nabla}^2 \phi - \frac{1}{8} e^{-2\phi} \sum_m [e^{2\rho_m} (F^{(1)}_m)^2 + e^{-2\rho_m} (F^{(3)}_m)^2] &= 0; \\ \tilde{\nabla}^2 \rho_m + \frac{1}{4} e^{-2(\phi - \rho_m)} (F^{(1)}_m)^2 - \frac{1}{4} e^{-2(\phi + \rho_m)} (F^{(3)}_m)^2 &= 0; \\ \tilde{\nabla}_\mu (e^{-2(\phi - \rho_m)} F^{(1)}_{m \mu\alpha}) &= 0; \\ \tilde{\nabla}_\mu (e^{-2(\phi + \rho_m)} F^{(3)}_{m \mu\alpha}) &= 0; \end{aligned} \right.$$

Esto ya se parece más al modelo "a"

Nuestro objetivo es escoger  $\phi, \rho_m, F^{(1)}_{\mu\nu}, F^{(2)}_{\mu\nu}$  de forma que se satisfagan las ligaduras y que el sistema de ecuaciones quede reducido al del modelo "a" e.

$$\begin{cases} \tilde{G}_{\alpha\beta} + 2T_{\alpha\beta}\varphi - e^{-2a\varphi}T_{\alpha\beta} = 0; \\ \tilde{\nabla}^2\varphi - \frac{e}{4}e^{-2a\varphi}F^2 = 0; \\ \nabla_\mu(e^{-2a\varphi}F^{\mu\nu}) = 0; \end{cases}$$

Tomemos un  $F$  puramente eléctrico o magnético

$\rightarrow F^*F = 0;$

$\vec{F}^{(1)} = \vec{m}F + \vec{p}^*F;$	$\rho_m = c_m\varphi;$
$\vec{F}^{(2)} = \vec{m}F + \vec{q}^*F;$	$\phi = b\varphi;$

El problema no es trivial: por ejemplo, la "solución"  $F^{(1)} \perp = F, \phi = \varphi, \rho_m = 0$  no satisface la ecuación del movimiento de  $S_{\perp}$ , y no da  $a = 1$ .



Todas las soluciones posibles en este marco son esencialmente (salvo dualidades)

$a$	$\phi$	$\rho_1$	$\rho_2$	$e^{\phi}$	$F^{(1)}$	$F^{(2)}$	$F^{(1)2}$	$F^{(2)2}$	$(m_+, m_-)$	Total
$a = \sqrt{3}$ (KKBH) (H-mem.)	$\frac{1}{\sqrt{3}}\phi$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\phi$	0	$V^{\frac{\sqrt{3}}{a}}$	$\sqrt{2}F$	0	0	0	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{\sqrt{3}}\phi$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\phi$	0		0	$\sqrt{2}F$	0	0	0	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
$a = 1$ (DBH)	$\phi$	0	0	$V^{-\frac{1}{2}}$	F	-F	0	0	$(\frac{1}{2}, 0)$	$\frac{1}{4}$
	$\phi$	0	0		F	+F	0	0	$(0, \frac{1}{2})$	
	0	$-\phi$	$\phi$		F	0	$e^{2\phi}F$	0	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$	
$a = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\phi$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\phi$	0	$V^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}F$	0	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}e^{\phi}F$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}e^{\phi}F$	$(\frac{1}{4}, 0)$	$\frac{1}{8}$
	$\frac{1}{\sqrt{3}}\phi$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\phi$	0		$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}F$	0	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}e^{\phi}F$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}e^{\phi}F$	$(0, \frac{1}{4})$	
	??	??	??		??	??	??	??	??	
$a = 0$ (RN)	0	0	0	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}F$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}F$	$\frac{1}{\sqrt{2}}F$	$\frac{1}{\sqrt{2}}F$	$(\frac{1}{4}, 0)$	$\frac{1}{8}$
	0	0	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}F$	$+\frac{1}{\sqrt{2}}F$	$\frac{1}{\sqrt{2}}F$	$+\frac{1}{\sqrt{2}}F$	$(0, \frac{1}{4})$	
	0	0	0		??	??	??	??	$(\frac{1}{8}, \frac{1}{8})$	
	0	0	0		$F^*F$	0	0	0	$(0, 0)$	

Dualidad T: (1)  $\rightarrow$  (2)  $\rho \rightarrow -\rho$

Dualidad S:  $F \rightarrow e^{c\phi} F$

## Interpretación de los resultados

- 1) En  $N=8$  todas las soluciones con el mismo valor de "a" tienen la misma **superimetría**.  
(Salvo, aparentemente, el RNE "dionico".)
- 2) Cuando nos quedemos con una sola quiralidad ( $N=4$ ), tienen diferentes **superimetrías residuales**.  
Esto se debe a que en unos casos los vectores son de **supergravedad** y en otros de **materia** (en  $N=8$  todos son de **supergravedad**).
- 3) Dado que las dualidades de  $\left\{ \begin{matrix} N=8 \\ N=4 \end{matrix} \right\}$  respetan **superimetría**, las diferentes soluciones que den un mismo "a" han de estar relacionadas por dualidades de  $N=8$  que no lo son de  $N=4$  y, por ejemplo, transformen vectores de **supergravedad** en vectores de **materia**.
- 4) ¿Dónde están las configuraciones  $a = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{8}, \frac{1}{8} \right) y$   
 $a = 0 \left( \frac{1}{8}, \frac{1}{8} \right) ?$

Conclusión:

Hemos resuelto la paradoja de que una misma solución fuera o no supersimétrica en  $N=4$  dependiendo de la identificación de los vectores.

Aparentemente, siempre que hay una cota  $M^2 \gg$  (combinación cuadrática de cargas) saturada, la solución es supersimétrica en la teoría con máxima supersimetría posible.

¿Qué pasa con el RNE diónico?

¿Qué pasa en la  $N=2B$ ?

¿Qué pasa al incluir campos RR?

⋮