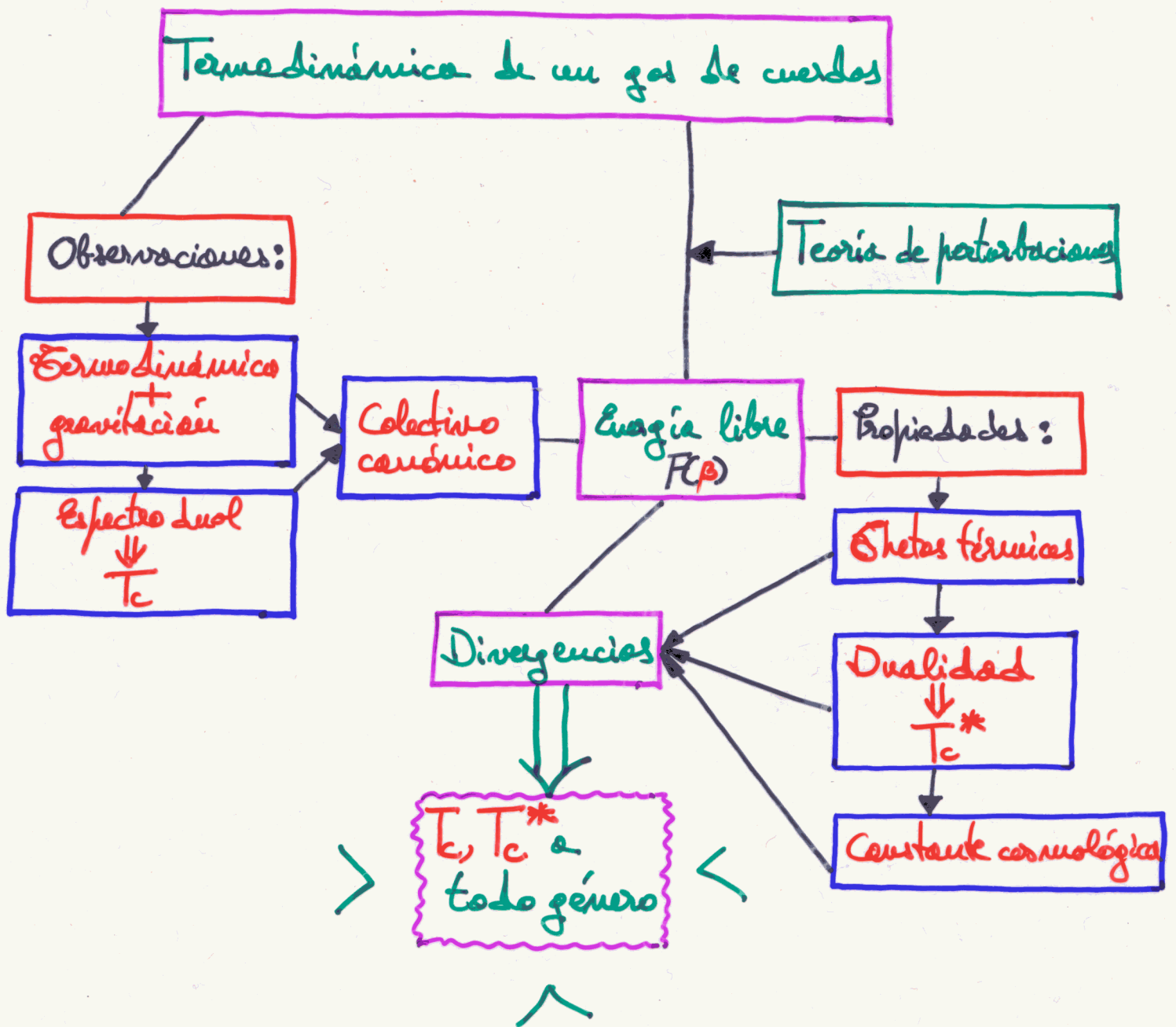


COMPORTAMIENTO
CRÍTICO
D LA TEORÍA D CUERDAS

A TODO ORDEN
EN TEORÍA D

PERTURBACIONES

T.ORTÍN



TERMODINÁMICA DE UN GAS DE CUERDAS

[ES INTERESANTE DESDE EL PUNTO DE VISTA COSMOLÓGICO]
(ALTAS ENERGÍAS — ENTES FUNDAMENTALES)

LAS CARACTERÍSTICAS MÁS IMPORTANTES DESDE EL PUNTO DE VISTA TERMOESTADÍSTICO DE LAS TEORÍAS DE CUERDAS SON:

● LAS CUERDAS DESCRIBEN GRAVEDAD

⇒ LÍMITE TERMODINÁMICO

$$\begin{array}{l} V \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty \\ V/m \rightarrow \text{finito} \end{array}$$

DIFÍCIL DE DEFINIR

- Inestabilidad de geans clásica y relativista
- Inestabilidad de geans cuántica (GROSS ET AL.)
- UN FLUIDO ESTÁTICO, GRAVITANTE, DE VOLUMEN INFINITO NO PUEDE ESTAR EN EQUILIBRIO (UNIVERSO EN EXPANSIÓN)

SIN EMBARGO:

- Podemos estudiar bajas temperaturas y densidades
 - Podemos (incluso) ignorar (en primera aproximación)
- LAS INTERACCIONES
- a) ESTÁN INCORPORADAS EN EL ESPECTRO
 - b) SON "SUAVES"

● ESPECTRO DE MASAS "DUAL": (HAGEDORN 1965)

Densidad de estados masa m $\omega(m)dm \sim \omega_0 (m\sqrt{\alpha'})^{-a} e^{b(m\sqrt{\alpha'})}$

$a, b > 0$, dependen del modelo concreto

$m\sqrt{\alpha'}$ adimensional

- UNA TEORÍA LIBRE CON ESTE ESPECTRO **NO PUEDE ESTAR EN EQUILIBRIO TERMODINÁMICO POR ENCIMA DE CIERTA TEMPERATURA CRÍTICA T_c**
 - **TEMPERATURA LÍMITE**
 - **TRANSICIÓN DE FASE**
- (Q.C.D. ← MODELOS DUALES)

LA FUNCIÓN DE PARTICIÓN TÉRMICA DIVERGE EN $T > T_c$

- ¿CÓMO MODIFICAN LAS INTERACCIONES ESTA SITUACIÓN?

(Modelos duales ("BOOTSTRAP" HADRÓNICO) → las interacciones están incluidas en $\omega(m)dm$)

- LOS ESTADOS COBRAN ANCHURA Γ , SON INESTABLES Y SE DESINTEGRAN.

Una forma de tener en cuenta las interacciones es no contar en la función de partición, $Z(\beta)$, estados con vida media Γ^{-1} menor que el tiempo libre medio $\sim \beta$. (Gleiser & Taylor 1985)

$$Z(\beta) \sim \text{tr} \theta(\Gamma(m) - \beta) e^{-\beta \hat{H}}$$

⇒ Si $\Gamma(m) \sim m^c$ $T_c \rightarrow \infty$ $Z(\beta) < \infty \forall \beta$

(3)

$\Gamma(m) \sim m^{cm}$ parece razonable (hay muchísimos modos en los que desintegrarse).

EN GENERAL, SI $\Gamma(m) \sim g^2 m^\gamma$

— $\gamma > 1 \Rightarrow T_c$ DESAPARECE.

— $\gamma < 1 \Rightarrow T_c$ NO ES MODIFICADA POR INTERACCIONES.

— $\gamma = 1 \Rightarrow T_c$ CAMBIA POR FACTORES NUMÉRICOS.

$\gamma < 0 \Rightarrow$ GAS IDEAL BUENA APROXIMACIÓN $m \rightarrow \infty$.

● COLECTIVO CANÓNICO:

— GRAVITACIÓN $\Rightarrow$ DIFÍCIL DEFINIR $\hat{H}$ Y β ESTRICAMENTE.

— INTERESANTE, PUES **PODEMOS HACER CÁLCULOS "EXACTOS"**
EN TEORÍA DE CUERDAS.

— ATENCIÓN: CÁLCULOS EN EL MICROCANÓNICO PUEDEN DAR RESULTADOS DIFERENTES A ALTAS T .

NUESTRO PROPÓSITO ES CALCULAR

$$F(\beta) = -\frac{1}{\beta} \log \text{tr} e^{\beta \hat{H}} = -\frac{1}{\beta} \log Z(\beta)$$

Y ANALIZAR SUS DIVERGENCIAS $\beta \rightarrow 0$

PARA HALLAR T_c (s).

- La traza identifica estados iniciales y finales (espacio-temporales).
- $\hat{H}$ genera las traslaciones temporales.

⇒ LA REPRESENTACIÓN DE $F(\beta)$ EN TÉRMINOS DE INTEGRALES FUNCIONALES ES:

$$F(k, \beta) = \sum_{g=1}^{\infty} k^{2(g-1)} F_g(\beta)$$

CUERDAS FERNIÓNICAS

$$F_g(\beta) = \int \frac{\mathcal{D}g_{\mu\nu}(\mathcal{D}\chi_a) \mathcal{D}X^\mu(\mathcal{D}\psi^\mu)}{\text{vol}(s)\text{Wegl} \text{ vol}(s)\text{Diff}} e^{-S}$$

- INTEGRAMOS SOBRE VARIETADES BIDIMENSIONALES COMPACTAS DE GÉNERO g : Σ_g .
- CONDICIONES DE CONTORNO SOBRE X^0 (TIEMPO "EXTERNO")

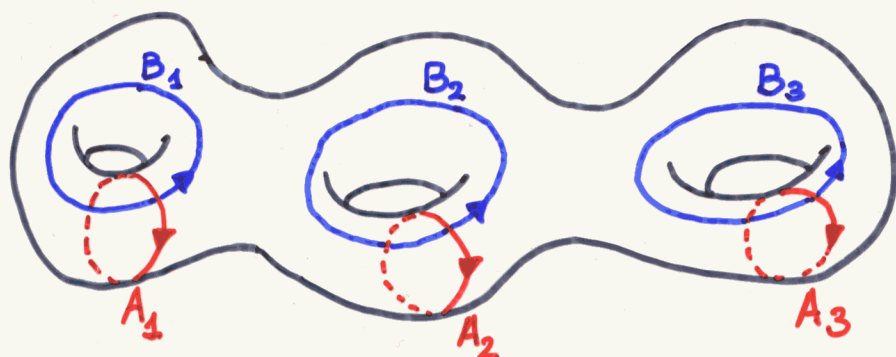
$$X^0 \sim X^0 + m\beta \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

⇒ X^0 ES UN CAMPO MULTIVALUADO SOBRE Σ_g

$$\forall g \quad p \in \Sigma_g \quad m \in \mathbb{Z} \quad X^0(p) = \left\{ \begin{array}{c} x^0 \\ x^0 \\ x^0 + m\beta \\ x^0 + 2m\beta \\ \vdots \end{array} \right\}$$

⇒ X^0 CAMBIA DE VALOR POR $m\beta$ AL FINAL DE UN CAMINO HOMOTÓPICAMENTE NO TRIVIAL.

⇒ LAS CONFIGURACIONES DE X^0 ESTÁN CLASIFICADAS POR $2g$ ENTEROS $(m_1, \dots, m_g, m_1, \dots, m_g) = (\vec{m}, \vec{m})$ RESPECTO DE UNA BASE DE HOMO{TOPIA LOGIA} 



$$g = 3$$

$X^0_{(\vec{m}, \vec{m})} : \rightarrow$ CAMBIA DE VALOR POR $m_i \beta$ ALREDEDOR DE A_i .
 $\gg \gg \gg \gg m_i \beta \gg \gg B_i$.

$$\rightarrow = X^{o(\text{clas})}_{(\vec{m}, \vec{m})} + X^{o(\text{cuant})}$$

$$\partial_{\bar{z}} \partial_z X^{o(\text{clas})}_{(\vec{m}, \vec{m})} = 0 \quad (\text{modo cero de } \Delta_0)$$

$$\Rightarrow X^{o(\text{clas})}_{(\vec{m}, \vec{m})} = \frac{i}{2} \beta \left\{ \sum_{\Sigma_g} \omega_i (\Im m \tau_{ij})^{-1} (\tau_{jk} m_k - m_j) - c.c. \right\}$$

$$\rightarrow \int \mathcal{D}X^0 = \sum_{(\vec{m}, \vec{m}) \in \mathbb{Z}^{2g}} \int \mathcal{D}X^{o(\text{cuant})}$$

$$\rightarrow S[X, \beta] = \int_{\Sigma_g} d^2z \partial_z X^0 \partial_{\bar{z}} X^0 =$$

$$= S[X^{o(\text{cuant})}] + \frac{\beta^2}{2\pi} [m_i \tau_{ij} - m_j] (\Im m \tau)^{-1}_{jk} [\bar{\tau}_{kl} m_l - m_k]$$

$$\Rightarrow F_g(\beta) = \int_{\mathcal{M}_g} I \times \sum_{(\vec{m}, \vec{m})} e^{-S[X^{o(\text{clas})}_{(\vec{m}, \vec{m})}, \beta]}$$

OBSERVACIONES:

— Sumar sobre todos los sectores $(\vec{m}, \vec{m})$ está en el espíritu de la integral de Feynman, pero la exige la **INVARIANCIA MODULAR**.

— Para cuerdas con fermiones (cuerda heterótica en concreto)

$$I = \sum_{\substack{\text{estructuras} \\ \text{de} \\ \text{espín}}} I_e$$

HAY QUE INTRODUCIR UN FACTOR ESTADÍSTICO ± 1

$$U(e = \begin{bmatrix} \vec{\alpha} \\ \vec{\beta} \end{bmatrix} // (\vec{n}, \vec{m})) = \exp\left\{2\pi i \left(\vec{n}^t \vec{\beta} + \vec{m}^t \vec{\alpha} + \frac{\vec{n}^t \vec{m}}{2} \right) \right\}$$

COMPATIBLE CON INVARIANCIA MODULAR

(Atiyah y Witten 1988)
E. Alvarez 1989
M.A.R. Osorio

$$F_g^{(\text{HET})}(\beta) = \int_{M_g} d\mu \sum_e \left[I_e \sum_{(\vec{n}, \vec{m})} U(e, (\vec{n}, \vec{m})) e^{-S_{\vec{n}, \vec{m}}(\beta)} \right]$$

— $F_g(\beta \rightarrow \infty)_{(T \rightarrow 0)} = \int_{M_g} d\mu I = \Lambda_g$ (contribución de orden g a la constante cosmológica).

— Bosónica:

$$\sum_{(\vec{n}, \vec{m})} e^{-S_{\vec{n}, \vec{m}}(\beta)} = \vartheta \left[\begin{smallmatrix} \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} \end{smallmatrix} \right] \left(\vec{0} // \frac{1}{4} \Omega_g(\beta) \right) \quad (\text{"theta térmica"})$$

$$\Omega_g(\beta) = \frac{2i\beta^2}{\pi^2} A_g$$

$$A_g = \begin{pmatrix} \tau^{(1)}(\tau^{(2)})^{-1} \tau^{(1)} + \tau^{(2)} & -\tau^{(1)}(\tau^{(2)})^{-1} \\ -(\tau^{(2)})^{-1} \tau^{(1)} & (\tau^{(2)})^{-1} \end{pmatrix}$$

$\tau = \tau^{(1)} + i\tau^{(2)}$
matriz período

- HETERÓTICA

$$\sum_{(\vec{m}, \vec{n})} U(e = [\vec{\alpha} / \vec{\beta}] // (\vec{m}, \vec{n})) e^{-S_{\vec{m}\vec{n}}(\beta)} = \vartheta \left[\begin{smallmatrix} \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{\beta} & \vec{\alpha} \end{smallmatrix} \right] (\vec{0} // \tilde{\Omega}_g(\beta))$$

$$\tilde{\Omega}_g(\beta) = \Omega_g(\beta) + \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline I & 0 \end{array} \right)$$

- BAJO TRANSFORMACIONES MODULARES

$$\left(\begin{array}{c|c} D & C \\ \hline B & A \end{array} \right) \begin{pmatrix} \vec{A}' \\ \vec{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{A} \\ \vec{B} \end{pmatrix} \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_g \end{pmatrix} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_g \end{pmatrix}$$

$$\tau' = (A\tau + B)(C\tau + D)^{-1}, \quad \begin{bmatrix} \vec{\alpha}' \\ \vec{\beta}' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} D & -C \\ -B & A \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\alpha} \\ \vec{\beta} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \text{Diag} \begin{pmatrix} C & D^t \\ A & B^t \end{pmatrix}$$

$$\vartheta \left[\begin{smallmatrix} \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} \end{smallmatrix} \right] (\vec{0} // \Omega_g(\beta, \tau')) = \vartheta \left[\begin{smallmatrix} \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} \end{smallmatrix} \right] (\vec{0} // \Omega_g(\beta, \tau))$$

$$\vartheta \left[\begin{smallmatrix} \vec{0} & \vec{0}' \\ \vec{\beta}' & \vec{\alpha}' \end{smallmatrix} \right] (\vec{0} // \tilde{\Omega}_g(\beta, \tau')) = \vartheta \left[\begin{smallmatrix} \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{\beta} & \vec{\alpha} \end{smallmatrix} \right] (\vec{0} // \tilde{\Omega}_g(\beta, \tau))$$

⇒ $F_g(\beta)$ ES INVARIANTE MODULAR $\Leftrightarrow \Lambda_g$ LO ES.

- DUALIDAD EN β

Haciendo $\Omega_g(\beta) \rightarrow -\Omega_g(\beta^{-1})$ etc. se llega a

$$F^{(BOS)} \left(\frac{\pi \sqrt{2} K}{\beta}, \frac{2\pi^2}{\beta} \right) = \frac{\beta^2}{2\pi^2} F^{(BOS)}(K, \beta)$$

(E. Alvarez
y
M.A.R. Duro
1987)

$$F^{(HET)} \left(\frac{\pi K}{\beta}, \frac{\pi^2}{\beta} \right) = \frac{\beta^2}{\pi^2} F^{(HET)}(K, \beta)$$

LO QUE QUEREMOS ES OBTENER EL VALOR EXACTO DE LAS TEMPERATURAS T_c A LAS QUE $F(\beta)$ DIVERGE (SI LAS HAY) $\forall g$: VER CÓMO LAS INTERACCIONES MODIFICAN LA SITUACIÓN.

$F(\beta)$ está constituida por dos elementos: el integrando de la constante cosmológica I (I_e) y los theta términos ϑ integrados en M_g .

→ I para la cuerda bosónica, y cada I_e para la heterótica tienen polos en la frontera de M_g (superficies degeneradas).

→ Los theta términos no tienen polos, y no divergen para temperaturas finitas.

⇒ Su comportamiento en la frontera de M_g puede "modular" los polos de I e I_e , de forma que su integral ($F(\beta)$) diverja sólo para ciertas temperaturas.

⇒ DEBEMOS ANALIZAR EL COMPORTAMIENTO DE

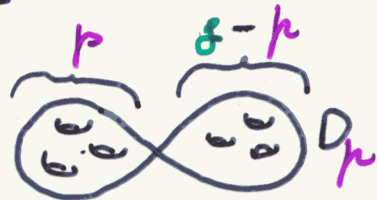
$$I, I_e, \vartheta(\vec{\sigma} // \frac{1}{4} \Omega_g(\beta)) \quad \vartheta[e](\vec{\sigma} // \tilde{\Omega}_g(\beta))$$

⇒ EN LA FRONTERA DE M_g .

LA FRONTERA DE M_g

DOS TIPOS DE SUPERFICIES EN ELLA:

a) CICLO DE HOMOLOGÍA TRIVIAL DEGENERADO:



b) CICLO DE HOMOLOGÍA NO TRIVIAL DEGENERADO:



D_p tiene codimensión 1 en $\overline{M}_g \quad \forall p=0, \dots, g/2$.

$\Rightarrow$ Existen $3(g-1)$ coordenadas en M_g de forma que una, δ , es transversa a D_p , $\delta=0$ es la ecuación de D_p , y las $3g-4$ restantes son buenas coordenadas en D_p .

* En el caso de D_0 , δ es independiente del ciclo que hagamos degenerar (todos están relacionados por transformaciones modulares).

LAS SUPERFICIES CON $\delta \rightarrow 0$ TIENEN UN "TUBO" DE LONGITUD $-\frac{\log|\delta|}{2\pi} \rightarrow \infty$, "RETORCIDO" SOBRE SÍ MISMO UN ÁNGULO $-\pi < \text{Arg}(\delta) \leq \pi$. LOS MODOS QUE SE PROPAGAN POR EL TUBO LO HACEN POR UN "TIEMPO" $t = \frac{\log|\delta|}{2\pi}$ MUY LARGO. LAS "PARTÍCULAS"

DE MASA m CONTRIBUYEN A I COMO $e^{-m^2 t} dt$

$\Rightarrow$ LOS TAQUIONES ORIGINARÁN DIVERGENCIAS

¿CUÁL ES EL COMPORTAMIENTO DE I , I_e Y LAS THETAS EN EL LÍMITE $\delta \rightarrow 0$?

1) Cuerda bosónica — I

Teorema de Belavin-Knizhnik (1986)

$$I = (\det \Im \tau)^{-(13 + \delta_g)} W \wedge \overline{W}$$

W {

- es una forma modular de peso $13 + \delta_g$
- $W(\tau') = (C\tau + D)^{13 + \delta_g} W(\tau)$ $\tau' = (A\tau + B)(C\tau + D)^{-1}$
- $W \sim \frac{d\delta \wedge d\bar{\delta}}{\delta^2} (1 + O(\delta))$ $\delta \rightarrow 0 \Rightarrow I \sim \frac{d\delta \wedge d\bar{\delta}}{|\delta|^4}$

EL POLO CORRESPONDE A LA PROPAGACIÓN DEL TAQUIÓN

$$m^2 = -2$$

2) Cuerda bosónica — θ ($\vec{\sigma} // \frac{1}{4} \Omega_g(\beta)$)

Necesitamos conocer el comportamiento de la matriz periodo:

$$\tau_g = \begin{pmatrix} \frac{\log \delta}{2\pi i} + C_1 & \vec{\tau}^t \\ \vec{\tau}^t & \tau_{(g-1)} \end{pmatrix} + O(\delta)$$

y con él el de A_g ($= A_g^t$, pues $\tau = \tau^t$)

$\tau_{(g-1)}$ es la matriz periodo de la superficie de género $g-1$ degenerada.

$$B = -\tau_{(g-1)}^{(1)} \left(\tau_{(g-1)}^{(2)} \right)^{-1}; \quad C = \left(\tau_{(g-1)}^{(2)} \right)^{-1}$$

$$M_{ij} = f_{ij}(\tau_{(j-1)}^{(1)}, \vec{\tau}^{(1)}, \tau_{(j-1)}^{(2)}, \vec{\tau}^{(2)})$$

$$\theta(\sigma // \frac{\Omega_j(\rho)}{4}) = \sum_{\vec{n}, \vec{m} \in \mathbb{Z}^d} \exp\left\{-\frac{\pi i}{4} (\vec{n}^t \vec{m}^t) \Omega_j(\rho) \begin{pmatrix} \vec{n} \\ \vec{m} \end{pmatrix}\right\} =$$

$$\times \theta \left(\frac{-\Omega}{4} \frac{g^{-1/2}(\beta)}{4} \parallel \frac{0}{4} \frac{g^{-1/2}(\beta)}{4} \right) + \dots$$

$$\vec{\Omega}_{(f, \frac{1}{2})} = (\Omega_{f(\beta)_{12}}, \dots, \Omega_{f(\beta)_{12f}}) \text{ finito } \delta \rightarrow 0$$

En $\mathcal{O}\left(\frac{\Omega(g^{-1/2})(\beta)}{4}\right)$ tenemos términos más difíciles (13)
 de desarrollar en $\delta \rightarrow 0$: $e^{K/\log|\delta|}$

Además debemos obtener un término dual al $|\delta|^{\beta^2/4\pi^2}$

* Recordando que la dualidad está relacionada con la transformación $\Omega \rightarrow -\Omega^{-1}$, hacemos

$$\Omega(g^{-1/2})(\beta) \rightarrow -[\Omega(g^{-1/2})(\beta)]^{-1}$$

Para ello invertimos $A(g^{-1/2})$ por bloques utilizando que:

"Si M es cuadrada, simétrica e invertible de la forma

$$M = \begin{pmatrix} A & \vec{J} & B \\ & x & \vec{e}^t \\ & & C \end{pmatrix}$$

A, C cuadradas

C invertible

$\vec{J}, \vec{e}$, vectores columna

x número ($\neq 0$) ($\neq \vec{e}^t C \vec{e}$)...

y su inversa la escribimos en términos de submatrices similares

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} D & \vec{g} & E \\ & y & \vec{h}^t \\ & & F \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D = \{A - BC^{-1}B^t - [\vec{J} - BC^{-1}\vec{e}][x - \vec{e}^t C^{-1}\vec{e}]^{-1}[\vec{J}^t - \vec{e}^t C^{-1}B^t]\}^{-1}$$

$$\vec{g} = -D(\vec{J} - BC^{-1}\vec{e})(x - \vec{e}^t C^{-1}\vec{e})^{-1}$$

$$y = (x - \vec{e}^t C^{-1}\vec{e})^{-1} [1 - (\vec{J}^t - \vec{e}^t C^{-1}B^t)\vec{g}]$$

$$E = -[DBC^{-1} + \vec{g}\vec{e}^t C^{-1}]$$

$$\vec{h} = -C^{-1}[B^t\vec{g} + y\vec{e}]$$

$$F = C^{-1} \{1 + [B^t(D\vec{B} + \vec{g}\vec{e}^t) + \vec{e}(\vec{g}^t B + y\vec{e}^t)]C^{-1}\}$$

Enemos:

(14)

$$(A_{g-\frac{1}{2}})^{-1} = \left(\begin{array}{c|c|c} C & -C[M_{23} + \tau_{(g-1)}^{(1)} M_{43}^t] & B^t \\ \hline \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \hline & -M_{34} \tau_{(g-1)}^{(2)t} + D^t & A \end{array} \right) + O(x^{-1})$$

$$D = \tau_{(g-1)}^{(2)} (\tau_{(g-1)}^{(2)})^{-1} E$$

$$E = [M_{23} + \tau_{(g-1)}^{(1)} M_{34}^t]$$

$$M = M_{34} \tau_{(g-1)}^{(2)} M_{34}^t - E^t (\tau_{(g-1)}^{(2)})^{-1} E$$

Al suprimir desarrollando tendremos $(A_{(g-1)})^{-1} g$

$$\vartheta(\vec{0} // \frac{\Omega_{(g-\frac{1}{2})}(\beta)}{4}) = \left(-i \det \frac{\Omega_{(g-\frac{1}{2})}(\beta)}{4} \right)^{-\frac{1}{2}} \vartheta(\vec{0} // -4 \Omega_{(g-\frac{1}{2})}^{-1}(\beta)) =$$

$$= \left(\frac{-i\beta^2}{\pi \log |\delta|} \right)^{-\frac{1}{2}} (i \det \Omega_{g-1}(\beta))^{-\frac{1}{2}} \left\{ \vartheta(\vec{0} // - \left(\frac{\Omega_{g-1}(\beta)}{4} \right)^{-1}) + \right. \\ \left. + 2|\delta|^{\frac{\pi^2}{\beta^2}} \exp \left\{ \frac{-2\pi^3}{\beta^2} M \right\} \times \vartheta(\dots // - \left(\frac{\Omega_{g-1}(\beta)}{4} \right)^{-1}) + \dots \right\}$$

⋮

$$\Rightarrow \vartheta(\vec{0} // \frac{\Omega_g(\beta)}{4}) = \left(\frac{-i\beta^2}{\pi \log |\delta|} \right)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \vartheta(\vec{0} // \frac{\Omega_{g-1}(\beta)}{4}) + \right. \\ \left. + \vartheta(\vec{A} // \frac{\Omega_{g-1}(\beta)}{4}) R(g-1) \times \left[2|\delta|^{\frac{\beta^2}{4\pi^2}} R(g-\frac{1}{2}) \exp \left\{ \frac{-\beta^2}{4\pi^2} M \right\} \right. \right. \\ \left. \left. + 2|\delta|^{\frac{\pi^2}{\beta^2}} \exp \left\{ -\frac{2\pi^3}{\beta^2} \right\} \right] + \dots \right\}$$

$$\frac{\pi^2}{\beta^2} = \frac{\left(\frac{2\pi^2}{\beta} \right)^2}{4\pi^2}$$

duels

COMBINANDO ESTE RESULTADO CON EL T_h DE BELAVIN-KNIZHNIK

OBTENEMOS, AL ORDEN MÁS BAJO LOS TÉRMINOS $(\tau_1^{(1)} \sim \frac{\text{Arg } \delta}{2\pi})$

$$- \int \frac{d|\delta| d\tau_1^{(1)}}{|\delta|^3} \quad \text{DIVERGENTE } \forall \beta \quad (\tau_1^{(1)} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$$

$$- \int d|\delta| d\tau_1^{(1)} |\delta|^{\frac{\beta^2}{4\pi^2}-3} \quad \text{DIVERGENTE } \forall \beta < \pi\sqrt{8} = \frac{1}{T_c} \quad (\forall g)$$

$$- \int d|\delta| d\tau_1^{(1)} |\delta|^{\frac{\pi^2}{\beta^2}-3} \quad \text{DIVERGENTE } \forall \beta > \pi\sqrt{2} = \frac{1}{T_c^*} \quad T_c^* = \frac{1}{2\pi^2 T_c} \quad (\forall g)$$

(- Ignoramos los términos subdominantes $(\log|\delta|)^{-c}$
 (- El factor que multiplica a estos términos no depende de $\tau_1^{(1)}$)

3) Cuerda heterótica - I_e

La constante cosmológica de la cuerda heterótica se construye como

$$\Lambda_g^{(HET)} = \int_{M_g} (\det \text{Im } \tau)^{-(5+\delta_{g,1})} \mathcal{U} \wedge \overline{\mathcal{W}} \left(\begin{smallmatrix} SO(32) \\ E_8 \times E_8 \end{smallmatrix} \right)$$

donde

$$\Lambda_g^{(SSTII)} = \int_{M_g} (\det \text{Im } \tau)^{-(5+\delta_{g,1})} \mathcal{U} \wedge \overline{\mathcal{U}} \quad \mathcal{U} = \sum_{\text{estructuras de espín } e} \mathcal{U}_e$$

es la constante cosmológica de la supercuerda cerrada tipo II

y $\mathcal{W} \left(\begin{smallmatrix} SO(32) \\ E_8 \times E_8 \end{smallmatrix} \right)$ corresponde a una cuerda bosónica con 16 campos compactificados en el toro $\mathbb{R}^{16} / \text{red de raíces de } SO(32)_{E_8 \times E_8}$.

→ multivaluados: definidos salvo por elemento de

$$\overline{W}^{SO(32)}_{E_8 \times E_8} = \overline{W} \times \vartheta_g \left(\begin{matrix} \Gamma_{16} \\ \Gamma_8 \oplus \Gamma_8 \end{matrix} \right)$$

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_g(\Gamma) &\sim c + O(\delta) \\ \overline{W} &\sim \frac{d\delta}{\delta^2} (1 + O(\delta)) \end{aligned} \right\} \overline{W}^{SO(32)}_{E_8 \times E_8} \sim \frac{d\delta}{\delta^2} (c + O(\delta))$$

Sobre U_e $(I_e = (\det \text{Im } \tau)^{-(5+\delta_1)}) U_e \wedge \overline{W}^{SO(32)}_{E_8 \times E_8}$

no hay términos generales. Sin embargo, podemos hacer una suposición mínima basándonos en lo conocido y lo esperado:

1— U_e para $g=1$ ($\text{GSO incluida en } U_e!$)

Sector Neveu-Schwartz $\alpha=0$

$$U(e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = 16 \left(\vartheta \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right)^{-4} (\theta/\tau) d\tau \quad (\delta = e^{2\pi i \tau})$$
$$\sim \frac{d\delta}{\delta^{3/2}} (1 + 8\delta^{1/2} + \dots)$$

$$U(e = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}) = 16 \left(\vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-4} (d\tau) d\tau$$
$$\sim \frac{d\delta}{\delta^{3/2}} (1 - 8\delta^{1/2} + \dots) \sim -U(e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}) + O(\delta^{1/2}) d\delta$$

Sector Ramond $\alpha = \frac{1}{2}$

$$U(e = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}) = -16 \left(\vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right)^{-4} (\theta/\tau) d\tau$$

Sector R-S

$$\sim \frac{d\delta}{\delta^{3/2}} (16\delta^{1/2} + \dots) \sim - \left(U \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + U \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right) + O(\delta^{1/2}) d\delta$$

$$U(e = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}) = 0 \quad \leftarrow \text{(Las estructuras de espín impares no contribuyen)}$$

⇒ EL TAQUIÓN NEVEU-SCHWARTZ ($\alpha=0$) → $\frac{d\delta}{\delta^{3/2}}$

SE CANCELA ENTRE LA CONTRIBUCIÓN $\beta=0$ Y $\beta=\frac{1}{2}$

(⇐ PROYECCIÓN GSO)

⇒ EL ORDEN $\frac{d\delta}{\delta}$ SE CANCELA ENTRE EL SECTOR NEVEU-SCHWARTZ ($\alpha=0$) Y EL RAMOND ($\alpha=\frac{1}{2}$).

* En cualquier caso el orden $\frac{d\delta}{\delta}$ entra en la constante cosmológica como $\frac{d\delta_1 d\bar{\delta}}{\delta \bar{\delta}^2} = \frac{d|\delta| d\tau^{(1)}}{|\delta|} e^{2\pi i \tau^{(1)}}$ y es cancelado al integrar $\tau^{(1)}$ entre $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (la región fundamental).

2) Si los taquiones N-S ^{*} siguen estando en $\mathcal{U}_e$ para $g > 1$, seguirán contribuyendo como $\frac{d\delta}{\delta^{3/2}}$ y la única forma de que se cancelen (GSO) es que se cancelen entre sí las contribuciones con $\beta_1=0$ y con $\beta_1=\frac{1}{2}$.

$$\left[\begin{array}{l} \text{La transformación modular } \tau_{11} \rightarrow \tau_{11} + 1 \end{array} \right] \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = \frac{1}{2} \rightarrow \beta_1 = 0 \\ \delta^{1/2} \rightarrow -\delta^{1/2} \\ \frac{d\delta}{\delta^{3/2}} \rightarrow -\frac{d\delta}{\delta^{3/2}} \end{array} \right.$$

Si no hay taquiones R ^{*}, esperamos $\mathcal{U}_e \sim \frac{d\delta}{\delta}$

y si $e = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \vdots \end{bmatrix} \rightarrow \mathcal{U}_e \sim d\delta \, \theta(1)$

* N-S es $\alpha_1=0$, si es A_1 el ciclo que degenera.

* R es $\alpha_1=\frac{1}{2}$, si es A_1 el ciclo que degenera.

4) Cuerda heterótica - $\theta[\vec{\alpha} \vec{\alpha}](\vec{0} \parallel \tilde{\Omega}_f(\beta))$

El cálculo es similar al del caso bosónico y el resultado es $(\vec{\alpha} = (\alpha_2, \dots, \alpha_f) \text{ etc.})$

Sector Neveu-Schwartz $\alpha_1 = 0$

$$\theta[\vec{\alpha} \vec{\alpha}](\vec{0} \parallel \tilde{\Omega}_f) \sim (\log|\delta|)^{\frac{1}{2}} \left\{ \theta[\vec{\alpha} \vec{\alpha}](\vec{0} \parallel -(\tilde{\Omega}_{f-1})^{-1}) + \right. \\ \left. + 2|\delta|^{\frac{\pi^2}{4\beta^2}} \theta[\vec{\alpha} \vec{\alpha}](\vec{0} \parallel -(\tilde{\Omega}_{f-1})^{-1}) + 2e^{2\pi i \beta_1} e^M |\delta|^{\frac{\beta^2}{4\pi^2} + \frac{\pi^2}{4\beta^2}} \times \right. \\ \left. \times [\theta[\vec{\alpha} \vec{\alpha}](\vec{0} - \frac{\vec{B}}{2} \parallel -(\tilde{\Omega}_{f-1})^{-1}) \times e^N e^{\pi i \tau_{11}^{(4)}} + \right. \\ \left. + \theta[\vec{\alpha} \vec{\alpha}](\vec{0} + \frac{\vec{B}}{2} \parallel -(\tilde{\Omega}_{f-1})^{-1}) e^{-N} e^{-\pi i \tau_{11}^{(4)}}] + \dots \right\}$$

Sector Ramond $\alpha_1 = \frac{1}{2}$

$$\theta[\vec{\alpha} \vec{\alpha}](\vec{0} \parallel \tilde{\Omega}_f) \sim (\log|\delta|)^{\frac{1}{2}} \left\{ 2|\delta|^{\frac{\pi^2}{4\beta^2}} \theta[\vec{\alpha} \vec{\alpha}](\vec{0} \parallel -(\tilde{\Omega}_{f-1})^{-1}) + \right. \\ \left. + 2e^{2\pi i \beta_1} e^M |\delta|^{\frac{\beta^2}{4\pi^2}} \theta[\vec{\alpha} \vec{\alpha}](\vec{0} \parallel -(\tilde{\Omega}_{f-1})^{-1}) + \dots \right\}$$

Después de integrar en $\tau_{11}^{(4)}$ ($\sim \text{Arg } \delta$) nos queda, haciendo las hipótesis expuestas, un sólo término, cuyo exponente es autodual

$$d|\delta| \quad |\delta|^{\frac{\beta^2}{4\pi^2} + \frac{\pi^2}{4\beta^2} - \frac{5}{2}} \quad \text{DIVERGE} \quad \forall T \in \left(\frac{1}{(4+\sqrt{2})\pi}, \frac{-1}{(1-\sqrt{2})\pi} \right) \\ = \left(T_c, \frac{1}{\pi^2 T_c} \right)$$

$\forall f$

CONCLUSIONES

19

Hemos obtenido la temperatura crítica de las contribuciones de todo orden g de la cuerda bosónica y heterótica, y hemos visto que es la misma que a primer orden (teoría libre).

Esto contrasta con lo que en principio esperamos de que la anchura Γ crezca muy rápidamente con la masa.

Sin embargo, hay cálculos numéricos recientes que concuerdan perfectamente con el resultado obtenido: (Mitchell, Turok, 1981; Wilkinson)

$$\Gamma(m) \sim m^{-1} \quad \gamma = -1$$

El mismo resultado fue obtenido por un procedimiento de unitarización aproximada por Green y Veneziano en 1971.

Nuestro resultado no proporciona ninguna información, sin embargo, sobre lo que pasa a la temperatura crítica T_c (¿transición de fase? Kibble) y refuerza notablemente la extendida creencia en la "suavidad" de las interacciones de cuerdas. (¿temperatura límite?)