



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI
DI GENOVA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI
Dipartimento di Fisica

TESI DI LAUREA MAGISTRALE



GEOMETRIE PER M-BRANE

Candidato:
Matteo Baggioli

Relatori:
Prof. S.Giusto
Prof. C.Imbimbo
Correlatore:
Prof. C.M.Becchi

*Mi siedo sul divano, chiudo gli
occhi e lavoro...*

Indice

1	Introduzione	13
1.1	Stringhe, Supersimmetria e superstringhe	14
1.2	Dimensioni extra, T-Dualità e D-brane	21
1.3	Supergravità, Dualità e M-Teoria	27
1.4	M teoria e M brane	33
1.5	Pillole di AdS-CFT	37
2	Stati BPS, M2 e M5 brane	45
2.1	Stati BPS e SUSY	45
2.2	Preliminari tecnici per l'uso delle dualità e della riduzione dimensionale	47
2.2.1	Einstein frame e string frame	47
2.2.2	Riduzione dimensionale e relazioni M-Teoria/stringa IIA	48
2.2.3	T-dualità	50
2.2.4	S-dualità	51
2.3	Accoppiamenti e cariche	52
2.4	M2 brane	54
2.4.1	M2 brana tramite dualità	55
2.4.2	M2 brana tramite SUSY	59
2.5	M5 brane	62
2.5.1	M5 brana tramite dualità metodo 1	63
2.5.2	M5 brana tramite dualità metodo 2	67
3	Soluzioni $\frac{1}{2}$ BPS di M-teoria	69
3.1	Geometrie LLM	69
3.2	Soluzioni $\frac{1}{2}$ BPS con simmetria $SO(1,5) \times SO(3)$	70
3.2.1	Killing spinors equation e arrangiamenti di Fierz	71
3.2.2	Fierz Arrangements e definizione della metrica	74
3.2.3	Proiettori, forma degli spinori e equazione per la Field Strength	77
3.2.4	Definizione della metrica ed Equazione di Toda	79

3.3	Considerazioni finali	83
4	Soluzioni per M5-brane wrappate	85
4.1	M5: near horizon limit e wrapping	86
4.2	Equazione di Toda e map elettrostatico	89
4.3	Caratteristiche generali soluzione	92
4.4	Soluzione nota Maldacena-Nunez	93
4.4.1	Regolarità intorno punti di singolarità	95
4.4.2	Dominio di definizione e carica della soluzione	97
4.5	Soluzione Maldacena-Nunez nella pittura elettrostatica	98
4.6	Nuove soluzioni non fattorizzabili	102
4.7	Distribuzione di carica equivalente e soluzioni corrispondenti	104
4.7.1	Distribuzioni con $\lambda = \lambda_0$	108
4.7.2	Distribuzioni con $\lambda_0 = 0$	109
4.8	Curvatura delle soluzioni	110
4.9	Il piano conduttore e la sfera S^2	113
4.9.1	Le discontinuità a gradino e le curve singolari	117
4.10	Una nuova classe di soluzioni $SO(1, 5) \times SO(3) \times U(1)$	119
4.10.1	Regolarità lungo la distribuzione di carica	121
4.10.2	Regolarità nei punti sulla linea $\rho = 0$ in cui cambia la pendenza delle rette	124
4.10.3	Curve $V'' = 0$ o $\dot{V} = 0$	125
4.10.4	Dominio di definizione, 4-cicli e cariche	126
4.10.5	Il caso più semplice: la soluzione equivalente	131
4.10.6	Un altro strano caso: la soluzione doppiamente lineare	132
4.10.7	Soluzioni nuove vs soluzioni di Gaiotto	135
5	Soluzioni per M2-Brane wrappate	137
5.1	Struttura generale delle soluzioni e loro significato	138
5.2	MG è soluzione...?	140
5.3	Analisi della soluzione fattorizzata	141
5.3.1	Spazi degeneri e condizioni di regolarità	143
5.3.2	Flusso 7-forma e primo dominio di definizione possibile	145
5.3.3	Fallimento prima ipotesi e possibili alternative	148
5.3.4	Ricerca soluzione fattorizzata su dominio compatto alternativo e conclusioni	149
5.4	Soluzione non fattorizzata	150
6	Conclusioni e possibili sviluppi futuri	153
6.1	Ringraziamenti	158

A	Notazioni e convenzioni utilizzate	161
A.1	Capitolo 2	161
A.2	Capitolo 3	163
B	Dalla sfera all'AdS...	165
	Bibliografia	168

Sommario

In questa tesi ci occuperemo di un'ampia classe di soluzioni di M-Teoria che preservano la simmetria superconforme $\mathcal{N} = 2$ e che corrispondono a configurazioni geometriche del tipo $AdS_5 \times S^2$ e $S^5 \times AdS_2$. Queste soluzioni rappresenteranno fisicamente soluzioni gravitazionali corrispondenti a M-brane *wrappate* su 2-cicli compatti.

In passato sono state largamente esplorate le soluzioni 1/2 BPS aventi simmetria $SO(6) \times SO(3)$ [23] ed in particolare ne è stata analizzata a fondo la pittura geometrica e l'interpretazione duale in termini di teorie di campo conformi. In aggiunta allo studio di tali soluzioni, che prendono il nome di *geometrie LLM*, sono state inoltre avanzate numerose ipotesi sulle compactificazioni AdS_5 e AdS_2 di cui ci occuperemo in questa tesi.

Nel prosieguo saranno studiate a fondo le soluzioni 1/2 BPS di M-teoria aventi simmetria globale $SO(1, 5) \times SO(3) \times \mathcal{R}$, per le quali sarà ricavata e definita analiticamente la struttura geometrica. Tali soluzioni, aventi a che fare con gli oggetti gravitazionali noti come M5-brane, saranno governate da una funzione scalare tridimensionale $D(x_1, x_2, y)$ soddisfacente l'equazione di Toda tridimensionale:

$$\nabla^2 D + \partial_y^2 e^D = 0 \tag{1}$$

Andremo alla ricerca di soluzioni specifiche di tale equazione caratterizzate dall'aver un'ulteriore simmetria $U(1)$, cercando di generalizzare l'unica attualmente nota studiata a fondo da J.Maldacena e D.Gaiotto [12] e ricavata dallo stesso J.Maldacena insieme a C.Nunez [35]:

$$e^D = \frac{1}{x^2}(N^2 - y^2) \tag{2}$$

Vedremo che a tale scopo sarà necessario andare alla ricerca di soluzioni non fattorizzate al problema.

Ispirandoci al recente articolo [1] utilizzeremo una pittura elettrostatica duale che ci permetterà di mappare l'equazione differenziale non lineare di Toda

nella più familiare equazione di Laplace e di mappare pertanto il problema gravitazionale in 11 dimensioni in un più semplice problema elettrostatico in due dimensioni.

Tale procedimento ci porterà a mappare un problema gravitazionale fortemente non lineare in un problema lineare classico ma porterà con sé il grosso problema tecnico che sta alla base di questo lavoro: definire la corrispondenza tra soluzioni elettrostatiche e soluzioni gravitazionali regolari. A causa della non linearità del map in questione, sarà molto complesso tradurre le condizioni di consistenza e regolarità della soluzione nella pittura gravitazionale, come ad esempio la segnatura della metrica, in condizioni di regolarità sulla distribuzione di carica nella pittura elettrostatica duale.

Ricaveremo in seguito che la soluzione nota di Maldacena-Nunez [2](#) corrisponda ad una configurazione elettrostatica caratterizzata da un piano conduttore e da una distribuzione di carica lineare trasversa ad esso ed avente la forma:

$$\lambda(\eta') = \frac{N}{2} \text{sign}(\eta') \tag{3}$$

Ciò stabilito indagheremo meglio la pittura elettrostatica e il problema descritto in questo nuovo ambiente con lo scopo di analizzare le possibili generalizzazioni della soluzione [\[12\]](#).

Verificheremo tramite semplici sviluppi perturbativi che la distribuzione di carica λ dovrà avere derivata seconda nulla affinché la corrispondente soluzione gravitazionale sia regolare; tale condizione restringerà parecchio l'insieme delle possibili soluzioni al problema che ci siamo posti.

Una volta calcolata analiticamente la curvatura scalare di tali soluzioni mostreremo come le possibili generalizzazioni effettuate aggiungendo discontinuità di prima specie alla distribuzione di carica non portino a soluzioni gravitazionali fisicamente accettabili e analizzeremo a fondo le cause di tale fatto.

Preso atto di entrambe le condizioni appena enunciate non ci resterà che analizzare le generalizzazioni costituite dalle distribuzioni di carica lineari a tratti. Tali distribuzioni definiranno una ampia classe di soluzioni la quale risulta molto simile a quella studiata da Gaiotto in [\[12\]](#), ma in realtà si differenzia profondamente da quest' ultima poichè la simmetria $U(1)$ da noi considerata sarà di tipo traslazionale e non rotazionale come nel caso già ampiamente discusso in letteratura. Questo vedremo porterà diverse conseguenze sia dal punto di vista geometrico sia dal punto di vista della definizione della soluzione nella pittura elettrostatica. Studieremo tali soluzioni dal punto di vista delle regolarità e delle cariche associate; ne andremo inoltre a caratterizzare a fondo due in particolare per motivi che chiariremo in seguito.

Andremo infine ad analizzare per completezza anche il problema analogo delle soluzioni 1/2 BPS di M-Teoria aventi simmetria globale $SO(6) \times SO(1, 2) \times \mathcal{R}$ che corrisponderanno alla configurazione gravitazionale di una M2 brana wrappata su un 2-ciclo.

Non ricaveremo analiticamente la struttura più generale di tali soluzioni, ma vedremo piuttosto che tutto ciò può essere fatto agendo sulle soluzioni $SO(6) \times SO(3) \times \mathcal{R}$ analizzate nell'articolo [23] tramite continuazione analitica.

In seguito andremo ad affrontare il problema della ricerca di una soluzione esplicita a questo problema e ci accorgeremo che la situazione risulti ben più complicata della duale M5; attualmente infatti non esistono soluzioni note a tale problema.

Ci occuperemo in particolare dell'ipotesi più semplice circa tali geometrie, ossia studieremo le possibili soluzioni fattorizzate. Come vedremo questo tentativo risulterà vano: il problema relativo alla M2-brana sembra non ammettere soluzioni fattorizzate ma richiedere una forma analitica più complessa. Cercheremo di dimostrare analiticamente questo fatto e di dare quantomeno degli *input* riguardo le soluzioni non fattorizzabili.

Le motivazioni profonde che stanno alla base della ricerca delle soluzioni che indagheremo sono essenzialmente imputabili alla congettura di J.Maldacena nota come corrispondenza AdS-CFT ([34],[37]). Le geometrie in questione, essendo costituite in parte da spazi di Anti de Sitter (AdS), secondo tale ipotesi che verrà introdotta in seguito debbono possedere una controparte *duale* descritta in termini di particolari teorie di campo dette *conformi*. Per la precisione, la soluzione caratterizzata dallo spazio AdS_5 dovrà essere duale a una teoria di campo conforme in $D = 4$ dimensioni, che *vivrà* appunto sul bordo di tale spazio. Le geometrie contenenti lo spazio di Anti de Sitter 2-dimensionale saranno, invece, in corrispondenza diretta con teorie di campo conformi in una dimensione e quindi con Modelli Supersimmetrici della Meccanica Quantistica. Questo campo di ricerca risulta tuttora largamente inesplorato e rappresenta senza dubbio un ambiente di studio molto interessante. In definitiva, aldilà dello studio gravitazionale di tali soluzioni, avrebbe perfettamente senso e risulterebbe sicuramente di interesse andare a caratterizzare le teorie di campo conformi duali a tali soluzioni e studiarle a fondo, come fatto per esempio nell'articolo [12]. Questa linea potrebbe essere di grande utilità nello studio delle Teorie di Gauge come analizzeremo nelle conclusioni.

Ovviamente queste soluzioni potrebbero rappresentare di per sè anche soluzioni gravitazionali corrispondenti a oggetti cosmologici di interesse, come per esempio buchi neri.

Esistono pertanto numerose motivazioni per andare alla ricerca di tali solu-

zioni, per catalogarle e studiarle sia dal punto di vista gravitazionale che dal punto di vista duale secondo AdS-CFT.

Struttura della tesi

Illustriamo brevemente la struttura della seguente tesi per facilitarne la lettura e per sintetizzarne brevemente i contenuti.

La tesi è concepita secondo il seguente schema:

- **Capitolo 1: Introduzione:**

In questo capitolo ci proponiamo essenzialmente di delineare il background teorico in cui andremo ad operare fornendone una introduzione concisa ma pur sempre precisa. Descriveremo in maniera sintetica una delle più accreditate soluzioni al problema della *Gravità Quantistica* ossia cercheremo di introdurre il lettore alla *Teoria delle SuperStringhe* e alle sue più peculiari caratteristiche.

Ripercorreremo insieme le tappe evolutive fondamentali di tale ambito teorico fin a giungere ai nostri giorni e alla misteriosa *M-Teoria*. Lungo tale percorso ci soffermeremo sul ruolo delle dimensioni extra, sul significato profondo delle dualità all'interno di tali teorie e sulla cosiddetta *Supersimmetria*.

Andremo infine a studiare analiticamente gli oggetti noti come *Brane* andandone a dare una descrizione sia in termini di Stringa che in termini di M-Teoria. Tali oggetti sebbene in modo non evidente saranno i protagonisti del nostro lavoro.

- **Capitolo 2: Stati BPS, M2 e M5 brane:**

In questo capitolo cercheremo di dare una analisi più esaustiva della *Supersimmetria* e in tale contesto ci soffermeremo ampiamente sul significato degli *stati BPS* che risulteranno cruciali nel seguito della trattazione.

Andremo in seguito a descrivere in maniera precisa gli oggetti di *M-Teoria* noti come *M2 e M5 brane* e la *dualità elettromagnetica* che li collega. Ricaveremo in maniera completa le metriche corrispondenti a queste due soluzioni e lo faremo seguendo due diverse *strade*: utilizzando le tecniche di dualità e usufruendo invece degli strumenti forniti dal requisito di *Supersimmetria*.

- **Capitolo 3: Soluzioni 1/2 BPS di M-Teoria:**

In questo capitolo, ripercorrendo il procedimento analitico contenuto nell'articolo sulle geometrie LLM [23], ci proporremo di trovare

la più generale soluzione di M-Teoria 1/2 BPS con simmetria globale $SO(1, 5) \times SO(3)$. Faremo tutto ciò utilizzando alcune tecniche ed equazioni note in questo ambito di ricerca come *Arrangiamenti di Fierz* e *Killing Spinors Equation*.

In definitiva ricaveremo che tali soluzioni, similmente a quelle già ampiamente studiate nel precedente articolo e aventi simmetria $SO(6) \times SO(3)$, siano totalmente caratterizzate da una funzione tridimensionale $D(x_1, x_2, y)$ soddisfacente l'equazione differenziale non lineare:

$$(\partial_1^2 + \partial_2^2)D + \partial_y^2 e^D = 0 \quad (4)$$

nota in letteratura come *Equazione di Toda Tridimensionale* e particolarmente ricorrente nello studio di queste problematiche.

- **Capitolo 4: Soluzioni per M5-Brane Wrappate:**

In questo capitolo, che rappresenterà la parte originale di questa tesi, tenteremo di generalizzare la soluzione 1/2 BPS con simmetria globale $SO(1, 5) \times SO(3)$ trovata da Maldacena e Nunez in [35] andando alla ricerca di nuove soluzioni di M-Teoria corrispondenti a M5 brane wrappate su Superfici di Riemann ed aventi forma funzionale non fattorizzata.

Utilizzando una pittura elettrostatica duale per risolvere l'equazione di Toda tridimensionale, andremo a verificare in tale quadro come sia definita la soluzione nota e quali siano le possibilità per generalizzarla. Ci renderemo conto che, affinché le soluzioni siano fisicamente accettabili, le possibilità di generalizzazione saranno piuttosto ridotte e ne analizzeremo a fondo le due più semplici verificando che in effetti almeno una delle due rappresenti una ottima alternativa in questa direzione. Definiremo elettrostaticamente un'ampia classe di soluzioni caratterizzate da simmetria $SO(1, 5) \times SO(3) \times U(1)$; tali soluzioni saranno analoghe a quelle studiate da Gaiotto in [12] ma la loro simmetria $U(1)$ sarà di tipo traslazionale e non rotazionale. Vedremo che questo porterà notevoli conseguenze circa le loro geometrie e farà in modo che esse rappresentino in tutto e per tutto nuove geometrie per M5 brane wrappate su Superfici di Riemann.

Analizzeremo inoltre due casi particolari di tali geometrie che acquisteranno un significato particolare per i motivi che chiariremo in seguito.

- **Capitolo 5: Soluzioni per M2-Brane:**

In questo ultimo capitolo andremo alla ricerca di soluzioni 1/2 BPS con simmetria globale $SO(6) \times SO(1, 2)$ corrispondenti a configurazioni gravitazionali di M2 brane wrappate su un 2-ciclo.

Verificheremo che la loro più generale struttura possa essere ricavata in modo immediato tramite continuazione analitica dalle soluzioni $SO(6) \times SO(3)$ studiate in [23].

Andremo infine alla ricerca di soluzioni fattorizzate a tale problema e in particolare cercheremo di descrivere in maniera analitica e completa quali condizioni matematiche debba soddisfare la funzione $e^D(y, x_i)$ affinché la soluzione gravitazionale sia fisicamente accettabile sotto tali ipotesi.

Ci accorgeremo che la ricerca di soluzioni di forma fattorizzata risulti piuttosto ardua e daremo una spiegazione completa di perchè questo accada.

Dimostrato il fallimento di tale possibilità tenteremo infine di andare a studiare le soluzioni non fattorizzate al problema per dare quantomeno delle indicazioni analitiche circa le condizioni di esistenza di quest'ultime, le quali rappresentano l'unica speranza in questa direzione.

Capitolo 1

Introduzione

Da quando Isaac Newton pubblicò nel 1687 *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, in cui descrisse per la prima volta la legge di Gravitazione Universale, la Fisica ha compiuto progressi vastissimi e ha aperto orizzonti che fino a pochi anni fa potevano essere esplorati solamente nel reparto fantascienza di una qualsiasi libreria. Risulta quasi paradossale che la sfida più grossa della Fisica Teorica moderna chiami in causa ancora una volta il problema della Forza di Gravità e lo faccia all'interno di un programma di unificazione che ha pervaso tutto il secolo trascorso e che aspira, come ultimo tassello, ad inglobare in un' unica teoria unificata proprio quest'ultima. Sicuramente uno dei tentativi più accreditati, che ci porterebbe ad una profonda e appunto totale comprensione dei vari tipi di particelle e delle varie forze esistenti, è rappresentato dalla Teoria delle Stringhe[39][25]. Quest'ultima, nella sua accezione moderna, si propone di conciliare la Meccanica Quantistica con la Teoria della Gravitazione partendo da un concetto molto semplice, ossia abbandonando il presupposto che i costituenti più intimi e fondamentali della materia e delle forze debbano necessariamente essere oggetti di natura puntiforme e sostituendo questi ultimi con delle stringhe le cui dimensioni si aggirano intorno alla nota lunghezza di Planck $\ell_p = \frac{\hbar G}{c^3}$. D'altro canto però tale teoria necessita di idee piuttosto intricate e non intuitive tra le quali le dimensioni extra e la Supersimmetria, di cui attualmente non possediamo alcuna evidenza sperimentale sicura.

La descrizione perturbativa di tale teoria di Stringa, la prima affrontata storicamente, predice in modo completo una teoria di campo effettiva in 10 dimensioni che prende il nome di Supergravità.

Tale limite di basse energie possiede delle importanti caratteristiche non perturbative che prendono il nome di S-Dualità e T-Dualità[7] e che si congetturano essere simmetrie esatte anche della teoria completa.

Ben presto, nel 1994, ci si accorse però che la descrizione tramite le stringhe

non completava il quadro teorico ma, proprio a causa di queste simmetrie, esigeva l'esistenza di un altro tipo di oggetti estesi che presero il nome di D-brane[38] e che ben presto assunsero un ruolo fondamentale all'interno di tale contesto. La teoria in 10 dimensioni e questi nuovi oggetti noti come D-Brane portano diversi indizi per l'esistenza di una teoria 11-dimensionale più ampia, la quale prende il nome di Supergravità 11D e risulta essere una ottima descrizione della realtà nel limite in cui la costante di Stringa sia piccola. Definito questo intricato quadro teorico, risultò chiaro che la struttura più intima del mondo in cui viviamo dovesse essere ancora compresa e dovesse essere qualcosa in grado di inglobare tutte queste teorie e le loro relative peculiarità. La struttura di cui stiamo parlando è quella che i fisici teorici chiamano M-Teoria[48] e che rappresenta il candidato attualmente più promettente non solo per una teoria quantistica della gravità ma bensì per una ben più ambiziosa teoria del Tutto nonostante le nostre attuali conoscenze a riguardo si limitino alla descrizione di basse energie, la quale coincide con la teoria di Supergravità 11D.

Oggi giorno, come afferma il noto fisico S.Hawking, tale teoria appare come un grande puzzle di cui riusciamo a mettere insieme solamente i pezzi lungo il contorno, ma al centro del rompicapo esiste ancora un enorme buco in cui non sappiamo ciò che accada: non potremo affermare di aver trovato la Teoria del Tutto finchè non lo avremo riempito.

1.1 Stringhe, Supersimmetria e superstringhe

La teoria delle stringhe, contrariamente a quanto si possa pensare, non nacque originariamente come teoria di gravità quantistica ma come teoria delle interazioni forti adroniche per opera dell'intuizione dell'italiano Gabriele Veneziano[20] e del lavoro del 1970 dei fisici Y.Nambu[54] e L.Susskind[44] nel tentativo di spiegare alcune sezioni d'urto adroniche che coinvolgevano la funzione matematica nota come Beta di Eulero. L'idea, molto semplice, di sostituire le particelle puntiformi con delle *stringhe vibranti* purtroppo risultò inefficiente per descrivere le interazioni adroniche e per parecchi anni venne accantonata dalla comunità scientifica. Solamente nel 1974 l'interesse circa tale argomento riprese forza poichè i lavori di fisici come J.Schwarz[27] mostrarono che tale modello, una volta quantizzati i modi vibrazionali di tali stringhe, potesse descrivere particelle di spin 2 come il gravitone e che quindi potesse rappresentare una tanto desiderata teoria di gravità quantistica. La prima idea per descrivere la teoria di stringa bosonica risulta quella di

estendere l'usuale azione relativistica per una particella puntiforme e scrivere di conseguenza l'azione che minimizzi la superficie bidimensionale spazzata da una stringa (*Worldsheet*) durante il suo moto in uno spazio D-dimensionale (*Target Space*), la quale prende il nome di *Azione di Nambu-Goto*:

$$\mathcal{S}_{NG} = \int_M d\tau d\sigma \mathcal{L}_{NG} = -\frac{1}{2\pi\alpha} \int_M d\tau d\sigma \sqrt{-\det h_{ab}} \quad (1.1)$$

con M ad indicare il worldsheet parametrizzato appunto dalle coordinate (σ, τ) , $h_{ab} = g_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu$ la metrica indotta sul worldsheet e con la costante α definita a partire dalla tensione della stringa secondo la formula $T = \frac{1}{2\pi\alpha}$. Si dimostra che tale azione sia invariante rispetto alla trasformazioni del gruppo D-dimensionale di Poincarè e rispetto ai diffeomorfismi definiti sul worldsheet.

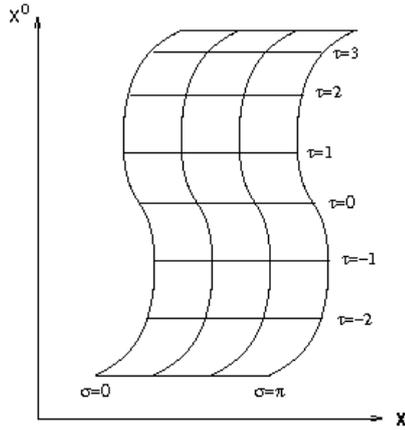


Figura 1.1: rappresentazione parametrica del worldsheet

Risulta inoltre possibile riformulare tale azione definendo una metrica indipendente sul worldsheet $\gamma_{ab}(\tau, \sigma)$ per ottenere quella che prende il nome di *Azione di Polyakov*:

$$\mathcal{S}_P[X, \gamma] = -\frac{1}{4\pi\alpha} \int_M d\tau d\sigma \sqrt{-\gamma} \gamma^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu \quad (1.2)$$

dove $\gamma = \det \gamma_{ab}$.

Tale formulazione è esattamente equivalente alla precedente nel senso che entrambe conducono alle stesse equazioni del moto; imponendo infatti $\delta_\gamma \mathcal{S}_P[X, \gamma] = 0$ si ottiene che $h_{ab} = \frac{1}{2} \gamma_{ab} \gamma^{cd} h_{cd}$, la quale espressione permette di eliminare γ_{ab} dall'azione di Polyakov per ottenere esattamente quella di Nambu-Goto. L'azione di Polyakov risulta però in un certo senso più ricca di quella

precedente¹ poichè oltre alle proprietà di invarianza rispetto al gruppo di Poincarè D-dimensionale e al gruppo dei Diffeomorfismi sulle coordinate del worldsheet evidenzia una proprietà di simmetria ulteriore che in seguito risulterà molto importante nella teoria sviluppata, ossia l'invarianza rispetto alle trasformazioni di Weyl:

$$\gamma'_{ab}(\tau, \sigma) = \lambda^2(\tau, \sigma)\gamma_{ab}(\tau, \sigma)$$

Prendendo come intervalli di definizione per le nostre coordinate della stringa $[-\infty < \tau < +\infty, 0 \leq \sigma \leq l]$ è possibile verificare che esistano solamente due tipi di condizioni al bordo consistenti con le equazioni del moto e l'invarianza per il gruppo di Poincarè D-dimensionale, ossia:

- condizioni di Neumann: $\partial_\sigma X^\mu(\tau, 0) = \partial_\sigma X^\mu(\tau, l) = 0$
- condizioni periodiche:
 - $X^\mu(\tau, 0) = X^\mu(\tau, l)$
 - $\partial_\sigma X^\mu(\tau, 0) = \partial_\sigma X^\mu(\tau, l)$
 - $\gamma_{ab}(\tau, \sigma) = \gamma_{ab}(\tau, 0)$

Le condizioni di Neumann, dette anche condizioni libere, portano a quella che prende il nome di Stringa Aperta, mentre le condizioni periodiche definiscono la cosiddetta Stringa Chiusa.

La quantizzazione dell'azione di Polyakov nel caso di stringhe chiuse sottolinea, come già menzionato, la presenza di un campo bosonico massless di spin 2 che può essere identificato come un metrica, ossia un gravitone; tale procedimento però evidenzia fin dall'inizio alcuni problemi concettuali e alcune caratteristiche peculiari di tale teoria. Analizzando infatti lo spettro massless della stringa ci accorgiamo innanzitutto dell'esistenza di una particella (tachione) con $m^2 < 0$ il cui significato appare molto elusivo in questo contesto e ci accorgiamo della necessità che lo spazio tempo abbia una certa dimensione (*dimensione critica*) affinché l'invarianza rispetto alle trasformazioni di Lorentz sia soddisfatta e affinché l'anomalia conforme si annulli. Appurato che la stringa chiusa una volta quantizzata dia vita ad un campo gravitazionale dinamico, risulta possibile ridefinire l'azione di Polyakov inserendo un background per ogni campo massless della teoria ($\phi, g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}$) in modo tale da concepire la possibilità che i valori di aspettazione sul vuoto di tali campi

¹In un certo senso questa affermazione, seppure molto diffusa, non è pienamente corretta poichè l'azione di Nambu-Goto definisce una Teoria Topologica e quindi risulta molto più ricca dell'azione di Polyakov; in questa direzione la simmetria di Weyl di quest'ultima può essere pensata come i resti dell'Invarianza Topologica di quella di Nambu-Goto.

non siano nulli, ottenendo così un'azione di worldsheet su background curvo, nota in teoria dei campi come *sigma model*[53], data da :

$$\mathcal{S} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \{ [\sqrt{-\gamma}\gamma^{ab}G_{\mu\nu}(X) + \epsilon^{ab}B_{\mu\nu}(X)]\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu + \alpha' \sqrt{-\gamma}R\phi(X) \} \quad (1.3)$$

E' noto che il requisito che tale teoria sia quantisticamente invariante conforme nel caso di background piatto ($G_{\mu\nu}(X) = \eta_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}(X) = 0$, $\Phi(X) = \Phi_0$) coincida col richiedere che il numero di dimensioni dello spazio tempo per la stringa bosonica siano $D = 26$. Ora il medesimo requisito nel caso in cui il background sia curvo implica l'annullarsi delle cosiddette funzioni β associate ai campi della teoria, tali equazioni possono essere anche riviste come equazioni del moto derivanti da una azione di spacetime sui campi G, B, ϕ , la quale può essere formulata nel cosiddetto *einstein frame* come :

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{26}X \sqrt{-\widehat{G}} [\widehat{R} - \frac{1}{12}e^{-\frac{\phi}{3}}(dB)^2 - \frac{1}{6}(\nabla\phi)^2 + O(\alpha')] \quad (1.4)$$

e che prende il nome di *Azione Effettiva di Basse energie*.

Per esempio la funzione beta per il campo G è data da:

$$0 = \beta_{\mu\nu}^G = \alpha' R_{\mu\nu} + 2\alpha' \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi - \frac{\alpha'}{4} H_{\mu\lambda\rho} H_\nu^{\lambda\rho} + O(\alpha'^2)$$

e rappresenta una vera e propria equazione di campo di Einstein in cui son presenti delle sorgenti legate al campo $B_{\mu\nu}$ e al dilatone e pertanto può chiaramente esser vista come una equazione del moto dovuta ad una azione di spacetime come abbiam precedentemente detto. A questo punto è chiaro che la teoria possa essere formulata equivalentemente sia dal punto di vista di worldsheet che dal punto di vista di spacetime. Questa caratteristica non banale evidenzia come la Teoria di Stringa perturbativa predica in modo diretto una Teoria di Campo effettiva formulata sul Target Space e valida solamente nel limite di basse energie, che vedremo prenderà il nome di *Supergravità*.

Sorgono fin da subito due peculiarità poco intuitive della teoria presa in esame, ossia la necessità di concepire un certo numero di dimensioni extra dello spazio-tempo per conservare le simmetrie conformi e rispetto al gruppo di Poincarè e la necessità di ammettere l'esistenza di una simmetria più ampia che associ ad ogni particella bosonica di spin intero un corrispettivo partner fermionico che prende il nome di Supersimmetria (SUSY)[50] per eliminare dallo spettro della stringa la particella con massa quadra negativa (tachione). Il Teorema di Coleman-Mandula garantisce che la Supersimmetria sia l'unica algebra di Lie ordinata compatibile sia con l'ipotesi quantistica che con

l'ipotesi relativistica; è chiaro quindi che una Teoria di Campo Quantistica e Relativistica richiede questo tipo di simmetria. Nell'ambito dell'algebra di Supersimmetria esistono degli operatori Q , detti *supercariche*, che trasformano i bosoni in fermioni e viceversa :

$$Q|bosone \rangle = |fermione \rangle, \quad Q|fermione \rangle = |bosone \rangle$$

Si può subito notare da tale relazione che gli operatori Q debbano avere spin $\frac{1}{2}$ e pertanto debbano essere operatori di tipo fermionico. Inoltre data l'azione di tale algebra ne consegue che ogni sua rappresentazione contenga esattamente un ugual numero di stati bosonici e di stati fermionici. Il numero di supercariche che intervengono dipende dalla dimensione dello spazio-tempo e dalla dimensione della rappresentazione di supersimmetria (a cui solitamente si associa un numero detto N). Per esempio in $d=4$ la rappresentazione più piccola di supersimmetria ($N=1$) presenta una sola supercarica e risulta completamente definita dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \{Q, Q^\dagger\} &= P \\ \{Q, Q\} &= \{Q^\dagger, Q^\dagger\} = 0 \\ [Q, P] &= 0 \end{aligned}$$

con P il quadrivettore momento.

Gli stati di particella di una teoria supersimmetrica risiedono nelle rappresentazioni irriducibili dell'algebra, detti supermultipletti; il numero di dimensioni massimo in cui può essere definita in modo consistente un'algebra di supersimmetria è $D = 11$ e il numero massimo di supercariche di una teoria supersimmetrica è 32, nella cosiddetta rappresentazione massimale. Nell'ambito di teorie supersimmetriche esistono alcune configurazioni, detti *stati BPS*, che preservano un certo numero di supercariche e di cui torneremo a parlare a fondo poichè assumeranno particolare importanza nello studio degli oggetti estesi noti come brane. Per tali configurazioni vale una relazione del tipo:

$$(S Q)|BPS \rangle = 0$$

in cui S è un particolare proiettore associato allo stato BPS.

Tali stati corrispondono a rappresentazioni dell'algebra di supersimmetria di dimensione minore, note come multipletti ridotti, e preservano sempre una frazione pari del numero di supercariche della rappresentazione massimale e per questo spesso sono indicati come stati $\frac{1}{2n}$ BPS.

Ipotizzando pertanto questa ulteriore simmetria del worldsheet, e notare bene non ancora dello spazio-tempo, è possibile riformulare una teoria di stringa

che contenga non solo gradi di libertà bosonici ma bensì anche i corrispettivi campi fermionici e giungere pertanto alla versione di Superstringa dell'azione di Polyakov invariante rispetto a tali trasformazioni che può essere formulata, nel gauge superconforme, come:

$$\mathcal{S}_P = \frac{1}{4\pi} \int d^2z \left(\frac{2}{\alpha} \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu + \Psi^\mu \bar{\partial} \Psi_\mu + \tilde{\Psi}^\mu \partial \tilde{\Psi}_\mu \right) \quad (1.5)$$

dove i campi Ψ_μ sono la parte olomorfa dei campi fermionici anticommutanti che vivono sul worldsheet e $\tilde{\Psi}_\mu$ quella antiolomorfa.

L'introduzione della Supersimmetria sul worldsheet ci permette innanzitutto di eliminare il tachione dallo spettro della teoria tramite il meccanismo noto come *GSO Projection* [17] e in secondo luogo di ottenere particelle di space-time con spin semintero e quindi di poter fare una teoria di campo completa comprendente anche fermioni. E' importante notare che la quantizzazione della stringa perturbativa fatta secondo il metodo che andremo rapidamente a presentare non implichi direttamente la Supersimmetria sul Target Space, ma quest'ultima nasca come conseguenza indiretta della introduzione della Supersimmetria sul Worldsheet della stringa; attualmente esistono altri approci, di cui non ci occuperemo, che tentano invece di introdurre l'Algebra di Supersimmetria direttamente sul Target Space.

Anche la teoria supersimmetrica esige comunque l'esistenza di dimensioni extra e può esser definita in modo coerente solamente in uno spazio-tempo dotato di 10 dimensioni. Quantizzando, come nel caso non supersimmetrico, tale azione ci troviamo subito al cospetto della possibilità di definire diverse teorie di superstringa, o più esattamente cinque apparentemente diverse teorie con i relativi spettri:

- tipo IIA: contiene un campo scalare ϕ noto come *dilatone*, un campo a spin 2 $g_{\mu\nu}$ identificabile come un *gravitone*, una 2-forma antisimmetrica $B_{\mu\nu}$ una collezione di forme dispari $C_{\mu_1 \dots \mu_n}^{(n)}$ ($C^{(1)}, C^{(3)}, C^{(5)}$) e i corrispettivi fermionici di tali campi;
- tipo IIB: contiene un campo scalare ϕ noto come *dilatone*, un campo a spin 2 $g_{\mu\nu}$ identificabile come un *gravitone*, una 2-forma antisimmetrica $B_{\mu\nu}$ una collezione di forme pari $C_{\mu_1 \dots \mu_n}^{(n)}$ ($C^{(0)}, C^{(2)}, C^{(4)}$) e i corrispettivi fermionici di tali campi;
- tipo I
- $SO(32)$ eterotica
- $E_8 \times E_8$ eterotica

Vediamo ora un po più in dettaglio da dove nasce per esempio la possibilità di definire le teorie di stringa di tipo II, le quali saranno poi le uniche che realmente ci interesseranno nel continuo del lavoro.

Definiti i campi fermionici sul worldsheet e scritta la relativa azione, tramite la coordinata cilindrica $w = \tau + i\sigma$, invariante sotto l'identificazione $w \rightarrow w + 2\pi$:

$$\mathcal{S}_f \propto \int d^2w (\Psi^\mu \bar{\partial} \Psi_\mu + \tilde{\Psi}^\mu \partial \tilde{\Psi}_\mu)$$

l'invarianza di Lorentz permette due diverse scelte di condizioni al bordo periodiche per la stringa chiusa indipendentemente sul settore left-moving (olomorfo) e su quello right moving (antiolomorfo):

- $\Psi^\mu(w + 2\pi) = \Psi^\mu(w) \rightarrow$ SETTORE DI RAMOND (R)
- $\Psi^\mu(w + 2\pi) = -\Psi^\mu(w) \rightarrow$ SETTORE DI NEVEU-SCHWARZ (NS)

Per ogni settore è possibile definire un numero F , detto *numero fermionico*, il quale si conserva sempre e risulta definito come:

$$(-1)^F = \gamma^{11} \times (-1)^{\tilde{F}} \quad (1.6)$$

dove γ^{11} è il contributo dovuto ai modi zero dei campi fermionici, ossia alla chiralità, mentre \tilde{F} è il contributo dovuto ai modi eccitati del campo ed è definito come $\tilde{F} = \sum_{n \geq 1} \psi_n^\dagger \psi_n$ con ψ^\dagger gli operatori di creazione fermionici e ψ i corrispondenti operatori di distruzione.

In definitiva esistono quattro diversi settori di stringa aperta, etichettati dal tipo di condizioni al bordo e dal corrispondente numero fermionico, i cui relativi campi massless sono:

- NS+ : un campo vettoriale bosonico SO(8) con massa nulla;
- NS-: un campo scalare bosonico con $m^2 < 0$;
- R+,R-: campi spinoriali rappresentazioni del gruppo SO(9,1) con numero fermionico opposto.

E' possibile definire a questo punto un operatore di proiezione, detto appunto l'operatore di GSO Projection :

$$P = \frac{1}{2}(1 - (-1)^F)$$

in modo tale che la corrispondente proiezione ci elimini la particella con massa quadra negativa semplicemente perchè $P|NS- \rangle = 0$. Tale proiezione,

che appare a primo acchito completamente ingiustificata, in realtà ha motivazioni profonde che risiedono nella richiesta di invarianza modulare rispetto al gruppo $SL(2, \mathbb{Z})$ delle funzioni di partizione della teoria, di cui però non ci occuperemo in questo lavoro.

Definito il meccanismo con cui la supersimmetria elimina il tachione andiamo a considerare ora la stringa chiusa che pertanto, a priori, potrà essere una combinazione left-right dei settori NS+, R+, R-. I settori NS sono settori che descrivono stati di spin intero, mentre i settori di Ramond definiscono stati di spin-semintero, pertanto le combinazioni NS-NS e R-R descriveranno campi di spacetime bosonici mentre le combinazioni NS-R e R-NS descriveranno i campi fermionici di spacetime che volevamo aggiungere alla teoria. Senza dilagare troppo in questo argomento, possiamo concludere che esistono due diverse teorie di stringa dette di tipo II che, definito F_L il numero fermionico del settore left, F_R quello del settore right e $\alpha = 0$ per il settore NS e $\alpha = 1$ per il settore R, corrispondono a prendere le seguenti proiezioni nello spazio degli stati :

- $\exp(\pi i F_L) = \exp(\pi i F_R) = +1 \longrightarrow$ TEORIA DI TIPO IIB
- $\exp(\pi i F_L) = +1, \exp(\pi i F_R) = (-1)^\alpha \longrightarrow$ TEORIA DI TIPO IIA

Nella teoria di tipo IIA le proiezioni vengono prese opposte nei settori NS-R e R-NS, pertanto lo spettro non è chirale ossia risulta invariante sotto l'azione di parità spazio-temporale; viceversa la teoria di tipo IIB, avendo la stessa proiezione su entrambi i settori, risulta una teoria chirale. Per quanto riguarda gli spettri il settore (NS+, NS+) è presente in entrambe le teorie e ci dà il contenuto di campi che avevamo già per la stringa bosonica, mentre i settori di R-R, che per ovvie ragioni di proiezione son diversi per il tipo IIA e il tipo IIB, ci daranno le collezioni di forme antisimmetriche che abbiamo precedentemente definito come $C_{\mu_1 \dots \mu_n}^{(n)}$. I settori del tipo R-NS e NS-R invece ci daranno la parte fermionica dello spettro, ossia tutti i superpartner dei campi bosonici già menzionati, i quali però, come vedremo in seguito, non ci interesseranno particolarmente per ragioni che saranno chiare nel prosieguo. Studieremo in seguito le azioni effettive di tali teorie e vedremo come possano essere implicate da una teoria 11-dimensionale più complessa nota come M-Teoria.

1.2 Dimensioni extra, T-Dualità e D-brane

Come abbiamo già accennato, la teoria delle Superstringhe[40] prevede comunque la necessità dell'esistenza di dimensioni extra che in qualche modo

devono essere razionalizzate. In realtà tale idea non risulta completamente nuova all'interno della fisica teorica, ma si può ricondurre a qualcosa di noto come programma di Kaluza-Klein e al concetto di compattificazione di dimensioni spazio-temporali. Stiam parlando di un tentativo che risale al 1914 e che cercava, tramite l'aggiunta di una dimensione extra alla trama spazio-temporale, di unificare il campo elettromagnetico e il campo gravitazionale. L'idea pertanto risulta quella di descrivere lo spazio tempo come $M^4 \times K$, dove M^4 rappresenta il mondo quadridimensionale che riconosciamo ogni giorno e K rappresenta uno spazio estremamente compatto i cui effetti sulla nostra percezione odierna risultano ancora parecchio misteriosi. Per fissare le idee ci concentreremo sul tipo di compattificazione più semplice, che prende il nome di *compattificazione toroidale*, e mostreremo molto velocemente in cosa consistesse l'idea di Kaluza-Klein e come debba essere modificata nel contesto di stringa inducendo proprietà molto peculiari. Denotando con x^μ le quattro coordinate dello spazio-tempo non compatte, procediamo col definire la seguente equivalenza sulle restanti coordinate:

$$x^d \cong x^d + 2\pi R \tag{1.7}$$

relazione matematica che definisce la cosiddetta *compattificazione toroidale*. Una volta eseguita tale identificazione possiamo subito osservarne gli effetti sulla metrica dieci-dimensionale:

$$ds^2 = G_{MN}^D dx^M dx^N = G_{\mu\nu}^{D-1} dx^\mu dx^\nu + G_{dd} (dx^d + A_\mu dx^\mu)^2$$

E' chiaro come dalla metrica dieci-dimensionale nasca un campo metrico ossia un campo gravitazionale nello spazio ridotto ma, cosa più sorprendente, è il fatto che nasca anche un campo vettoriale A_μ e che i diffeomorfismi sulle coordinate dieci-dimensionali inducano le corrette trasformazioni di gauge di tale campo vettoriale, ossia:

$$x'^d = x^d + \lambda(x^\mu) \longrightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \lambda$$

Questa era proprio la speranza di tale progetto, che però fallì a causa delle difficoltà nel trattare anche i campi scalari massless che nascevano da tale procedimento di compattificazione.

In teoria di stringa, l'eq 1.7 ha due importanti conseguenze:

- la periodicità implica in modo piuttosto banale la quantizzazione del momento del centro di massa della stringa, ossia:

$$k = \frac{n}{R} \quad n \in \mathbf{Z}$$

- esiste la possibilità che una stringa chiusa si arrotoli intorno ad una direzione compattificata creando configurazioni di campo topologicamente non triviali; in questo modo l'identificazione 1.7 va a modificare quelle che sono le condizioni al contorno per la stringa nel seguente modo:

$$X(\sigma + 2\pi) = x(\sigma) + 2\pi R w$$

con l'intero w che prende il nome di *winding number* e misura il numero di avvolgimenti intorno alla direzione compatta

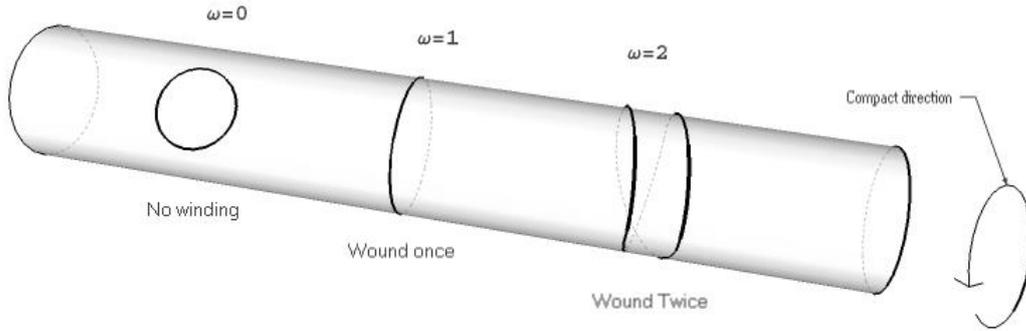


Figura 1.2: compattificazione toroidale e *winding number*

Quantizzando la stringa chiusa e tenendo conto della possibilità di effettuare tale procedimento, è possibile dimostrare (vedi [39]) che l'energia della stringa diventi:

$$m^2 = \frac{n^2}{R^2} + \frac{w^2 R^2}{\alpha'^2} + E_{oscillatori} \quad (1.8)$$

e una volta definito $X = X_L + X_R$ che i relativi momenti p_L, p_R diventino:

$$p_L = \frac{n}{R} + \frac{wR}{\alpha'} \quad p_R = \frac{n}{R} - \frac{wR}{\alpha'}$$

L'equazione 1.8 è chiaramente invariante per la seguente trasformazione:

$$R \longrightarrow R' = \frac{\alpha'}{R} \quad n \longleftrightarrow w \quad (1.9)$$

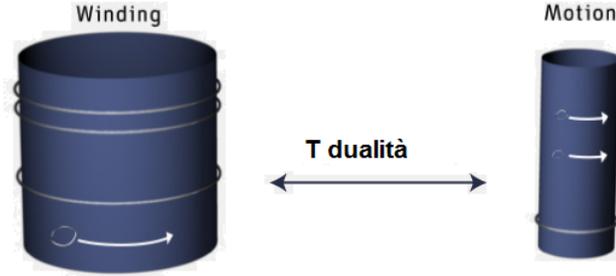


Figura 1.3: T-dualità: le due situazioni sono equivalenti

che prende il nome di trasformazione di *T-dualità*[2].

Notiamo che tale trasformazione comporti sui momenti lungo le direzioni compatte le trasformazioni indotte $p_L^d \rightarrow p_L^d$ e $p_R^d \rightarrow -p_R^d$. In ultima analisi possiamo concludere che la teoria di raggio R descritta con coordinate $X^d(z, \bar{z}) = X_L^d(z) + X_R^d(\bar{z})$ sia fisicamente completamente equivalente alla teoria descritta su un raggio R' con coordinate duali $X^d(z, \bar{z}) = X_L^d(z) - X_R^d(\bar{z})$ (vedi 1.3). Questa proprietà di dualità implica che, a differenza di quanto succeda per le particelle puntiformi, i limiti $R \rightarrow 0$ e $R \rightarrow \infty$ della teoria di stringa siano completamente equivalenti; inoltre sottolinea l'esistenza di una scala minima della teoria, definita dal cosiddetto raggio self-duale $R_{dual} = \sqrt{\alpha'}$, in conseguenza della quale la fisica non è più in grado di distinguere la situazione geometrica in cui il raggio di compattificazione è molto molto piccolo da quella in cui tale raggio appare viceversa molto grande; in conclusione risulta significativo restringere lo spazio delle configurazioni sulla semiretta $[R_{dual}, +\infty)$. Ora tornando al fatto che la fisica al raggio duale debba essere descritta da coordinate duali sopra definite possiamo facilmente accorgerci che la trasformazione di dualità scambia per le stringhe aperte le condizioni di Dirichlet sulle coordinate originarie con le condizioni di Neumann sulle coordinate duali, ossia:

$$\partial_n X^d = -i\partial_t X'^d$$

Agendo, pertanto, con una trasformazione di T-dualità su una stringa aperta otteniamo sempre una stringa aperta ma i cui estremi debbono essere in qualche modo vincolati su di una superficie d-dimensionale; tale superficie diventerà un nuovo oggetto dinamico presente nella teoria che prende il nome di D-brana. Si osservi come la rappresentazione duale rompa l'invarianza traslazionale delle condizioni al contorno della stringa aperta, tutto ciò riflette il fatto che nella teoria originaria non venga conservato il numero di avvolgimenti w , il quale rappresenta il corrispettivo T-duale del momento. Vedremo in seguito il significato profondo di tale dualità e come essa agisca

su questi nuovi oggetti estesi e sui campi fisici.

Trascurando il dilatone, l'unico campo massless che la teoria di stringa aperta prevede risulta essere il campo vettoriale A_μ ; pertanto, mettendoci nel caso più semplice, ossia quello in cui la T-dualità agisca solo lungo una direzione (x^{10}), possiamo decomporre gli stati massless corrispondenti a tale vettore in 9 stati la cui polarizzazione sia perpendicolare alla direzione di T-dualità e uno lungo tale direzione: i primi rappresenteranno proprio un campo di gauge che vive sulla brana (D-1)-dimensionale mentre l'ultimo avrà il chiaro significato di coordinata collettiva per la brana e rappresenterà le piccole oscillazioni della brana nelle direzioni trasverse. Ora, essendo tali coordinate collettive campi dinamici dell'originaria teoria di stringa aperta, tale dinamica viene indotta sulla brana che pertanto non rappresenta un oggetto rigido ma fluttuante in forma e posizione e questo potevamo aspettarlo visto che la teoria di stringa aperta prevede anche l'esistenza del campo gravitazionale la cui interazione dinamica con le brane è sicuramente presente; possiamo per esempio pensare al campo metrico come un'onda gravitazionale che nel momento in cui colpisce la brana ne perturba la forma e la posizione. Riflettendoci è la stessa cosa che abbiamo fatto nella teoria di stringa: in definitiva siamo partiti da un iperpiano piatto e poi abbiamo scoperto che certi stati di stringa aperta (campo di gauge A_μ) rappresentino proprio le fluttuazioni di forma di tale iperpiano dalla configurazione di background piatto, come con la stringa eravamo partiti da un background piatto per poi scoprire che certi stati di stringa chiusa corrispondessero proprio alle fluttuazioni geometriche di tale background.

In conclusione l'oggetto che nasce dal dualizzare $(10 - p)$ dimensioni è un oggetto dinamico nuovo che prende il nome di Dp-brana. È importante sottolineare che tale oggetto dinamico sia un oggetto non perturbativo della teoria in grado di portare con sé informazioni valide a qualsiasi regime energetico. In conclusione, la simmetria di T-Dualità della teoria di stringa perturbativa viene congetturata essere anche una simmetria della teoria completa e rende necessaria l'esistenza degli oggetti estesi noti come D-Brane. Tali oggetti possiedono una elegante ma complessa descrizione microscopica in termini di Stringhe Aperte come superfici su cui gli estremi di tali stringhe possano terminare, ma altresì una più semplice descrizione come soluzioni di Supergravità su cui ci soffermeremo.

Possiamo subito notare che la T-dualità, scambiando condizioni di Dirichlet con condizioni di Neumann, agisca sulle brane nel seguente ovvio modo:

- T-dualità lungo direzione tangente alla brana:
 $Dp - brana \longrightarrow D(p - 1) - brana;$

- T-dualità lungo direzione perpendicolare alla brana:
 $Dp - brana \longrightarrow D(p + 1) - brana.$

In realtà le D-brane risultano essere necessarie per la teoria non solo per l'argomentazione legata alla T-dualità, ma anche poichè giocano il ruolo di sorgenti per i campi R-R $C^{(n)}$ che nascono dalla quantizzazione della superstringa chiusa. Infatti il *worldvolume* di una p-brana si accoppia in modo naturale con una $(p + 1)$ forma nel seguente modo:

$$\int_{V_{p+1}} C^{(p+1)}$$

con quello che prende il nome di *accoppiamento elettrico*; come vedremo in seguito, in realtà tale forma si accoppia anche magneticamente a una $D(6 - p) - brana$ agendo tramite la *dualità di Hodge* sulle cosiddette *field strengths* F .

I campi massless associati a una Dp-brana sono un vettore U(1) e $(10 - p)$ campi scalari che ne descrivono le fluttuazioni, pertanto definite ξ^a , $a = 0, \dots, p$ le coordinate sulla p-brana e i relativi campi su tale iperpiano $X^\mu(\xi)$ e $A_a(\xi)$, è possibile definire un'azione effettiva corrispondente a tale oggetto; appare chiaro che tali campi corrispondenti alla brana saranno poi accoppiati ai campi relative alle stringhe chiuse la cui azione è stata già discussa. L'azione che descrive la dinamica delle D-brane come soluzioni di Supergravità è nota come azione di Born-Infeld[5] ed è definita come:

$$\mathcal{S}_p = -T_p \int d^{p+1} \xi e^{-\phi} [-\det(G_{ab} + B_{ab} + 2\pi\alpha' F_{ab})]^{\frac{1}{2}} \quad (1.10)$$

dove T_p è una costante legata alla tensione della stringa che può essere definita solamente in modo ricorsivo, F è la field strength del campo di gauge A_a e :

$$G_{ab}(\xi) = \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^b} G_{\mu\nu}(X(\xi)), \quad B_{ab}(\xi) = \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^b} B_{\mu\nu}(X(\xi))$$

sono i pull-back dei campi G e B sulla p-brana. Cerchiamo ora di analizzare in modo critico tale azione e capirne i contenuti.

La parte relativa al campo metrico indotto, che dipende implicitamente dai campi $X^\mu(\xi)$, rappresenta nient'altro che il world-volume spazzato dalla p-brana ed è il corrispettivo dell'azione di Nambu-Goto su un background curvo (*sigma model*) per la stringa. Il campo di background $B_{\mu\nu}$ e il campo di gauge A compaiono nell'azione secondo la combinazione $B + 2\pi\alpha' F$ che deve essere in qualche modo giustificata.

Ricordiamo che tali campi appaiono nella azione di world-sheet della stringa come:

$$\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_M B + \int_M F = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_M B + \int_{\partial M} A$$

L'usuale trasformazione sul campo di gauge A risulta:

$$\delta A = d\lambda$$

ed è chiaramente una simmetria dell'azione poichè il termine di bordo cambia semplicemente per un termine di derivata totale; la corrispondente trasformazione di gauge per il campo B:

$$\delta B = d\zeta = \partial_\mu \zeta_\nu - \partial_\nu \zeta_\mu$$

con ζ 1-forma, cambia similamente l'azione di bulk di una derivata totale, però, su un world-sheet con dei bordi come quello della brana, dà vita ad un termine di superficie che può essere cancellato solamente se il campo A trasforma sotto la stessa simmetria di gauge come:

$$\delta A_\mu = -\frac{\zeta_\mu}{2\pi\alpha'}$$

Definendo la combinazione:

$$B_{\mu\nu} + 2\pi\alpha' F_{\mu\nu} = 2\pi\alpha' \mathcal{F}_{\mu\nu}$$

essa risulta invariante per entrambe le trasformazioni di gauge e pertanto rappresenta il corretto termine che deve apparire nell'azione.

Per n D-brane separate l'azione sarà semplicemente n-copie dell'azione per la singola brana e il relativo gruppo di gauge sarà semplicemente $U(1)^n$. Invece, per il caso di n D-brane sovrapposte, la simmetria viene ad essere $U(n)$ e il gruppo di gauge diventa non-abeliano, pertanto i campi $X^\mu(\xi)$ e $A_a(\xi)$ diventano delle matrici $n \times n$ *non-commutanti* e l'azione effettiva verrà a contenere dei termini di interazione del tipo $[X^m, X^n]$ e $[A_m, A_n]$. Questo fatto, abbastanza usuale per il campo di gauge quanto scioccante per le coordinate, induce la geometria sulla brana ad essere non-commutativa e apre l'orizzonte per numerose e affascinanti congetture circa la natura dello spazio-tempo[47].

1.3 Supergravità, Dualità e M-Teoria

Come già accennato, la teoria di stringa perturbativa ammette anche una descrizione in termini di spacetime; questa descrizione rappresenta in tutto

e per tutto una teoria di campo effettiva in 10-dimensioni valida solamente nel limite di basse energie o se vogliamo di costante di stringa piccola. Tale teoria coinvolge tutti i campi massless della teoria di stringa perturbativa che nel caso della teoria di superstringa IIA sono:

- campo scalare ϕ noto come dilatone e legato alla costante di accoppiamento della stringa;
- metrica $g_{\mu\nu}$ ossia il gravitone;
- 2-forma antisimmetrica $B_{\mu\nu}$, noto come assione;
- una collezione di forme di ordine dispari $C^{(n)}$.

Risulta noto dalla Teoria dei Campi e dalla Geometria Differenziale che data una forma $C^{(p)}$ si possa costruire la relativa field strength tramite il differenziale esterno come $F^{(p+1)}$ e che le relative equazioni del moto unite all'identità di Bianchi per tale forma possano essere sinteticamente scritte come:

$$dF^{(p+1)} = 0 \quad d*F^{(p+1)} = 0$$

Le equazioni in questione possiedono una profonda simmetria nota come dualità di Hodge; se infatti definiamo una nuova Field Strength secondo la relazione $F^{(d-p-1)} = *F^{(p+1)}$, possiamo facilmente osservare che tale trasformazione scambia solamente le equazioni del moto con quelle dell'identità di bianchi e che pertanto la nuova teoria, descritta nei termini di un nuovo potenziale $C^{(d-p)}$ risulti esattamente equivalente a quella originaria. Questo breve ragionamento ci permette di dire che nella teoria di tipo IIA in 10 dimensioni le uniche forme realmente indipendenti risultino essere $C^{(1)}$, $C^{(3)}$ e che pertanto l'azione vada formulata in funzione solamente di tali campi. L'azione di supergravità per la stringa di tipo IIA, indicando con $H^3 = dB^2$, $F^{p+1} = dC^p$ risulta essere quindi:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{IIA} &= \mathcal{S}_{R-R} + \mathcal{S}_{NS-NS} + \mathcal{S}_{CS} + \mathcal{S}_{fermioni}, \\ \mathcal{S}_{NS-NS} &= \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x (-G)^{1/2} e^{-2\phi} (R + 4\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}|H^3|^2) \\ \mathcal{S}_{R-R} &= -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int d^{10}x (-G)^{1/2} (|F^2|^2 + |\tilde{F}^4|^2) \quad \tilde{F}^4 = F^4 - C^1 \wedge H^3, \\ \mathcal{S}_{CS} &= -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int d^{10}x B^2 \wedge F^4 \wedge F^4. \\ \mathcal{S}_{fermioni} &= \dots \end{aligned}$$

Il termine \mathcal{S}_{CS} , detto di Chern-Simons, risulta essere quello meno intuitivo in tale azione ed è presente necessariamente per conservare l'invarianza dell'azione totale sotto trasformazioni di supersimmetria.

Parallelamente possiamo subito definire l'azione per la stringa di tipo IIB (in realtà comporta un problema dovuto alla self-dualità della field strength legata alla forma C^4 , ma non ce ne occuperemo) che si differenzierà dalla precedente solamente per la parte relativa ai campi R-R e per la parte di Chern Simons che li coinvolge e che sarà:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{IIB} &= \mathcal{S}_{R-R} + \mathcal{S}_{NS-NS} + \mathcal{S}_{CS} + \mathcal{S}_{fermioni}, \\ \mathcal{S}_{NS-NS} &= \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x (-G)^{1/2} e^{-2\phi} (R + 4\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}|H^3|^2) \\ \mathcal{S}_{R-R} &= -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int d^{10}x (-G)^{1/2} (|F^1|^2 + |\tilde{F}^3|^2 + |\tilde{F}^5|^2), \\ \mathcal{S}_{CS} &= -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int d^{10}x C^4 \wedge F^3 \wedge H^3. \\ \mathcal{S}_{fermioni} &= \dots \\ \text{con } \tilde{F}^3 &= F^3 - C^0 \wedge H^3 \quad e \quad \tilde{F}^5 = F^5 - \frac{1}{2}C^2 \wedge H^3 + \frac{1}{2}B^2 \wedge F^3\end{aligned}$$

Risulta oramai noto che la teoria di stringa di tipo IIB sia una teoria chirale a differenza di quella di tipo IIA e che in realtà tali teorie siano molto simili, addirittura equivalenti. Lo strumento che ci permette di definire tale equivalenza è proprio la T-dualità che abbiamo definito nel paragrafo precedente. Come detto in precedenza, agendo con la T-dualità lungo una direzione (ipotizziamo sia la X^9), essa agisce riflettendo la parte destrorsa della nona coordinata e, per mantenere l'invarianza superconforme, riflettendo anche il corrispondente campo fermionico ossia:

$$X_R^9(\bar{z}) = -X_R^9(\bar{z}), \quad \Psi_R^9(\bar{z}) = -\Psi_R^9(\bar{z})$$

Tale trasformazione implica necessariamente che la chiralità del settore destro dei campi di Ramond venga ribaltata; pertanto possiamo considerare la trasformazione di T-dualità come un'operazione di parità nello spazio-tempo che agisce solamente su uno dei due settori del worldsheet. Appare quindi chiaro che partendo da una teoria di tipo IIA e agendo con T-dualità lungo una dimensione, o più generalmente un numero dispari di dimensioni, otterremo nient'altro che la teoria di tipo IIB. Ricordando che gli stati massless del settore Ramond-Ramond possono essere rappresentati come prodotto di spinori nel seguente modo:

$$C^p = \Psi_L \Gamma_{\mu_1\mu_2\dots\mu_p} \Psi_R$$

e che l'azione della T-dualità su di una dimensione(X^9) possa essere rappresentata come la moltiplicazione a destra per la matrice $\beta^9 = \Gamma^9 \Gamma$ (con Γ matrice di chiralità in 10 dimensioni), appare ora chiaro il meccanismo che permette tale equivalenza: la T-dualità aggiunge un 9 al set $\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p$ se non è presente e lo rimuove tramite il meccanismo $(\Gamma^9)^2 = 1$ se presente. Per concludere possiamo riassumere la trasformazione di T-dualità sui campi R-R come:

$$\begin{aligned}
C_9 &\longrightarrow C_9^{T\text{dual}} = \Psi_L \Gamma_9 \Gamma^9 \Gamma \Psi_R = \Psi_L \Psi_R = C \\
C_\mu &\longrightarrow C_\mu^{T\text{dual}} = \Psi_L \Gamma_\mu \Gamma^9 \Gamma \Psi_R = \Psi_L \Gamma_{\mu 9} \Psi_R = C_{\mu 9} \\
C_{\mu\nu 9} &\longrightarrow C_{\mu\nu 9}^{T\text{dual}} = \Psi_L \Gamma_{\mu\nu 9} \Gamma^9 \Gamma \Psi_R = \Psi_L \Gamma_{\mu\nu} \Psi_R = C_{\mu\nu} \\
C_{\mu\nu\lambda} &\longrightarrow C_{\mu\nu\lambda}^{T\text{dual}} = \Psi_L \Gamma_{\mu\nu\lambda} \Gamma^9 \Gamma \Psi_R = \Psi_L \Gamma_{\mu\nu\lambda 9} \Psi_R = C_{\mu\nu\lambda 9}
\end{aligned}$$

Con tale meccanismo i campi antisimmetrici $\{[1], [3]\}$ della teoria di tipo IIA vengono trasformati per T-dualità nei campi antisimmetrici $\{[0], [2], [4]\}$ della teoria di tipo IIB e quindi le due teorie risultano appunto legate da tale relazione di dualità.

La conoscenza di tale proprietà non perturbativa, insieme ad alcuni indizi teorici come l'esistenza di stati legati di D0-brane, fu il primo passo che portò a pensare all'esistenza di una teoria più fondamentale, idea che venne avvalorata dal fatto che ben presto ci si accorse che la teoria di stringa IIA potesse essere ricavata da una nuova teoria 11-dimensionale nota come Supergravità 11D tramite riduzione dimensionale alla Kaluza-Klein. Tale teoria, avente la stessa algebra di supersimmetria della teoria di stringa IIA, contiene solamente due campi bosonici: una metrica G_{MN} e una tre-forma $A_{MNP} = A_3$ con la relativa field strength F_4 . Definiti i campi dinamici presenti nella teoria, con parecchio sforzo si può dimostrare che l'azione soddisfacente tutti i requisiti di invarianza voluti prenda la seguente forma:

$$\mathcal{S}_{11} = \frac{1}{2\kappa_{11}^2} \int d^{11}x (-G)^{1/2} \left(R - \frac{1}{2} |F_4|^2 \right) - \frac{1}{6} \int A_3 \wedge F_4 \wedge F_4 \quad (1.11)$$

Ora ripercorrendo la procedura di riduzione dimensionale già vista in precedenza risulta chiaro come la metrica 11D generi una metrica 10D, uno scalare e un vettore. D'altro canto la 3-forma 11 dimensionale genererà una 2-forma e una 3-forma in 10D come sintetizzato nei seguenti schemi:

G_{MN}^{11}

- $G_{10,10}^{11} = e^{2\sigma(x^\mu)} \longrightarrow \Phi$
- $G_{\mu,\nu}^{11} = G_{\mu,\nu}^{10}$

- $G_{10,\nu}^{11} = C^{(1)}$

$$A_{MNP}^{(3)}$$

- $A_{MN10}^{(3)} = B^{(2)}$

- $A_{MNP}^{(3)} = C^{(3)}$

Dopo tali considerazioni è evidente come dagli unici due campi bosonici della teoria di supergravità 11-dimensionale si possa ottenere l'intero spettro della teoria di stringa di tipo IIA in 10D.

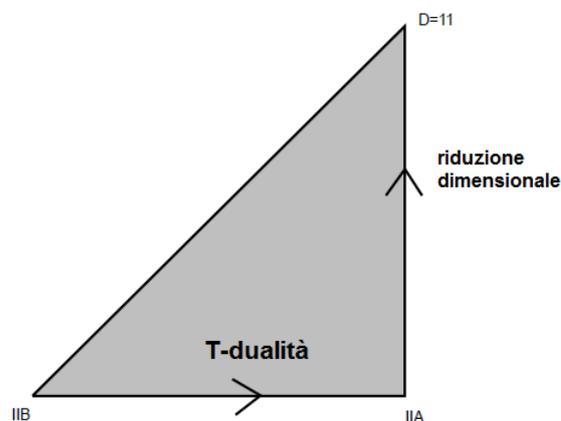


Figura 1.4: Relazioni tra tipo IIA, tipo IIB e supergravità D=11

In ultima analisi la teoria 10-dimensionale e le D-brane suggeriscono con indizi non banali l'esistenza di una Teoria 11-dimensionale, la quale rappresenta una ottima descrizione della realtà nel limite di costante di stringa piccola e di cui si conosce una definizione precisa solamente nel limite di basse energie, ossia nel limite di Supergravità 11D.

In realtà il quadro completo è piuttosto più intricato e coinvolge oltre alla T-Dualità un altro aspetto non perturbativo della teoria noto come S-Dualità che non indagheremo a fondo nei successivi paragrafi. E' stato ampiamente dimostrato che esista una complicata rete di relazioni (1.5) che collega tutte le cinque teorie di superstringa e le unifica consistentemente in un'unica teoria definita in 11 dimensioni il cui limite di basse energie risulta essere quella che abbiamo chiamato supergravità 11-dimensionale. In questo processo di unificazione giocano un ruolo fondamentale le dimensioni dello spazio-tempo e le loro geometrie e le caratteristiche non perturbative della teoria.

Ad ogni modo, la teoria di supergravità in 11 dimensioni ha bisogno di essere

completata, poichè non ne conosciamo una soddisfacente e corretta descrizione nel limite in cui le energie in gioco diventino molto grandi. E. Witten nel 1995 propose l'esistenza di una teoria quantistica completa in undici dimensioni a cui diede il nome di M-Teoria che dovesse corrispondere nel limite di basse energie alla teoria di supergravità 11-dimensionale e che dovesse inglobare pertanto in modo coerente e totale tutte le teorie di stringa note. In definitiva pertanto, tutte le relative teorie di stringa appaiono ora semplicemente come limiti perturbativi di una teoria in 11 dimensioni intorno a differenti vuoti; la tanto desiderata Teoria del Tutto potrebbe essere realmente rappresentata dalla M-Teoria di cui parleremo nel prossimo paragrafo. Prima di abbandonare tale discorso analizziamo un po' più a fondo il collegamento esistente tra la teoria di tipo IIA fortemente interagente e quella che abbiamo chiamato M-Teoria, ma che in realtà risulta essere la teoria di Supergravità 11D.

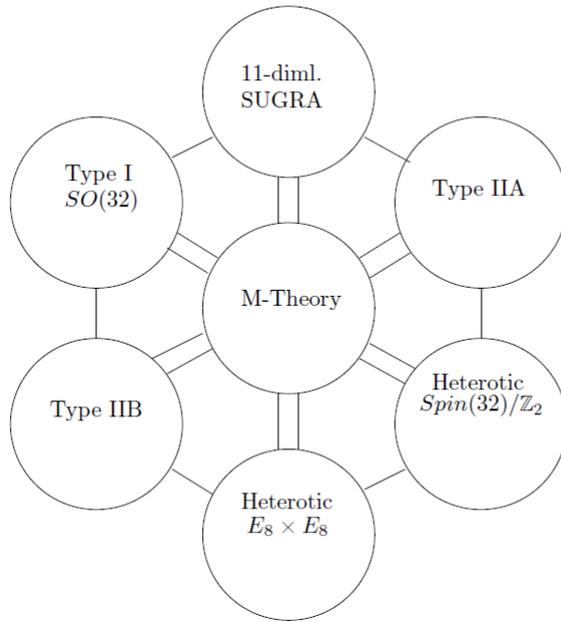


Figura 1.5: M-Teoria

Come abbiamo già evidenziato, la particella dilatónica è legata nella teoria di stringa chiusa alla costante di accoppiamento di stringa secondo la relazione $g_s = e^{\langle \Phi \rangle}$, vedremo che in realtà tale costante di accoppiamento è legata anche al raggio della undicesima dimensione secondo la relazione $R_{11} = g_s^{\frac{2}{3}}$; seguendo questa argomentazione la teoria di stringa perturbativa che consiste nell'espandere la teoria per $g_s \approx 0$ può essere vista come una espansione della teoria undici-dimensionale intorno a $R_{11} \approx 0$: questo ci permette di afferma-

re che la teoria di stringa 10D in realtà contenga una dimensione nascosta che nella sua definizione perturbativa risulta invisibile. Nel limite di forte accoppiamento l'approccio perturbativo alla teoria di stringa cessa di avere significato e la undicesima dimensione appare improvvisamente all'interno della teoria, collegando direttamente la teoria di tipo IIA nel limite di strong coupling con quella che definiamo M-Teoria.

La scoperta di questa relazione prese vita direttamente dallo studio degli oggetti presenti nella teoria di tipo IIA noti come D0-brane, oggetti estesi accoppiati al campo di Ramond-Ramond C^1 . Le D0-brane contengono una collezione di stati massivi la cui massa è inversamente proporzionale alla costante di accoppiamento di stringa g_s secondo una relazione del tipo:

$$m_{D0} \propto \frac{n}{g_s}$$

Questa torre di stati può essere interpretata alla Kaluza-Klein come un gravitone 11-dimensionale: tali stati nel limite perturbativo di piccolo accoppiamento diventano supermassivi e pertanto scompaiono dalla teoria; nel limite di strong coupling invece tale spettro diventa continuo e questo continuo di stati è caratteristico di teorie con dimensioni non più compatte e rappresenta nient'altro che lo spettro di un gravitone nell'undicesima dimensione. La scoperta e lo studio delle D0-brane dimostra pertanto che nel limite $g_s \rightarrow \infty$ appare una undicesima dimensione non più compatta nella teoria di tipo IIA e pertanto la collega direttamente a una teoria, che non può essere più definita perturbativamente, e che prende il nome appunto di M-teoria di cui però non conosciamo attualmente una descrizione e una definizione completa.

1.4 M teoria e M brane

La M-Teoria è una congettura molto forte circa l'equivalenza delle diverse teorie di stringa perturbativa esistenti e delle teorie di Supergravità. Tale teoria attualmente può essere definita solamente come il limite di forte accoppiamento della Teoria di Stringa di tipo IIA che sappiamo coincidere con quella che chiamiamo Supergravità 11D.

Lo studio degli oggetti non perturbativi noti come D-Brane e in particolare l'esistenza di una collezione di stati legati di D0-Brane nella stringa di tipo IIA suggeriscono l'esistenza di una teoria 11D. Tale teoria 11-dimensionale rappresenta una ottima descrizione della realtà fisica nel limite in cui la costante di stringa sia relativamente piccola e coincide in tale approssimazione con la teoria di Supergravità 11D.

In definitiva la nostra conoscenza esatta a riguardo oggi si limita solamente al limite effettivo di basse energie; da anni oramai si va alla ricerca di

una definizione più rigorosa non perturbativa sperimentando idee e strumenti matematici piuttosto complessi come gli spazi non commutativi di matrici (modello BFSS)[51] o le algebre di Lie non associative (azione BLG)[28]. Non avendo a disposizione una descrizione microscopica completa della teoria in 11 dimensioni è chiaro che il suo studio sia perseguibile solamente nel suo limite di basse energie sotto la forma di Supergravità 11-dimensionale; così sarà anche per gli oggetti noti della teoria, i quali non saranno descritti microscopicamente ma saranno presentati come particolari soluzioni supersimmetriche di Supergravità.

Come abbbiam già accennato, la teoria di supergravità in 11-dimensioni è descritta totalmente da soli due campi: una metrica e una 3-forma A . Avendo a disposizione solamente questi due campi la relativa azione di campo effettiva di target-space risulta:

$$\mathcal{S} \approx \int dx^{11} [\sqrt{-g}R - \frac{1}{2}F \wedge *F - \frac{1}{6}A \wedge F \wedge F] \quad \text{con } F = dA \quad (1.12)$$

Non essendo presente una forma antisimmetrica a due indici che si accoppi con la stringa possiamo con certezza dire che la M-Teoria non presenti come oggetti fondamentali delle stringhe ma solamente degli oggetti estesi accoppiati a tale 3-forma similmente a come una Dp-brana si accoppia a una C^{p+1} forma. Gli unici oggetti pertanto ammissibili sono due:

- una membrana che si accoppi elettricamente al potenziale A e che prende il nome di M2 brana;
- una membrana, duale alla precedente, che si accoppi magneticamente in modo necessariamente solitonico a tale potenziale e che prende il nome di M5 brana.

L'esistenza solamente di questi due oggetti può essere verificata in modo più profondo andando a studiare l'Algebra di Supersimmetria 11-dimensionale. In particolare si può verificare che la sola algebra consistente con i requisiti di simmetria della teoria risulti:

$$\{\mathcal{Q}_a, \mathcal{Q}_b\} = P_\mu (C\gamma^\mu)_{ab} + \frac{1}{2} Z_{\mu\nu} (C\gamma^{\mu\nu})_{ab} + \frac{1}{5!} Z_{\mu\nu\rho\sigma\tau} (C\gamma^{\mu\nu\rho\sigma\tau})_{ab} \quad (1.13)$$

in cui appunto le quantità bosoniche antisimmetriche $Z_{[\mu\nu]}$ e $Z_{[\mu\nu\rho\sigma\tau]}$ rappresentano le cariche non-Lorentz invarianti per unità di volume portate rispettivamente dalla M2 brana e dalla M5 brana.

Non esiste ancora una descrizione microscopica delle M-Brane ma esse possono essere definite come soluzioni 1/2 BPS di Supergravità 11D; tale definizione può essere ricavata sfruttando le dualità della teoria o sfruttando le

proprietà di Supersimmetria di quest'ultima. E' quello che faremo nel prossimo capitolo.

La M2 brana risulta accoppiata magneticamente alla 3-forma della teoria 11-dimensionale. Indicato con \mathcal{W}_{M2} il worldvolume della brana, tale accoppiamento è definito dalla relazione:

$$q \int_{\mathcal{W}_{M2}} A^{(3)}$$

in cui q è appunto la densità di carica della brana. Come accade per le D-Brane, dato un potenziale generalizzato $A^{(n)}$ la carica elettrica associata a tale potenziale è portata da oggetti $(n - 1)$ -dimensionali; questi meccanismi verranno approfonditi in seguito.

Indicando con $G^{(4)}$ la field strength della 3-forma e con $*_{11}G^{(4)} = \tilde{G}^{(7)} = d\tilde{A}^{(6)}$ il duale di Hodge di tale field strength, l'accoppiamento magnetico per la M5-brana risulta invece definito dal termine:

$$\tilde{q} \int_{\mathcal{W}_{M5}} \tilde{A}^{(6)}$$

in cui \tilde{q} questa volta è la densità di carica magnetica portata dalla M5-brana. Anche qui sussiste l'analogia con le D-brane in cui dato un potenziale generalizzato $A^{(n)}$, la relativa carica magnetica è associata agli oggetti $(D - n - 3)$ -dimensionali, in questo caso la M5-brana.

Definendo le coordinate parallele alla brana e quelle perpendicolari rispettivamente x_{\parallel} e x_{\perp} si può dimostrare che la metrica e la 3-forma della soluzione di Supergravità corrispondente all'oggetto M2 brana dipendano esclusivamente da $|x_{\perp}| = r$ e risultino:

$$ds_{11}^2 = H_2^{-2/3} dx_{\parallel}^2 + H_2^{1/3} dx_{\perp}^2 \quad (1.14)$$

$$A_{012} = -\frac{1}{H_2} \quad (1.15)$$

$$H_2 = 1 + \frac{Q_2}{r^6} \quad (1.16)$$

Il fatto che tutta la soluzione dipenda da una sola funzione H_2 è una conseguenza della supersimmetria. Imponendo le equazioni del moto si può verificare che tale funzione H_2 debba essere una funzione armonica nello spazio trasverso alla brana e che pertanto debba soddisfare un'equazione di Laplace sulle coordinate x_{\perp} . La costante Q che appare nella soluzione è legata analiticamente all'integrale della 3-forma e fisicamente al numero di brane presenti nella configurazione e pertanto alla carica e alla massa di quest'ultima e il proiettore sugli spinori di killing associato alla presenza di tale brana risulta:

$$(1 + \Gamma^{012})\epsilon = 0$$

La soluzione 1.14 definita in coordinate isotrope sembra essere chiaramente singolare per $r = 0$, ma se andassimo a computare le quantità invarianti costruite a partire dal tensore di curvatura o dalla field strength del potenziale in un sistema di coordinate ortonormale ci accorgeremo che tali quantità siano esplicitamente non singolari. Verificheremo che tale soluzione possa essere rappresentata come un'interpolazione spaziale tra due stati di vuoto della teoria di Supergravità 11D ed in particolare che la sua geometria Near Horizon sia $AdS_4 \times S^7$. Si può verificare che la geometria della soluzione di M2 brana sia analoga alla soluzione di Reissner-Nordstrom in Relatività Generale.

Ovviamente possiamo ripercorrere gli stessi ragionamenti per l' M5-brana, la cui soluzione di Supergravità risulta:

$$ds_{11}^2 = H_5^{-1/3} dx_{\parallel}^2 + H_5^{2/3} dx_{\perp}^2 \quad (1.17)$$

$$H_5 = 1 + \frac{Q_5}{r^3} \quad (1.18)$$

In questo caso si può dimostrare che il campo di gauge $F_4 = dC_3$ magneticamente accoppiato all'oggetto sia proporzionale all'elemento di volume della sfera S^4 trasversa alla M5-brana e che il proiettore risulti:

$$(1 + \Gamma^{012345})\epsilon = 0$$

Anche in questo caso la soluzione rappresenta un'interpolazione spaziale tra due differenti vuoti della teoria ed in particolare la geometria nel limite Near-Horizon risulta essere $AdS_7 \times S^4$. A differenza della soluzione di M2-brana questa configurazione risulta perfettamente regolare e dà vita a uno spazio geodesicamente completo.

Ci occuperemo delle proprietà geometriche e di simmetria di tali configurazioni nel prossimo paragrafo, in cui indagheremo il loro limite *Near Horizon*; purtroppo non abbiamo il tempo disponibile per studiare a fondo la geometria spazio-temporale di tali soluzioni per cui rimandiamo a [42],[13].

Entrambe le soluzioni di M-brana sono invarianti rispetto a un sottogruppo delle trasformazioni di Supersimmetria contenenti elementi non-commutanti non triviali e per questo motivo rappresentano appunto Stati BPS della teoria e posseggono pertanto degli Spinori di Killing, i quali vedremo saranno molto utili per definire la forma delle loro soluzioni.

Essendo esplicitamente invarianti per un sottogruppo dell'algebra di Supersimmetria le soluzioni di 1/2 BPS di M-brana preservano la metà delle supercariche presenti nella rappresentazione 11-dimensionale, ossia 16. E' inoltre chiaro che saturando il BPS bound per tali configurazioni la carica e la massa siano esattamente coincidenti, ossia:

$$M = |q| \quad (1.19)$$

1.5 Pillole di AdS-CFT

La corrispondenza AdS-CFT è uno dei più significativi e potenti risultati che la teoria di Stringhe abbia mai prodotto. Tale congettura afferma la completa equivalenza tra teorie di gravità in D dimensioni e teorie di campo locali senza gravità in D-1 dimensioni; in questo senso rappresenta una manifestazione evidente dell'idea di Olografia. In definitiva questa dualità pone le basi per l'equivalenza tra teorie gravitazionali e teorie di Gauge e rappresenta inoltre un esempio della cosiddetta *weak-strong coupling duality*, che risulta però un forte ostacolo ai fini di ottenere test significativi di questa congettura.

Nel 1974 t'Hooft scoprì una interessante caratteristica delle teorie di Gauge SU(N), ossia il fatto che per N infinitamente grande tali teorie si semplificassero notevolmente evidenziando peculiarità tipiche della teoria di Stringa Perturbativa e ipotizzò di conseguenza una suggestiva dualità tra queste due teorie.

In seguito, nel 1997, Maldacena studiando il limite near-horizon di un sistema di D3-brane e basandosi sulle proprietà geometriche e di simmetria di quest'ultimo rese attuale e feconda tale dualità congetturando l'equivalenza tra la teoria di Stringa di tipo IIB compattificata su un background $AdS_5 \times S^5$ e la teoria di Gauge conforme di Yang-Mills in quattro dimensioni e con $\mathcal{N} = 4$ supersimmetrie. Tale dualità si esprime attraverso un preciso map tra il generatore delle funzioni di correlazione degli operatori gauge-invarianti e la funzione di partizione della teoria di stringa. Preso atto di tutti questi fatti è stata infine congetturata la completa equivalenza tra teorie di gravità compattificate su spazi di Anti de Sitter D dimensionali e teorie di campo conformi in D-1 dimensioni, ma andiamo per gradi.

Data una teoria di Gauge con gruppo SU(N), gli unici due parametri della teoria non possono che essere il parametro N del gruppo di Lie e la costante di accoppiamento della teoria g_{YM} ; t'Hooft congetturò che la teoria potesse ammettere una espansione perturbativa in potenze di $1/N$ unitamente all'ipotesi che esistesse una scala naturale fissa $\lambda = Ng_{YM}^2$ connessa con effetti fisici come il confinamento dei quarks.

Nel limite $N \rightarrow \infty$ e $\lambda = \text{fisso}$ (*large N limit*) sopravvivono solamente i grafici di Feynman planari e la funzione di partizione completa della teoria di Yang-Mills ammette, per motivi che non possiamo spiegare qui, l'espansione:

$$\log Z = \sum_{h=0}^{\infty} N^{2-2h} f_h(\lambda) \quad (1.20)$$

in cui $f_h(\lambda)$ ammette a sua volta una espansione in potenze di λ (*costante di Hooft*) secondo:

$$f_h(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{h,n} \lambda^n \quad (1.21)$$

Ricordando che $2 - 2h = \chi$ rappresenti la costante di Eulero di una superficie si può notare come lo sviluppo 1.20 sia perfettamente equivalente allo sviluppo perturbativo in topologie della teoria di Stringa nel caso in cui si identifichi come costante di accoppiamento di stringa $g_s = 1/N$ e con λ il parametro di worldsheet. Inoltre con il crescere di λ cresce il numero di diagrammi di Feynman che danno contributi non nulli e questi ultimi diventano densi sulla sfera, quindi possiamo pensare che essi descrivano appunto un worldsheet discretizzato di una qualche teoria di Stringa. Purtroppo, nonostante il modello di t'Hooft sembri intuitivo e suggestivo, esso non ha mai mostrato alcuna precisa parentela con le stringhe come oggetti fondamentali. L'idea successiva che portò a stabilire una esatta corrispondenza tra teorie di stringa e teorie di gauge fu l'esistenza di un particolare limite geometrico, detto *near-horizon*, di alcune soluzioni solitoniche della teoria di supergravità corrispondenti a configurazioni di D-brane.

Nel 1997 J.Maldacena, studiando proprio una di queste geometrie corrispondenti a un sistema di D3-brane congetturò quella che oggi prende il nome di corrispondenza AdS-CFT: vediamo come.

Una D3-brana può essere rappresentata come soluzione solitonica di Supergravità 10D e in questa forma essa corrisponde a:

$$ds^2 = H^{-1/2}(-dt^2 + dx_{\parallel}^2) + H^{1/2}(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2) \quad (1.22)$$

$$C_{t123} = -\frac{1}{H} dt \wedge d\vec{x}_{\parallel} \quad (1.23)$$

$$H = 1 + \frac{Q}{r^4}, \quad \text{con } Q \propto N_{brane} \propto \int C^{(4)} \quad (1.24)$$

Quello che vogliamo considerare è un particolare limite matematico che consiste nell'andare a studiare la soluzione per $r \rightarrow 0$ mantenendo $\frac{Q}{r^4} \gg 1$ costante. Dal punto di vista gravitazionale questo significa andare a studiare la soluzione nelle vicinanze della sorgente gravitazionale, intorno alla quale in analogia con i buchi neri estremali esiste solitamente un orizzonte degli eventi a cui vogliamo avvicinarci dimenticando le informazioni relative alla metrica piatta all'infinito².

²Si verifica facilmente che la geometria della soluzione per $r \rightarrow \infty$ risulti esattamente quella dello spazio Minkowskiano $\mathbb{R}^{(9,1)}$.

Con dei semplici cambi di variabili si può verificare che la soluzione per N D3-brane nel cosiddetto limite *near-horizon* diventi:

$$ds^2_{(Near-Horizon)} = L^2 \left[\frac{-d\tau^2 + dx_{\parallel}^2 + dz^2}{z^2} \right] + L^2 d\Omega_5^2 = L^2 \left(ds^2_{AdS_5} + ds^2_{S^5} \right) \quad (1.25)$$

e pertanto sia del tipo $AdS_5 \times S^5$.

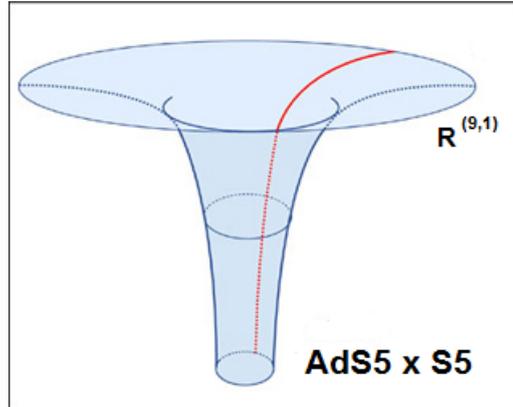


Figura 1.6: Limite near-horizon

Tale limite consiste dal punto di vista fisico a considerare un sistema di N D3-brane parallele la cui distanza reciproca tende ad annullarsi andando a creare un oggetto fortemente massivo e pertanto coinvolgendo l'interpretazione gravitazionale. Inoltre, si può verificare che data la soluzione generale 1.22 la sua energia sia:

$$E = H^{-1/4} \propto r \quad (1.26)$$

Questo ci suggerisce che prendere il limite *near-horizon* in cui il raggio r tende a 0 coincide esattamente con il considerare la soluzione in un regime effettivo di basse energie in cui sopravvivono solamente gli stati massless della teoria di Supergravità.

Le soluzioni di D-brana però ammettono anche un'interpretazione molto semplice come superfici su cui le stringhe aperte possono terminare. In questo senso è chiaro che considerando un sistema di N D-brane coincidenti le stringhe aperte possano avere gli estremi su differenti brane e pertanto portino due indici distinti che vanno da 0 a N. Ne consegue che tale sistema possa essere descritto da una teoria di Gauge $U(N)$ e questo fatto è confermato dal fatto che esso possieda N^2 gradi di libertà, ossia proprio la dimensione della

rappresentazione aggiunta del gruppo di gauge. In definitiva tale sistema può essere descritto sia tramite una teoria di Gauge che tramite una teoria di Supergravità.

E' chiaro che dal punto di vista della teoria di supergravità, la situazione sia descritta da una azione del tipo:

$$S = S_{bulk} + S_{brane} + S_{int}. \quad (1.27)$$

Questo significa che il sistema non presenti solamente stringhe aperte, ma che quest'ultime siano accoppiate a loro volta a stringhe chiuse che vivono nel bulk e questo fatto aumenta notevolmente i gradi di libertà del problema. Si può dimostrare però che il limite geometrico di *Near-Horizon* corrisponda esattamente alla situazione in cui il sistema si disaccoppi, ossia al caso in cui:

$$S_{int.} \rightarrow 0 \quad (1.28)$$

e le relative interazioni tra stringhe aperte e stringhe chiuse svaniscono.

In questo caso quel che resta sono due teorie disaccoppiate: una teoria di Gauge che vive sul worldvolume della brana e una teoria di gravità libera che vive nelle restanti dimensioni dello spazio-tempo. La teoria di Gauge che vive sulla brana, e come vedremo sul bordo dello spazio di Anti de Sitter, è rappresentata da una Teoria Supersimmetrica di Yang-Mills $U(N)$ in $(3 + 1)$ dimensioni avente 16 supercariche e pertanto $N = 4$ supersimmetrie.

In definitiva un sistema di D3-brane coincidenti nel limite di basse energie, ossia nel limite *near-horizon*, sembra essere perfettamente equivalente a una teoria supersimmetrica di gauge non abeliana in $d = 4$ dimensioni. Per convincerci di questo fatto andiam a indagare ulteriormente la teoria di Gauge e le simmetrie del sistema.

La teoria supersimmetrica di Yang-Mills $N = 4$ possiede un unico supermultipletto il cui contenuto in termine di campi risulta:

- un campo di gauge bosonico A_μ ;
- sei campi scalari ϕ^i ;
- quattro campi fermionici ψ^α .

La teoria possiede una simmetria globale $SO(6)$ che non commutando con le supercariche rappresenta una cosiddetta R simmetria.

La teoria in esame risulta invariante per trasformazioni di scala e le relative funzioni β risultano nulle a tutti gli ordini; di conseguenza tale teoria di campo risulta anche invariante rispetto alle trasformazioni conformi (CFT). In

questo senso possiede una ulteriore simmetria che è rappresentata dal gruppo conforme in $d=4$ dimensioni, il quale è nient'altro che il gruppo $SO(4,2)$.

La teoria di stringa compattificata su un background $AdS_5 \times S^5$ possiede le stesse identiche simmetrie derivanti dalla geometria *near-horizon*, poichè lo spazio sferico 5-dimensionale è caratterizzato chiaramente dal gruppo ortogonale $SO(6)$ mentre lo spazio di Anti de Sitter 5-dimensionale dal gruppo $SO(4,2)$. Il perfetto map tra le simmetrie del problema porta ulteriori conferme circa l'ipotesi di equivalenza delle teorie.

In particolare, possiamo affermare che la teoria di gauge equivalente vive esattamente sul bordo dello spazio di Anti de Sitter come andremo a motivare. Consideriamo infatti la metrica dello spazio AdS_5 , che può essere descritta come:

$$ds^2 = R^2 \frac{dx_{1+3}^2 + dz^2}{z^2} \quad (1.29)$$

In questa pittura non risulta chiaro perchè la teoria di campo duale sia in 4 dimensioni mentre lo spazio geometrico sia 5-dimensionale; che cosa rappresenta l'ulteriore dimensione?

Come abbiamo già sottolineato tramite la relazione 1.26 quest'ultima rappresenta un parametro energetico per la soluzione e l'equivalenza tra teoria di gauge e teoria di gravità è valida proprio nel limite in cui le energie in gioco siano piccole. Dal punto di vista geometrico il limite di piccole energie corrisponde al limite $z = 0$ nella relazione 1.29, il quale rappresenta appunto il bordo dello spazio di Anti de Sitter (vedi fig.1.7) topologicamente equivalente allo spazio piatto 4-dimensionale \mathcal{R}^4 su cui appunto vive la teoria di Gauge.

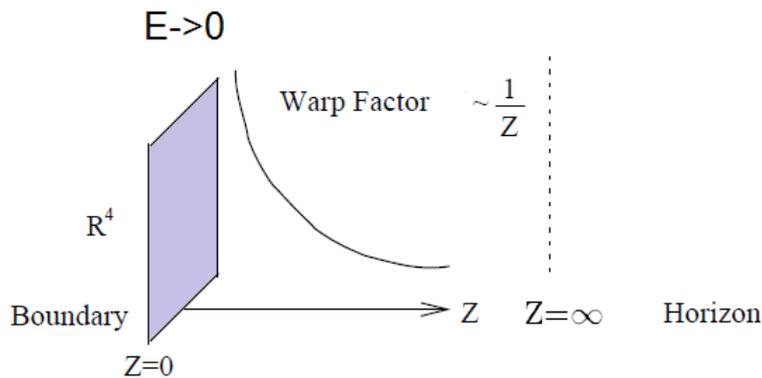


Figura 1.7: Geometria dello spazio AdS e bordo su cui vive la teoria di Gauge

In questo senso la corrispondenza AdS-CFT rappresenta un esempio notevole di relazione di dualità olografica, idea nata in precedenza nello studio

dei buchi neri e delle loro proprietà termodinamiche. La teoria di gravità in d dimensioni è equivalente alla teoria di campo locale in $d-1$ dimensioni; è l'esatto analogo di un Ologramma, in cui tutte le informazioni di un'immagine 3d sono immagazzinate su di una fotografia 2d. La relazione olografica si manifesta nell'identificazione:

$$\left\langle e^{\int d^4x \phi_0(x) \mathcal{O}(x)} \right\rangle_{CFT} = \mathcal{Z}_{String}[\phi(\text{bordo AdS}) = \phi_0] \quad (1.30)$$

in cui il membro di sinistra è il generatore delle funzioni di correlazione per gli operatori gauge-invarianti $\mathcal{O}(x)$ e il secondo membro è la funzione di partizione della teoria di Stringa di tipo IIB in un background $AdS_5 \times S^5$ con la condizione che $\phi = \phi_0$ sul bordo di AdS.

Concludiamo analizzando brevemente i regimi di validità dell'equivalenza e il map che la presiede.

Preso atto del fatto che il mapping tra i parametri sia gestito da:

$$(R/l_s)^4 = 4\pi\lambda = Ng_{YM}^2 = g_s N \quad (1.31)$$

È chiaro che lo sviluppo perturbativo della teoria di Yang-Mills sia valido solamente se $Ng_{YM}^2 \ll 1$ (e notare bene non g_{YM}^2); d'altro canto la teoria di Supergravità risulta soddisfacente solamente se il raggio di curvatura R degli spazi presi in considerazione sia molto grande rispetto alla lunghezza tipica della stringa, ossia quando $(R/l_s) \gg 1$. Possiamo notare come il regime di Supergravità sia totalmente incompatibile con il regime perturbativo della teoria di Gauge. In questo senso la corrispondenza AdS-CFT può essere interpretata come una dualità *weak-strong coupling*, poichè consente di collegare tra loro regimi opposti delle due diverse teorie. Questo continuo shift da una teoria all'altra rappresenta sicuramente una opportunità per studiare e capire meglio le teorie di gravità tramite le teorie di Gauge e viceversa. Purtroppo questa caratteristica della dualità rappresenta allo stesso tempo un forte ostacolo verso una definitiva dimostrazione della congettura di J.Maldacena, la quale oggi rappresenta un traguardo formidabile e molto potente per la fisica teorica ma pur sempre una congettura. Attualmente tutti noi usiamo e studiamo il fatto che particolari teorie di gravità in d dimensioni siano duali e pertanto equivalenti a teorie di campo conformi in $d-1$ dimensioni, ma i passi da fare per completare il quadro generale e dimostrare la congettura risultano ancora molti e piuttosto ardui.

Oggi lo studio di questa congettura è molto forte e importante e sono stati trovati numerosi altri esempi di dualità tra teorie di stringa e teorie di Campo Conformi. La corrispondenza AdS-CFT permette lo studio dei più disparati settori: dalla QCD alla superconduttività, dalle Teorie di Materia Condensata fino alla Fluidodinamica.

Purtroppo non abbiamo tempo di analizzare meglio questa corrispondenza, ma dobbiamo senz'altro evidenziare che le soluzioni che investigheremo in questo lavoro rappresenteranno senza dubbio altri ottimi candidati per lo studio e l'applicazione di questa congettura.

In particolare le soluzioni di M5-brana conteranno uno spazio AdS_5 e dovrebbero pertanto essere duali a teorie di campo conformi in $d=4$; invece le soluzioni di M2 contententi una geometria di tipo AdS_2 dovrebbero essere duali a teorie di campo conformi in $d=1$ dimensioni, ossia duali a modelli supersimmetrici di Meccanica Quantistica.

L'interesse ultimo della nostra ricerca è rappresentato proprio dall'applicazione della corrispondenza AdS-CFT sulle soluzioni di Supergravità che andremo a studiare.

Capitolo 2

Stati BPS, M2 e M5 brane

2.1 Stati BPS e SUSY

Come abbiamo già accennato nell'introduzione, esistono alcuni particolari stati, chiamati *Stati BPS*, che preservano un certo numero di supersimmetrie e che pertanto acquisiscono una maggiore importanza nelle soluzioni di supergravità e di M-teoria. L'interesse che esiste intorno a tali configurazioni è motivato dal fatto che tipicamente essi sono protetti da qualsiasi correzione quantistica: ne consegue la completa equivalenza tra i risultati predetti tramite la teoria quantistica completa di stringa e quelli ricavati tramite approssimazioni semiclassiche di Supergravità che generalmente sono decisamente più gestibili.

Questi stati vengono annichiliti da un certo numero di supercariche, o per essere più precisi soddisfano delle relazioni del tipo:

$$(SQ) |BPS\rangle = 0 \tag{2.1}$$

in cui l'operatore S è un operatore di proiezione ($S^2 = S$) associato alla particolare configurazione BPS che ha il compito di selezionare tra gli operatori di supersimmetria proprio quelli che poi annichileranno lo stato BPS. Come abbiamo già accennato tali stati preservano una frazione pari delle cariche di supersimmetria e pertanto vengono indicati spesso come stati $\frac{1}{2n}$ BPS e sono direttamente collegati a quelle che vengono chiamate le *rappresentazioni ridotte* dell'algebra di supersimmetria.

Nel caso in cui consideriamo anche le cariche portate da oggetti di tipo esteso come possono essere le D-Brane, la più ampia rappresentazione di Supersimmetria consistente con l'invarianza di Lorentz assume la forma:

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha, Q_\beta\} &\sim (C\Gamma^\mu)_{\alpha\beta} P_\mu + \Delta(C\Gamma^{\mu_1, \dots, \mu_p})_{\alpha\beta} Z_{[\mu_1, \dots, \mu_p]} \\ [P^\mu, Q_\alpha^A] &= [Z^{AB}, Q_\alpha^C] = [Z^{AB}, P^\mu] = [Z^{AB}, Z^{CD}] = 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

dove \mathcal{C} è la matrice di coniugazione di carica, Z^{AB} rappresenta un set di cariche antisimmetriche conservate, Δ una costante che dipende dalla teoria e dalle costanti di accoppiamento e \mathcal{Q} le cosiddette Supercariche, che rappresentano i generatori del gruppo di Supersimmetria.

Ora se ci mettiamo nel riferimento di riposo di una singola particella la rappresentazione 2.2 diventa:

$$\{\mathcal{Q}_\alpha, \mathcal{Q}_\beta\} \sim (\mathcal{C}\Gamma^0)_{\alpha\beta} M + \Delta (\mathcal{C}\Gamma^{1,\dots,p})_{\alpha\beta} Z_{[1,\dots,p]} \quad (2.3)$$

Prendendo come base un sistema completo di autostati dell'operatore Z^{AB} la corrispondente matrice rappresentativa assume la forma:

$$Z^{AB} = \begin{bmatrix} 0 & q_1 & 0 & 0 & \dots \\ -q_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & q_2 & \dots \\ 0 & 0 & -q_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

con tutti i $q_i \geq 0$.

L'anticommutatore di due generatori che appare come membro di sinistra delle equazioni precedenti è strettamente legato all'Hamiltoniana del sistema e si può dimostrare che è pertanto rappresentato da una matrice definita positiva; ciò implica che anche gli autovalori $2(m \pm q_i)$ del membro destro di tale equazione debbano essere tutti positivi, pertanto collocando la relazione 2.3 tra due stati fisici otteniamo con un po di algebra quello che prende il nome di *Bogomolnyi-Prasad-Sommerfield (BPS) Bound*:

$$M \geq q_i. \quad (2.5)$$

Da questa relazione appare evidente che la massa di uno stato è pertanto limitata inferiormente dal valore delle sue cariche e che uno stato massless non può essere nient'altro che neutro.

Gli stati che saturano tale relazione vengono appunto definiti BPS e chiaramente essendo $\{\mathcal{Q}_\alpha, \mathcal{Q}_\beta\} |Phys\rangle = 0$ debbono essere per forza annichiliti da un certo numero di generatori \mathcal{Q} . Il numero dei generatori che annichiliscono tali stati dipende ovviamente da quante relazioni del tipo 2.5 vengono saturate e determina direttamente il numero di cariche di supersimmetria preservate da tale configurazione BPS.

Le rappresentazioni massive dell'algebra di Supersimmetria estesa contengono 2^{2N} stati e pertanto le configurazioni massive (non BPS) che non saturano neanche una delle relazioni 2.5 continuano a contenere la totalità di tali stati. Può però accadere che un certo numero k delle cariche q_i siano uguali tra

di loro ed uguali a loro volta alla massa M del sistema (in questo caso alcune relazioni 2.5 vengono esplicitamente saturate). In tal caso l'algebra di supersimmetria richiede che $2k$ paia di oscillatori fermionici annichilino gli stati, proprio come accade per la metà degli oscillatori nelle rappresentazioni massless. In questo caso, in cui lo stato è appunto quello BPS, si ottiene una rappresentazione di dimensione minore detta appunto *short* e che contiene un numero di stati pari a $2^{2(N-k)}$.

Nel caso in cui addirittura tutte le cariche q_i sono pari alla massa M del sistema, tutti i vincoli BPS vengono saturati e si ottiene una rappresentazione detta *ultrashort* di dimensione 2^N , la stessa dimensione della rappresentazione massless.

2.2 Preliminari tecnici per l'uso delle dualità e della riduzione dimensionale

Lo scopo di questo capitolo introduttivo è ricavare le soluzioni di M2 e M5 brana nel limite di bassa energia, ossia come soluzioni di Supergravità 11D. Questi due tipi di brane, le quali vivono nello spazio-tempo 11-dimensionale, rappresentano gli oggetti fondamentali della M-Teoria, ma nonostante la loro importanza non ne conosciamo ancora una interpretazione macroscopica e quindi una soluzione generale. Ci limiteremo a descrivere tali oggetti come soluzioni di Supergravità inizialmente utilizzando le proprietà di dualità della teoria e poi vedremo anche un caso semplice in cui tali soluzioni possono essere determinate univocamente tramite i requisiti di supersimmetria. Ciò posto, prima di addentrarci in tali soluzioni dobbiamo soffermarci un po' più attentamente sulla struttura di tali dualità ed in particolare analizzare quale sia la loro azione sulla più generale metrica 11-dimensionale fino a giungere alle cosiddette *Buscher rules* [52] le quali descrivono l'azione di T-Dualità in un background curvo.

2.2.1 Einstein frame e string frame

Le azioni di supergravità possono essere descritte in due diverse forme che prendono rispettivamente il nome di *Einstein frame* e *String frame*. Si definisce *Einstein frame* la struttura in cui l'azione effettiva di basse energie della teoria viene scritta nel seguente modo:

$$S_E = \int dx^D \sqrt{g_E} R_E + \dots$$

formalmente identica al primo ordine nella parte gravitazionale alla nota azione di Einstein di Relatività Generale.

Al contrario si definisce *String frame* la struttura in cui la forma di tale azione rende esplicita la presenza del dilatone e quindi della stringa diventando:

$$S_s = \int dx^D e^{-2\phi} \sqrt{g_s} R_s + \dots$$

All'interno di un contesto di M-Teoria l'azione non può essere nient'altro che quella nell'Einstein frame poichè non essendo presenti le stringhe all'interno degli oggetti fondamentali della teoria non appare neppure sensato definire uno String frame.

Ovviamente le due diverse formulazioni sono in tutto e per tutto equivalenti; si può passare da un frame all'altro semplicemente ridefinendo la metrica come andremo a verificare.

Ipotizziamo innanzitutto una relazione lineare tra le metriche nei due diversi frame: $g_{\mu\nu}^E = \alpha g_{\mu\nu}^S$; in seguito a tale definizione risultano subito valide le espressioni:

$$\begin{aligned} \sqrt{g_E} &= \alpha^{D/2} \sqrt{g_S} \\ R_E &\approx \alpha^{-1} R_S + \dots \end{aligned}$$

le quali implicano direttamente la relazione: $\alpha^{D/2-1} = e^{-2\phi}$.

In conclusione pertanto la semplice relazione tra la metrica definita nell'Einstein frame e quella nello String frame risulta essere:

$$g_{\mu\nu}^E = e^{-4\phi/(D-2)} g_{\mu\nu}^S$$

che nel caso della teoria di Superstringa in dieci dimensioni diventa:

$$g_{\mu\nu}^E = e^{-\phi/2} g_{\mu\nu}^S \tag{2.6}$$

Questa è la semplice relazione tra le metriche definite nei due diversi *frame*, affinché le azioni siano equivalenti come devono essere.

2.2.2 Riduzione dimensionale e relazioni M-Teoria/stringa IIA

Come abbiam già sottolineato, la M-Teoria e la teoria di stringa di tipo IIA sono legate tra loro da un rapporto di riduzione dimensionale [4].

Vediamo un attimo meglio le relazioni tra gli oggetti delle due diverse teorie. La riduzione dimensionale avviene compattificando la 11-esima dimensione

lungo un cerchio di raggio $R = g_s l_s$; la metrica 11-D e la relativa 3-forma diventano pertanto:

$$ds_{11}^2 = G_{DD} (dx^D + A_\mu dx^\mu)^2 + G_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$A^{(3)} = B^{(2)} dx^D + C^{(3)}$$

Ora possiamo legare gli oggetti della M-Teoria con quelli della teoria di stringa a seconda se la dimensione compattificata sia lungo la direzione di tali oggetti o in direzioni trasverse.

Il campo A_μ che era accoppiato in undici dimensioni al momento diventa la forma di Ramond-Ramond $C^{(1)}$ e risulta pertanto accoppiata elettricamente a una D0 brana. Il relativo accoppiamento magnetico è descritto dall'oggetto 11-D detto monopolo di Kaluza-Klein che in seguito a riduzione dimensionale diventa una D6 brana accoppiata magneticamente alla forma $C^{(1)}$.

Concentriamoci ora sull'accoppiamento elettrico della 3-forma $A^{(3)}$ che sappiamo essere governato dall'oggetto 11-D noto come M2 brana. Se la riduzione dimensionale avviene lungo una direzione trasversa, tale forma dà vita al campo R-R $C^{(3)}$ che risulta pertanto essere accoppiato elettricamente a una D2 brana nella teoria 10-dimensionale. Al contrario, se la riduzione dimensionale avviene lungo la direzione parallela alla M2, ossia nel gergo la M2 viene *wrappata* lungo tale dimensione compattificata, allora la forma $A^{(3)}$ dà vita al campo $B^{(2)}$ che risulta essere accoppiato elettricamente a una stringa fondamentale F1.

Per concludere occupiamoci dell'accoppiamento magnetico relativo alla forma $A^{(3)}$ che è definito dall'oggetto M5 brana. Se la M5-brana viene *wrappata* lungo la dimensione compattificata otteniamo una D4 brana accoppiata magneticamente alla forma $C^{(3)}$; se invece riduciamo dimensionalmente in una direzione trasversa otteniamo l'oggetto noto come NS5, di cui per ora sappiamo molto poco.

Riassumiamo la situazione mappando gli oggetti della M-Teoria (M2-brana, M5-brana, KKM e metrica W) negli oggetti della teoria di stringa di tipo IIA a seconda che gli oggetti siano lungo la 11-dimensione compattificata (\swarrow) o no (\downarrow):

W	$M2$	$M5$	KK
$\swarrow \downarrow$	$\swarrow \downarrow$	$\swarrow \downarrow$	$\swarrow \downarrow$
$D0$	$W F1$	$D2 D4$	$NS5 D6$

Infine citiamo velocemente l'effetto di un'operazione di *lift* sulla metrica, che consiste semplicemente nell'aggiunta di una dimensione extra, per esempio nel nostro caso l'aggiunta della undicesima dimensione alle 10 già esistenti,

che consente il passaggio dalla teoria di stringa in 10D alla M-teoria in 11. Le relazioni tra le due metriche sono:

$$G_{zz}^{11} = (e^{2\phi})^{2/3}$$

$$G_{\mu\nu}^{11} = (e^{2\phi})^{-1/3} G_{\mu\nu}^{10}$$

e possono essere ricavate imponendo che l'azione di una M2 brana avvolta lungo la direzione compattificata sia equivalente all'azione di una stringa fondamentale nella teoria 10-dimensionale.

2.2.3 T-dualità

Le proprietà di T-dualità della teoria di stringa che abbiamo discusso in precedenza vengono ereditate in modo naturale dalla M-Teoria. Tale dualità definita su un cerchio scambia tra loro il quadrivettore momento e il cosiddetto *winding number* e come abbiamo spiegato nell'introduzione connette la teoria di stringa di tipo IIA con quella di tipo IIB rendendole per così dire equivalenti. L'effetto fondamentale che ne consegue è quello di invertire il raggio della teoria in unità di lunghezza della stringa, ossia:

$$\frac{\tilde{R}}{l_s} = \frac{l_s}{R}$$

Come abbiamo già potuto notare nell'introduzione gli oggetti noti come D-brane non sono invarianti rispetto a tale simmetria ma bensì la loro dimensione cambia a seconda che l'operazione di dualità venga fatta su un cerchio parallelo (\parallel) o perpendicolare (\perp) al worldvolume della brana.

In particolare nei due diversi casi accade che :

$$D - p \text{ brana} \longrightarrow D - (p - 1) \text{ brana} \quad (\parallel)$$

$$D - p \text{ brana} \longrightarrow D - (p + 1) \text{ brana} \quad (\perp)$$

Inoltre l'azione di dualità effettuata lungo una direzione di isometria del monopolo di Kaluza-Klein KKM trasforma tale oggetto in NS5:

$$KK (isom) \longleftrightarrow NS5$$

Infine tutti gli altri oggetti vengono lasciati invariati da tale trasformazione di dualità.

Fin ad ora ci siamo concentrati sull'azione di T-dualità in uno spazio-tempo

piatto, osservando che nella direzione in cui agisce essa inverte il raggio della teoria scambiando R con $\frac{\alpha'}{R}$; è possibile generalizzare tale quadro ad un background curvo definito dai campi $g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \Phi$ in cui è presente una direzione di isometria che identificheremo con y . L'azione di T-dualità definita su tale background trasforma i campi NS-NS secondo le seguenti relazioni che prendono il nome di *regole di Buscher* [52]:

$$\begin{aligned} e^{2\bar{\Phi}} &= e^{2\Phi}/g_{yy}, & \bar{g}_{yy} &= 1/g_{yy}, \\ \bar{g}_{\mu y} &= B_{\mu y}/g_{yy}, & \bar{B}_{\mu y} &= g_{\mu y}/g_{yy}, \\ \bar{g}_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} - (G_{\mu y}G_{\nu y} - B_{\mu y}B_{\nu y})/g_{yy}, \\ \bar{B}_{\mu\nu} &= B_{\mu\nu} - (B_{\mu y}G_{\nu y} - G_{\mu y}B_{\nu y})/g_{yy}, \end{aligned}$$

In realtà tali relazioni che appaiono tutt'altro che intuitive possono essere semplificate riscrivendo la metrica in un'altra forma. In tal caso otteniamo una relazione molto più semplice per la quale la T-dualità ci fa passare da una configurazione di campi iniziale:

$$\begin{aligned} ds^2 &= G_{yy}(dy + A_{\mu}^{(1)}dx^{\mu})^2 + \widetilde{G}_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} \\ B^{(2)} &= A_{\mu}^{(2)}dy \wedge dx^{\mu} + \widetilde{B}^{(2)} \\ e^{2\phi} & \end{aligned}$$

ad una configurazione finale:

$$\begin{aligned} ds^2 &= 1/G_{yy}(dy + A_{\mu}^{(2)}dx^{\mu})^2 + \widetilde{G}_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} \\ B^{(2)} &= A_{\mu}^{(1)}dy \wedge dx^{\mu} + \widetilde{B}^{(2)} \\ e^{2\phi} &= e^{2\phi}/G_{yy} \end{aligned}$$

2.2.4 S-dualità

Un altro aspetto non perturbativo della teoria accanto alla T-dualità è rappresentato da una ulteriore proprietà di simmetria della teoria di stringa di tipo IIB che prende il nome di *S-dualità*. Tale simmetria, intimamente legata al gruppo $SL(2, \mathbb{Z})$, è nota anche come dualità *weak-strong* in quanto ha come principale effetto quello di invertire la costante di accoppiamento g della teoria ed è una delle caratteristiche non perturbative che hanno portato, insieme alla T-dualità, all'equivalenza delle diverse teoria di stringa. Senza entrare

troppo nei particolari analizziamo l'azione di tale simmetria sui campi della teoria di stringa di tipo IIB:

$$\begin{aligned}\Phi' &= -\Phi, & G'_{\mu\nu} &= e^{-\Phi} G_{\mu\nu} \\ B'_2 &= C_2, & C'_2 &= -B_2 \\ C'_4 &= C_4\end{aligned}$$

come notiamo da tali relazioni, ricordando che $g_s = e^{\langle\Phi\rangle}$, il fatto che tale simmetria inverte il segno del campo dilatonic sta proprio a significare che la S-dualità inverte la costante di accoppiamento della teoria, ossia:

$$g' = \frac{1}{g}$$

Notiamo che la metrica nell'einstein frame è manifestamente invariante sotto tale azione di simmetria poichè:

$$G_{\mu\nu}^E = e^{-\Phi/2} G_{\mu\nu}^s = e^{\Phi/2} G_{\mu\nu}^{\prime s} = e^{\Phi'/2} G_{\mu\nu}^{\prime s} = G_{\mu\nu}^{\prime E}$$

In conseguenza del fatto che tale dualità scambia il campo B_2 con il campo C_2 vengono scambiati anche i relativi oggetti accoppiati elettricamente e magneticamente a tali campi, ossia:

$$D1 \longleftrightarrow F1, \quad D5 \longleftrightarrow NS5$$

Infine poichè la 4-forma C_4 è self-duale rispetto a tali trasformazioni, self-duale risulterà anche la brana D3 accoppiata a tale forma che sotto trasformazioni di S-dualità viene mappata in se stessa.

2.3 Accoppiamenti e cariche

Come abbiam già accennato nell'introduzione, gli oggetti estesi della teoria di stringa noti come D-p Brane si accoppiano in modo naturale con le forme antisimmetriche di Ramond-Ramond, secondo la prescrizione:

$$\mathcal{L} \propto \dots + \mu_p \int_{worldvolume} C_{(p+1)} \quad (2.7)$$

in tal modo, le brane sono appunto i portatori delle cariche R-R e si configurano come sorgenti elettriche e magnetiche per tali forme.

Le forme di Ramond-Ramond appartengono all'algebra totalmente antisimmetrica e pertanto sono soggette, come abbiam già discusso, alla dualità di Hodge che ne riduce ulteriormente le dimensioni dello spazio rendendole non

tutte indipendenti. Tale dualità algebrica, che risiede anche nelle ben più antiche equazioni di Maxwell, rappresenta nient'altro che la generalizzazione della dualità fisica tra il campo magnetico e quello elettrico, risalente ai ben noti esperimenti di H.C.Orsted del 1820.

Cerchiamo di essere più precisi. In particolare consideriamo $F_{(p+2)}$ una $p+2$ forma rappresentante un campo tensoriale antisimmetrico avente $p+2$ indici in D dimensioni. Esso sarà sicuramente la Field Strength di una forma R-R secondo la relazione $F_{(p+2)} = dC_{(p+1)}$, tale forma $C_{(p+1)}$ si accoppia elettricamente come abbiam già detto in maniera naturale a un worldvolume $p+1$ dimensionale e pertanto a una $D-p$ brana. Il duale di Hodge di $F_{(p+2)}$ risulta:

$$*F_{(p+2)} = d\tilde{C}_{(D-p-3)} \quad (2.8)$$

tale oggetto ora risulta accoppiato magneticamente a un worldvolume $\mathcal{W}_{(D-p-3)}$ e pertanto a una $(D-p-4)$ -brana secondo la prescrizione:

$$\mu_{(D-p-4)} \int_{\mathcal{W}_{(D-p-3)}} C_{(D-p-3)} \quad (2.9)$$

In definitiva nella teoria di superstringa in $D=10$, sono possibili due diversi accoppiamenti:

$$F_{(p+2)} \text{ si accoppia } \begin{cases} \text{elettricamente} & p \text{ brane} \\ \text{magneticamente} & 6-p \text{ brane} \end{cases}$$

Per fare un esempio, presa una forma $F_{(4)}$ contenuta nello spettro di stringa IIA, allora:

$$F_{(4)} \text{ si accoppia } \begin{cases} \text{elettricamente} & 2 \text{ brana} \implies \text{D2 brana} \\ \text{magneticamente} & 4 \text{ brana} \implies \text{D4 brana} \end{cases}$$

Considerando in definitiva una p -brana, la relativa carica elettrica è data da:

$$\mu_{6-p} = \int_{S^{p+2}} F_{(p+2)} \quad (2.10)$$

mentre la relativa carica magnetica associata risulta:

$$\mu_p = \int_{S^{8-p}} *F_{(p+2)} \quad (2.11)$$

Come in ogni teoria di Gauge che si rispetti, le cariche elettriche e magnetiche debbono soddisfare la regola di quantizzazione della carica di Dirac ed in particolare:

$$\mu_{6-p} \mu_p = 2\pi n \quad (2.12)$$

Generalizzando il discorso, in M-Teoria esiste solamente una forma antisimmetrica $A_{(3)}$ con la relativa field strength $G_{(4)}$ che opera da potenziale. Le M2 brane operano come sorgenti elettriche e la carica relativa, associata ovviamente al numero di quest'ultime, risulta:

$$N_2 \propto \int_{S^7} *_{11} G_{(4)} \quad (2.13)$$

viceversa, le M5 brane, duali nel senso di Hodge alle M2 brane, operano come sorgenti magnetiche della teoria e la relativa carica magnetica risulta:

$$N_5 \propto \int_{S^4} G_{(4)} \quad (2.14)$$

2.4 M2 brane

La M2 brana è uno dei due oggetti fondamentali della M-teoria ed in particolare è l'oggetto accoppiato elettricamente alla 3 forma $A^{(3)}$ secondo il meccanismo che abbiamo già analizzato nell'introduzione e che risulta del tutto identico agli accoppiamenti dei campi R-R con le D-brane. Come abbiamo già accennato nell'introduzione la soluzione per una M2 brana può essere scritta nel limite di bassa energia e pertanto come soluzione di Supergravità 11D nella forma:

$$ds_{11}^2 = H_2^{-2/3} dx_{\parallel}^2 + H_2^{1/3} dx_{\perp}^2 \quad (2.15)$$

$$A_{012} = -\frac{1}{H_2} \quad (2.16)$$

$$H_2 = 1 + \frac{Q_2}{r^6} \quad (2.17)$$

dove x_{\parallel} sono le coordinate parallele alla brana e x_{\perp} quelle perpendicolari. Possiamo notare che la soluzione in questione risulta singolare nell'origine delle coordinate $r = 0$, questo implica la presenza in tale punto di una sorgente deltiforme e ci fa pensare, come poi correttamente sarà, che tale oggetto sia in qualche modo intimamente connesso con le sorgenti elettriche della teoria.

Nel seguito ci proponiamo di ricavare tale soluzione con due differenti metodi che ci permetteranno di motivare alcune caratteristiche salienti come la dipendenza della soluzione da un'unica funzione H che dovrà essere una funzione armonica nello spazio trasverso alla brana.

2.4.1 M2 brana tramite dualità

In questa sezione ricaviamo la soluzione di basse energie di una M2 brana sfruttando le proprietà di T-dualità e di S-dualità della teoria di stringa. Prima di addentrarci nei conti cerchiamo, senza soffermarci troppo sui particolari, di evidenziare il cammino che ci porterà a tale soluzione sfruttando le conoscenze che abbiamo acquisito nel paragrafo precedente. L'idea base che ci condurrà all'M2 brana è la seguente:

1. partiamo da una soluzione nota dell'equazione di Einstein in $7 + 1$ dimensioni ed in particolare dalla *soluzione di Schwarzschild*;
2. aggiungiamo a tale soluzione due direzioni z_1 e z_2 lungo le quali abbiamo invarianza traslazionale e otteniamo una soluzione in 10D;
3. effettuiamo un *boost di Lorentz* lungo una di tali direzioni (z_1) ed otteniamo pertanto una soluzione con un momento non nullo P_1 lungo tale direzione;
4. effettuiamo una trasformazione di T-dualità lungo tale direzione che scambia il momento P_1 con il rispettivo *winding number* e otteniamo una stringa fondamentale F_1 lungo z_1 ;
5. effettuiamo una trasformazione di S-dualità che trasforma la stringa fondamentale in una D1-brana:

$$F_1 \longrightarrow D1$$

6. effettuiamo una trasformazione di T-dualità lungo l'altra direzione z_2 che trasforma la D1-brana in una D2-brana lungo le direzioni z_1, z_2 :

$$D1 \longrightarrow D2$$

7. infine aggiungiamo una terza direzione z_3 ed eseguiamo un *lift* che ci farà passare dalla teoria di stringa di tipo IIA alla M-teoria 11-D e trasformerà la D2-brana nella M2 brana voluta:

$$D2 \longrightarrow M2$$

Cerchiamo ora di analizzare un po più accuratamente il procedimento; poichè è la prima volta che lo affrontiamo saremo prolissi nei conti; nei prossimi esempi saremo meno attenti a ogni passaggio.

Iniziamo col prendere una soluzione nota dell'equazione di campo di Einstein

in $7 + 1$ dimensioni, ossia la soluzione di spazio-tempo di Schwarzschild. La metrica di tale soluzione, che rappresenta un buco nero neutro, risulta:

$$ds^2 = -(1 - K(\rho))dt^2 + (1 - K\rho)^{-1}d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_6^2$$

in cui $K(\rho)$ è una funzione armonica¹ nelle 7 dimensioni spaziali e vale:

$$K(\rho) = \left(\frac{r_H}{\rho}\right)^5$$

Per ora tale metrica non ha nessun campo dilatonic e pertanto non ha senso chiedersi se sia nell'einstein frame o nello string frame.

Aggiungiamo due direzioni con invarianza traslazionale z_1, z_2 e otteniamo la metrica 10-dimensionale:

$$ds^2 = -(1 - K(\rho))dt^2 + (1 - K\rho)^{-1}d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_6^2 + dz_1^2 + dz_2^2$$

E' chiaro che prendendo una soluzione dell'equazione di Einstein in 8 dimensioni e facendone il prodotto diretto con uno spazio del tipo $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ essa risulterà a sua volta una soluzione di tale equazione in uno spazio 10-D. Effettuiamo un boost di Lorentz lungo la direzione z_1 e otteniamo una soluzione con un momento P_1 lungo tale direzione che può essere riscritta nella forma:

$$\begin{aligned} ds^2 &= G_{zz}(dz + A_t^{(1)}dt)^2 + \widetilde{G}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \\ B^{(2)} &= A_\mu^{(2)}dz \wedge dx^\mu + \widetilde{B}^{(2)} \\ e^{2\phi} & \end{aligned}$$

nel caso in cui identifichiamo:

$$\begin{aligned} G_{z_1 z_1} &= (1 + K(\rho) \sinh^2 \gamma) \\ A_t^{(1)} &= \frac{\cosh \gamma \sinh \gamma K(\rho)}{1 + K(\rho) \sinh^2 \gamma} \\ e^{2\phi} &= 1 \end{aligned}$$

Scritta la metrica in tale forma, ora, ci risulterà semplice effettuare la trasformazione di T-dualità che ci porterà alla soluzione corrispondente a una

¹In D dimensioni spaziali una funzione armonica $\phi(r)$ ha l'andamento $\sim r^{2-D}$

stringa fondamentale F1 in 10 dimensioni, la quale risulta essere:

$$ds^2 = -\frac{1 - K(\rho)}{1 + K(\rho) \sinh^2 \gamma} dt^2 + (1 - K(\rho))^{-1} d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_6^2 + \frac{1}{1 + K(\rho) \sinh^2 \gamma} dz_1^2 + dz_2^2$$

$$B_{t1}^{(2)} = \frac{\cosh \gamma \sinh \gamma K(\rho)}{1 + K(\rho) \sinh^2 \gamma}$$

$$e^{2\phi} = \frac{1}{1 + K(\rho) \sinh^2 \gamma}$$

Ora occorre trasformare tale oggetto in una D1 brana e pertanto occorre agire con una trasformazione di S-dualità che rende la nostra soluzione:

$$ds^2 = \frac{-\sqrt{(1 + K(\rho) \sinh^2 \gamma)(1 - K(\rho))}}{1 + K(\rho) \sinh^2 \gamma} dt^2 + (1 - K(\rho))^{-1} d\rho^2 + \sqrt{(1 + K(\rho) \sinh^2 \gamma)} \rho^2 d\Omega_6^2 + \frac{1}{1 + K(\rho) \sinh^2 \gamma} dz_1^2 + dz_2^2$$

$$C_{t1}^{(2)} = \frac{\cosh \gamma \sinh \gamma K(\rho)}{1 + K(\rho) \sinh^2 \gamma}$$

$$e^{2\phi} = (1 + K(\rho) \sinh^2 \gamma)$$

Infine agiamo ancora una volta con T-dualità lungo la direzione z_2 ed otteniamo la soluzione di D2 brana in 10 dimensioni:

$$ds^2 = -(1 - K(\rho))/\sqrt{(1 + K(\rho) \sinh^2 \gamma)} dt^2 + \sqrt{(1 + K(\rho) \sinh^2 \gamma)} \rho^2 d\Omega_6^2 + \sqrt{(1 + K(\rho) \sinh^2 \gamma)}/(1 - K(\rho)) d\rho^2 + 1/\sqrt{(1 + K(\rho) \sinh^2 \gamma)} (dz_1^2 + dz_2^2)$$

$$A_{t12}^{(3)} = \cosh \gamma \sinh \gamma K(\rho)/(1 + K(\rho) \sinh^2 \gamma)$$

$$e^{2\phi} = \sqrt{(1 + K(\rho) \sinh^2 \gamma)}$$

Tale soluzione viene detta *soluzione non-estremale* in quanto non rappresenta una soluzione supersimmetrica. Dal momento che è nostro scopo utilizzare tale soluzione per effettuare un *lift* ed ottenere una soluzione di M2 brana, la quale rappresenta un oggetto 1/2 BPS e pertanto supersimmetrico, occorre

in qualche modo rendere tale soluzione estrema.

Per rendere tale soluzione estrema e rendere pertanto la D2 brana un oggetto BPS occorre ricordare che per uno stato BPS vale la relazione $M = Q$ e che:

$$M = \int T_{00} dx^D \qquad A^{(3)} \sim Q r^{2-D}$$

Non ci resta che imporre tale relazione sulla nostra soluzione e andare a vedere a che limite dei parametri corrisponda.

In realtà seguiremo una strada leggermente più naïve ma che con semplici ragionamenti ci porterà velocemente al limite che desideriamo. La Relatività Generale ci insegna che data una metrica nell'einstein frame la massa relativa a tale soluzione possa essere ricavata dallo sviluppo di tale metrica secondo la seguente relazione:

$$ds_E^2 = (-1 + \alpha M r^{4-D} + \dots) dt^2 + \dots$$

e che come abbiamo già accennato prima la 3-forma $C^{(3)}$ sia strettamente legata alla carica della nostra soluzione poichè ne rappresenta in qualche modo il potenziale elettromagnetico. Pertanto sviluppiamo la parte temporale della nostra metrica in serie ed otteniamo a meno di costanti irrilevanti ai fini del ragionamento:

$$g_{tt} \approx -1 + K(\rho)(1 + \beta \sinh^2 \gamma)$$

Facciamo lo stesso ragionamento per la 3-forma $C^{(3)}$ che sviluppata risulta:

$$A^{(3)} \approx \delta \cosh \gamma \sinh \gamma \left(\frac{r_H}{r} \right)^5$$

In definitiva, a meno di costanti numeriche, la massa e la carica della nostra D2 brana non-estrema risultano:

$$\begin{aligned} M &= \alpha r_H^5 (1 + \beta \sinh^2 \gamma) \\ Q &= \delta r_H^5 \cosh \gamma \sinh \gamma \end{aligned}$$

Affinchè la relazione di stato BPS $M = Q$ venga soddisfatta non resta che effettuare il limite per $\gamma \rightarrow \infty$ in modo tale che:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \sinh^2 \gamma = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \cosh \gamma \sinh \gamma$$

In realtà occorre anche che sia valida la relazione tra le costanti numeriche che non abbiamo calcolato $\alpha\beta = \delta$: con conti più precisi si può mostrare che

tale relazione venga soddisfatta.

Nel fare il limite $\gamma \rightarrow \infty$ osserviamo però che sotto solamente tale ipotesi le quantità fisiche M e Q divergono e pertanto la soluzione cercata perde di significato. Per eliminare questo inconveniente occorre che insieme a tale limite venga fatto anche il limite $r_H \rightarrow 0$ di modo tale che la quantità $r_H^5 \sinh^2 \gamma \equiv \chi$ che compare nelle grandezze fisiche resti finita.

Definito tale procedimento, il quale ci ha permesso di rendere supersimmetrica la nostra soluzione, non ci resta che applicarlo per ottenere la soluzione di D2-brana *estremale* in 10 dimensioni:

$$\begin{aligned} ds^2 &= H^{-1/2}(-dt^2 + dz_1^2 + dz_2^2) + H^{1/2}(d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_6^2) \\ A_{t12}^{(3)} &= 1 - 1/H \\ e^{2\phi} &= H^{1/2} \\ H &= 1 + \frac{\chi}{r^5} \end{aligned}$$

In conclusione effettuiamo un'altra operazione di lift aggiungendo una ulteriore dimensione z_3 per ottenere finalmente la soluzione per la M2-brana BPS in 11-dimensioni:

M2 BRANA EXTREMALE IN 11 DIMENSIONI

$$\begin{aligned} ds_{11}^2 &= H^{1/3}(dx_{\perp}^2) + H^{-2/3}(dx_{\parallel}^2) \\ A_{012} &= \left(1 - \frac{1}{H}\right) \end{aligned}$$

Come possiamo notare, con questo procedimento puramente algebrico, abbiamo trovato esattamente la soluzione di M2 brana nota in letteratura.

2.4.2 M2 brana tramite SUSY

In questo paragrafo rioterremo la soluzione di M2-brana BPS con un procedimento totalmente diverso dal precedente, non semplicemente di tipo algebrico, ma che come vedremo nel seguito ci permetterà di generalizzare la ricerca di tali soluzioni a casi molto più complessi sfruttando semplicemente le simmetrie e le supersimmetrie del problema.

Il metodo si baserà, dato un ansatz iniziale compatibile con le simmetrie del problema, a imporre il requisito di supersimmetria. In realtà tale metodo è molto più potente di quel che si può immaginare, vediamo perchè.

Data una teoria di stringa o di supergravità e presa una configurazione bosonica soluzione di tale teoria le equazioni del moto per i relativi campi bosonici

si ricavano con l'usuale prescrizione variazionale:

$$\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \phi_i} = 0$$

Tale metodo, di provenienza classica, fornisce equazioni differenziali del secondo ordine che possono risultare tutt'altro che semplici da risolvere pertanto solitamente si preferisce usare questo nuovo metodo che presenteremo che ha il vantaggio di essere pilotato da un'equazione differenziale che come vedremo sarà del primo ordine.

Tutto parte dal presupposto che le soluzioni che uno vuole trovare siano configurazioni bosoniche BPS e pertanto preservino un certo numero di supersimmetrie; tale vincolo si traduce nella condizione che le variazioni dei campi fermionici rispetto alle trasformazioni di supersimmetria siano nulle. Queste relazioni danno luogo a quella che prende il nome di *Killing spinor equation*, il cui numero di soluzioni indica proprio la frazione di supersimmetria preservata. Ogni spinore che risolve tale equazione porta una supersimmetria lungo la propria direzione. Nei contesti più semplici come il nostro, basterà imporre che la variazione del partner supersimmetrico del gravitone (gravitino) si annulli e quest'ultima imposizione implicherà appunto l'equazione spinoriale di cui parlavamo, la quale prende la forma:

KILLING SPINORS EQUATION

$$\delta \Psi_\mu = D_\mu \epsilon + \frac{1}{288} \left(\Gamma_\mu^{\nu\rho\sigma\tau} F_{\nu\rho\sigma\tau}^{(4)} - 8 \Gamma^{\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu\rho\sigma}^{(4)} \right) \epsilon = 0$$

dove F rappresenta la *field strength* relativa alla 3-forma $C^{(3)}$, ossia $dC^{(3)} = F^{(4)}$.

Procediamo col definire l'ansatz per la nostra M2 che risulti ovviamente compatibile con la simmetria $SO(1, 2) \times SO(8)$:

$$\begin{aligned} ds^2 &= Z(x_\perp) (-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2) + Y(x_\perp) ds_8^2 \\ A^{(3)} &= X(x_\perp) dt \wedge dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

Dato tale ansatz risulta subito possibile calcolare i vielbiens e le connessioni di spin relative a tale metrica che per brevità ometteremo.

Le simmetrie del problema impongono che l'equazione per gli spinori di Killing si spezzi in due equazioni indipendenti:

- nel caso in cui prendiamo l'indice tra le coordinate x_\parallel tale equazione diventa:

$$\left(-\frac{1}{4} (ZY)^{-1/2} \partial_\perp Z + \frac{1}{6} \Gamma^{012} \partial_\perp X Z^{-1} Y^{-1/2} \right) \epsilon = 0 \quad (2.18)$$

- nel caso in cui, invece, prendiamo l'indice nello spazio trasverso allora l'equazione risulta:

$$\left(\partial_\mu + \frac{1}{4} Y^{-1} \partial_\mu Y \Gamma_A^B + \frac{1}{12} \Gamma_A^B \Gamma^{012} Z^{-3/2} \partial_\mu X - \frac{1}{6} \Gamma^{012} Z^{-3/2} \partial_\mu X \right) \epsilon = 0 \quad (2.19)$$

A queste due equazioni bisogna aggiungere l'equazione del moto per la 3-forma, che risulta essere:

$$d*F^{(4)} = \frac{1}{2} F^{(4)} \wedge F^{(4)} = 0$$

che riscritta per il nostro ansatz diventa:

$$d(Z^{-3/2} Y^3 dX) = 0 \quad (2.20)$$

Le relazioni 2.18, 2.19 e 2.20 sono le equazioni di cui necessitiamo per arrivare alla soluzione finale che volevamo.

In realtà² le equazioni indipendenti contenute nelle relazioni precedenti sono quattro e risultano essere:

$$\begin{cases} (ZY)^{-1/2} \partial Z - \frac{2}{3} \Gamma^{012} \partial X Z^{-1} Y^{-1/2} = 0 \\ Y^{-1} \partial Y + \frac{1}{3} \Gamma^{012} Z^{-3/2} \partial X = 0 \\ (\partial - \frac{1}{6} \Gamma^{012} Z^{-3/2} \partial X) \epsilon = 0 \\ d(Z^{-3/2} Y^3 dX) = 0 \end{cases}$$

Senza perderci troppo nella parte matematica³ sviluppando tali equazioni differenziali giungiamo alla seguente soluzione:

$$\begin{cases} Z = H^{-2/3} + c_1 \\ X = -H^{-1} + c_2 \\ Y = H^{1/3} \\ d(H^2 dX) = \nabla^2 H = 0 \\ (\partial + \frac{1}{6} H^{-1} \partial H) \epsilon = 0 \end{cases}$$

²La motivazione analitica sta nel fatto che l'equazione $\Gamma^{\mu\nu} \epsilon = h \epsilon$ non ammette soluzioni poichè l'operatore $\Gamma^{\mu\nu}$ proietta lo spinore lungo uno spazio perpendicolare allo spinore stesso.

³Bisogna tenere a mente che $(\Gamma^{012})^2 = 1$ e che pertanto tale operatore avrà solamente autovalori unitari pertanto data un'equazione del tipo $(f \epsilon + \Gamma^{012} \epsilon) = 0$ essa implicherà:

$$\begin{aligned} f &= \pm 1 \\ (1 \pm \Gamma^{012}) \epsilon &= 0 \end{aligned}$$

Per convenzione prenderemo il segno +.

Ora tralasciamo l'ultima equazione che non ci porta alcun tipo di informazioni utile per i nostri scopi e risolviamo la penultima equazione.⁴ Impo-
nendo ulteriormente che all'infinito non ci sia alcuna brana, ossia che la
metrica all'infinito sia piatta (cosa totalmente lecita) otteniamo la soluzione
definitiva⁵:

$$\begin{aligned} ds_{11}^2 &= H^{1/3}(dx_{\perp}^2) + H^{-2/3}(dx_{\parallel}^2) \\ A_{012} &= (1 - 1/H) \\ H &= \frac{\alpha}{r^6} + 1 \end{aligned}$$

Tale soluzione è esattamente quella relativa alla configurazione di una M2
brana che abbiamo già ricavato in precedenza.

2.5 M5 brane

L'M5 brana è l'oggetto duale alla M2 nel senso che risulta accoppiato ma-
gneticamente alla 3-forma $A^{(3)}$. Anch'essa è un oggetto supersimmetrico ed
in particolare corrisponde a una configurazione 1/2 BPS, la cui soluzione di
Supergravità assume la forma:

$$ds_{11}^2 = H_5^{-1/3} dx_{\parallel}^2 + H_5^{2/3} dx_{\perp}^2 \quad (2.21)$$

$$H_5 = 1 + \frac{Q_5}{r^3} \quad (2.22)$$

Per quanto riguarda la 3-forma $A^{(3)}$ si può dimostrare che la relativa *field
strenght* $F^{(4)}$ sia proporzionale all'elemento di volume della sfera S^4 contenu-
ta nello spazio trasverso alla brana. Si può verificare che, a differenza della
soluzione di M2-brana, essa non risulti affetta da problemi di singolarità e
che rappresenti una configurazione solitonica della teoria.

Nei prossimi paragrafi ricaveremo velocemente tale metrica tramite il pro-
cedimento algebrico che fa uso delle dualità ma percorrendo due cammini
leggermente diversi; non analizzeremo tale soluzione con il metodo degli spi-
nori di killing poichè in questo caso tale strada risulta tutt'altro che semplice
e necessita di altri strumenti noti come *arrangiamenti di Fierz* che indagheremo
nel prossimo capitolo.

⁴Occorre imporre per simmetria che la funzione H dipenda esclusivamente dalle
coordinate x_{\perp} e in più che sia funzione della sola coordinata radiale nelle direzioni
perpendicolari.

⁵In realtà resta da definire la costante α che dipenderà fisicamente dal numero di brane
presenti nella soluzione.

Poichè i ragionamenti saranno gli stessi affrontati per la M2 brana indugere-
mo meno sui calcoli e ci soffermeremo solamente sui passaggi che risulteranno
nuovi o comunque interessanti.

2.5.1 M5 brana tramite dualità metodo 1

Evidenziamo in modo schematico il percorso che faremo per ottenere l'M5
brana con questo primo metodo:

1. soluzione di Schwarzschild in $4 + 1$ dimensioni;
2. aggiungiamo cinque direzioni z_i con invarianza traslazionale per otte-
nere una soluzione in 10-dimensioni
3. boost di Lorentz lungo $z_1 \rightarrow$ momento P_1 in quella direzione
4. T-dualità lungo $z_1: P_1 \rightarrow F1$;
5. S-dualità lungo : $F1 \rightarrow D1$;
6. T-dualità lungo $z_2, z_3, z_4, z_5 : D1 \rightarrow D5$;
7. dualizzare la 6-forma $C^{(6)} \rightarrow C^{(2)}$ ⁶ ;
8. S-dualità: $D5 \rightarrow NS5$;
9. T-dualità lungo una direzione parallela della NS5: $NS5$ tipo $IIB \rightarrow$
 $NS5$ tipo IIA ⁷;
10. aggiungo una ulteriore dimensione z_6 in modo tale che: $NS5$ tipo $IIA \rightarrow$
 $M5 -$ brana

La metrica di Schwarzschild già scritta nello spazio tempo 10-dimensionale
con l'aggiunta delle cinque direzioni di isometria risulta essere:

$$ds^2 = -(1 - K(\rho))dt^2 + (1 - K\rho)^{-1}d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_3^2 + dz_i^2$$

con $K(\rho)$ funzione armonica in 4 dimensioni spaziali $K(\rho) = r_H \rho^{-2}$.

Dopo aver effettuato il boost di Lorentz e la T-dualità lungo la direzione z_1

⁶Tale procedimento è necessario per ottenere poi in M-teoria una 3-forma e non una
7-forma di cui non sapremmo definire il significato.

⁷Questa operazione sarà necessaria perchè la M-teoria ridotta dimensionalmente ricade
sulla teoria di stringa di tipo IIA e non su quella di tipo IIB.

seguendo gli stessi dettami del capitolo precedente otteniamo la metrica per la stringa fondamentale F1 che risulta:

$$\begin{aligned}
ds^2 &= -\frac{1 - K(\rho)}{1 + K(\rho) \sinh^2 \gamma} dt^2 + \\
&(1 - K(\rho))^{-1} d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_3^2 + \frac{1}{1 + K(\rho) \sinh^2 \gamma} dz_1^2 + dz_j^2 \\
B_{t1}^{(2)} &= \frac{\cosh \gamma \sinh \gamma K(\rho)}{1 + K(\rho) \sinh^2 \gamma} \\
e^{2\phi} &= \frac{1}{1 + K(\rho) \sinh^2 \gamma}
\end{aligned}$$

Dopodichè effettuando S-dualità trasformiamo tale oggetto nella D1 brana e otteniamo:

$$\begin{aligned}
ds^2 &= -\frac{\sqrt{(1 + K(\rho) \sinh^2 \gamma)(1 - K(\rho))}}{1 + K(\rho) \sinh^2 \gamma} dt^2 \\
&+ (1 - K(\rho))^{-1} d\rho^2 + \sqrt{(1 + K(\rho) \sinh^2 \gamma)} \rho^2 d\Omega_3^2 + \frac{1}{1 + K(\rho) \sinh^2 \gamma} dz_1^2 + dz_j^2 \\
C_{t1}^{(2)} &= \frac{\cosh \gamma \sinh \gamma K(\rho)}{1 + K(\rho) \sinh^2 \gamma} \\
e^{2\phi} &= (1 + K(\rho) \sinh^2 \gamma)
\end{aligned}$$

Ora, ricordando che una trasformazione di T-dualità lungo le direzioni perpendicolari di una D-p brana la trasforma in una D-(p + 1) brana e che questo procedimento può essere iterato in modo naturale, eseguiamo quattro trasformazioni di T-dualità in serie lungo le coordinate z_i con $i = 2, 3, 4, 5$ per

ottenere una D5 brana, la cui corrispondente soluzione risulta:

$$\begin{aligned}
ds^2 &= -\frac{1-K(\rho)}{\sqrt{(1+K(\rho)\sinh^2\gamma)}}dt^2 + \sqrt{(1+K(\rho)\sinh^2\gamma)}\rho^2 d\Omega_3^2 \\
&+ \frac{\sqrt{(1+K(\rho)\sinh^2\gamma)}}{1-K(\rho)}d\rho^2 + \frac{1}{\sqrt{(1+K(\rho)\sinh^2\gamma)}}(dz_1^2 + dz_2^2 + dz_3^2 + dz_4^2 + dz_5^2) \\
C_{t12345}^{(6)} &= \frac{\cosh\gamma\sinh\gamma K(\rho)}{1+K(\rho)\sinh^2\gamma} \\
e^{2\phi} &= \frac{1}{1+K(\rho)\sinh^2\gamma}
\end{aligned}$$

Siamo a conoscenza del fatto che la M-Teoria contenga un solo campo di forme rappresentato da una 3-forma, pertanto prima di continuare con i passaggi algebrici che ci condurranno alla M5-brana, occorre innanzitutto dualizzare la 6-forma $C^{(6)}$ per trasformarla in una nuova 2-forma $\tilde{C}^{(2)}$. Tale meccanismo poggia sull'operazione detta *duale di Hodge* e sul fatto che tramite tale meccanismo è possibile identificare lo spazio delle p-forme con quello delle (n-p)-forme poichè questi ultimi hanno la stessa dimensione.

Tramite tale ragionamento pertanto si può concludere che:

$$*_10 F^{(7)} = *_10[dC^{(6)}] = \tilde{F}^{(3)} = d\tilde{C}^{(2)}$$

la quale implica l'identificazione:

$$*_10 F^{(7)} = 2r_h^2 \cosh\gamma \sinh\gamma \cos\theta \sin\theta d\theta \wedge d\phi \wedge d\psi = d\tilde{C}^{(2)}$$

e la conseguente equazione differenziale:

$$\partial_\theta \tilde{C} = r_h^2 \cosh\gamma \sinh\gamma \sin(2\theta)$$

la cui soluzione risulta:

$$\tilde{C}^{(2)} = -\frac{1}{2}r_h^2 \cosh\gamma \sinh\gamma \cos(2\theta)d\phi \wedge d\psi$$

Tornando al nostro cammino algebrico operiamo con S-dualità per ottenere la soluzione di NS5 di tipo IIB, ossia:

$$\begin{aligned}
ds^2 &= (dz_1^2 + dz_2^2 + dz_3^2 + dz_4^2 + dz_5^2) - (1 - K(\rho))dt^2 + \\
&+ \frac{1 + K(\rho) \sinh^2 \gamma}{1 - K(\rho)} d\rho^2 + (1 + K(\rho) \sinh^2 \gamma) \rho^2 d\Omega_3^2 \\
B^{(2)} &= -\frac{1}{2} r_h^2 \cosh \gamma \sinh \gamma \cos(2\theta) d\phi \wedge d\psi \\
e^{2\phi} &= (1 + K(\rho) \sinh^2 \gamma)
\end{aligned}$$

Come abbiám già accennato, per alzare la teoria in 11-dimensioni occorre prima di tutto passare da una NS5 di tipo IIB a una NS5 di tipo IIA, semplicemente agendo con T-dualità lungo una delle direzioni della NS5; si può dimostrare che tale operazione non cambi nulla della metrica e del $B^{(2)}$.

La soluzione che abbiám trovato ora è come nel caso precedente una soluzione *non-estremale*, pertanto occorre nuovamente imporre i limiti $\gamma \rightarrow \infty$ e $r_H \rightarrow 0$ in modo tale che la quantità $(r_H^2 \sinh^2 \gamma) = \chi$ rimanga finita. Otteniamo in questo modo la soluzione di NS5 di tipo IIA estrema, che risulta:

NS5 II A ESTREMALE IN 10 DIMENSIONI

$$\begin{aligned}
ds^2 &= (-dt^2 + dz_1^2 + dz_2^2 + dz_3^2 + dz_4^2 + dz_5^2) + H(d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_3^2) \\
B^{(2)} &= -\frac{\chi \cos(2\theta)}{2} d\phi \wedge d\psi \\
e^{2\phi} &= H \\
H &= 1 + \frac{\chi}{r^2}
\end{aligned}$$

Non ci resta che innalzare la teoria aggiungendo una ulteriore dimensione alla nostra soluzione per ottenere il risultato finale:

M5 BRANA ESTREMALE IN 11 DIMENSIONI

$$\begin{aligned}
ds_{11}^2 &= H^{2/3}(dx_{\perp}^2) + H^{-1/3}(dx_{\parallel}^2) \\
A^{(3)} &= -\frac{\chi \cos(2\theta)}{2} d\phi \wedge d\psi \wedge dx_{\perp}
\end{aligned}$$

Come possiamo notare è esattamente la soluzione che desideravamo.

2.5.2 M5 brana tramite dualità metodo 2

In questo capitolo presenteremo una via alternativa e forse più semplice per ricavare la soluzione di M5-brana; poichè tale metodo risulta identico al precedente fino al punto 5) ci limitiamo a commentare il prosieguo.

Arrivati alla soluzione di D1 brana in 10 dimensioni questa volta eseguiamo le seguenti operazioni:

- T-dualità lungo tre direzioni trasverse alla D1 brana per ottenere una D4 brana
- innalzamento dimensionale lungo una direzione parallela alla D-brana per trasformare la D4 brana in una M5-brana

Partiamo direttamente dalla soluzione per una D4-brana estrema in 10-dimensioni, ossia:

$$\begin{aligned} ds^2 &= H^{-1/2}(dx_{\parallel}^2) + H^{1/2}(dx_{\perp}^2) \\ A^{(3)} &= -\frac{\chi \cos(2\theta)}{2} d\phi \wedge d\psi \wedge dz_{\perp} \\ e^{2\phi} &= H^{-1/2} \\ H &= 1 + \frac{\chi}{\rho^2} \end{aligned}$$

e eseguiamo semplicemente l'operazione di *lift* aggiungendo una direzione ulteriore z_6 che porti alle identificazioni:

$$\begin{aligned} G_{66}^{(11)} &= (e^{2\phi})^{2/3} = H^{-1/3} \\ G_{\mu\nu}^{(11)} &= (e^{2\phi})^{-1/3} G_{\mu\nu}^{(10)} = H^{1/6} G_{\mu\nu}^{(10)} \end{aligned}$$

e in questo modo arriviamo nuovamente alla soluzione di M5-brana BPS nota rappresentata dalle espressioni:

M5 BRANA ESTREMALE IN 11 DIMENSIONI

$$\begin{aligned} ds_{11}^2 &= H^{2/3}(dx_{\perp}^2) + H^{-1/3}(dx_{\parallel}^2) \\ A^{(3)} &= -\frac{\chi \cos(2\theta)}{2} d\phi \wedge d\psi \wedge dx_{\perp} \end{aligned}$$

Capitolo 3

Soluzioni $\frac{1}{2}$ BPS di M-teoria

3.1 Geometrie LLM

In questo capitolo andremo alla ricerca di soluzioni supersimmetriche di Supergravità 11D. Soprattutto col fine di investigare la controparte duale tramite AdS-CFT la bibliografia su tali argomenti negli ultimi anni è aumentata notevolmente (vedi ad es. [6], [23], [49]). Sono state investigate numerose soluzioni supersimmetriche e le relative geometrie che corrispondono a configurazioni gravitazionali di M-brane.

E' nostra intenzione analizzare il sottinsieme di tali soluzioni aventi la caratteristica di essere $\frac{1}{2}$ BPS che pertanto dovrebbero corrispondere a oggetti gravitazionali $\frac{1}{2}$ BPS come M2 e M5 brane. Tale classe di soluzione è stata ampiamente investigata nel noto articolo [23] da cui vogliamo iniziare la nostra trattazione.

Le soluzioni investigate in tale articolo, che prendono il nome di geometrie LLM, hanno come gruppo di simmetria $SO(6) \times SO(3)$ ¹ ed hanno la peculiarità di dipendere esclusivamente da una funzione scalare dipendente da solamente tre coordinate e soddisfacente una equazione differenziale nota come Equazione di Toda.

Proprio con l'idea futura di utilizzare AdS-CFT per analizzare anche la controparte duale della soluzione gravitazionale è nostra intenzione modificare leggermente le simmetrie di tale soluzione e andare a verificare quel che accade.

Le geometrie $\frac{1}{2}$ BPS trovate nell'articolo [23] aventi isometrie $SO(6) \times SO(3)$

¹In realtà il gruppo di simmetria completo della soluzione è $SO(6) \times SO(3) \times \mathcal{R}$.

corrispondono a soluzioni del tipo:

$$\begin{aligned}
ds_{11}^2 &= \frac{e^{2\lambda}}{m^2} \left(d\Omega_5^2 + \frac{y^2 e^{-6\lambda}}{4} d\tilde{\Omega}_2^2 - \cosh^2 \zeta (dt + V_i dx^i)^2 + \frac{e^{-6\lambda}}{4 \cosh^2 \zeta} (dy^2 + e^D d\vec{x}^2) \right) \\
G_{(4)} &= [dB_t \wedge (dt + V) + \frac{y^2 e^{-6\lambda}}{4m \cosh \zeta} *_3 d\Phi] \wedge d\tilde{\Omega}_2^2, \quad \sinh \zeta = -y e^{-3\lambda} \\
V_i &= \frac{1}{2} \epsilon_{ji} \partial_j D, \quad B_t = -\frac{y^3 e^{-6\lambda}}{2m^3}, \quad \Phi = -\frac{2}{m} e^{6\lambda}, \quad e^{-6\lambda} = \frac{\partial_y D}{y(1 - y \partial_y D)}
\end{aligned}$$

Come già accennato le soluzioni sono univocamente determinate dalla funzione scalare D dipendente solamente dalle coordinate x_1, x_2, y e soddisfacente l'equazione di Toda tridimensionale:

$$\Delta D + \partial_y^2 e^D = 0 \quad (3.1)$$

In realtà la struttura generale della classe di soluzioni di cui noi vogliamo occuparci è già stata ricavata in tale articolo tramite continuazione analitica di certe coordinate della metrica 11-dimensionale a partire dalle soluzioni $SO(6) \times SO(3)$; è nostro volere però riottenere tale classe di soluzioni tramite calcolo diretto seguendo quello che gli autori di tale articolo fanno nell'appendice F.

Per snellire la trattazione di questo capitolo che risulta già piuttosto pesante sotto il profilo dei calcoli tutte le convenzioni e le notazioni utilizzate sono rimandate all'Appendice A, che potete trovare a seguito dei capitoli.

3.2 Soluzioni $\frac{1}{2}$ BPS con simmetria $SO(1, 5) \times SO(3)$

Quel che vogliamo ottenere è la più ampia classe di soluzioni $\frac{1}{2}$ BPS aventi gruppo di simmetria $SO(1, 5) \times SO(3)$.

Date le isometrie del problema l'unico ansatz possibile per la nostra soluzione risulta essere:

$$\begin{aligned}
ds_{11}^2 &= e^{2\tilde{\lambda}} \left(\frac{1}{m^2} ds_{AdS_5}^2 + e^{2\tilde{A}} d\tilde{\Omega}_2^2 + ds_4^2 \right) \\
G_{(4)} &= G_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge dx^{\mu_3} \wedge dx^{\mu_4} + \partial_{\mu_1} B_{\mu_2} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge d\tilde{\Omega}_2^2
\end{aligned} \quad (3.2)$$

in cui le funzioni scalari $\tilde{\lambda}, \tilde{A}$ dipendono esclusivamente dalle coordinate sul sottospazio quadridimensionale.

3.2.1 Killing spinors equation e arrangiamenti di Fierz

Come già mostrato negli esempi del capitolo precedente, per ottenere tali soluzioni useremo la cosiddetta *Killing spinors equation*, ossia andremo a imporre, una volta definite le simmetrie del problema, che tale configurazione sia effettivamente $\frac{1}{2}$ BPS e che pertanto preservi la metà del numero di supercariche massimo, ossia 16 supercariche. Presto vedremo che tale equazione non sarà facilmente risolvibile come nel caso della M2 brana, anzi per essere più precisi non sarà proprio analiticamente risolvibile, pertanto dovremo utilizzare altri strumenti noti come *Fierz Arrangements* per giungere al nostro scopo.

Preso atto della nostra configurazione, lo spazio 11-dimensionale in gioco appare tensorizzato come $AdS_5 \otimes S_2 \otimes \mathcal{M}_4$, questo implica direttamente che gli spinori risolvono l'equazione di Killing e le matrici Gamma della rappresentazione spinoriale del gruppo di Lorentz possano essere decomposte come prodotto tensore su tali spazi. Una volta definite le 11 matrici Gamma della rappresentazione da noi scelta, indicato con η lo spinore 11D, iniziamo col decomporre quest'ultimo sullo spazio AdS_5 nel seguente modo:

$$\eta = \psi(\theta^a) \otimes e^{\tilde{\lambda}/2} \xi \quad (3.3)$$

ed occupiamoci di quale possa essere l'equazione che risolve lo spinore $\psi(\theta^a)$ sullo spazio AdS_5 .

Constatata l'impossibilità di definire uno spinore totalmente covariante su tale spazio, ossia risolvente una equazione del tipo $D\psi = 0$, a causa della presenza della curvatura non nulla, occorre ricadere sulla definizione di spinore *mostly covariant* ossia soluzione di una equazione del tipo $D_a\psi = \alpha \rho_a\psi$. Con alcuni passaggi² è possibile constatare che la costante di proporzionalità valga $\alpha = \frac{1}{2}$ e che pertanto l'equazione che soddisfa lo spinore su tale spazio sia:

$$D_a\psi = \frac{\rho_a}{2}\psi \quad (3.4)$$

Verificato tale risultato possiamo osservare che la derivata covariante sulle direzioni dell' AdS_5 valga:

$$\nabla_a = mD_a - \frac{1}{2}\gamma_a^\mu \partial_\mu \tilde{\lambda} \quad (3.5)$$

Osservata la metrica 3.2 il fattore m ci sta ad indicare che in realtà il raggio di tale spazio non è unitario, mentre il secondo fattore nella derivazione

²Occorre ricordare che vale la relazione $[D_a, D_b]\psi = R_{ab}^{cd}\mathcal{J}_{cd}\psi$.

contiene le parti di connessioni di spin dovute al fattore comune $e^{2\tilde{\lambda}}$ presente nella metrica.

A questo punto, utilizzando la definizione 3.5, possiamo iniziare a decomporre l'equazione di killing iniziale :

$$\nabla_m \eta + \frac{1}{288} (\Gamma_m^{npqr} G_{npqr}^{(4)} - 8 \Gamma^{pqr} G_{mpqr}^{(4)}) \eta = 0 \quad (3.6)$$

sui relativi sottospazi prendendo come indice di derivata una coordinata una volta di un sottospazio e una volta di un altro. Vediamo almeno un caso diretto di tale decomposizione, per esempio, prendendo l'indice di derivata lungo una direzione dell' AdS_5 .

Prendendo $m = a$ l'equazione 3.23 diventa:

$$\begin{aligned} \nabla_a (\psi(\theta^a) \otimes e^{\tilde{\lambda}/2} \xi) + \frac{1}{288} (\Gamma_a^{npqr} G_{npqr}^{(4)} - 8 \Gamma^{pqr} G_{apqr}^{(4)}) (\psi(\theta^a) \otimes e^{\tilde{\lambda}/2} \xi) &= 0 \\ (mD_a - \frac{1}{2} \gamma^\mu_a \partial_\mu \tilde{\lambda}) \psi(\theta^a) \otimes e^{\tilde{\lambda}/2} \xi + \frac{1}{288} (\Gamma_a^{npqr} G_{npqr}^{(4)}) (\psi(\theta^a) \otimes e^{\tilde{\lambda}/2} \xi) &= 0 \end{aligned}$$

Ricordando di appiattare le matrici Gamma³ tale equazione diventa:

$$\begin{aligned} (m(\rho_a \otimes \gamma_7^2) + (\rho_a \otimes \gamma_7) \gamma^\mu \partial_\mu \tilde{\lambda}) \psi(\theta^a) \otimes e^{\tilde{\lambda}/2} \xi + \\ + \frac{1}{144} (e^{-3\tilde{\lambda}} (\rho_a \otimes \gamma_7) \tilde{\Gamma}^{npqr} G_{npqr}^{(4)}) \psi(\theta^a) \otimes e^{\tilde{\lambda}/2} \xi = 0 \end{aligned}$$

e in definitiva otteniamo l'equazione di Killing (con indice sullo spazio di Anti De Sitter) ridotta sulla AdS_5 , ossia:

$$(m\gamma_7 + \gamma^\mu \partial_\mu \tilde{\lambda} + \frac{1}{144} e^{-3\tilde{\lambda}} \tilde{\Gamma}^{npqr} G_{npqr}^{(4)}) \xi = 0 \quad (3.7)$$

Con procedimenti del tutto analoghi è possibile ricavare la stessa equazione per gli indici di coordinata relativi agli altri due sottospazi scomponendo l'equazione originaria 3.23 nelle tre equazioni:

$$(m\gamma_7 + \gamma^\mu \partial_\mu \tilde{\lambda} + \frac{1}{144} e^{-3\tilde{\lambda}} \tilde{\Gamma}^{npqr} G_{npqr}^{(4)}) \xi = 0 \quad (3.8)$$

$$(\tilde{\nabla}_\alpha - \frac{1}{2} m \gamma_\alpha \gamma_7 - \frac{1}{2} \gamma^\mu_\alpha \partial_\mu \tilde{A} - \frac{1}{8} e^{-3\tilde{\lambda}} \tilde{\Gamma}^{\beta\mu\nu} G_{\alpha\beta\mu\nu}^{(4)}) \xi = 0 \quad (3.9)$$

$$(\nabla_\mu - \frac{1}{2} m \gamma_\mu \gamma_7 - \frac{1}{24} e^{-3\tilde{\lambda}} \tilde{\Gamma}^{pqr} G_{\mu pqr}^{(4)}) \xi = 0 \quad (3.10)$$

³ $\Gamma_a^{npqr} = e^{-3\tilde{\lambda}} \tilde{\Gamma}_a^{npqr}$.

Una volta effettuata la decomposizione sull'AdS occorre reiterare tale procedimento sulla sfera bidimensionale.

Definiti sulla sfera due spinori a chiralità definita χ_+, χ_- possiamo nuovamente riscrivere l'equazione per gli spinori *mostly covariant* ma questa volta sulla sfera, che risulta:

$$\tilde{\nabla}_\alpha \chi_\pm = \pm \frac{i}{2} \Gamma_\alpha \chi_\pm = \pm \frac{i}{2} e^{-\tilde{A}} \gamma_\alpha \gamma_5 \chi_\pm \quad (3.11)$$

Prima di procedere oltre occupiamoci per un momento dell'equazione del moto per la 4-forma $G^{(4)}$ che risulta essere:

$$d(*_{11}G^{(4)}) = \frac{1}{2}G^{(4)} \wedge G^{(4)}$$

In seguito al nostro ansatz il secondo membro di tale equazione risulta nullo e pertanto la relazione diventa:

$$d\left(\frac{e^{3\tilde{\lambda}+2\tilde{A}}}{m^5} *_4G\right) + d\left(\frac{e^{3\tilde{\lambda}-2\tilde{A}}}{m^5} *_4dB\right) = 0 \quad (3.12)$$

Analizzando il primo termine di tale equazione, il quale deve annullarsi indipendentemente dal secondo, esso implica:

$$G_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = I_1 e^{-3\tilde{\lambda}-2\tilde{A}} \epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} \quad (3.13)$$

ossia l'esistenza di un flusso I_1 lungo le quattro dimensioni spaziali non compatte. Per i nostri scopi⁴ siamo interessati a soluzioni a flusso nullo, pertanto d'ora in poi la nostra 4-forma $G^{(4)}$ sarà semplicemente:

$$G^{(4)} = \partial_{\mu_1} B_{\mu_2} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge d\tilde{\Omega}_2^2 \quad (3.14)$$

Definito un operatore di chiralità tale che $P\chi_\pm = \pm\chi_\pm$ le equazioni di killing possono essere semplificate nella forma:

$$[\gamma^\mu \partial_\mu \tilde{\lambda} + m\gamma_7 + \frac{1}{12} e^{-3\tilde{\lambda}-2\tilde{A}} \tilde{\gamma} \gamma^{\mu\nu} \partial_\mu B_\nu] \xi = 0 \quad (3.15)$$

$$[ie^{-\tilde{A}} \gamma_5 P + \gamma^\mu \partial_\mu \tilde{A} - m\gamma_7 - \frac{1}{4} e^{-3\tilde{\lambda}-2\tilde{A}} \tilde{\gamma} \gamma^{\mu\nu} \partial_\mu B_\nu] \xi = 0 \quad (3.16)$$

$$[\nabla_\mu - \frac{m}{2} \gamma_\mu \gamma_7 - \frac{1}{4} e^{-3\tilde{\lambda}-2\tilde{A}} \gamma^\nu \tilde{\gamma} \partial_{[\mu} B_{\nu]}] \xi = 0 \quad (3.17)$$

In definitiva possiamo decomporre lo spinore ξ sulla base data dagli spinori a chiralità definita sulla sfera nel seguente modo:

$$\xi = \chi_+ \otimes \epsilon_+ + \chi_- \otimes \epsilon_-$$

⁴Esiste anche un no-go theorem a riguardo [35].

Si può verificare che il sistema di equazioni di killing a questo punto si possa decomporre in due sistemi disaccoppiati⁵ e pertanto si possa risolvere imponendo la relazione:

$$\epsilon_- = -a\gamma_5\epsilon_+$$

con $a = \pm 1$.

In questo modo l'equazione di killing iniziale in undici dimensioni si riduce a causa delle simmetrie del nostro ansatz in un sistema di equazioni per uno spinore 4D $\epsilon = \epsilon_+$ che risultano:

$$[\gamma^\mu \partial_\mu \tilde{\lambda} - \imath am + \frac{1}{12} e^{-3\tilde{\lambda}-2\tilde{A}} a \gamma_5 \gamma^{\mu\nu} \partial_\mu B_\nu] \epsilon = 0 \quad (3.18)$$

$$[\imath e^{-\tilde{A}} \gamma_5 + \gamma^\mu \partial_\mu \tilde{A} + \imath am - \frac{a}{4} e^{-3\tilde{\lambda}-2\tilde{A}} \gamma_5 \gamma^{\mu\nu} \partial_\mu B_\nu] \epsilon = 0 \quad (3.19)$$

$$[\nabla_\mu + \frac{\imath am}{2} \gamma_\mu - \frac{a}{8} e^{-3\tilde{\lambda}-2\tilde{A}} \gamma^\nu \partial_{[\mu} B_{\nu]} \gamma_5] \epsilon = 0 \quad (3.20)$$

Queste equazioni saranno il punto di partenza fondamentale per la ricerca della nostra soluzione più generale che preservi le simmetrie da noi volute; come già accennato tale sistema risulterà impossibile da risolvere analiticamente pertanto ricorreremo ai cosiddetti arrangiamenti di Fierz che andremo a descrivere nel prossimo capitolo.

Si può notare che esse risultano identiche a quelle ricavate nell'articolo LLM[23] per uno spazio contenente una sfera 5D al posto di un AdS_5 nel caso in cui effettuiamo una trasformazione sul parametro m nel seguente modo:

$$m \longrightarrow -\imath m$$

3.2.2 Fierz Arrangements e definizione della metrica

La tecnica [36] che useremo per trovare la nostra soluzione è stata ricavata dal fisico svizzero Fierz e rappresenta una valida alternativa alla risoluzione analitica delle equazioni di killing. Tale tecnica si basa sul definire dei bilineari spinoriali sui quali risulta possibile esprimere vere e proprie relazioni algebriche facilmente risolvibili e quindi particolarmente utili per definire per esempio la metrica della nostra soluzione senza risoluzione diretta delle equazioni di killing.

Definiamo a questo scopo i seguenti bilineari:

$$f_1 = \bar{\epsilon}\epsilon, f_2 = \bar{\epsilon}\Gamma_5\epsilon, K_\mu = -2\bar{\epsilon}\gamma_\mu\epsilon, L_\mu = 2m\bar{\epsilon}\gamma_\mu\Gamma_5\epsilon, Y_{\mu\nu} = \bar{\epsilon}\gamma_{\mu\nu}\epsilon \quad (3.21)$$

⁵Per la precisione il sistema si disaccoppia prendendo le combinazioni lineari $(\epsilon_- + \gamma_5\epsilon_+)$ e $(\epsilon_- - \gamma_5\epsilon_+)$.

Ora, utilizzando le equazioni di killing e le loro complesse coniugate, possiamo subito definire delle relazioni differenziali per tali bilineari, ossia:

$$\nabla_{\mu} f_1 = 0 \quad (3.22)$$

$$\nabla_{\mu} f_2 = -i L_{\mu} - 3\partial_{\mu} \tilde{\lambda} f_2 \quad (3.23)$$

$$\nabla_{\nu} K_{\mu} = +2i m Y_{\mu\nu} + \frac{e^{-3\tilde{\lambda}-2\tilde{A}}}{2} F_{\mu\nu} f_2 \quad (3.24)$$

Prima di andare avanti notiamo semplicemente che il bilineare f_1 risulta uno scalare antihermitiano e pertanto puramente immaginario, mentre f_2 risulta hermitiano e pertanto reale; nel prosieguo normalizzeremo tali bilineari a:

$$f_1 = -i; \quad f_2 = -\sinh \zeta \quad (3.25)$$

A questo punto la 3.23 ci conduce alla seguente equazione⁶:

$$L_{\mu} dx^{\mu} = e^{-3\tilde{\lambda}} dy \quad (3.26)$$

identificando con y una nuova coordinata dello spazio quadridimensionale trasnversa alle altre tre, la quale vale $y = -i e^{3\tilde{\lambda}} \sinh \zeta$. In questo sistema di coordinate pertanto L_{μ} possiede una sola componente non banale lungo la coordinata y .

Data la completa antisimmetria della 3.24 il vettore K^{μ} risulta essere un vettore di killing; scegliamo un sistema di coordinate tale che esso sia diretto lungo la direzione temporale e che sia normalizzato a $K^t = -2im$. Si può anche dimostrare che $\mathcal{L}_k G^{(4)} = 0$ e che pertanto nessun coefficiente della metrica nè della 4-forma dipenda esplicitamente dalla coordinata t .

E' immediato verificare che K e L siano perpendicolari e che pertanto le componenti della metrica g_{ty} debba essere nulla. Per ottenere le altre componenti della metrica utilizziamo le identità di Fierz ed in particolare le relazioni algebriche che coinvolgono i moduli quadri di tali quantità, ossia:

$$L^2 = -4m^2 \cosh^2 \zeta \quad (3.27)$$

$$K^2 = -4 \cosh^2 \zeta \quad (3.28)$$

da queste due relazioni possiamo dedurre che :

$$g_{tt} = \frac{1}{m^2} \cosh^2 \zeta \quad (3.29)$$

$$g_{yy} = \frac{e^{-6\tilde{\lambda}}}{4m^2 \cosh^2 \zeta} \quad (3.30)$$

⁶Il parametro $\tilde{\lambda}$ è legato al parametro λ dell'articolo LLM[23] tramite la relazione: $\tilde{\lambda} = \lambda - i\frac{\pi}{2}$.

A questo punto siamo quasi completamente in grado di scrivere la metrica dello spazio quadridimensionale ⁷ della nostra soluzione che diventa:

$$ds_4^2 = +\frac{1}{m^2} \cosh^2 \zeta (dt + V_i dx^i)^2 + \frac{e^{-6\tilde{\lambda}}}{4m^2 \cosh^2 \zeta} (dy^2 + g_{ij} dx^i dx^j) \quad (3.31)$$

Sfruttando la semplice relazione $\cosh^2 \zeta = 1 - y^2 e^{-6\tilde{\lambda}}$ e fissando il parametro m come prima anticipato, la metrica dello spazio quadridimensionale diventa:

$$ds_4^2 = 4(1 - y^2 e^{-6\tilde{\lambda}}) (dt + V_i dx^i)^2 + \frac{e^{-6\tilde{\lambda}}}{1 - y^2 e^{-6\tilde{\lambda}}} (dy^2 + g_{ij} dx^i dx^j) \quad (3.32)$$

Occupiamoci infine di analizzare il *warp factor* $e^{\tilde{A}}$ presente nella metrica. Utilizzando una combinazione lineare delle equazioni 3.18, 3.19 otteniamo la relazione:

$$2\partial_\mu(\tilde{A} + 3\tilde{\lambda}) = \frac{e^{-\tilde{A}}}{m'} L_\mu$$

che, una volta integrata e inserito il valore 3.26 del bilineare L_μ , ci conduce a determinare il fattore della metrica presente a fattore dello spazio sferico 2D, ossia:

$$e^{2\tilde{A}} = y^2 e^{-6\tilde{\lambda}} \quad (3.33)$$

A questo punto per quanto riguarda la metrica non resta che determinare la parte bidimensionale restante.

Per snellire la trattazione nel prosieguo definiamo:

$$g_0 = \frac{\imath \cosh \zeta}{m}$$

$$h = \frac{e^{-3\tilde{\lambda}}}{2m \cosh \zeta}$$

in tal modo:

$$e_{\hat{\mu}}^{\hat{0}} = g_0(dt + V), \quad e_{\hat{j}}^{\hat{i}} = h \hat{e}_{\hat{j}}^{\hat{i}}, \quad e_{\hat{j}}^{\hat{3}} = h.$$

⁷Precisiamo che nel seguito il parametro m sarà fissato a $m = \frac{1}{2}$.

3.2.3 Proiettori, forma degli spinori e equazione per la Field Strength

Analizziamo rapidamente la forma degli spinori di killing e quali operatori di proiezione possono venir applicati ad essi.

Utilizzando alcune relazioni precedentemente ottenute⁸ possiamo arrivare alla relazione:

$$(e^{-\Gamma_3\zeta} + \iota\Gamma_3\Gamma_5)\epsilon = 0$$

Introducendo $\epsilon = e^{\Gamma_3\frac{\zeta}{2}}\tilde{\epsilon}$, tale relazione si semplifica ulteriormente e dà vita ad una condizione di proiezione sullo spinore $\tilde{\epsilon}$, la quale risulta essere:

$$(1 + \iota\Gamma_3\Gamma_5)\tilde{\epsilon} = 0 \quad (3.34)$$

Utilizzando le definizioni per i bilineari K^t e L_y e le loro normalizzazioni possiamo definire un altro operatore di proiezione⁹ sullo spinore $\tilde{\epsilon}$, ossia:

$$(1 - \Gamma^5\Gamma^0\Gamma^3)\tilde{\epsilon} = 0$$

Riassumendo questa breve sezione, abbiamo mostrato che lo spinore ϵ possa essere espresso in funzione di un altro spinore quadridimensionale $\tilde{\epsilon}$, il quale viene annichilito da due operatori di proiezione indipendenti, per cui esso possiede solamente un grado di libertà libero poichè ogni proiettore agisce dimezzando i gradi di libertà indipendenti. In definitiva utilizzando il fatto che $f_1 = -\iota$ possiamo ridefinire tale spinore, oramai unidimensionale, come:

$$\tilde{\epsilon} = e^{i\phi}\tilde{\epsilon}_0 \quad (3.35)$$

in cui $\tilde{\epsilon}_0$ è uno spinore costante; inoltre tramite una opportuna trasformazione di Lorentz possiamo far in modo che la fase ϕ e pertanto lo spinore $\tilde{\epsilon}$ siano unicamente funzione della coordinata temporale.

Soffermiamoci ora nuovamente sull'equazioni del moto che la Field Strength deve soddisfare. In seguito alla parametrizzazione della 4-forma 3.14, dovuta al fatto che siamo interessati a soluzioni con flusso nullo lungo le quattro direzioni compatte, l'equazione per la Field Strength diventa:

$$d(e^{3\tilde{\lambda}-2\tilde{A}}*_4dB) = 0 \quad (3.36)$$

⁸Utilizzando il fatto che $\not{\partial}(\tilde{A} + 3\tilde{\lambda})\epsilon = (-\iota e^{-\tilde{A}}\gamma_5 + 2\iota m)\epsilon$ e ricordando la 3.33.

⁹ Tale condizione può essere riscritta come:

$$(1 + \iota\Gamma^1\Gamma^2)\tilde{\epsilon} = 0$$

Riscrivendo per convenienza¹⁰ di calcoli il campo di gauge B nella base della metrica $B = B_t(dt + V_i dx^i)^2 + \widehat{B}$, l'equazione del moto per la Field Strength diventa:

$$\begin{aligned} d(e^{3\tilde{\lambda}-2\tilde{A}} *_4 dB) &= d(e^{3\tilde{\lambda}-2\tilde{A}} \frac{-\imath m}{\cosh \zeta} *_3 dB_t) + \\ &+ dV \wedge (e^{3\tilde{\lambda}-2\tilde{A}} \frac{\cosh \zeta}{-\imath m} *_3 (B_t dV + d\widehat{B})) - \\ &- (dt + V) \wedge d(e^{3\tilde{\lambda}-2\tilde{A}} \frac{\cosh \zeta}{-\imath m} *_3 (B_t dV + d\widehat{B})) = 0 \end{aligned}$$

Tale equazione porta in realtà a due equazioni indipendenti¹¹ che risultano:

$$\imath e^{3\tilde{\lambda}-2\tilde{A}} \frac{\cosh \zeta}{m} *_3 (B_t dV + d\widehat{B}) = d\tilde{\Phi} \quad (3.37)$$

$$d(-\imath e^{3\lambda-2A} \frac{m}{\cosh \zeta} *_3 dB_t + V \wedge d\tilde{\Phi}) = 0 \quad (3.38)$$

Vogliamo ora determinare i valori delle funzioni $B_t, \tilde{\Phi}$.

Per ricavare il valore di B_t ricordiamo che il vettore K, precedentemente definito, ha valori non nulli solo lungo la coordinata t e utilizziamo il fatto che $F_{\mu\nu}$ sia la Field Strength del campo di Gauge B ed otteniamo la relazione:

$$\partial_\mu B_t = -\frac{\imath}{4m} \bar{\epsilon}[\gamma_\mu, \not{F}] \epsilon$$

Inoltre, utilizzando una combinazione lineare delle 3.18 e 3.19, è possibile eliminare \not{F} dalle relazione precedente e giungere a¹²:

$$\partial_\mu B_t = +6e^{\lambda+A} \partial_\mu e^{2\lambda+2A}$$

ed integrando tale equazione possiamo finalmente ricavare che:

$$B_t = +4e^{3\tilde{\lambda}+3\tilde{A}} \quad (3.39)$$

Possiamo notare che tale risultato abbia esattamente segno opposto nel caso dello spazio sferico (vedi F.57 articolo LLM [23]).

Infine calcoliamo velocemente il valore di $\tilde{\Phi}$ che insieme a B_t ci permetterà di definire il nostro campo di gauge B.

Innanzitutto, servendoci della relazione algebrica $\{\gamma_\mu, \gamma_\alpha\} = -2\imath \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} \gamma_5 \gamma^\beta$, otteniamo che:

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} K^\nu = -\imath \bar{\epsilon} \gamma_5 \{\gamma_\mu, \not{F}\} \epsilon$$

¹⁰Con tale parametrizzazione risulta: $dB = dB_t(dt + V_i dx^i) + B_t dV + d\widehat{B}$.

¹¹Prendendone le componenti lungo $(dt + V) \wedge dx^\alpha$ e quelle lungo $dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\delta$.

¹²Ricordando che $f_2 = 2m \imath e^{\tilde{A}}$.

da quest'ultima relazione è nuovamente possibile, utilizzando nuovamente la 3.18 e la sua complessa coniugata, eliminare $\#$ dalla relazione precedente ed ottenere:

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} K^\nu = -48e^{3\tilde{\lambda}+2\tilde{A}} \partial_\mu \tilde{\lambda}$$

Tale relazione però risulta collegata, tramite le equazioni per la Field Strength, anche alla derivata esterna del campo $\tilde{\Phi}$, secondo l'equazione:

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} K^\nu = -i 4m e^{2A-3\lambda} d\tilde{\Phi}$$

pertanto, appare ora evidente ricavare una relazione analitica tra $\tilde{\Phi}$ e la funzione $\tilde{\lambda}$, la quale risulta:

$$\partial_\mu \tilde{\Phi} = i \frac{12}{m} e^{6\tilde{\lambda}} \partial_\mu \tilde{\lambda}$$

e conduce alla determinazione finale del valore di $\tilde{\Phi}$, ossia:

$$\tilde{\Phi} = i \frac{2}{m} e^{6\tilde{\lambda}} \tag{3.40}$$

3.2.4 Definizione della metrica ed Equazione di Toda

In questo paragrafo andremo alla ricerca della forma dei vielbein \hat{e}_j^i e vedremo che essi dipenderanno esclusivamente da una funzione scalare D soddisfacente una definita equazione. A tale scopo definiamo un altro bilineare spinoriale, il quale vive sul sottospazio bidimensionale spannato dalle coordinate x_1, x_2 :

$$\omega = \epsilon^t \Gamma_2 \gamma_\mu \epsilon dx^\mu = \epsilon^t h \epsilon (i \hat{e}_\mu^1 + \hat{e}_\mu^2) dx^\mu \tag{3.41}$$

Utilizzando le equazioni di killing e alcune proprietà algebriche relative ai commutatori delle matrici gamma è possibile calcolare, dopo non pochi passaggi, la derivata esterna di tale forma, la quale risulta:

$$d\omega = (i m \gamma_{\mu\nu} - 3i m \gamma_{\mu\nu} + 3 \gamma_\mu \partial_\nu \tilde{\lambda}) \epsilon dx^\mu \wedge dx^\nu$$

Utilizzando le condizioni di proiezione per lo spinore ϵ , tale derivata può essere riscritta come:

$$d\omega = \left(i m \frac{\epsilon^t \gamma_\mu \epsilon}{\epsilon^t \epsilon} dx^\mu - 3 d\tilde{\lambda} \right) \wedge \omega \tag{3.42}$$

Ora utilizzando nuovamente le equazioni per i proiettori ricavati nel paragrafo precedente è possibile constatare che:

$$\begin{aligned}\epsilon^t \Gamma_1 \epsilon &= \epsilon^t \Gamma_2 \epsilon = 0, & \epsilon^t \epsilon &= \cosh \zeta \tilde{\epsilon}^t \tilde{\epsilon} \\ \epsilon^t \Gamma_0 \epsilon &= -i \tilde{\epsilon}^t \tilde{\epsilon}, & \epsilon^t \Gamma_3 \epsilon &= \sinh \zeta \tilde{\epsilon}^t \tilde{\epsilon}\end{aligned}$$

Preso atto di ciò, nella equazione 3.42 a questo punto intervengono solamente le componenti 0, 3 ed essa diventa:

$$\begin{aligned}d\omega &= \left(i m \frac{-i \tilde{\epsilon}^t \tilde{\epsilon}}{\cosh \zeta \tilde{\epsilon}^t \tilde{\epsilon}} \frac{\cosh \zeta}{-i m} (dt + V) + \right. \\ &\quad \left. + i m \frac{\sinh \zeta \tilde{\epsilon}^t \tilde{\epsilon}}{\cosh \zeta \tilde{\epsilon}^t \tilde{\epsilon}} \frac{e^{-3\tilde{\lambda}}}{2m \cosh \zeta} dy - 3d\tilde{\lambda} \right) \wedge \omega\end{aligned}\quad (3.43)$$

$$= \left(i(dt + V) - \frac{ye^{-6\tilde{\lambda}}}{2 \cosh^2 \zeta} dy - 3d\tilde{\lambda} \right) \wedge \omega\quad (3.44)$$

Ora¹³, prendendo la componente y della 3.43, otteniamo dopo alcuni passaggi:

$$\partial_y (h \cosh \zeta (i \hat{e}_\mu^1 + \hat{e}_\mu^2)) = -\frac{ye^{-6\tilde{\lambda}}}{2 \cosh \zeta} h (i \hat{e}_\mu^1 + \hat{e}_\mu^2)\quad (3.45)$$

Questa equazione esplicita il fatto che i vielbein $\hat{e}_\mu^1, \hat{e}_\mu^2$ abbiano la stessa dipendenza dalla coordinata y e che possano pertanto essere parametrizzati come:

$$\hat{e}^1 = e^{\frac{D}{2}} (f_1 dx^1 + f_2 dx^2), \quad \hat{e}^2 = e^{\frac{D}{2}} (f_3 dx^1 + f_4 dx^2)$$

dove chiaramente le f_i non dipendono da y .

A questo punto possiamo sempre definire una riparametrizzazione delle coordinate sul piano $\{x_1, x_2\}$ per semplificare i vielbein:

$$\hat{e}^1 = e^{\frac{D}{2}} dx^1, \quad \hat{e}^2 = e^{\frac{D}{2}} dx^2$$

Con questa scelta, possiamo semplificare notevolmente la definizione della forma ω ¹⁴ e l'equazione relativa alla sua derivata esterna 3.47, ottenendo:

$$\begin{aligned}[d \log (e^{D/2-3\tilde{\lambda}}) + \partial_t \log (\tilde{\epsilon}^t \tilde{\epsilon}) dt] \wedge (i dx^1 + dx^2) &= \\ = \left(i(dt + V) - \frac{ye^{-6\tilde{\lambda}}}{2 \cosh^2 \zeta} dy - 3d\tilde{\lambda} \right) \wedge (i dx^1 + dx^2)\end{aligned}\quad (3.46)$$

¹³Effettuiamo una trasformazione di Lorentz in modo tale che $\tilde{\epsilon}^t \tilde{\epsilon}$ non dipenda nè da y che dalle x_i .

¹⁴ $\omega = \tilde{\epsilon}^t \tilde{\epsilon} \frac{e^{D/2-3\tilde{\lambda}}}{2m} (i dx^1 + dx^2)$.

Tale equazione, riscritta in componenti, risulta molto ricca di informazioni e ci conduce essenzialmente a due risultati importanti per la nostra soluzione, ossia:

$$\partial_y D = -\frac{ye^{-6\tilde{\lambda}}}{1-y^2e^{-6\tilde{\lambda}}} \quad (3.47)$$

$$V_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\partial_j D \quad (3.48)$$

L'equazione 3.47 implica la relazione:

$$e^{-6\tilde{\lambda}} = -\frac{\partial_y D}{y(1-y\partial_y D)} \quad (3.49)$$

che corrisponde esattamente all'equazione 3.24 dell'articolo LLM [23].

A questo punto, siamo riusciti a definire completamente la nostra soluzione tramite un'unica funzione scalare $D(x_1, x_2, y)$.

Per completare il quadro non ci resta che andare alla ricerca dell'equazione che tale funzione scalare debba soddisfare. Concentriamo ora la nostra attenzione sul vettore V che compare nella nostra soluzione e che determineremo tramite l'equazione 3.24.

Innanzitutto occorre notare che il tensore antisimmetrico $Y_{\mu\nu}$, che compare in tale equazione, nel sistema di riferimento definito dagli operatori di proiezione precedentemente ricavati, possiede solamente alcune componenti non nulle ed in particolare:

$$Y_{\widehat{01}} = 0, \quad Y_{\widehat{02}} = 0, \quad Y_{\widehat{31}} = 0, \quad Y_{\widehat{32}} = 0$$

Dimostriamo per completezza almeno una di queste affermazioni:

$$\begin{aligned} Y_{\widehat{32}} &= \bar{\epsilon}\gamma_{32}\epsilon = \\ &= \epsilon^\dagger\gamma_2\gamma^0\gamma_3\epsilon = \epsilon^\dagger\gamma_2\gamma_5\epsilon \\ &= \iota\epsilon^\dagger\gamma_5\gamma_1\epsilon = \epsilon^\dagger\gamma_0\gamma_2\gamma_3\epsilon \\ &= -Y_{\widehat{32}} \longrightarrow = 0 \end{aligned}$$

Pertanto in tale sistema di riferimento il bilineare Y ammette solamente due componenti non nulle che risultano essere:

$$\begin{aligned} Y_{\widehat{12}} &= \bar{\epsilon}\Gamma_{12}\epsilon \\ &= \epsilon^\dagger\Gamma_0\Gamma_{12}\epsilon = \epsilon^\dagger\Gamma_0 - \iota\epsilon \\ &= -\iota\bar{\epsilon}\epsilon = \iota^2 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_{\widehat{03}} &= \bar{\epsilon}\Gamma_{03}\epsilon \\
&= \epsilon^\dagger\Gamma_0\Gamma_{03}\epsilon = -\epsilon^\dagger\Gamma_0\Gamma_5\epsilon \\
&= -\bar{\epsilon}\Gamma_5\epsilon = -f_2 = \sinh \zeta
\end{aligned}$$

In definitiva pertanto tale tensore antisimmetrico può essere definito come:

$$\begin{aligned}
Y &= Y_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu = Y_{\widehat{03}}g_0(dt + V) \wedge hdy + Y_{\widehat{12}}he^{D/2}dx^1 \wedge he^{D/2}dx^2 \\
&= \iota \frac{e^{-3\tilde{\lambda}}}{2m^2} \sinh \zeta (dt + V) \wedge dy - h^2 e^D dx^i \wedge dx^j
\end{aligned}$$

A questo punto vogliamo riscrivere la relazione 3.24 come:

$$\nabla_\nu g_{tt}K^t dx^\mu \wedge dx^\nu = 2\iota mY + e^{-3\tilde{\lambda}-2\tilde{A}} \sinh \zeta dB$$

e inserendo il risultato per il tensore Y ricaviamo:

$$\begin{aligned}
-2\iota md[g_0^2(dt + V)] &= \frac{e^{-3\tilde{\lambda}}}{m} \sinh \zeta (dt + V) \wedge dy - 4\iota mh^2 e^D dx^1 \wedge dx^2 + \\
&+ e^{-3\tilde{\lambda}-2\tilde{A}} \sinh \zeta d[B_t(dt + V) + \widehat{B}]
\end{aligned}$$

Infine, prendendo solamente la componente $dx^1 \wedge dx^2$ della precedente equazione otteniamo la relazione:

$$g_0^2 dV = 2h^2 e^D dx^1 \wedge dx^2 + e^{-3\tilde{\lambda}-2\tilde{A}} \frac{\iota}{2m} \sinh \zeta (B_t dV + d\widehat{B}) \quad (3.50)$$

Ora, il primo membro a destra di tale equazione può essere riformulato in modo più elegante utilizzando l'operazione di dualità di Hodge relativa allo spazio tridimensionale¹⁵ spannato dalle coordinate y, x_1, x_2 ricordando che:

$$*_3 dy = he^D dx^1 \wedge dx^2$$

mentre il secondo termine può essere riscritto utilizzando le equazioni ricavate in precedenza per la Field Strength ed in particolare invertendo la 3.37.

In definitiva tale equazione diventa:

$$g_0^2 dV = 2h*_3 dy + \frac{\iota e^{-6\tilde{\lambda}}}{2mg_0} \sinh \zeta *_3 d\tilde{\Phi} \quad (3.51)$$

$$\longrightarrow *_3 dV = -\frac{e^{3\tilde{\lambda}}m}{\cosh^3 \zeta} (e^{-6\tilde{\lambda}} dy - ye^{-6\tilde{\lambda}} d(6\tilde{\lambda})) \quad (3.52)$$

¹⁵La metrica relativa a tale sottospazio risulta: $ds^2 = h^2(dy^2 + e^D d\vec{x}^2)$.

Per concludere pertanto la relazione finale risulta:

$$*_3dV = -\frac{e^{3\tilde{\lambda}}m}{\cosh^3\zeta}d(ye^{-6\tilde{\lambda}}) \quad (3.53)$$

Abbiamo trovato come legare il vettore V con le altre funzioni presenti nella soluzione, ora sostituendo la relazione che definisce il vettore V 3.48 l'equazione precedente risulta:

$$-\frac{1}{2}\Delta*_3(dx^1 \wedge dx^2) = -\frac{e^{3\tilde{\lambda}}m}{\cosh^3\zeta}\partial_y(ye^{-6\tilde{\lambda}})dy \quad (3.54)$$

$$\longrightarrow \Delta D = e^D \frac{1}{(1 - y^2e^{-6\tilde{\lambda}})^2}\partial_y(ye^{-6\tilde{\lambda}}) \quad (3.55)$$

Tale percorso ci condurrà a definire quale relazione debba soddisfare la funzione scalare D.

In particolare, utilizzando la 3.47 è possibile calcolare:

$$\partial_y^2 e^D = -e^D \frac{\partial_y(ye^{-6\tilde{\lambda}})}{(1 - y^2e^{-6\tilde{\lambda}})^2} \quad (3.56)$$

In particolare, per concludere la nostra analisi, posando la nostra attenzione sulle equazioni 3.55 e 3.56, appare chiaro che esse possano essere inglobate in un'unica equazione, la quale può essere riscritta nella forma:

$$\longrightarrow \Delta D + \partial_y^2 e^D = 0 \quad (3.57)$$

L'equazione 3.57 è una equazione ricorrente in questi tipi di problemi ed è nota in letteratura come Equazione di Toda [46].

3.3 Considerazioni finali

In definitiva abbiamo definito totalmente la più generale soluzione di M-teoria $\frac{1}{2}$ BPS, la quale rispetti la simmetria globale $SO(1, 5) \times SO(3)$.

Abbiamo dimostrato che con tali requisiti la geometria di tale soluzione sia completamente determinata da un sottospazio tridimensionale definito dalle coordinate y, x_1, x_2 ed in particolare da una funzione scalare D definita su tali coordinate, la quale risulta soluzione dell'equazione di Toda tridimensionale. La forma della più generale soluzione da noi trovata può essere sintetizzata

come:

$$\begin{aligned}
ds_{11}^2 &= e^{2\tilde{\lambda}} (4ds_{AdS_5}^2 + y^2 e^{-6\tilde{\lambda}} d\tilde{\Omega}_2^2 + ds_4^2) \\
ds_4^2 &= 4(1 - y^2 e^{-6\tilde{\lambda}})(dt + V_i dx^i)^2 + \frac{e^{-6\tilde{\lambda}}}{1 - y^2 e^{-6\tilde{\lambda}}} [dy^2 + e^D(dx_1^2 + dx_2^2)] \\
G^{(4)} &= F \wedge d\tilde{\Omega}_2, \quad F = dB_t \wedge (dt + V) + B_t dV + d\hat{B} \\
e^{-6\tilde{\lambda}} &= -\frac{\partial_y D}{y(1 - y\partial_y D)}, \quad V_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\partial_j D, \quad B_t = 4y^3 e^{-6\tilde{\lambda}} \\
\Delta D + \partial_y^2 e^D &= 0 \quad \text{con } \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 \\
d\hat{B} &= 2*_3 \left[(y\partial_y^2 D + y(\partial_y D)^2 - \partial_y D) dy + y\partial_i \partial_y D dx^i \right] \tag{3.58}
\end{aligned}$$

Capitolo 4

Soluzioni per M5-brane wrappate

In questo capitolo analizzeremo a fondo le soluzioni 1/2 BPS con simmetria globale $SO(1, 5) \times SO(3)$. Ci concentreremo sull'Equazione di Toda che definisce tali soluzioni nel contesto in cui esista una ulteriore simmetria $U(1)$; questo ci permetterà di descrivere il problema in una pittura elettrostatica duale con la quale sarà più semplice studiare le nuove soluzioni. Inizialmente studieremo l'unica soluzione nota a tale problema, ricavata da Maldacena e Nunez [35] dal punto di vista della regolarità, delle cariche e dell'interpretazione elettrostatica duale. Una volta fatto ciò, ci concentreremo su come generalizzare tale soluzione e ne analizzeremo alcuni casi semplici cercando anche di estrapolare alcune condizioni generali necessarie per l'esistenza di soluzioni a tale problema.

Come vedremo tale ricerca necessiterà l'abbandono dell'ipotesi di fattorizzabilità in direzione piuttosto di una forma funzionale più complessa.

Andremo in conclusione a descrivere una ampia classe di soluzioni regolari caratterizzate da simmetria $\{SO(1, 5) \times SO(3) \times U(1)\}$, le quali rappresentano l'esatto analogo delle soluzioni di Gaiotto studiate nell'articolo [12] nel caso in cui però la simmetria $U(1)$ sia di tipo traslazionale e non rotazionale. Mostriamo inoltre come la più semplice delle soluzioni appartenente a questa classe ed avente forma fattorizzata nelle coordinate $\{x, y\}$ sia totalmente equivalente alla soluzione Maldacena-Nunez sotto l'azione delle Trasformazioni Conformi.

Andremo infine a dimostrare che tutti i tentativi di generalizzare la soluzione Maldacena-Nunez aggiungendo discontinuità di prima specie alla distribuzione di carica equivalente portino a soluzioni gravitazionali fisicamente non accettabili.

4.1 M5: near horizon limit e wrapping

Prima di addentrarci nella ricerca vera e propria andiamo per un istante a motivare e descrivere le geometrie che stiamo considerando andando a definire a che cosa corrispondano dal punto di vista gravitazionale.

E' noto in letteratura ed è stato anche ricavato nei capitoli precedenti che la metrica relativa alla soluzione di M5-brana risulti:

$$ds_{11}^2 = H_5^{-1/3} dx_{\parallel}^2 + H_5^{2/3} dx_{\perp}^2 \quad (4.1)$$

$$H_5 = 1 + \frac{Q_5}{r^3} \quad (4.2)$$

Quello che considereremo sarà il limite *near-horizon* di tale geometria che equivale a studiare la soluzione per $r \rightarrow 0$ in modo tale che il rapporto $\frac{Q_5}{r^3} \equiv H \gg 1$ rimanga costante. E' chiaro che dal punto di vista matematico ciò significhi semplicemente non tener conto della parte costante della funzione armonica H_5 .

Dal punto di vista gravitazionale invece ciò significa andare a studiare la soluzione nelle vicinanze della sorgente gravitazionale, intorno alla quale generalmente esiste appunto un *orizzonte degli eventi* a cui vogliamo avvicinarci tralasciando le informazioni relative alla metrica piatta all'infinito¹.

Tale procedimento che a primo impatto può sembrare semplicemente una analisi matematica descrittiva della soluzione in realtà ha un significato decisamente più profondo che può essere appreso a pieno solamente nel contesto della corrispondenza Ads-CFT([34],[37]).

Effettuato tale limite, la metrica della soluzione di Supergravità diventa:

$$ds^2 = \frac{r}{\sqrt[3]{Q}} dx_{\parallel}^2 + \frac{\sqrt[3]{Q^2}}{r^2} (dr^2 + r^2 d\Omega_4^2) \quad (4.3)$$

che con il semplice cambio di variabili $r = \frac{4Q}{z^2}$ risulta:

$$ds^2 = \sqrt[3]{Q^2} \left[4 \frac{dz^2 + dx_{\parallel}^2}{z^2} + d\Omega_4^2 \right] = \sqrt[3]{Q^2} [4d_{AdS_7}^2 + d\Omega_4^2] \quad (4.4)$$

La metrica appena trovata ci suggerisce pertanto che una M5-brana nel limite *near-horizon* sia caratterizzata da una geometria del tipo $AdS_7 \times S^4$.

In tale limite pertanto la soluzione di M5-brana è caratterizzata da un gruppo di simmetria $SO(1, 7) \times SO(5)$ e acquisisce un ulteriore Simmetria Conforme che non possedeva in origine. Tale simmetria conforme si mischia inoltre con

¹Si verifica facilmente che la geometria della soluzione per $r \rightarrow \infty$ risulti esattamente la geometria dello spazio di Minkowski $\mathcal{R}^{(10,1)}$.

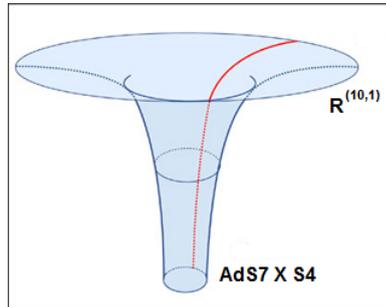


Figura 4.1: Limite near-horizon per una M5 brana

le supersimmetrie originarie della soluzione dando luogo a quella che è nota come Algebra Superconforme.

L'M5 brana risulta originariamente un oggetto 1/2 BPS preservante 16 delle 32 supercariche totali; ma nel limite near-horizon queste ulteriori simmetrie di cui abbiamo discusso hanno l'effetto di raddoppiare il numero delle supercariche associate alla brana e di riportarlo a quello massimo di 32.

Le soluzioni che abbiamo caratterizzato nel capitolo precedente da un punto di vista generale sono in qualche modo relazionate alle M5-brane, ma non in modo diretto, poichè tali soluzioni non contengono uno spazio AdS_7 ma bensì uno spazio AdS_5 che a prima vista non sembra avere nulla a che fare con una soluzione di tipo M5.

Per capire a fondo a cosa corrispondono tali soluzioni occorre riferirsi a M5 brane *wrappate* su un *2-ciclo*; andiamo a vedere un po meglio di cosa si tratta.

Senza dilungarci troppo in questioni matematiche che non ci competono o quantomeno in questo contesto non ci interessano, possiamo pensare a un 2-ciclo semplicemente come uno spazio compatto 2-dimensionale su cui *arrotoliamo* la brana. In parole povere, andiamo a compattificare due delle dimensioni lungo la brana, ossia andiamo a descrivere la geometria dello spazio lungo la brana non più come un AdS_7 ma come :

$$\Sigma \times AdS_5 \tag{4.5}$$

con Σ appunto lo spazio 2-dimensionale compatto.

A questo punto la geometria totale della soluzione può essere descritta da:

$$AdS_5 \times \Sigma \times S^4 \tag{4.6}$$

La procedura di wrappare un oggetto può, e spesso lo fa, rompere delle simmetrie della soluzione originaria; in questo caso le 32 supercariche acquisite nel limite near-horizon dalla M5 brana vengono dimezzate a causa di tale

procedura. In definitiva le supercariche della nostra soluzione tornano ad essere 16 come in origine e pertanto le nostre soluzioni continueranno ad essere chiamate, anche se impropriamente, soluzioni 1/2 BPS.

Per dare quantomeno una spiegazione sebbene non precisa di tale fatto, quando prendiamo una teoria supersimmetrica e la schiacciamo su una varietà curva, in generale romperemo tale supersimmetria poichè non potremo più definire spinori covariantemente costanti secondo la prescrizione:

$$(\partial_\mu + \omega_\mu)\epsilon = 0 \quad (4.7)$$

Se però tale teoria supersimmetrica, come accade nel nostro caso, possiede una R-simmetria globale² allora è possibile accoppiare tale teoria con un campo di Gauge esterno (procedimento detto di *Twisting*). Ora se prendiamo la connessione di Gauge esattamente identica alla connessione di spin $A_\mu = \omega_\mu$ allora possiamo nuovamente definire uno spinore covariante nel seguente modo:

$$(\partial_\mu + \omega_\mu - A_\mu)\epsilon = 0 \quad (4.8)$$

e pertanto ripristinare parte della supersimmetria rotta.

Nel nostro caso, l'azione di *wrappare* l'M5-brana su di una superficie di Riemann ha effetto non solo sul gruppo di isometria $SO(1, 7)$, il quale viene ridotto a $SO(1, 5)$, ma anche sul gruppo di simmetria $SO(5)$ il quale si riduce a sua volta al gruppo $SO(3)$.

E' chiaro in questa direzione che lo spazio sferico originario S^4 si spezzi in due spazi distinti con simmetria più piccola esattamente nel seguente modo:

$$S^4 \rightarrow S^2 \times B^2 \quad (4.9)$$

Accorpendo lo spazio 2-dimensionale B^2 con la Superficie di Riemann Σ su cui viene avvolta la brana, la geometria completa della nostra soluzione viene ad essere:

$$AdS_5 \times S^2 \times ds_4^2 \quad (4.10)$$

Quest'ultima è esattamente la forma delle metriche generali trovate alla fine del capitolo precedente, che pertanto ora possiamo con certezza far corrispondere a soluzioni di M5 brane wrappate su un 2-ciclo.

²Non è nostro intento approfondire questo aspetto, per cui si rimanda alla bibliografia.

4.2 Equazione di Toda e map elettrostatico

Come abbiamo già esaurientemente sottolineato, le soluzioni 1/2 BPS di M-Teoria aventi simmetria globale $SO(5, 1) \times SO(3)$, cosiccome quelle aventi simmetria $SO(6) \times SO(3)$ studiate nell'articolo di riferimento [23], sono totalmente descritte da una funzione tridimensionale $D(x_1, x_2, y)$ soddisfacente l'equazione differenziale non lineare:

$$(\partial_1^2 + \partial_2^2)D + \partial_y^2 e^D = 0 \quad (4.11)$$

nota come *Equazione di Toda Tridimensionale*.

Tale equazione alle derivate parziali risulta fortemente non lineare e pertanto particolarmente difficile da maneggiare; non esistendo metodi analitici per risolverla, le soluzioni [46] a tale problema sono tuttora largamente inesplorate e in numero esiguo.

Dato il contesto particolarmente arduo, imporremo la necessità di un'ulteriore simmetria $U(1)$ nelle coordinate (x_1, x_2) che ci permetterà di configurare una pittura duale a cui saremo decisamente familiari. L'esistenza di tale simmetria ci permette di semplificare la dipendenza della funzione D dalle sue coordinate ed in particolare ci consente di limitare la dipendenza a due sole delle coordinate, ossia:

$$\{D(x_1, x_2, y) + U(1)\} \implies D(x, y) \quad (4.12)$$

Per essere più precisi, adotteremo tra le tante la scelta di eliminare la dipendenza della funzione D dalla coordinata x_2 e di identificare $x_1 \equiv x$. Non si tratta in realtà di una vera e propria simmetria $U(1)$ ma piuttosto di una Invarianza per Traslazioni lungo la coordinata x_2 . Un'altra scelta possibile potrebbe essere quella di semplificare la dipendenza dalle coordinate $\{x_1, x_2\}$ considerando una funzione scalare $D(r, y)$ dipendente solo dalla coordinata radiale nel piano (x_1, x_2) definita come $r^2 = x_1^2 + x_2^2$: questo è quel che viene fatto negli articoli di riferimento [12],[1].

Non esiste alcuna motivazione rigorosa per preferire una o l'altra scelta. Nel caso della soluzione Maldacena-Nunez accade che queste due diverse vie portino a definire la stessa geometria e siano pertanto equivalenti sotto l'azione delle Trasformazioni Conformi. In generale questo non è vero e come vedremo avrà un certo peso nello studio delle soluzioni che prenderemo in considerazione.

Nel contesto in cui esista questa ulteriore simmetria nel nostro caso traslazionale, l'Equazione di Toda può essere messa in relazione diretta con l'Equazione di Laplace in coordinate cilindriche, la quale governa la totalità

dei problemi elettrostatici aventi simmetria cilindrica. In particolare, il map³ $(x, y) \leftrightarrow (\rho, \eta)$ definito implicitamente dalle relazioni:

$$\rho^2 = e^D, \quad y = \rho \partial_\rho V(\rho, \eta) = \dot{V}, \quad x = \partial_\eta V(\rho, \eta) = V' \quad (4.14)$$

effettua l'operazione a cui abbiamo precedentemente accennato e trasforma l'equazione di Toda in:

$$\frac{1}{\rho^2} \ddot{V}(\rho, \eta) + V''(\rho, \eta) = 0 \quad (4.15)$$

che risulta la ben nota equazione di Laplace cilindrica. Seguendo questa nuova descrizione, le coordinate x e y vengono identificate col campo elettrico radiale e col campo elettrico angolare derivanti da un potenziale armonico soluzione di tale equazione, ossia:

$$x = -E_\eta(\rho, \eta); \quad y = -\rho E_\rho(\rho, \eta) \quad (4.16)$$

Vedremo nei prossimi paragrafi che in tale pittura duale elettrostatica sarà decisamente più facile generalizzare l'unica soluzione nota di Maldacena-Gaiotto ed andare alla ricerca di nuove soluzioni per l'equazione di Toda; in questa direzione risulta ora necessario ridefinire il problema e le soluzioni generali $SO(1, 5) \times SO(3)$ ricavate nel capitolo precedente utilizzando questo nuovo linguaggio.

Per far ciò occorre innanzitutto notare che le equazioni di Laplace, vengono tradotte nelle relazioni per le coordinate x e y :

$$\begin{aligned} \partial_\rho x(\rho, \eta) &= \frac{1}{\rho} \partial_\eta y(\rho, \eta) \\ \partial_\eta x(\rho, \eta) &= -\frac{1}{\rho} \partial_\rho y(\rho, \eta) \end{aligned} \quad (4.17)$$

che dal punto di vista matematico rappresentano nient'altro che il *Teorema di Schwarz* per le derivate parziali miste applicato alla funzione armonica V . Per descrivere il problema nella nuova pittura, occorre innanzitutto verificare che:

$$\partial_y D = \frac{2}{\rho} \partial_y \rho = -\frac{2V''}{\Delta^2} \quad (4.18)$$

³Nel caso in cui la simmetria $U(1)$ sia di tipo rotazionale il map va leggermente modificato e definito come:

$$\rho^2 = x^2 e^D, \quad y = \rho \partial_\rho V(\rho, \eta) = \dot{V}, \quad \log x = \partial_\eta V(\rho, \eta) = V' \quad (4.13)$$

in cui con $\bar{\Delta}^2$ si intende il determinante della matrice:

$$M = \begin{pmatrix} \partial_\rho x & \partial_\rho y \\ \partial_\eta x & \partial_\eta y \end{pmatrix}$$

che risulta definito come:

$$\bar{\Delta}^2 = (\partial_\rho y)^2 + (\partial_\eta x)^2 = (\dot{V}')^2 - \ddot{V}V'' \quad (4.19)$$

A questo punto della trattazione siamo in grado di riscrivere l'intera metrica in funzione solamente del potenziale $V(\rho, \eta)$.

Innanzitutto notiamo che, preso atto della simmetria $U(1)$, e delle definizioni non appena descritte, la parte di metrica relativa allo spazio (x_1, x_2, y) diventa:

$$dy^2 + e^D(dx_1^2 + dx_2^2) \Rightarrow \bar{\Delta}^2(d\rho^2 + d\eta^2) + e^D dx_2^2 \quad (4.20)$$

In definitiva l'intera metrica della nostra più generale soluzione (vedi 3.58) può essere riformulata nella pittura elettrostatica duale come:

$$\begin{aligned} ds_{11}^2 &= \left(\frac{\dot{V}\Delta}{2V''} \right)^{\frac{1}{3}} \left[4 d_{AdS_5}^2 + \frac{2\dot{V}V''}{\Delta} d\tilde{\Omega}_2^2 + ds_4^2 \right] \\ ds_4^2 &= 4 \frac{-\ddot{V}V'' + (\dot{V}')^2}{\Delta} (dt + v)^2 + \frac{2V''}{\dot{V}} \left[(d\rho^2 + d\eta^2) + \frac{\rho^2}{(\Delta - 2\dot{V}V'')} dx_2^2 \right] \end{aligned} \quad (4.21)$$

in cui identifichiamo con Δ l'espressione:

$$\Delta = \bar{\Delta}^2 + 2\dot{V}V'' \quad (4.22)$$

e con v il vettore:

$$v = \frac{\dot{V}'}{\ddot{V}V'' - (\dot{V}')^2} dx_2 \quad (4.23)$$

Queste relazioni esauriscono la trattazione della metrica della soluzione secondo la pittura duale elettrostatica e sono analoghe a quelle ricavate nell'articolo [1]. Nel seguito sarà fondamentale anche definire la 4-forma nei termini del potenziale elettrostatico duale, ma lo faremo solamente a tempo debito. Il significato di questo mapping è piuttosto profondo e permette di passare da un problema gravitazionale fortemente non lineare a un problema elettrostatico classico lineare. Il problema gravitazionale è ben definito e andrebbe affrontato cercando soluzioni analitiche dell'equazione differenziale di Toda;

d'altro canto il problema elettrostatico prevede l'esistenza di infinite soluzioni corrispondenti a tutte le possibili distribuzioni di carica pensabili. Il vero problema tecnico che sta alla base di tutto questo lavoro è trovare la corrispondenza tra soluzioni elettrostatiche e soluzioni gravitazionali regolari e fisicamente accettabili. In questo senso non è ancora stato compreso a fondo come le condizioni di positività della metrica e di regolarità di quest'ultima si riflettano nella pittura duale elettrostatica; esiste oramai la convinzione che il trasporto di queste condizioni necessarie in termini elettrostatici sia tutt'altro che banale.

4.3 Caratteristiche generali soluzione

Per riassumere brevemente la situazione a cui siamo giunti, ricordiamo che ogni soluzione 1/2 BPS con simmetria $SO(1, 5) \times SO(3)$ può essere in completa generalità e totalità descritta e definita da una funzione scalare in tre variabili $D(x_1, x_2, y)$. Tale funzione inserita nelle opportune formule 3.58 conduce a una soluzione di tipo metrica e quindi ad una soluzione gravitazionale di Supergravità. Nel caso in cui esista un'ulteriore simmetria $U(1)$ il problema si semplifica ulteriormente e la più generica soluzione risulta completamente caratterizzata dal valore di una funzione scalare, questa volta funzione di sole due variabili: $D(x, y)$. Definito il map 4.14 corrispondente alla nostra scelta di Invarianza Traslazionale lungo la coordinata x_2 , tale funzione scalare viene messa in relazione diretta con una funzione armonica $V(\rho, \eta)$ soluzione dell'equazione di Laplace cilindrica, la quale in questa nuova pittura definisce totalmente la soluzione. In questo modo la non-linearità del problema di Toda viene trasferita e semplificata nella linearità dell'equazione di Laplace. In definitiva ad ogni potenziale armonico corrisponde una diversa soluzione 1/2 BPS $SO(1, 5) \times SO(3) \times U(1)$ parametrizzata dalla funzione D , ma non necessariamente una soluzione fisicamente accettabile di M5 brana wrappata su un 2-ciclo. Il vero problema tecnico sarà cercare di capire quali soluzioni elettrostatiche corrispondano a soluzioni gravitazionali fisicamente accettabili.

Dal punto di vista geometrico i differenti potenziali che danno vita a differenti soluzioni corrispondono alle diverse geometrie su cui si può wrappare la M5 brana; sarebbe molto interessante andare a studiare a fondo la relazione tra la geometria del 2-ciclo e il potenziale armonico duale.

Per la precisione della trattazione, dobbiamo in realtà correggere una delle espressioni appena enunciate. Le soluzioni che indaghiamo posseggono un'ulteriore simmetria, ossia sono caratterizzate dal essere invarianti sotto *Trasformazioni Conformi* nel piano x_1, x_2 ; tutto ciò vanifica la biunivocità

della relazione tra la funzione D e le soluzioni fisiche ed in particolare permette di definire una intera classe di soluzioni tra di loro equivalenti anche se caratterizzate da differenti funzioni D .

In particolare, data la trasformazione conforme:

$$x_1 + ix_2 \longrightarrow f(x_1 + ix_2) \quad (4.24)$$

sotto cui la soluzione risulta manifestatamente invariante, la relativa funzione tridimensionale D trasforma come:

$$D \longrightarrow D - \log |\partial f|^2 \quad (4.25)$$

Pertanto tutte le funzioni D , legate da una trasformazione di questo tipo, anche se in apparenza totalmente differenti, generano soluzioni gravitazionali equivalenti in tutto e per tutto.

Tornando a noi, le soluzioni di cui vogliamo occuparci corrispondono alle cosiddette *smooth geometries*, ossia a metriche perfettamente regolari prive di divergenze e/o di *buchi*.

Sappiamo oramai che tali configurazioni corrispondono dal punto di vista gravitazionale ad M5 brane wrappate accoppiate magneticamente alla 4-forma; in tale direzione, affinché la soluzione sia fisicamente consistente, occorre che la geometria della soluzione ammetta un 4-ciclo topologicamente equivalente ad una S^4 . Tale requisito ci permette di integrare la precedentemente citata 4-forma su tale spazio trasverso alla brana e di determinare e definire la carica corrispondente alla nostra soluzione.

Affinchè questo accada, occorre che la sfera S^2 e la coordinata t della soluzione degenerino in una qualche regione di spazio; è naturale che affinché la soluzione sia accettabile la metrica debba essere regolare in tali punti di singolarità.

Vedremo cosa significhi realmente tradurre tali condizioni di regolarità in linguaggio elettrostatico e studieremo meglio il problema della regolarità a partire dai prossimi paragrafi in cui ci occuperemo dell'unica soluzione nota a tale problema proposta da Maldacena e Nunez in [35].

4.4 Soluzione nota Maldacena-Nunez

L'unica e la prima soluzione nota al problema gravitazionale corrispondente alla configurazione di M5-brane wrappate su superfici di Riemann è stata trovata da Maldacena e Nunez nell'articolo [35] e studiata successivamente in [12].

Tale soluzione corrisponde alla funzione fattorizzata in due variabili:

$$e^D = \frac{1}{x^2}(N^2 - y^2) \quad (4.26)$$

soddisfacente la ormai familiare Equazione di Toda.

La configurazione in questione rappresenta N M5 brane wrappate su una superficie di Riemann di genere $g \geq 2$ ottenuta quotizzando lo spazio iperbolico \mathbb{H}_2 con un gruppo discreto Γ . La parte di soluzione avente a che fare con la metrica della superficie di Riemann è la parte della funzione dipendente dalla coordinata x . Nel caso in cui si faccia la scelta di prendere la reale simmetria U(1) e quindi la coordinata radiale nel piano (x_1, x_2) la soluzione assume la forma:

$$e^D = \frac{1}{1-r^2}(N^2 - y^2) \quad (4.27)$$

Si dimostra che le due scelte siano completamente equivalenti poichè collegate tra loro da una Trasformazione Conforme su tali coordinate. Come vedremo nei paragrafi successivi la soluzione in questione rappresenta l'unica soluzione fattorizzabile a tale problema; tutte le altre soluzioni fattorizzabili saranno semplicemente identiche a questa a meno di cambiamenti di coordinate e trasformazioni conformi.

Andiamo ora a studiarne le caratteristiche ed in particolare a mostrare un esempio di studio della regolarità di una metrica.

La metrica corrispondente a tale soluzione risulta:

$$ds_{11}^2 = \sqrt[3]{\frac{N^2 + y^2}{2}} [4 ds_{AdS_5}^2 + \frac{2y^2}{N^2 + y^2} d\tilde{\Omega}_2^2 + ds_4^2] \quad (4.28)$$

$$ds_4^2 = 4 \frac{N^2 - y^2}{N^2 + y^2} (dt - \frac{1}{x_2} dx_1)^2 + \frac{2}{N^2 - y^2} [dy^2 + \frac{1}{x_2^2} (N^2 - y^2) d\vec{x}^2] \quad (4.29)$$

con $d\vec{x} = (dx_1, dx_2)$.

Notiamo innanzitutto che esiste una singolarità nel punto $x_2 = 0$, ma tale punto rappresenta esattamente il bordo della metrica iperbolica sul piano complesso superiore e di conseguenza non una vera e propria patologia della soluzione, ma piuttosto delle coordinate scelte.

Esiste inoltre un punto di singolarità in $x_2 \rightarrow \infty$ dovuto nuovamente alla scelta infelice delle coordinate; si può verificare che in entrambi tali punti di singolarità il tensore di curvatura corrispondente a tale metrica sia perfettamente continuo e regolare come mostreremo in seguito.

I veri punti di interesse della soluzione sono rappresentati dal punto $y = 0$ in cui il volume dello spazio sferico S2 si contrae e il punto $y = \pm N$ in cui invece la coordinata t degenera.

4.4.1 Regolarità intorno punti di singolarità

Premesso che per effettuare una trattazione completa della regolarità di una metrica occorrerebbe andare a computare direttamente gli invarianti legati al *Tensore di Riemann* e controllare che questi ultimi non risultino singolari e divergenti, ma preso atto che questo possa diventare dal punto di vista calcolistico fortemente non banale, introduciamo un altro rapido metodo per verificare la regolarità di una metrica che vedremo in questo caso essere piuttosto efficiente .

A tale scopo, facciamo solamente una breve premessa.

E' noto che la metrica sul piano piatto possa essere definita da:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad (4.30)$$

Risulta altrettanto chiaro che la medesima metrica possa essere ridefinita in coordinate polari sotto la seguente forma:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (4.31)$$

Tale metrica risulta evidentemente singolare nel punto $r = 0$, ma tale singolarità è chiaramente dovuta al fatto che la scelta delle coordinate polari risulti particolarmente infelice nell'origine del piano dove la coordinata angolare degenera. E' chiaro che corrispondendo allo spazio piatto 2-dimensionale tale metrica non possa essere altrimenti che regolare, affermazione dimostrata dal fatto che gli scalari costruiti a partire dal Tensore di Riemann non siano affatto singolari in $r = 0$.

Digerita la precedente premessa, ci accorgiamo che un metodo particolarmente rapido per verificare se la metrica risulti o meno regolare intorno ad una singolarità è verificare che essa intorno a tale punto si comporti proprio come $dr^2 + r^2 d\theta^2$ che sappiamo essere regolare, anche se non manifestamente. In parole semplici possiamo pensare allo spazio che degenera come alla coordinata angolare su di un piano in cui sussiste una simmetria $U(1)$; quest'ultima nel limite di $r = 0$ diventa una coordinata degenera e non è capace di descrivere tale punto singolare, ma la metrica risulta perfettamente regolare. Questo comportamento è quello che in gergo viene chiamato *$U(1)$ shrinking*. Tutto quanto abbiamo appena detto risulta vero nel caso in cui supponiamo che la coordinata angolare (in questo caso θ) abbia periodicità 2π ; nel caso in cui invece tale coordinata abbia una periodicità generica $T_\theta = a$ allora la metrica diventa della forma $a^2 dr^2 + r^2 d\theta^2$. Nel prosieguo, se non lo preciseremo, manterremo la periodicità della coordinata angolare pari a 2π .

Tornando alla soluzione MG, essa intorno al punto di singolarità $y = 0$ in cui

degenera la sfera S^2 risulta:

$$ds_{11}^2 = \sqrt[3]{\frac{N^2}{2}} \left[4 d_{AdS_5}^2 + \frac{2}{N^2} y^2 d\Omega_2^2 + ds_4^2 \right]$$

$$ds_4^2 = 4 \left(dt^2 - \frac{1}{x_2} dx_1 \right)^2 + \frac{2}{N^2} dy^2 + \frac{2}{x_2^2} (dx_1^2 + dx_2^2)$$

Come possiamo facilmente notare da tale espressione, presa la coordinata y come coordinata radiale, la metrica risulta perfettamente regolare in quanto esattamente della forma:

$$dy^2 + y^2 d\Omega_2^2 \quad (4.32)$$

perciò tale singolarità non è una singolarità effettiva e non rappresenta un problema per la soluzione.

Per quanto riguarda l'altro punto interessante $y = \pm N$ la metrica calcolata intorno a tale regione dello spazio diventa:

$$ds_{11}^2 = \sqrt[3]{N^2} \left[4 d_{AdS_5}^2 + d\Omega_2^2 + ds_4^2 \right]$$

$$ds_4^2 = 2 \frac{N^2 - y^2}{N^2} \left(dt^2 - \frac{1}{x_2} dx_1 \right)^2 + \frac{2}{N^2 - y^2} dy^2 + \frac{2}{x_2^2} (dx_1^2 + dx_2^2)$$

In questo caso occorre trovare un cambio di variabili $h(y)$ tale che la metrica sviluppata in serie intorno alla singolarità diventi $dh^2 + h^2 dt^2$, e questo risulta possibile solamente se:

$$\left(\frac{h'}{h} \right)^2 = \frac{1}{4(y - N)^2} \quad (4.33)$$

In definitiva effettuato il cambio di variabili:

$$h(y) = \sqrt{y - N} \quad (4.34)$$

la metrica risulta perfettamente regolare anche intorno tale singolarità.

Tutto ciò risulta perfettamente consistente con le simulazioni numeriche fatte con il software Mathematica, con cui, tramite un modellino della nostra soluzione, siam andati a calcolare alcuni invarianti costruiti a partire dal Tensore di Riemann e abbiamo verificato che tali scalari non fossero singolari.

Per esempio abbiam valutato la curvatura scalare della metrica, la quale a meno di costanti risulta essere:

$$R \propto \frac{1}{(N^2 + y^2)^\alpha} \quad (4.35)$$

e assolutamente regolare nei punti $y = 0, y = \pm N$. In seguito andremo a calcolare tale curvatura anche analiticamente.

In definitiva il comportamento apparentemente singolare della metrica è imputabile alla scelta di coordinate ed esiste una precisa trasformazione di quest'ultime capace di eliminare tali singolarità.

4.4.2 Dominio di definizione e carica della soluzione

Preso atto del fatto che la soluzione corrisponda ad una M5 brana, affinché essa risulti fisicamente accettabile occorre che la sua geometria ammetta uno spazio 4-dimensionale trasverso alla brana e topologicamente equivalente a una 4-sfera.

Questo può essere appreso a fondo constatando che l'M5 brana risulti accoppiata magneticamente alla 4-forma della teoria $G^{(4)}$ e che la carica associata a tale brana sia rappresentata dal flusso di tale 4-forma lungo lo spazio di cui abbiamo parlato.

In formalismo matematico, tale carica è definita da:

$$N_5 \propto \int_{S^4} G_{(4)} \quad (4.36)$$

in cui S^4 sta ad indicare proprio lo spazio trasverso alla brana in questione. Nel nostro caso tale spazio va geometricamente identificato con il segmento finito $y \in [0, N]$ su cui sono fibrati gli spazi S^2 e la coordinata t . Agli estremi di tale segmento il volume degli spazi in questione si contrae e per tale ragione risulta ragionevole limitare il dominio di definizione della nostra soluzione a tale intervallo sulla coordinata y . Per i motivi di cui sopra tale spazio risulta geodesicamente completo e pertanto uno spazio metrico completo, secondo il teorema di Hopf-Rinow.

In definitiva lo spazio sferico 4-dimensionale su cui verrà calcolata la carica della soluzione sarà rappresentato da:

$$\{y \in [0, N]\} \otimes \{t \in [0, 2\pi]\} \otimes \Omega_2 \quad (4.37)$$

ossia da uno spazio sferico 2D e da un disco Σ_2 tali che:

$$S^4 \cong \Omega_2 \times \Sigma_2 \quad (4.38)$$

Per il calcolo esplicito, l'unica componente della 4-forma $G_{(4)}$ a dare contributo non nullo a tale flusso risulta quella esistente lungo tali direzioni, ossia:

$$G_{S^4}^{(4)} = dB_t \wedge dt \wedge d\Omega_2 \quad (4.39)$$

In definitiva notiamo che in questo tipo di soluzioni la carica dipenda esplicitamente e totalmente dalla funzione B_t che è definita come:

$$B_t = \frac{8y^3}{N^2 + y^2} \quad (4.40)$$

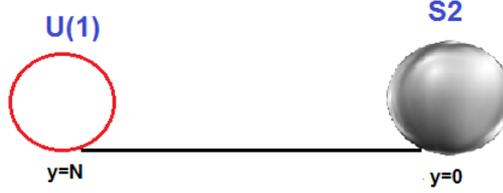


Figura 4.2: spazio topologicamente equivalente a una 4-sfera nelle coordinate (x, y)

In conclusione, la carica associata alla soluzione di Maldacena-Nunez è rappresentata da:

$$\begin{aligned}
 N_5 &\propto \int dB_t \wedge dt \wedge d\Omega_2 = 8\pi^2[B_t(N) - B_t(0)] \\
 \implies \int_{S_4} G^{(4)} &= 32\pi^2 N
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

E' chiaro che tale valore oltre alla carica definisca anche la massa M della soluzione, essendo la soluzione un oggetto BPS.

Se identifichiamo il parametro costante N con il numero di M5-brane wrapate sulla Superficie di Riemann in questione, la carica della soluzione risulta ragionevolmente proporzionale al numero stesso di M5-brane avvolte lungo tale superficie.

4.5 Soluzione Maldacena-Nunez nella pittura elettrostatica

Analizziamo in questa sezione la soluzione nota Maldacena-Nunez nella nuova pittura duale elettrostatica che abbiamo descritto in precedenza; cercheremo di darne un'interpretazione sotto questo nuovo punto di vista e vedremo che questo sar  piuttosto utile per cercare di generalizzarla.

Preso atto che tale soluzione corrisponda alla relazione:

$$\rho^2 = \frac{1}{x^2}(N^2 - y^2) \tag{4.42}$$

le equazioni di Laplace in questo caso specifico si traducono nel sistema di equazioni differenziali:

$$\partial_\rho x = -\frac{x^3 \rho}{N^2} \quad (4.43)$$

$$\partial_\rho y = \frac{y(y^2 - N^2)}{\rho N^2} \quad (4.44)$$

$$\partial_\eta y = -\frac{(N^2 - y^2)^{3/2}}{N^2 \rho} \quad (4.45)$$

$$\partial_\eta x = -\frac{x^2 \sqrt{N^2 - x^2 \rho^2}}{N^2} \quad (4.46)$$

il quale ammette come soluzioni:

$$x = \frac{N}{\sqrt{\rho^2 + \eta^2}} = \partial_\eta V(\rho, \eta) = -E_\eta(\rho, \eta) \quad (4.47)$$

$$y = -\frac{N\eta}{\sqrt{\rho^2 + \eta^2}} = \rho \partial_\rho V(\rho, \eta) = -\rho E_\rho(\rho, \eta) \quad (4.48)$$

Queste espressioni rappresentano la configurazione elettrostatica duale alla soluzione di Maldacena-Nunez e rispettano come è giusto che sia le condizioni di Schwartz per le derivate parziali del potenziale.

La derivata rispetto alla coordinata ρ diverge chiaramente sulla linea $\rho = 0$ in cui pertanto ci attendiamo l'esistenza di una sorgente lineare di carica; inoltre la stessa derivata si annulla a $\eta = 0$ e ciò ci suggerisce l'esistenza di un piano conduttore a $\eta = 0$ appunto.

Tale piano conduttore è chiaramente identificabile grazie al fatto che lungo il piano $\eta = 0$ le componenti del campo elettrico sono perfettamente perpendicolari al piano e non nulle solo lungo la direzione η (vedi fig.4.3).

Chiamando la distribuzione di carica situata a $\rho = 0$ $\lambda(\eta')$ le equazioni da risolvere diventano:

$$y = -\frac{N\eta}{\sqrt{\rho^2 + \eta^2}} = -\rho^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda(\eta')}{((\eta - \eta')^2 + \rho^2)^{3/2}} d\eta' \quad (4.49)$$

$$x = \frac{N}{\sqrt{\rho^2 + \eta^2}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda(\eta') (\eta' - \eta)}{((\eta - \eta')^2 + \rho^2)^{3/2}} d\eta' \quad (4.50)$$

e vengono soddisfatte dalla soluzione:

$$\lambda(\eta) = \frac{N}{2} \text{sign}(\eta) \quad (4.51)$$

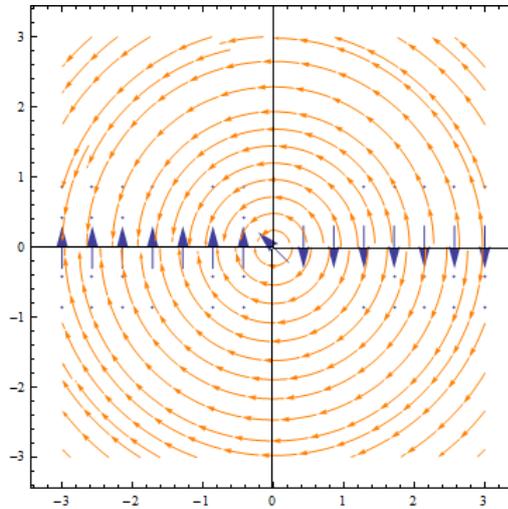


Figura 4.3: Campo elettrico per la soluzione Maldacena-Nunez

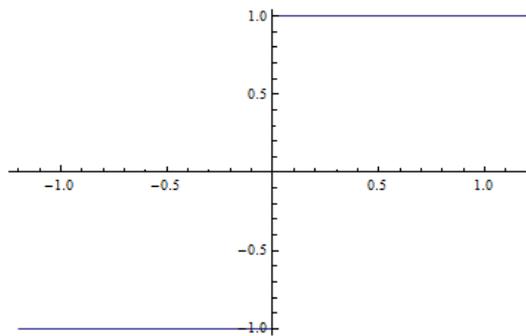


Figura 4.4: distribuzione di carica per soluzione MG

che pertanto rappresenta l'espressione analitica per la distribuzione di carica che dà vita alla soluzione Maldacena-Nunez.

Riassumendo, la soluzione nota $e^D = \frac{N^2 - y^2}{x^2}$ corrisponde dal punto di vista elettrostatico a una distribuzione di carica costante a gradino situata sulla linea $\rho = 0$ e ad un piano conduttore a $\eta = 0$ come possiamo vedere dalla figura 4.5.

Andiamo ora brevemente ad analizzare nuovamente la metrica corrispondente alla soluzione Maldacena-Nunez nella nuova pittura elettrostatica parametrizzata dalle coordinate (ρ, η) per renderci conto di come agisca il map elettrostatico e quali problematiche porta con sé.

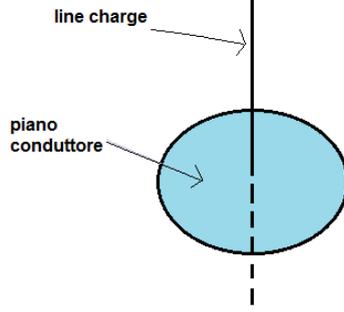


Figura 4.5: Configurazione elettrostatica duale

La metrica, in funzione delle nuove coordinate, assume la forma:

$$\begin{aligned}
 ds_{11}^2 &= \left(\frac{N^2}{2} \frac{2\eta^2 + \rho^2}{\rho^2 + \eta^2} \right)^{\frac{1}{3}} \left[4 dAdS_5^2 + 2 \frac{\eta^2}{\rho^2 + 2\eta^2} d\tilde{\Omega}_2^2 + ds_4^2 \right] \\
 ds_4^2 &= 4 \frac{\rho^2}{\rho^2 + 2\eta^2} (dt + v)^2 + 2 \frac{1}{\rho^2 + \eta^2} (d\rho^2 + d\eta^2) + \frac{4}{N^2} \frac{\eta^2 + \rho^2}{\rho^2} dx_2^2
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

Osservando tali espressioni possiamo subito notare che:

- la coordinata t degenera a ($\rho = 0, \eta \neq 0$) che corrisponde a $y = \pm N$;
- il volume della sfera S^2 si contrae a ($\eta = 0, \rho \neq 0$) che corrisponde a $y = 0$.

Sottolineiamo che i luoghi geometrici su cui la metrica diventa singolare sono gli stessi luoghi che nella configurazione elettrostatica assumono un significato particolare: la linea $\rho = 0$ su cui è situata la distribuzione di carica e il piano $\eta = 0$ su cui giace il piano conduttore infinito.

La metrica risulta perfettamente regolare intorno alle singolarità in questione e per la precisione:

Intorno al punto $\rho = 0, \eta \neq 0$ la metrica diventa:

$$\begin{aligned}
 ds_{11}^2 &= \left(N^2 \right)^{\frac{1}{3}} \left[4 dAdS_5^2 + d\tilde{\Omega}_2^2 + ds_4^2 \right] \\
 ds_4^2 &= \frac{2\rho^2}{\eta^2} (dt + v)^2 + \frac{2}{\eta^2} (d\rho^2 + d\eta^2) + \frac{4}{N^2} dx_2^2
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

Intorno al punto $\eta = 0, \rho \neq 0$ invece la metrica diventa:

$$\begin{aligned}
 ds_{11}^2 &= \left(N^2 \right)^{\frac{1}{3}} \left[4 dAdS_5^2 + \frac{2\eta^2}{\rho^2} d\tilde{\Omega}_2^2 + ds_4^2 \right] \\
 ds_4^2 &= 4 (dt + v)^2 + \frac{2}{\rho^2} (d\rho^2 + d\eta^2) + \frac{4}{N^2} dx_2^2
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

Entrambi i limiti appaiono perfettamente regolari, come d'altronde ci aspettavamo accadesse.

Si può notare però che nella pittura elettrostatica sorgono diversi problemi nel limite $\eta = 0, \rho = 0$, ossia nascono delle divergenze della metrica a seconda di che ordine si effettua tale limite; in altre parole tale limite in questa pittura potrebbe anche non esistere o avere comunque poco significato.

Tale patologia nasce esclusivamente dalla definizione del map tra le coordinate (x, y) e le coordinate (ρ, η) e non è in alcun modo una patologia caratteristica della soluzione, la quale nelle coordinate originarie risulta perfettamente regolare. Vedremo che questi tipi di problemi nasceranno anche con le nuove soluzioni che andremo ad indagare e saranno esattamente analoghi a questo. Andiamo infine ad analizzare il dominio di definizione della soluzione nel piano duale (ρ, η) ; tale dominio di definizione deve essere delimitato da luoghi geometrici in cui una qualche coordinata della soluzione degenera oppure dalle regioni all'infinito. Questo risulta necessario affinché lo spazio metrico sia geodesicamente completo e *privo di buchi*.

In tale ordine di idee appare chiaro che come regione di definizione della soluzione di Maldacena-Nunez possiamo senza problemi prendere la regione di piano corrispondente al primo quadrante ($\eta > 0, \rho > 0$) ossia:

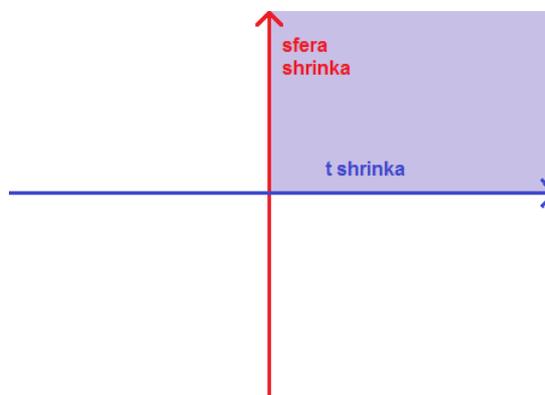


Figura 4.6: dominio di definizione della soluzione MG(in grigio)

4.6 Nuove soluzioni non fattorizzabili

Analizzata a fondo la soluzione nota ricavata da Maldacena e Nunez e studiata successivamente dallo stesso Maldacena insieme a Gaiotto, andiam per un istante a delineare il quadro generale che ci attende ed in particolare facciamo alcune considerazioni circa la forma funzionale della soluzione.

Ricaveremo analiticamente in modo piuttosto semplice che la ricerca di nuove soluzioni richieda di abbandonare l'ipotesi di fattorizzabilità di quest'ultima per non ricadere appunto nella soluzione nota MG.

Vediamo perchè questo accade.

In particolare, iniziamo col parametrizzare il piano (x_1, x_2) tramite le coordinate complesse (z, \bar{z}) definite dalle relazioni:

$$\begin{aligned} z &= x_1 + ix_2 \\ \bar{z} &= x_1 - ix_2 \end{aligned} \quad (4.55)$$

In seguito a tale scelta sarà a breve chiaro che la soluzione fattorizzata debba assumere per forza la forma:

$$e^D = f(y) 2 g_{z\bar{z}}(z, \bar{z}) \quad (4.56)$$

dove $f(y)$ è un polinomio di secondo grado nella variabile y e $g_{z\bar{z}}(z, \bar{z})$ vedremo avrà a che fare con la metrica del piano iperbolico \mathbb{H}_2 .

Andiamo ora a studiare l'equazione differenziale di Toda che governa la totalità delle soluzioni prese in considerazione:

$$\partial_y^2 e^D + \partial_i^2 D = 0 \quad (4.57)$$

sotto le ipotesi appena descritte.

Nelle coordinate complesse da noi scelte la curvatura scalare del piano (z, \bar{z}) risulta:

$$\sqrt{g}R = -2\partial_z\partial_{\bar{z}}\log g_{z\bar{z}} \quad (4.58)$$

In seguito a tale relazione possiamo andare a valutare l'equazione di Toda da un punto di vista metrico più semplice. In particolare possiamo calcolare che:

$$\partial_i^2 D = 4\partial_z\partial_{\bar{z}}\log g_{z\bar{z}} = -2\sqrt{g}R \quad (4.59)$$

Inoltre risulta che:

$$\partial_y^2 e^D = 2g_{z\bar{z}}\partial_y^2 f(y) = 2\sqrt{g}\partial_y^2 f(y) \quad (4.60)$$

In definitiva l'equazione di Toda assume la forma:

$$R = \partial_y^2 f(y) = k \quad (4.61)$$

Abbiam ricavato che nell'ipotesi di fattorizzabilità della soluzione l'equazione differenziale di Toda si traduca quindi nel requisito che la curvatura scalare

del piano (z, \bar{z}) sia definita costante.

In un certo senso l'ipotesi di fattorizzabilità della soluzione fissa la forma analitica di $g_{z\bar{z}}$: quest'ultima non può essere nient'altro che la metrica del piano iperbolico \mathbb{H}_2 a curvatura costante.

Di conseguenza due possibili scelte risultano essere ad esempio:

$$g_{z\bar{z}} = \frac{2}{(1 - z\bar{z})^2}$$

$$g_{z\bar{z}} = \frac{2}{(1 + z\bar{z})^2}$$

Si può verificare con un semplice conto analitico che tali metriche abbiano curvatura scalare rispettivamente:

$$R = -2$$

$$R = 2$$

e che in realtà tali scelte, come in realtà tutte quelle possibili, siano collegate tra loro da una trasformazione conforme nel piano (z, \bar{z}) .

Verificato analiticamente che le sole soluzioni fattorizzabili accettabili sono quelle della forma appena descritta e che tutte le altre siano legate a queste da trasformazioni conformi nel piano complesso (z, \bar{z}) risulta piuttosto chiaro quale debba essere la direzione di ricerca per generalizzare la soluzione MG. Sarà necessario andare ad analizzare soluzioni non-fattorizzabili e per far ciò sarà molto utile andare a valutarle nel contesto elettrostatico duale. E' chiaro a questo punto che ogni qualvolta ci troveremo di fronte a soluzioni dell'equazione di Toda in forma fattorizzata queste saranno totalmente equivalenti alla soluzione di Maldacena-Nunez e quindi prive di interesse.

4.7 Distribuzione di carica equivalente e soluzioni corrispondenti

Nel percorso di generalizzazione della soluzione MG la prima e più semplice idea sarà quella di mantenere la stessa struttura elettrostatica e di andare a complicare progressivamente la distribuzione di carica cambiandone la forma funzionale. Manterremo la configurazione caratterizzata dalla presenza del piano conduttore a $\eta = 0$ e della distribuzione lineare di carica a $\rho = 0$ e andremo a modificare quest'ultima.

In tale direzione, cercheremo inizialmente di estrarre delle condizioni generali sulla distribuzione di carica affinché essa corrisponda a soluzioni gravitazionali fisicamente accettabili; questo verrà fatto descrivendo la metrica della

soluzione in funzione della distribuzione di carica $\lambda(\eta)$ e studiando gli sviluppi algebrici in un intorno di $\rho = 0$.

Utilizzando il Teorema di Gauss su di una superficie cilindrica che avvolge il filo situato a $\rho = 0$ otteniamo:

$$2\pi\rho E_\rho(\rho, \eta) + 2\pi \int_0^\rho d\rho' \rho' \partial_\eta E_\eta(\rho', \eta) = 4\pi\lambda(\eta)$$

Tale relazione, associata alla definizione di x e y 4.16 e alle equazioni di Laplace nella forma 4.17, implica:

$$y(\rho, \eta) = -2\lambda(\eta) + y(\rho, \eta) - \lim_{\rho' \rightarrow 0} y(\rho', \eta)$$

In definitiva nel limite $\rho \rightarrow 0$ risulta:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} y(\rho, \eta) = -2\lambda(\eta) \quad (4.62)$$

Riportando alla memoria che le condizioni di Schwarz per le derivate miste del potenziale $V(\rho, \eta)$ vengono riscritte come:

$$\partial_\eta y = \rho \partial_\rho x = -2\lambda'(\eta) + \dots \quad \rho \rightarrow 0 \quad (4.63)$$

Sfruttando l'espressione di cui sopra è possibile determinare lo sviluppo a $\rho \rightarrow 0$ della funzione $x(\rho, \eta)$ che risulta:

$$x(\rho, \eta) = \alpha(\eta) - 2\lambda'(\eta) \log \rho + \dots \quad \rho \rightarrow 0 \quad (4.64)$$

Come possiamo subito notare la funzione $x(\rho, \eta)$ non viene determinata univocamente ma può essere definita solamente a meno di una funzione $\alpha(\eta)$; questo è ovviamente motivato dal fatto che l'espressione 4.63 utilizzata è una relazione differenziale che definisce in modo univoco solamente la derivata della funzione $x(\rho, \eta)$ rispetto alla coordinata ρ e non si accorge in alcun modo di un eventuale termine dipendente solamente dall'altra coordinata η . La funzione $\alpha(\eta)$ sembrerebbe pertanto definire infiniti nuovi gradi di libertà al problema ma così non è; accade infatti che se consideriamo l'intero piano (ρ, η) in cui la funzione $V(\rho, \eta)$ risulta armonica ad esclusione della linea $\rho = 0$ tale funzione non risulta indipendente dalla distribuzione di carica $\lambda(\eta)$ ma può essere ricavata in modo completo e analitico a partire da quest'ultima. Nel caso in cui invece lo spazio considerato non sia tutto il piano in questione, ipotesi che noi non indagheremo, le due funzioni risultano indipendenti e i nuovi gradi di libertà associati alla funzione $\alpha(\eta)$ saranno proprio quelli associati alle diverse condizioni al contorno possibili.

Utilizzando ancora una volta l'equazione di Laplace nella forma $\partial_\rho y = -\rho \partial_\eta x$

e reiterando i procedimenti appena descritti risulta possibile ottenere gli sviluppi perturbativi di x e y ad ordini più alti nell'intorno di $\rho \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} x(\rho, \eta) &= \alpha(\eta) - 2\lambda'(\eta) \log \rho + \dots \\ y(\rho, \eta) &= -2\lambda(\eta) + \lambda''(\eta) \frac{\rho^2}{2} \log \rho^2 - \frac{\rho^2}{2} (\alpha'(\eta) + \lambda''(\eta)) + \dots \end{aligned} \quad (4.65)$$

Per i nostri scopi vedremo basterà fermarsi ai gradi descritti nelle espressioni 4.65.

Date le precedenti definizioni, possiamo valutare gli sviluppi delle funzioni del potenziale $V(\rho, \eta)$ che assumono particolare importanza nello studio delle nostre soluzioni, in particolare:

$$\begin{aligned} V' &= \alpha(\eta) - 2\lambda'(\eta) \log \rho + \dots \\ \dot{V} &= -2\lambda(\eta) + \lambda''(\eta) \frac{\rho^2}{2} \log \rho^2 - \frac{\rho^2}{2} (\alpha'(\eta) + \lambda''(\eta)) \\ V'' &= \alpha'(\eta) - 2\lambda''(\eta) \log \rho + \dots \\ \ddot{V} &= \lambda''(\eta) \rho^2 \log \rho^2 - \rho^2 \alpha' + \dots \\ \dot{V}' &= -2\lambda'(\eta) + \dots \\ \bar{\Delta}^2 &= 4(\lambda'(\eta))^2 + \rho^2 [(\alpha'(\eta))^2 - 2\alpha' \lambda'' \log \rho^2] + \dots O(\rho^2 (\log \rho^2)^2) \\ \Delta &= 4[(\lambda')^2 - \lambda \alpha' + \lambda \lambda'' \log \rho^2] + \dots O(\rho^2) \end{aligned} \quad (4.66)$$

con le quali descriviamo l'intera metrica nel limite $\rho \rightarrow 0$. Infatti:

$$\begin{aligned} g_{\rho\rho} &= \frac{2V''}{\dot{V}} = -\frac{\alpha'}{\lambda} + \frac{\lambda''}{\lambda} \log \rho^2 + \dots \\ g_{22} &= \frac{2V'' \rho^2}{\dot{V} \bar{\Delta}^2} = \rho^2 \left(-\frac{\alpha'}{4\lambda(\lambda')^2} + \frac{\lambda''}{4\lambda(\lambda')^2} \log \rho^2 \right) + \dots \\ \frac{4}{g_{tt}} &= 1 - \frac{\lambda \alpha'}{(\lambda')^2} + \frac{\lambda \lambda''}{(\lambda')^2} \log \rho^2 + \dots \\ g_{sfera} &= 1 + \rho^2 \left(\frac{\alpha'}{2\lambda} + \frac{\lambda''}{4\lambda} \right) \dots \\ e^{6\bar{\lambda}} &= \frac{(1 - \frac{\lambda \alpha'}{4(\lambda')^2} + \frac{\lambda \lambda''}{4(\lambda')^2} \log \rho^2) 4(\lambda')^2}{\frac{\lambda''}{\lambda} \log \rho^2} = \lambda^2 + \dots \end{aligned} \quad (4.67)$$

Innanzitutto possiamo notare che tutti tali coefficienti sono dominati dal fattore $(\frac{\lambda''}{\lambda} \log \rho)$, il quale nel limite $\rho \rightarrow 0$ chiaramente diverge.

Per curare tale patologia pertanto occorre che la distribuzione di carica sia caratterizzata da $\lambda'' = 0$. Questo significa che la distribuzione di carica

situata a $\rho = 0$ debba per forza essere rappresentata da una funzione costante a tratti o quantomeno una funzione a *zig zag*; analizzeremo in seguito le due possibilità.

Soddisfatta tale ipotesi, la metrica risultante diventa:

$$\begin{aligned}
g_{\rho\rho} &= \frac{2V''}{\dot{V}} = -\frac{\alpha'}{\lambda} + \dots \\
g_{22} &= \frac{2V''\rho^2}{\dot{V}\Delta^2} = \rho^2\left(-\frac{\alpha'}{4\lambda(\lambda')^2}\right) + \dots \\
\frac{4}{g_{tt}} &= 1 - \frac{\lambda\alpha'}{(\lambda')^2} + \dots \\
e^{6\tilde{\lambda}} &= \frac{\left(1 - \frac{\lambda\alpha'}{(\lambda')^2} + \frac{\lambda\lambda''}{4(\lambda')^2} \log \rho^2\right)4(\lambda')^2}{\frac{\lambda''}{\lambda} \log \rho^2} = \lambda^2 + \dots \\
g_{sfera} &= 1 + \rho^2\left(\frac{\alpha'}{4\lambda}\right) \dots
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Affinchè la positività di tale soluzione venga rispettata e la sfera abbia la possibilità di degenerare occorre ulteriormente che la distribuzione di carica soddisfi il requisito:

$$\alpha'\lambda < 0 \tag{4.69}$$

In definitiva possiamo concludere che:

Le sole distribuzioni di carica λ che danno luogo a soluzioni gravitazionali fisicamente accettabili risultano essere quelle soddisfacenti i requisiti $\lambda'' = 0$ e $\alpha'\lambda < 0$.

Per convincerci che tali condizioni siano condizioni necessarie (ma per quel che sappiamo non sufficienti) per la consistenza delle soluzioni, possiamo verificare che la soluzione nota Maldacena-Nunez, che corrisponde alle funzioni:

$$\lambda = \frac{N}{2} \text{sign}(\eta') \tag{4.70}$$

$$\alpha = \frac{N}{|\eta'|} \tag{4.71}$$

soddisfi esattamente entrambi i requisiti.

In seguito a tale analisi, abbiamo ottenuto delle linee guida nella ricerca delle nuove soluzioni che come vedremo dovranno in modo assoluto soddisfare tali requisiti: in conseguenza di tale fatto la classe di soluzioni da indagare risulterà fortemente ristretta⁴.

Andiamo ora ad approfondire le due possibili scelte che abbiamo a disposizione per la distribuzione di carica.

⁴In realtà tali requisiti e tali restrizioni hanno a che fare solamente con soluzioni valide nell'intero spazio (ρ, η) .

4.7.1 Distribuzioni con $\lambda = \lambda_0$

La prima possibilità che soddisfa il requisito $\lambda'' = 0$ è chiaramente la scelta di una distribuzione di carica costante, o quantomeno costante a tratti. Andiamo pertanto ad investigare il caso in cui la distribuzione risulti:

$$\lambda(\eta') = \text{cost.} = \lambda_0 \neq 0 \quad (4.72)$$

Seguendo questa ipotesi, il map elettrostatico nell'intorno della linea $\rho = 0$ sarà semplicemente:

$$x(\rho, \eta) = \alpha(\eta) \quad (4.73)$$

$$y(\rho, \eta) = -2\lambda(\eta) - \frac{\rho^2}{2}\alpha'(\eta) \quad (4.74)$$

Reiterando il procedimento generale fatto nel paragrafo precedente definiamo tutte le funzioni elettrostatiche di interesse a partire dall'ipotesi $\lambda = \lambda_0$:

$$\begin{aligned} V' &= \alpha(\eta) + \dots \\ \dot{V} &= -2\lambda(\eta) - \frac{\rho^2}{2}\alpha'(\eta) + \dots \\ V'' &= \alpha'(\eta) + \dots \\ \ddot{V} &= -\rho^2\alpha' + \dots \\ \dot{V}' &= -\frac{\rho^2}{2}\alpha''(\eta) + \dots \\ \overline{\Delta}^2 &= \rho^2\left(\frac{\rho^2}{4}\alpha''^2(\eta) + \alpha'^2(\eta)\right) + \dots \\ \Delta &= -4\lambda_0\alpha'(\eta) + \frac{\rho^4}{4}\alpha''^2(\eta) \end{aligned} \quad (4.75)$$

Se per qualche motivo volessimo invece *troncare* lo spazio fisico (per esempio restringendolo al semipiano $\eta > 0$) allora la classe di soluzioni possibili sarebbe notevolmente più ampia e le informazioni relative alle condizioni al contorno verrebbero immagazzinate nella funzione $\alpha(\eta)$, la quale in tale soluzione sarebbe totalmente indipendente dalla distribuzione di carica $\lambda(\eta)$.

Di conseguenza le diverse parti della metrica risultano:

$$\begin{aligned}
g_{\rho\rho} &= -\frac{\alpha'}{\lambda_0} + \dots \\
g_{22} &= -\frac{1}{\alpha'\lambda_0} + \dots \\
g_{tt} &= -\frac{\alpha'}{\lambda_0}\rho^2 + \dots \\
e^{6\tilde{\lambda}} &= 4\lambda_0^2 + \dots \\
g_{sfera} &= 1 + \rho^2\frac{\alpha'}{4\lambda_0} + \dots
\end{aligned} \tag{4.76}$$

Da tali sviluppi è possibile dedurre nuovamente la condizione, che valeva già nel caso generale, di positività della metrica:

$$\alpha'\lambda_0 < 0 \tag{4.77}$$

La cosa più importante da notare risulterà però il fatto che la coordinata t , per soluzioni costanti o costanti a tratti, degeneri sempre lungo la linea $\rho = 0$ su cui è distribuita la carica.

Cosa ancor più sorprendente è il fatto che già da questi sviluppi è possibile dimostrare non solo che questo accada ma che accada anche in maniera regolare. Infatti, estrapolando solo la parte di metrica interessata, questa risulta:

$$-\frac{\alpha'}{\lambda_0}[\rho^2 dt^2 + d\rho^2] \tag{4.78}$$

ed è chiaramente regolare nella regione in cui appare singolare, ossia sulle linea $\rho = 0$.

Considerate pertanto soluzioni di questo tipo non sarà nemmeno necessario andarne a controllare la regolarità su tale linea, poichè abbiam dimostrato in modo generale che questa sia sempre rispettata.

Va però analizzato il caso in cui $\lambda_0 = 0$; questo verrà fatto nei paragrafi seguenti.

4.7.2 Distribuzioni con $\lambda_0 = 0$

Analizzando più a fondo gli sviluppi della metrica 4.76, ci accorgiamo che se aggiungiamo all'ipotesi $\lambda = cost$. l'ulteriore caratteristica che tale distribuzione di carica si annulli su una regione geometrica estesa nascano numerosi problemi per la nostra soluzione.

In particolare, se fissiamo $\lambda_0 = 0$ su un tratto finito della linea $\rho = 0$ gli sviluppi presi in considerazione subiscono le seguenti patologie:

$$\begin{aligned}
g_{\rho\rho} &\longrightarrow \infty \\
g_{22} &\longrightarrow ? \\
g_{tt} &\longrightarrow \infty \\
e^{6\tilde{\lambda}} &\longrightarrow 0 \\
g_{sfera} &\longrightarrow \infty
\end{aligned} \tag{4.79}$$

E' chiaro che in tal caso la soluzione perda completamente di significato; in conclusione possiamo affermare che:

Soluzioni costanti o costanti a tratti in cui la distribuzione di carica si annulli su una regione estesa della linea $\rho = 0$ non sono fisicamente accettabili.

Potremmo accettare solamente l'ipotesi che la distribuzione di carica si annulli lungo la linea $\rho = 0$ in un numero arbitrario ma finito di punti; questo è quel che accade per la soluzione di Maldacena-Nunez in cui $\lambda_0 = 0$ nell'origine ($\rho = 0, \eta = 0$).

Analizzeremo in seguito con più attenzione il caso in cui la distribuzione di carica sia lineare poichè risulterà di estrema importanza.

4.8 Curvatura delle soluzioni

Nello studio delle soluzioni gravitazionali su varietà curve e della loro regolarità è chiaro che lo strumento fondamentale sia senza dubbio il tensore di curvatura legato alla metrica della soluzione ed in particolare gli scalari costruiti a partire da tale tensore.

E' chiaro che la metrica possa essere affetta da diverse patologie, tra le quali possibili singolarità nella definizione dei suoi coefficienti; è altrettanto chiaro che l'invarianza per diffeomorfismi della teoria crei una certa ambiguità sul significato di tali singolarità. In particolare essendo la metrica descritta da un tensore di rango due del tipo $g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$, la sua forma può cambiare profondamente sotto l'azione di una trasformazione di coordinate (diffeomorfismo) e per la precisione:

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^j} d\bar{x}^i \otimes d\bar{x}^j = \bar{g}_{ij} d\bar{x}^i \otimes d\bar{x}^j \tag{4.80}$$

Di conseguenza lo studio delle singolarità effettuato tramite l'analisi dei coefficienti della metrica può essere profondamente pericoloso e privo di significato. Per studiare in modo corretto e coerente le singolarità di una certa

soluzione occorre analizzare gli oggetti che hanno un comportamento scalare sotto l'azione dei diffeomorfismi. Il tensore fondamentale che contiene tutte le informazioni relative a una certa soluzione gravitazionale e quindi relative a una certa metrica è chiamato *Tensore di Riemann* R^i_{jkl} ed è definito operativamente come:

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{lj}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{kj}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kp} \Gamma^p_{lj} - \Gamma^p_{kj} \Gamma^i_{lp} \quad (4.81)$$

in cui i simboli Γ^a_{bc} rappresentano i cosiddetti *Simboli di Christoffel di seconda specie* legati alla Varietà Riemanniana in questione.

Il più semplice scalare associato a tale tensore e costruibile tramite tale tensore è senza dubbio la cosiddetta *Curvatura Scalare* R , definita come:

$$R = g^{ik} g^{jl} R_{ijkl} \quad (4.82)$$

Andremo pertanto a studiare analiticamente tale scalare; le possibili singolarità di tale oggetto saranno singolarità effettive della soluzioni e non singolarità dipendenti da una scelta infelice del sistema di coordinate.

La definizione analitica di questo oggetto tramite le relazioni di cui sopra risulta piuttosto complicata dal punto di vista calcolistico a causa del grande numero di componenti che vanno analizzate, pertanto occorre un metodo più agile per trovarne la forma analitica esplicita.

In questo caso vengono in aiuto le equazioni del moto 11-dimensionale relative al campo gravitazionale che si scrivono come:

$$R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} R = 8\pi G T_{\mu\nu}(G^{(4)}) \quad (4.83)$$

in cui $T_{\mu\nu}(G^{(4)})$ è il tensore energia-impulso associato alla 4-forma $G^{(4)}$ e avente forma analitica:

$$T_{\mu\nu}(G^{(4)}) = \alpha g_{\mu\nu} G_{ABCD} G^{ABCD} + \beta G_{\mu EFG} G_{\nu}{}^{EFG} \quad (4.84)$$

Effettuando l'operazione di traccia rispetto agli indici $\{\mu, \nu\}$ dell'equazione 4.83 otteniamo una semplice relazione che ci collega la Curvatura Scalare con il quadrato della 4-forma, ossia:

$$R = \frac{2Tr(T_{\mu\nu})}{2 - Tr(g_{\mu\nu})} \propto \frac{2Tr(g_{\mu\nu}) + 2}{2 - Tr(g_{\mu\nu})} G^2 \implies R \propto G^2 \quad (4.85)$$

La strada da seguire sarà pertanto andare a calcolare G^2 , poichè il suo comportamento sarà esattamente analogo a quello dello scalare di curvatura da noi desiderato.

Il calcolo verrà effettuato utilizzando la definizione di Dualità di Hodge già descritta nel corso di questo lavoro, la quale permette di scrivere in modo compatto il quadrato della 4-forma come:

$$G^2 = *(G \wedge *G) \quad (4.86)$$

In definitiva, dopo una lunga serie di calcoli che omettiamo, arriviamo a definire analiticamente la curvatura delle nostre soluzione nelle coordinate $\{x, y\}$ la quale risulta:

$$\begin{aligned} R \propto G^2 = & \frac{1}{y^{4/3}(\partial_y D)^{2/3}(y\partial_y D - 1)^{1/3}} \\ & \left[e^{-D} y^2 \frac{(2y\partial_y D - 1)(\partial_y \partial_x D)^2}{(y\partial_y D - 1)^2(\partial_y D)^2} + \right. \\ & + \frac{(y\partial_y D)[y(\partial_y D)^2 - y\partial_y^2 D - 2\partial_y D]^2}{(y\partial_y D - 1)^2(\partial_y D)^2} + \\ & \left. + \frac{(y\partial_y D - 1)[2y(\partial_y D)^2 + y\partial_y^2 D - \partial_y D]^2}{(y\partial_y D - 1)^2(\partial_y D)^2} \right] \end{aligned} \quad (4.87)$$

Testiamo innanzitutto la correttezza del risultato ottenuto applicandolo alla soluzione di Maldacena-Nunez (con $N = 1$):

$$e^D = \frac{1 - y^2}{x^2} \quad (4.88)$$

che deve essere esplicitamente regolare. Otteniamo infatti per tale soluzione l'espressione:

$$R \propto G^2 = \frac{1}{\sqrt[3]{4(1 + y^2)}} \left[\frac{-2(9 + 8y^2 + 3y^4)}{(1 + y^2)^2} \right] \quad (4.89)$$

la quale non presenta alcun tipo di patologia.

Andiamo infine a descrivere lo stesso oggetto scalare nella pittura duale equivalente, ossia nelle coordinate $\{\rho, \eta\}$ ottenendo:

$$\begin{aligned} R \propto G^2 = & \frac{(\bar{\Delta}^2)^3}{(\dot{V})^{4/3}(V'')^{2/3}\Delta^{4/3}} \\ & \left\{ \frac{\dot{V}^2(-\Delta - 2\dot{V}V'')}{4\rho^2\Delta(V'')^2} \left[(\dot{V}'\rho\partial_\rho - \ddot{V}\partial_\eta) \left(\frac{-2V''}{\Delta^2} \right) \right]^2 + \right. \\ & + \frac{-\dot{V}}{\Delta 2V''} \left[\dot{V}(-\rho V''\partial_\rho + \dot{V}'\partial_\eta) \left(\frac{2V''}{\Delta^2} \right) + 4V'' + \frac{4\dot{V}V''^2}{\Delta^2} \right]^2 + \\ & \left. + \frac{-1}{4V''^2} \left[\dot{V}(\rho V''\partial_\rho - \dot{V}'\partial_\eta) \left(\frac{2V''}{\Delta^2} \right) + 2V'' + \frac{8\dot{V}V''^2}{\Delta^2} \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (4.90)$$

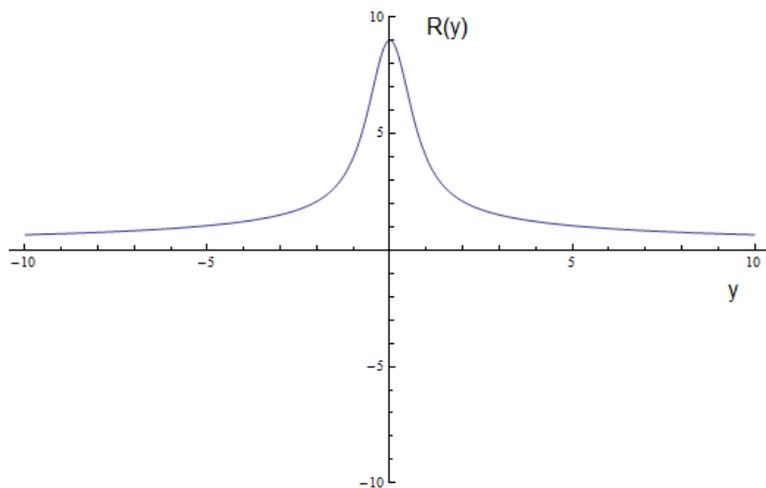


Figura 4.7: Curvatura scalare $R(y)$ della soluzione Maldacena-Nunez in funzione della coordinata y

Abbiamo descritto in modo completo la curvatura scalare delle soluzioni di nostro interesse, non ci resta che andarne a studiarne i comportamenti intorno ai punti critici della soluzione.

Faremo tutto ciò nelle prossime sezioni.

4.9 Il piano conduttore e la sfera S^2

In questo capitolo andremo a studiare le possibili singolarità delle soluzioni in questione e le conseguenti condizioni di regolarità associate.

Studieremo in particolare la regione di spazio in cui la sfera S^2 degenera e andremo a dimostrare che l'esistenza di un piano conduttore a $\eta = 0$ nella pittura elettrostatica duale garantisca la regolarità della soluzione in tale limite.

Per far ciò andiamo innanzitutto a riscrivere in forma completa la metrica

delle nostre soluzioni nella pittura elettrostatica duale, la quale risulta:

$$ds_{11}^2 = \left(\frac{\dot{V}(\rho^2 V''^2 + \dot{V}'^2 + 2\dot{V}V'')}{2V''} \right)^{\frac{1}{3}} \left[4dAdS_5^2 + \frac{2\dot{V}V''}{\rho^2 V''^2 + \dot{V}'^2 + 2\dot{V}V''} d\tilde{\Omega}_2^2 + ds_4^2 \right] \quad (4.91)$$

$$ds_4^2 = 4 \frac{\rho^2 V''^2 + \dot{V}'^2}{\rho^2 V''^2 + \dot{V}'^2 + 2\dot{V}V''} (dt + v)^2 + \frac{2V''}{\dot{V}} \left[(d\rho^2 + d\eta^2) + \frac{\rho^2}{\rho^2 V''^2 + \dot{V}'^2} dx_2^2 \right] \quad (4.92)$$

con:

$$v = - \frac{\dot{V}'}{\rho^2 V''^2 + \dot{V}'^2} dx_2 \quad (4.93)$$

Osservando la metrica 4.91 si vede chiaramente che la sfera S^2 possa degenerare in uno dei seguenti tre casi:

1. $V'' = 0$
2. $\dot{V} = 0$
3. $\dot{V} = V'' = 0$

Analizzando più a fondo la struttura della soluzione si nota che nel primo e nel secondo caso nascono diverse patologie in alcuni coefficienti della metrica che si annullano o divergono e che esprimono numerosi sospetti circa la non regolarità della soluzione.

I dubbi sono avvalorati dallo studio analitico della curvatura scalare 4.90 che è chiaramente divergente nel caso in cui $V'' = 0$ o $\dot{V} = 0$.

L'unica speranza affinché la sfera degeneri e lo faccia in modo regolare non resta nient'altro che il requisito che in una certa regione di spazio accada contemporaneamente che $\dot{V} = V'' = 0$.

Notiamo che per la soluzione Maldacena-Nunez tutto ciò era intimamente legato alla presenza di un piano conduttore a $\eta = 0$ su cui accadeva proprio quanto precedentemente descritto. La presenza di un piano conduttore a $\eta = 0$ innanzitutto riduce la scelta tra le possibili distribuzioni di carica $\lambda(\eta')$ ai soli casi in cui la distribuzione risulti dispari rispetto al piano $\eta = 0$ ossia soddisfi:

$$\lambda(-\eta') = -\lambda(\eta') \quad (4.94)$$

Analizziamo in tal caso cosa accada alle altre funzioni del potenziale V scrivendo quest'ultime in forma integrale in funzione della distribuzione di carica:

$$\dot{V} = -\rho^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda(\eta')}{((\eta - \eta')^2 + \rho^2)^{3/2}} d\eta' \quad (4.95)$$

$$V'' = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda(\eta') [2(\eta - \eta')^2 - \rho^2]}{((\eta - \eta')^2 + \rho^2)^{5/2}} d\eta' \quad (4.96)$$

$$\dot{V}' = -\rho^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3\lambda(\eta') (\eta' - \eta)}{((\eta - \eta')^2 + \rho^2)^{5/2}} d\eta' \quad (4.97)$$

Si nota chiaramente che ipotizzando che la distribuzione di carica sia dispari (4.94) le funzioni V'' e \dot{V} si annullino contemporaneamente a $\eta = 0$ dove esiste appunto il già citato piano conduttore.

La metrica nel caso in cui $V'' = \dot{V} = 0$ diventa:

$$ds_{11}^2 = \left(\frac{\dot{V}\dot{V}'^2}{2V''} \right)^{\frac{1}{3}} \left[4 dAdS_5^2 + \frac{2\dot{V}V''}{\dot{V}'^2} d\tilde{\Omega}_2^2 + 4 \left(dt - \frac{1}{\dot{V}'} dx_2 \right)^2 + 2 \frac{V''}{\dot{V}'} \left(d\rho^2 + d\eta^2 + \frac{\rho^2}{\dot{V}'^2} dx_2^2 \right) \right]$$

Da questa espressione si deduce che le due condizioni affinché la metrica sia regolare a $\eta = 0$ siano⁵:

$$\dot{V} \propto \eta, \quad \eta \longrightarrow 0 \quad (4.99)$$

$$\dot{V}' \neq 0, \quad \eta = 0 \quad (4.100)$$

Studiamo un po meglio le relazioni integrali citate in precedenza nell'intorno del piano conduttore ed in particolare otteniamo che:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\eta \approx 0) &= -\rho^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda(\eta')}{(\eta'^2 + \rho^2)^{3/2}} d\eta' - \rho^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3\lambda(\eta')\eta'\eta}{(\eta'^2 + \rho^2)^{5/2}} d\eta' + \dots \\ &= \alpha\eta \end{aligned} \quad (4.101)$$

Ciò significa che nell'intorno del piano conduttore la funzione \dot{V} si annulli linearmente con η .

Allargando questa analisi alle altre funzioni del potenziale V si dimostra

⁵La prima di queste deriva da:

$$\frac{\dot{V}^2}{\dot{V}'^2} = \eta^2 \quad (4.98)$$

che la presenza di un piano conduttore a $\eta = 0$ implichi che in quel punto accadano contemporaneamente:

$$\dot{V} = \alpha\eta, \quad \eta \longrightarrow 0 \quad (4.102)$$

$$V'' = \beta\eta, \quad \eta \longrightarrow 0 \quad (4.103)$$

$$\dot{V}' = \alpha, \quad \eta \longrightarrow 0 \quad (4.104)$$

e che quindi le condizioni di regolarità vengano soddisfatte totalmente. Andiamo a studiare in modo più rigoroso la situazione appena descritta analizzando direttamente la curvatura scalare 4.87 calcolata nei capitoli precedenti e ricordando che il piano conduttore corrisponda in coordinate $\{x, y\}$ al piano $y = 0$.

Traducendo la situazione nella pittura $\{x, y\}$ si verifica che affinché la curvatura scalare sia priva di singolarità nella regione $y = 0$ occorre contemporaneamente che:

$$(\partial_y \partial_x D)^2, \propto y^n, \quad n \geq 2, \quad y \longrightarrow 0 \quad (4.105)$$

$$y \partial_y^2 D - \partial_y D \propto y^n, \quad n \geq 2, \quad y \longrightarrow 0 \quad (4.106)$$

Le due relazioni appena definite sono chiaramente soddisfatte da una funzione del tipo:

$$\partial_y D \propto yf(x) + y^2g(x) + y^3h(x) + \dots \quad y \longrightarrow 0 \quad (4.107)$$

In altri termini occorre che la funzione $\partial_y D$ sia proporzionale ad y quando quest'ultima coordinata si annulla.

E' chiaro che la condizione di sopra, tornando al linguaggio elettrostatico, diventi:

$$\frac{V''}{\Delta^2} \propto y(\rho, \eta)F(\rho, \eta), \quad y(\rho, \eta) \longrightarrow 0 \quad (4.108)$$

con $F(\rho, \eta) \neq 0$ in quel limite.

Sappiamo oramai che questo accada sul piano conduttore $\eta = 0$ e che accada come $y \propto \eta$. Quindi possiamo riscrivere quanto trovato come:

$$\frac{V''}{\dot{V}'' + \rho^2 V''^2} \propto \eta Y(\rho)F(\rho, \eta), \quad \eta \longrightarrow 0 \quad (4.109)$$

con $F(\rho, \eta) \neq 0$ a $\eta = 0$.

In definitiva otteniamo il requisito di regolarità ultimo:

$$\frac{V''}{\dot{V}''} \propto \eta H(\rho), \quad \eta \longrightarrow 0 \quad (4.110)$$

che è esattamente la condizione trovata in modo semplicistico in precedenza e soddisfatta automaticamente dalla presenza del piano conduttore a $\eta = 0$. In conclusione si dimostra che:

La presenza di un piano conduttore a $\eta = 0$, la quale è garantita dalle proprietà di simmetria della distribuzione di carica, implica in modo diretto che lo spazio sferico 2D degeneri proprio a $\eta = 0$ e che lo faccia in modo regolare.

4.9.1 Le discontinuità a gradino e le curve singolari

Abbiamo visto nei capitoli precedenti che la soluzione di Maldacena-Nunez sia caratterizzata da una distribuzione di carica dispari costante a tratti e avente una discontinuità di prima specie nell'origine.

La generalizzazione più semplice di tale soluzione è senza dubbio rappresentata dall'idea di aggiungere altre discontinuità a gradino alla distribuzione. Vediamo cosa accade pertanto aggiungendo una seconda discontinuità infinitesima alla soluzione e mantenendo la distribuzione di carica dispari.

Consideriamo come distribuzione di carica la funzione:

$$\lambda(\eta') = \text{Sign}(\eta') - \epsilon \left(\Theta(\eta' - 1) - \Theta(-\eta' - 1) \right) \quad (4.111)$$

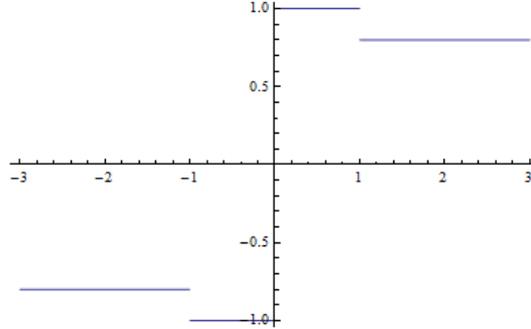


Figura 4.8: $\lambda(\eta', \epsilon)$

Con tale distribuzione otteniamo le funzioni per il potenziale:

$$\begin{aligned} V'(\eta, \rho) &= \frac{2}{\sqrt{\eta^2 + \rho^2}} - \epsilon \left(\frac{1}{\sqrt{(\eta - 1)^2 + \rho^2}} + \frac{1}{\sqrt{(\eta + 1)^2 + \rho^2}} \right) \\ \dot{V}(\eta, \rho) &= -\frac{2\eta}{\sqrt{\eta^2 + \rho^2}} + \epsilon \left(\frac{\eta - 1}{\sqrt{(\eta - 1)^2 + \rho^2}} + \frac{\eta + 1}{\sqrt{(\eta + 1)^2 + \rho^2}} \right) \\ V''(\eta, \rho) &= -\frac{2\eta}{(\eta^2 + \rho^2)^{3/2}} + \epsilon \left(\frac{\eta - 1}{((\eta - 1)^2 + \rho^2)^{3/2}} + \frac{\eta + 1}{((\eta + 1)^2 + \rho^2)^{3/2}} \right) \end{aligned} \quad (4.112)$$

Correttamente per $\epsilon = 0$ ritroviamo la soluzione Maldacena-Nunez. La presenza della seconda discontinuità, seppur infinitesima complica la forma funzionale delle funzioni V'' e \dot{V} e crea l'esistenza di curve su cui tali funzioni si annullano indipendentemente, come possiamo vedere dai grafici delle funzioni $V''(\eta, \rho), \dot{V}(\eta, \rho)$ considerati per due differenti valori di ϵ . Si nota chiaramente che non appena si inserisce il parametro ϵ , seppur infinitesimo, la funzione V'' presenta subito delle curve speculari su cui si risulti nulla; per quanto riguarda la funzione \dot{V} invece vale lo stesso discorso ma solamente per valori del parametro ϵ maggiori di 1.

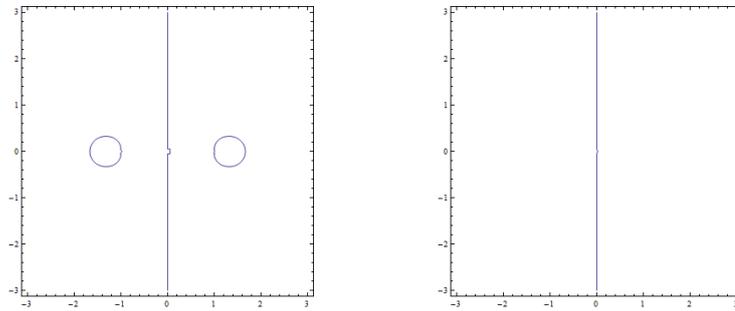


Figura 4.9: $V''(\eta, \rho) = 0$ e $\dot{V}(\eta, \rho) = 0$ con $\epsilon = 0.3$

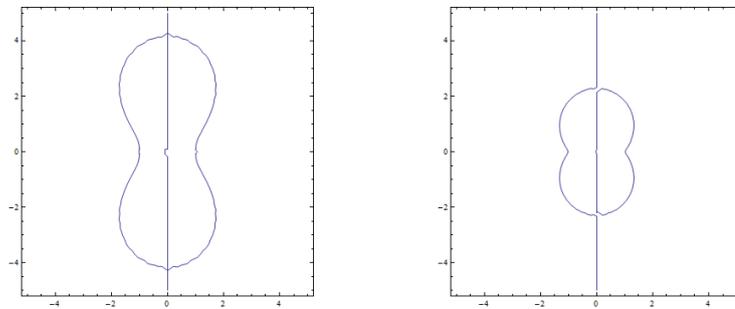


Figura 4.10: $V''(\eta, \rho) = 0$ e $\dot{V}(\eta, \rho) = 0$ con $\epsilon = 1.3$

Abbiamo dimostrato nel paragrafo precedente che l'esistenza di curve su cui V'' e \dot{V} si annullano separatamente crea diverse patologie circa la regolarità della soluzione nel luogo dei punti in cui questo accade e in cui di conseguenza degenera la sfera S^2 .

In definitiva possiamo ora affermare che l'idea di generalizzare la soluzione nota aggiungendo altre discontinuità di prima specie alla distribuzione di carica risulti fallimentare, proprio perchè tale meccanismo analitico induce l'esistenza delle curve appena discusse.

4.10 Una nuova classe di soluzioni $SO(1, 5) \times SO(3) \times U(1)$

In questa sezione ci proponiamo di presentare le diverse soluzioni regolari al problema che abbiamo studiato; si tratta di soluzioni 1/2 BPS di Supergravità 11-dimensionale con simmetria $SO(1, 5) \times SO(3) \times U(1)$. La collezione di soluzioni da noi studiate sono l'esatto analogo delle soluzioni proposte da D.Gaiotto in [12], ma si differiscono da queste ultime poiché le geometrie associate sono caratterizzate da una simmetria $U(1)$ di tipo traslazionale e non di tipo rotazionale. Questa piccola differenza vedremo porterà conseguenze piuttosto diverse nella definizione delle possibili soluzioni regolari.

La descrizione di questa ampia classe di soluzioni si presenta elegante e semplice nella pittura elettrostatica duale che abbiamo approfondito in questo capitolo, mentre risulta piuttosto ardua nella pittura gravitazionale originale pilotata dalle coordinate (x, y) : il motivo di tali difficoltà risiede nel fatto che la maggior parte di queste soluzioni, per la precisione tutte tranne una, corrispondono a funzioni $D(x, y)$ di forma non fattorizzabile.

La configurazione elettrostatica di tali soluzioni è del tutto equivalente a quella della soluzione Maldacena-Nunez ed è ancora una volta caratterizzata da una distribuzione di carica lineare a $\rho = 0$ e da un piano conduttore infinito a $\eta = 0$.

La presenza del piano conduttore fissa la distribuzione di carica ad avere comportamento antisimmetrico rispetto alla trasformazione di parità $\eta \rightarrow -\eta$; si dimostra facilmente che in quel caso accada che:

$$\dot{V}(\eta = 0) = -\rho^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda(\eta')}{(\eta'^2 + \rho^2)^{3/2}} d\eta' = 0 \quad (4.113)$$

la qual relazione implichi proprio la presenza del piano conduttore a $\eta = 0$. Data tale proprietà di simmetria è chiaro che la distribuzione di carica lineare possa essere definita in modo non ambiguo sulla semiretta $\eta > 0$.

E' inoltre evidente che per quanto detto nel capitolo precedente 4.9 una ulteriore discussione circa la regolarità di tali soluzioni lungo la regione geometrica su cui degenera la sfera S^2 sia inutile; tutto ciò è motivato dal fatto che le geometrie delle soluzioni prese in considerazione ammettano la presenza di un piano conduttore a $\eta = 0$ il quale garantisce proprio la regolarità delle soluzioni in tale limite in cui degenera appunto la sfera bidimensionale S^2 . In definitiva sarà opportuno studiare la regolarità di tali soluzioni solamente nei luoghi geometrici su cui degenera la coordinata t , cosa che faremo nei prossimi paragrafi.

In definitiva la classe di soluzioni che investigheremo corrisponde alle distri-

buzioni di carica lineari a tratti del tipo:

$$\lambda(\eta') = \begin{cases} a\eta' & 0 < \eta' < \eta_1 \\ b\eta' + c & \eta_1 < \eta' < \eta_2 \\ d\eta' + e & \eta_2 < \eta' < \eta_3 \\ \dots & \\ f\eta' + g & \eta' > \eta_f \end{cases} \quad (4.114)$$

con la possibilità che la costante f caratterizzante la pendenza della retta nell'ultimo tratto sia nulla.

In figura 4.11 abbiamo visualizzato i tre esempi più semplici.

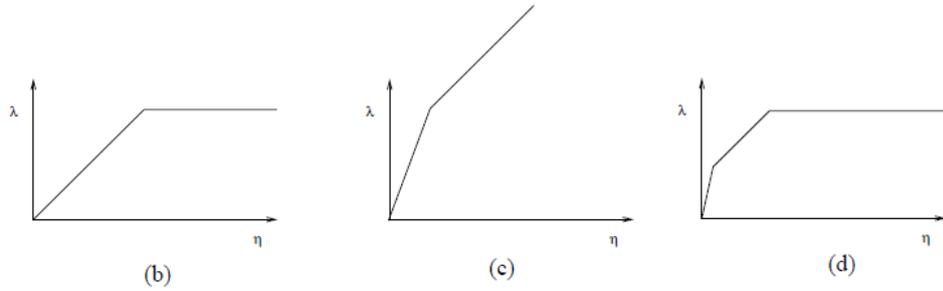


Figura 4.11: Diversi tipi di soluzioni appartenenti alla classe studiata

Affinchè tali soluzioni corrispondenti a M5 brane wrappate su Superfici di Riemann con simmetria $U(1)$ traslazionale siano regolari occorre che soddisfino, per motivi che chiariremo nel seguito, le seguenti relazioni:

- le pendenze delle rette nei vari tratti siano in ordine decrescente;
- i rapporti tra le pendenze nei vari tratti siano interi, ossia le pendenze nei vari tratti siano tutte multipli di un cosiddetto *quanto di pendenza* $\zeta \in \mathbb{R}$, il quale rappresenterà la scala di lunghezza caratteristica della geometria del sistema;
- i termini costanti delle distribuzioni nei vari tratti siano interi e quantizzati;
- le differenze tra le pendenze adiacenti siano anch'esse multipli della scala di lunghezza tipica della geometria $\zeta \in \mathbb{R}$.

Queste affermazioni, unitamente alla forma analitica 4.114, caratterizzano totalmente la classe di soluzioni da noi trovata.

Nei prossimi paragrafi verrà approfondito lo studio di tali soluzioni ed in particolare ne verranno analizzate le proprietà di regolarità e le cariche associate.

4.10.1 Regolarità lungo la distribuzione di carica

Andiamo ora ad analizzare la soluzione gravitazionale sulla linea $\rho = 0$ dove nella pittura elettrostatica è presente la distribuzione di carica lineare e dove vedremo in seguito degenererà la coordinata t .

A $\rho = 0$ la metrica assume la forma:

$$ds_{11}^2 = \left(\frac{\dot{V}(\dot{V}'^2 + 2\dot{V}V'')}{2\dot{V}V''} \right)^{\frac{1}{3}} \left[4 dAdS_5^2 + \frac{2\dot{V}V''}{\dot{V}'^2 + 2\dot{V}V''} d\tilde{\Omega}_2^2 + ds_4^2 \right]$$

$$ds_4^2 = 4 \frac{\dot{V}'^2}{\dot{V}'^2 + 2\dot{V}V''} (dt - \frac{1}{\dot{V}'} dx_2)^2 + \frac{2V''}{\dot{V}} [(d\rho^2 + d\eta^2) + \frac{\rho^2}{\dot{V}'^2} dx_2^2]$$

la quale può essere riscritta con alcuni semplici passaggi come:

$$ds_{11}^2 = \left(\frac{\dot{V}\tilde{\Delta}}{2\dot{V}V''} \right)^{\frac{1}{3}} \left[4 dAdS_5^2 + \frac{2\dot{V}V''}{\tilde{\Delta}} d\tilde{\Omega}_2^2 + \frac{4}{\tilde{\Delta}} (dx_2 + \dot{V}' dt)^2 + \frac{2V''}{\dot{V}} (d\rho^2 + d\eta^2 + \rho^2 dt^2) \right] \quad (4.115)$$

con $\tilde{\Delta} = \dot{V}'^2 + 2\dot{V}V''$.

Da tale espressione si deduce direttamente che sulla linea $\rho = 0$ la coordinata t degeneri e che invece per la coordinata $x_2' = x_2 + \dot{V}'t$ questo non accada. Ricordiamoci che in un intorno della distribuzione lineare di carica $\rho = 0$ valgono i seguenti sviluppi:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -2\lambda + \dots \\ V'' &= \alpha' + \dots \\ \dot{V}' &= -2\lambda' + \dots \end{aligned}$$

Affinchè la metrica sia regolare pertanto occorre sicuramente che:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\eta, \rho = 0) \neq 0 &\implies \lambda(\eta) \neq 0 \\ \tilde{\Delta}(\eta, \rho = 0) \neq 0 &\implies \lambda'^2(\eta) \neq \lambda(\eta)\alpha'(\eta) \end{aligned}$$

Abbiamo già analizzato in precedenza la situazione critica in cui la distribuzione di carica sia nulla su un tratto finito della linea $\rho = 0$ esponendo tutti i problemi che nascono da tale assunzione. Nel caso delle nostre soluzioni

la costruzione geometrica impone che questo accada solamente in un punto preciso di tale linea coincidente con l'origine $O = (0, 0)$ e che pertanto tale possibilità non porti a conseguenze patologiche circa la regolarità delle soluzioni. Si può inoltre verificare che anche la situazione in cui la funzione $\tilde{\Delta}(\eta, \rho = 0)$ si annulli lungo un intervallo finito della linea $\rho = 0$ sia scongiurata per le soluzioni prese in considerazione.

Notiamo infine che la soluzione potrebbe mostrare problemi di singolarità nel caso in cui la funzione V'' sulla linea $\rho = 0$ abbia dei comportamenti non regolari per certi valori di η ; vedremo che questo accadrà per precisi valori di η che avranno una ben definita interpretazione elettrostatica e che potrà essere curato con delle semplici condizioni di regolarità che andremo a sviluppare. Andiamo ora a esaminare più a fondo le condizioni di regolarità lungo la linea $\rho = 0$ su cui è presente la distribuzione di carica che genera la soluzione.

Data la metrica 4.115 corrispondente alla metrica della soluzione sviluppata intorno alla linea $\rho = 0$ è abbastanza chiaro che la coordinata t degeneri e in modo regolare e che sia definita di periodo 2π .

Si noti inoltre che definendo una nuova coordinata

$$x'_2 = x_2 + \dot{V}'t \quad (4.116)$$

quest'ultima non degeneri lungo la linea presa in considerazione.

E' chiaro che data la periodicità di 2π della coordinata t l'espressione di cui sopra può essere riscritta come:

$$x'_2 = x_2 + \dot{V}'(t + k2\pi) \quad (4.117)$$

e che affinché tale definizione sia non ambigua e sensata occorre che anche la coordinata x_2 e di conseguenza la nuova coordinata x'_2 abbiano periodicità $\dot{V}'2\pi$.

Analizzando la metrica si verifica che nessuna parte di essa dipenda da tale coordinata; tutto ciò ci assicura che non nasca nessun tipo di patologia nel definirla periodica di periodo arbitrario. Verificheremo nel prossimo paragrafo che in realtà la nuova coordinata x'_2 degeneri in alcuni precisi punti e ne discuteremo la periodicità, affinché la sua definizione sia consistente.

In definitiva non nasce alcun tipo di patologia nel definire la coordinata x_2 periodica di periodo $\dot{V}'2\pi$ con $\dot{V}' \in \mathbb{R}$.

Nel caso di Gaiotto [12] in cui la simmetria $U(1)$ era di tipo rotazionale la coordinata x_2 era per definizione periodica di periodo 2π cosiccome la coordinate t ; in tal caso allora affinché la coordinata x'_2 fosse ben definita occorre che \dot{V}' fosse intero in modo tale che non esistesse alcuna inconsistenza tra la

periodicità di x_2 e quella di t ⁶. Tali argomenti fissavano la pendenza delle rette costituenti la distribuzione di carica ad essere valori interi, cosa che ora non accade.

Le condizioni di regolarità a $\rho = 0$, sebbene nel nostro caso non fissino i valori delle pendenze delle rette ad essere numeri interi, portano altre notevoli conseguenze circa i rapporti tra tali pendenze. Infatti una analisi più attenta della definizione 4.116 ci porta a verificare che la funzione \dot{V}' in realtà celi, per le nostre soluzioni, una collezione di numeri reali etichettati da un indice che identifica il tratto di distribuzione di carica preso in considerazione. In quest'ottica è chiaro che la periodicità della coordinata x_2 definita in precedenza come $\dot{V}'2\pi$, sebbene arbitraria, debba essere decisa univocamente a meno di 2π in tutti i tratti della distribuzione di carica. Ricordando che \dot{V}' risulti a meno di termini moltiplicativi la pendenza delle rette nei vari tratti il requisito di cui sopra si traduce nella condizione che le pendenze nei vari tratti debbano essere in rapporti interi tra loro, ossia che tutte le pendenze siano multipli interi di un *quanto di pendenza* che definiremo ζ e che sarà definito nell'insieme dei numeri reali \mathbb{R} :

$$\lambda'_i = \kappa_i \zeta, \quad \kappa_i \in \mathbb{N} \quad (4.118)$$

In questo modo la periodicità in ogni tratto sarà definita come:

$$T_i = \kappa_i \zeta 2\pi \quad (4.119)$$

e basterà assumere che la coordinata x'_2 abbia periodicità data dal quanto di pendenza $\zeta 2\pi$ affinché tutto sia consistente.

Riassumendo quanto detto, la definizione 4.114 della classe di soluzioni da noi studiate deve essere ulteriormente caratterizzata ed in particolare i coefficienti $[a, b, d, \dots, f]$ che regolano le pendenze delle varie rette debbono creare una successione di numeri decrescente tale che ognuno di essi sia multiplo di un dato valore ζ , il quale andrà a definire la pendenza della coordinata x'_2 in modo non ambiguo e il quale rappresenterà la scala di lunghezza tipica della geometria in questione.

Il *quanto di pendenza* in questione è puramente arbitrario in quanto non deve soddisfare alcun requisito se non appartenere all'insieme dei numeri reali \mathbb{R} . A questo punto della trattazione pare che le soluzioni caratterizzate dall'aver simmetria $U(1)$ traslazionale siano leggermente più generiche sotto questo aspetto rispetto alle soluzioni con simmetria $U(1)$ rotazionale in cui i valori delle pendenze delle rette dovevano essere necessariamente numeri interi.

⁶Una traslazione della variabile t di 2π deve poter essere riassorbita da una traslazione della variabile x_2 per un multiplo di 2π .

4.10.2 Regolarità nei punti sulla linea $\rho = 0$ in cui cambia la pendenza delle rette

Abbiamo già sottolineato in precedenza che la metrica lungo la linea $\rho = 0$ possa manifestare delle patologie nel caso in cui $V''(\eta, \rho)$ abbia dei comportamenti anomali.

Si può verificare che nei punti di coordinate $[\rho = 0, \eta = \eta_i]$ corrispondenti ai punti della distribuzione in cui cambia la pendenza delle rette, ossia ai punti di raccordo tra i vari tratti lineari, V'' assuma una forma del tipo⁷:

$$V''(\eta, \rho) = \alpha'(\rho, \eta) = \frac{w}{2\sqrt{(\eta - \eta_i)^2 + \rho^2}} \quad (4.120)$$

con w la differenza tra le pendenze delle due rette che si incontrano nel punto η_i .

In ultima analisi la funzione V'' in tali punti specifici diventa una rappresentazione della Delta di Dirac e porta con sé problemi di divergenze nella metrica 4.115 tendendo chiaramente a infinito. Nel caso in cui questo accada la metrica in questione diventa:

$$ds_{11}^2 = \left(4\lambda^2\right)^{\frac{1}{3}} \left[4dAdS_5^2 + d\tilde{\Omega}_2^2 - \frac{1}{\lambda\alpha'} (dx_2 - 2\lambda' dt)^2 - \frac{\alpha'}{\lambda} (d\rho^2 + d\eta^2 + \rho^2 dt^2) \right] \quad (4.121)$$

Notiamo come in realtà l'unica parte della metrica affetta da tali patologie risulti quella relativa al sottospazio 4-dimensionale ed in particolare:

$$ds_4^2 = -\frac{1}{\lambda} \left[\frac{2\sqrt{(\eta - \eta_i)^2 + \rho^2}}{w} dx_2'^2 + \frac{w}{2\sqrt{(\eta - \eta_i)^2 + \rho^2}} (d\rho^2 + d\eta^2 + \rho^2 dt^2) \right]$$

Se effettuiamo in modo un po' grezzo il limite in questione effettuando prima il limite $\rho \rightarrow 0$ e poi quello $\eta \rightarrow \eta_i$ otteniamo innanzitutto che dato che $\rho = 0 = \text{cost.}$ le uniche parti della metrica ad avere ancora significato risultano essere:

$$\frac{2\sqrt{(\eta - \eta_i)^2}}{w} dx_2'^2 + \frac{w}{2\sqrt{(\eta - \eta_i)^2}} d\eta^2 \quad (4.122)$$

⁷Il fattore 2 a denominatore nasce dall'aver ristretto il dominio di definizione al solo semipiano $\eta' > 0$ e nell'aver riscritto le definizioni 4.95 limitando l'integrale alla semiretta $[0, +\infty]$; tutto ciò risulta pienamente ragionevole vista la presenza del piano conduttore a $\eta = 0$ che separa in due parti distinte e indipendenti il piano (η, ρ) . E' chiaro che essendo la funzione integranda pari tale azione non faccia nient'altro che dimezzare i valori degli integrali, non cambiando in alcun modo le proprietà geometriche e fisiche delle soluzioni.

Con un semplice cambio di coordinate $\eta - \eta_i = r^2$ tutto ciò si trasforma in:

$$\frac{2r^2}{w} dx_2'^2 + 2w dr^2 = \frac{2}{w} [r^2 dx_2'^2 + w^2 dr^2] \quad (4.123)$$

A questo punto è chiaro che la coordinata x_2' degeneri e che lo faccia con periodo $2w\pi$, ossia valga la relazione di equivalenza:

$$x_2' \sim x_2' + k2\pi w \quad (4.124)$$

In definitiva le condizioni di regolarità in questi particolari punti della linea $\rho = 0$ portano a definire la periodicità della coordinata x_2' uguale a $2\pi w$.

Abbiamo visto in precedenza che le condizioni di periodicità per la linea $\rho = 0$ con η generico fissavano però tale periodicità ad essere uguale a $2\pi \dot{V}_i'$.

Ripercorrendo quanto detto in precedenza, affinché tutto sia consistente occorre anche che le differenze di pendenza tra le rette adiacenti che costituiscono la distribuzione di carica soddisfino lo stesso requisito delle pendenze nei vari tratti, ossia siano anche loro multipli interi dello stesso quanto di pendenza ζ :

$$w_i = \kappa_i \zeta, \quad \kappa_i \in \mathbb{N}, \zeta \in \mathbb{R} \quad (4.125)$$

In conclusione le condizioni di regolarità della soluzione portano a definire gli attributi relativi alle pendenze delle rette che costituiscono la nostra distribuzione di carica lineare a tratti. In particolare, affinché tutto sia consistente occorre che sia le pendenze nei vari tratti che le differenze di pendenze nei tratti adiacenti siano multipli interi di un unico valore ζ , definito *quanto di pendenza* e rappresentante la scala di lunghezza tipica della geometria del sistema preso in considerazione. Tale valore è definito arbitrariamente nell'insieme dei numeri reali \mathbb{R} .

La situazione appare significativamente diversa dalle soluzioni con simmetria U(1) rotazionale [12] in cui le pendenze delle rette dovevano essere intere e il salto di pendenza tra quest'ultime necessariamente unitario.

4.10.3 Curve $V'' = 0$ o $\dot{V} = 0$

Abbiamo già evidenziato in precedenza quanto la presenza di curve su cui $V'' = 0$ o $\dot{V} = 0$ indipendentemente possa essere pericoloso per la definizione di soluzioni regolari ed in particolare abbiamo dimostrato che la presenza di tali curve vanifichi proprio il requisito di regolarità della soluzione nella regione di spazio in cui la sfera S^2 degenera, il quale può essere identificato nel sistema di coordinate originali con $y = 0$.

Tale ragionamento ci ha portato a escludere possibili generalizzazioni della

soluzione Maldacena-Nunez costruite tramite l'aggiunta di discontinuità di prima specie nella distribuzione di carica lineare.

Vogliamo ora verificare che tutto ciò non riaccada per le soluzioni da noi studiate e descritte in precedenza.

Si dimostra che le soluzioni da noi costruite abbiano tutte la forma:

$$\dot{V} = \sum_i \sqrt{(\eta - \eta_i)^2 + \rho^2} - \sqrt{(\eta + \eta_i)^2 + \rho^2} + \alpha\eta$$

$$V'' = \sum_i \frac{1}{\sqrt{(\eta - \eta_i)^2 + \rho^2}} - \frac{1}{\sqrt{(\eta + \eta_i)^2 + \rho^2}}$$

con $\alpha = 0$ nel caso in cui l'ultimo tratto di distribuzione di carica sia costante e η_i i punti in cui la distribuzione di carica cambia pendenza.

Si dimostra facilmente che \dot{V} e V'' si annullino contemporaneamente e solamente a $\eta = 0$.

Per convincerci ulteriormente di questo fatto grafichiamo le curve $V'' = 0$ o $\dot{V} = 0$ per una soluzione specifica appartenente alla classe da noi considerata.

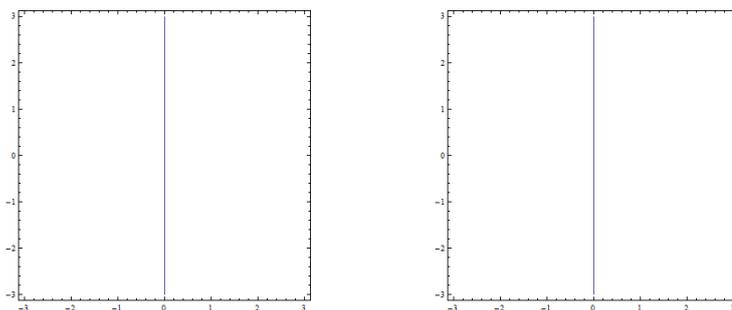


Figura 4.12: $V''(\eta, \rho) = 0$ e $\dot{V}(\eta, \rho) = 0$ per la soluzione di tipo (d) di figura 4.11

Possiamo concludere che per le soluzioni da noi considerate non sussiste il problema di singolarità dovuto alla presenza di curve $V''(\eta, \rho) = 0$ e $\dot{V}(\eta, \rho) = 0$ separate.

4.10.4 Dominio di definizione, 4-cicli e cariche

Una volta studiata a fondo la geometria della soluzione ed in particolare le condizioni di regolarità ed una volta appurato che essa preveda la presenza di uno spazio topologicamente equivalente a una 4-sfera e trasverso alla brana occorre a questo punto definire il dominio di esistenza della soluzione.

Tale dominio geometrico dovrà costituire uno spazio metrico geodesicamente

completo ossia intuitivamente *privo di buchi*. Affinchè quest'ultima condizione sia verificata il dominio in questione dovrà essere delimitato da regioni di spazio in cui una coordinata risulti degenerare o dai luoghi geometrici all'infinito. In tale direzione ricordiamo che sul piano (ρ, η) assumono particolare significato le linee $\rho = 0$ e $\eta = 0$ in quanto luoghi geometrici su cui degenerano rispettivamente la coordinata t e lo spazio sferico S^2 . E' chiaro a questo punto che l'intera classe di nuove soluzioni da noi studiate in questo lavoro siano dal punto di vista del dominio di definizione del tutto analoghe alla soluzione nota Maldacena-Nunez in quanto anch'esse possono essere costruite in modo regolare e non ambiguo nel primo quadrante del piano (ρ, η) . Delineato il dominio di definizione su cui sono costruite le nostre soluzioni

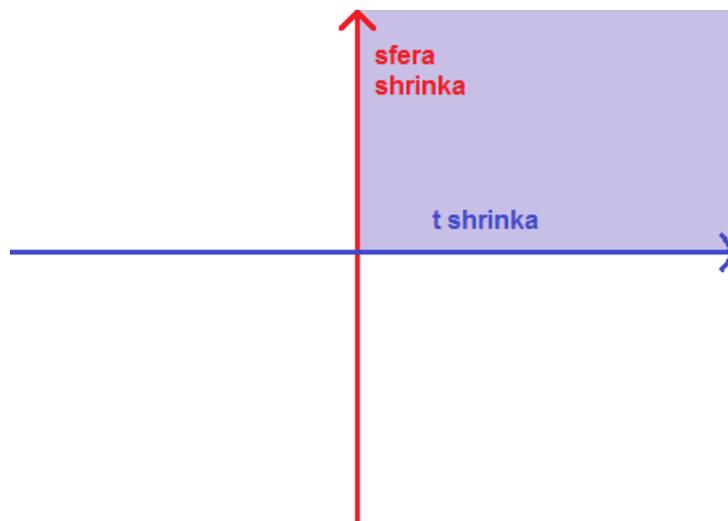


Figura 4.13: Dominio di definizione delle nuove soluzioni

non ci resta che andarne a studiare le cariche associate; come abbiam già spiegato nel paragrafo 4.4.2 la carica della soluzione è descritta dal flusso della 4-forma lungo uno spazio topologicamente equivalente a una 4-sfera e trasverso alla M5 brana ed è rappresentata dall'espressione matematica:

$$\mathbb{Q} = \int_{S^4} G_{(4)} \quad (4.126)$$

E' chiaro pertanto che lo studio della carica sia focalizzato su due aspetti: la ricerca di 4-cicli topologicamente equivalenti a una 4-sfera e lo studio analitico della 4-forma $G_{(4)}$.

Nel nostro caso il 4-ciclo in questione sarà costruito fibrando la sfera Ω_2 su di uno spazio bidimensionale compatto Σ_2 ; nel caso in cui tale spazio 2D sia

un disco che termini a $y = 0$ allora:

$$S^4 \cong \Omega_2 \times \Sigma_2 \quad (4.127)$$

ossia lo spazio risultante sarà topologicamente equivalente ad una sfera 4-dimensionale come volevamo che fosse.

In realtà, tenuto conto della relazione $G_{(4)} = dC_{(3)}$ e tenendo a mente il Teorema di Stokes per il calcolo integrale lo studio della carica può essere collegato direttamente all'analisi della 3-forma $C_{(3)}$, la quale nel nostro caso è definita in modo totalmente generico dall'espressione:

$$C_{(3)} \equiv W_{(1)} \wedge d\tilde{\Omega}_2 = \left[-2 \frac{\dot{V}^2 V''}{\tilde{\Delta}} dt + \left(\frac{\dot{V}\dot{V}'}{\tilde{\Delta}} - \eta \right) dx_2 \right] \wedge d\tilde{\Omega}_2 \quad (4.128)$$

In definitiva data tale struttura la carica finale della nostra soluzione sarà semplicemente descritta da:

$$\mathbb{Q} = \int_{S^4} dC_{(3)} = \int_{\Omega_2 \times \Sigma_2} dW_{(1)} \wedge d\tilde{\Omega}_2 \propto \int_{\Sigma_2} dW_{(1)} = \int_{\partial\Sigma_2} W_{(1)} \quad (4.129)$$

in cui la geometria del bordo dello spazio compatto Σ_2 dipende dal 4-ciclo scelto per calcolare tale carica.

Nel dominio geometrico da noi precedentemente definito 4.13 possiamo costruire diversi tipi di 4-cicli (vedi fig.4.14) su cui è possibile computare il flusso della 4-forma come appena mostrato.

Il cerchio che degenera regolarmente parametrizzato dalla coordinata t insieme alla 2-sfera e ad un arco γ nel piano (η, ρ) che va dall'asse $\eta = 0$ all'asse $\rho = 0$ formano appunto un 4-ciclo chiuso topologicamente equivalente ad una 4-sfera.

Questo ciclo compatto può essere costruito in diversi modi che si differenziano a seconda di dove si trovi il punto sull'asse $\rho = 0$ su cui termina l'arco; in particolare è chiaro che tale punto può appartenere ad un segmento sul piano $\rho = 0$ su cui la distribuzione di carica risulta lineare (vedi punto A in fig.4.14) oppure appartenere all'ultimo tratto della distribuzione in cui quest'ultima risulta costante (vedi punto D in fig.4.14).

Per questi tipi di 4-cicli il bordo $\partial\Sigma_2$ su cui viene esteso l'integrale 4.129 è costituito dai cerchi a t variabile e x'_2 costante situati ai due estremi della curva γ già menzionata. Una volta riscritta la 1-forma $W_{(1)}$ nella base $\{dt, dx'_2\}$ secondo la seguente espressione:

$$W_{(1)} = W_t dt + W_{x'_2} dx'_2 \quad (4.130)$$

è chiaro che essendo il dominio di integrazione costituito da regioni geometriche in cui x'_2 risulta costante, l'espressione 4.129 che governa il calcolo della

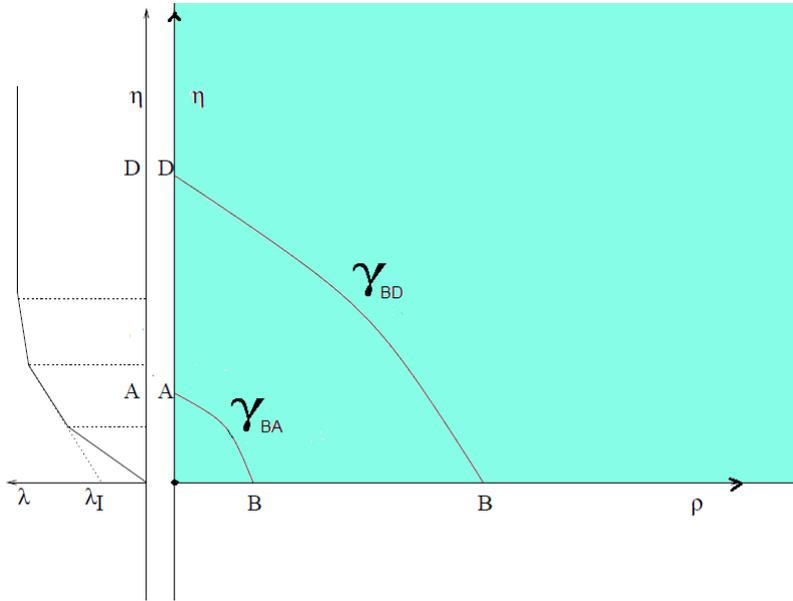


Figura 4.14: Alcuni possibili 4-cicli

carica della soluzione si ridurrà in questi casi a:

$$\mathbb{Q} = \int_{\partial\Sigma_2} W_t dt \quad (4.131)$$

ossia la carica sarà semplicemente, a meno di un segno, l'incremento della funzione $W_t(\rho, \eta)$ tra gli estremi dell'arco γ considerato.

La prima cosa che occorre notare a partire dall'espressione 4.128 è che tale funzione risulti identicamente nulla sulla linea $\eta = 0$ e che pertanto la carica non dipenda in alcun modo dall'estremo B dell'arco γ situato su tale linea, ma solamente dall'altro estremo P situato sulla linea $\rho = 0$.

In conclusione abbiamo oramai capito che la carica della soluzione, calcolata a partire dai 4-cicli precedentemente discussi, sia definita da:

$$\mathbb{Q} \propto W_t(P) - W_t(N) = W_t(P) \quad (4.132)$$

con P l'estremo della curva γ giacente sulla linea $\rho = 0$.

Possiamo affermare che la carica della nostra soluzione dipenda esclusivamente dal valore della funzione W_1 nel punto P dell'asse $\rho = 0$ che rappresenta uno dei due estremi della curva γ , ossia chiamato tale punto $P(\eta_P, 0)$ la carica della soluzione sarà proporzionale a:

$$\mathbb{Q} \propto W_t(\eta_P, 0) \quad (4.133)$$

In conclusione occorre calcolare esplicitamente la funzione $W_t(\eta, \rho \approx 0)$; per fare ciò risulta opportuno sviluppare la 1-forma W_1 in un intorno della linea $\rho = 0$ riscrivendola nella forma in cui viene esplicitata la componente lungo la coordinata t che degenera e quella lungo la coordinata $x'_2 = x_2 + \dot{V}t$ che non degenera e che rimane costante lungo $\partial\Sigma_2$ ottenendo:

$$W_1 = W_t dt + W_{x'_2} dx'_2 \approx \left(-\dot{V} + \eta \dot{V}' \right) dt + \left(\frac{\dot{V} \dot{V}'}{\dot{V}'^2 + 2\dot{V} V''} - \eta \right) dx'_2 \quad (4.134)$$

ed in particolare ottenendo l'espressione per la funzione $W_t(\rho, \eta)$ in un intorno della linea $\rho = 0$:

$$W_t(\rho \approx 0) = -\dot{V} + \eta \dot{V}' \quad (4.135)$$

In ultima analisi la carica totale associata a questi tipi di 4-cicli appena descritti risulta proporzionale, per i motivi già discussi, a:

$$\mathbb{Q} \propto (-\dot{V} + \eta \dot{V}') |_{P \equiv (0; \eta_P)} \quad (4.136)$$

con η_P la coordinata che caratterizza la posizione del punto P dell'arco situato sulla linea $\rho = 0$.

Per concludere il calcolo occorre ricordare che lungo la linea $\rho = 0$ su cui è situata la distribuzione di carica valgono sempre i seguenti sviluppi:

$$\dot{V} = -2\lambda(\eta) \quad (4.137)$$

$$\dot{V}' = -2\lambda'(\eta) \quad (4.138)$$

in cui la funzione $\lambda'(\eta)$ rappresenta proprio la pendenza della distribuzione di carica nel tratto considerato e che quindi l'espressione 4.139 possa essere riscritta come:

$$\mathbb{Q} \propto 2[\lambda(\eta) + \eta \lambda'(\eta)] |_{\eta = \eta_P} \quad (4.139)$$

Nel caso in cui il punto P faccia parte dell'ultimo tratto della distribuzione in cui la pendenza risulta costante ($\lambda(\eta) = k$), la carica associata al 4-ciclo diventa pertanto:

$$\mathbb{Q} \propto 2\lambda = 2k \quad (4.140)$$

con k il valore costante che assume la distribuzione di carica nell'ultimo tratto. Tale valore dovrà di conseguenza essere intero e quantizzato e potrà essere identificato con il numero totale N di M5-brane wrappate sulla superficie di Riemann in analogia alla soluzione Maldacena-Nunez.

Nel caso in cui invece il punto P appartenga ad un tratto della distribuzione di carica in cui quest'ultima risulti lineare ($\lambda(\eta) = \lambda'(\eta)\eta + \lambda_0$), la carica della soluzione associata al flusso della 4-forma su tale 4-ciclo compatto diventa:

$$\mathbb{Q} \propto 2(\lambda - \eta\lambda') = 2\lambda_0 \quad (4.141)$$

con λ_0 l'intercetta della retta che rappresenta la distribuzione di carica in tale tratto con l'asse $\eta = 0$. E' chiaro che ancora una volta tale valore dovrà essere necessariamente intero affinché la soluzione abbia senso fisico. Notiamo inoltre che nel caso in cui il punto P appartenga al primo tratto lineare della distribuzione la carica associata risulti nulla.

4.10.5 Il caso più semplice: la soluzione equivalente

La soluzione più semplice appartenente alla ampia classe da noi considerata è senza dubbio rappresentata da una distribuzione di carica a tratti lineare e poi costante; nonostante questa sua apparente semplicità questo tipo di soluzione merita ulteriori approfondimenti.

Andiamo quindi a definirla esplicitamente come:

$$\lambda(\eta') = \begin{cases} -\alpha & \eta' < -\alpha \\ \eta' & -\alpha < \eta' < \alpha \\ \alpha & \eta' > \alpha \end{cases} \quad (4.142)$$

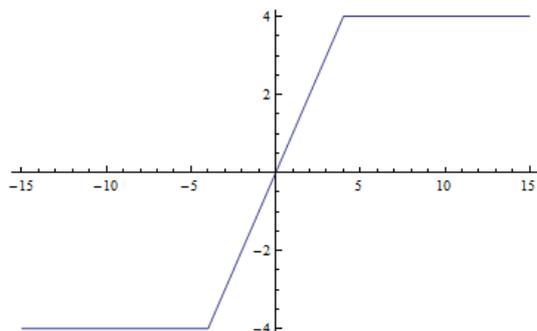


Figura 4.15: distribuzione di carica λ con parametro $\alpha = 4$

La forma funzionale della distribuzione da noi scelta induce il map elettrostatico:

$$y = \dot{V} = \sqrt{(\eta - \alpha)^2 + \rho^2} - \sqrt{(\eta + \alpha)^2 + \rho^2} \quad (4.143)$$

$$x = V' = \log \left(\frac{\sqrt{(\eta - \alpha)^2 + \rho^2} + \alpha - \eta}{\sqrt{(\eta + \alpha)^2 + \rho^2} - \alpha - \eta} \right) \quad (4.144)$$

Data la forma relativamente semplice del map, esso risulta analiticamente invertibile. Ricordando che $\rho^2 = e^D$ è possibile andare subito a valutare a che funzione scalare e^D corrisponda questa soluzione costruita a partire dalla distribuzione di carica lineare 4.142. In particolare essa equivale alla scelta:

$$e^D = \frac{e^x(4N^2 - y^2)}{(e^x - 1)^2} \quad (4.145)$$

La soluzione in questione in conclusione possiede chiaramente una forma funzionale fattorizzata che ci induce a classificarla come equivalente alla soluzione nota Maldacena-Nunez sotto l'azione delle trasformazioni conformi. Si può verificare che sotto la trasformazione di coordinate:

$$x' = 2 \sinh(x/2) \quad (4.146)$$

la soluzione si riduca esattamente alla forma di Maldacena-Nunez:

$$e^D = \frac{N'^2 - y^2}{x'^2} \quad (4.147)$$

All'interno della classe di soluzioni da noi descritte e investigate occorre pertanto escludere questo tipo più semplice di soluzione poichè non rappresenta una vera e propria novità nello studio di questo problema.

4.10.6 Un altro strano caso: la soluzione doppiamente lineare

All'interno della classe di soluzioni da noi studiata occorre prestare particolare attenzione ad una in particolare. Per la precisione è necessario analizzare più a fondo un'altra semplice soluzione appartenente a questa classe ossia quella definita da una distribuzione di carica costruita con due rette di pendenza diversa. Tale soluzione infatti, nel caso in cui la simmetria $U(1)$ sia di tipo rotazionale, rappresenta una riscrittura della geometria $AdS_7 \times S^4$ e rappresenta pertanto una geometria banale a curvatura costante. Occorre verificare se questo accada o meno nel caso in cui la simmetria $U(1)$ sia di tipo traslazionale.

Per far ciò l'idea più semplice è rappresentata dal computo diretto della curvatura scalare della soluzione tramite la formula esatta 4.90. E' chiaro che se la soluzione rappresentasse una riscrittura della geometria $AdS_7 \times S^4$ la sua curvatura scalare dovrebbe essere costante; nel caso in cui invece tale curvatura avesse forma analitica più complessa sarebbe un ottimo test per confutare tale ipotesi.

La soluzione sotto indagine è rappresentata dalle seguenti funzioni del potenziale elettrostatico:

$$\dot{V} = -2b\eta + w(\sqrt{(\eta + q)^2 + \rho^2} - \sqrt{(\eta - q)^2 + \rho^2})$$

$$V'' = w\left(\frac{1}{\sqrt{(\eta + q)^2 + \rho^2}} - \frac{1}{\sqrt{(\eta - q)^2 + \rho^2}}\right)$$

$$\dot{V}' = -2b + w\left(\frac{\eta + q}{\sqrt{(\eta + q)^2 + \rho^2}} - \frac{\eta - q}{\sqrt{(\eta - q)^2 + \rho^2}}\right)$$

in cui la costante w rappresenta la differenza tra la pendenza della seconda retta e quella della prima e il termine q il punto in cui il cambio di pendenza avviene.

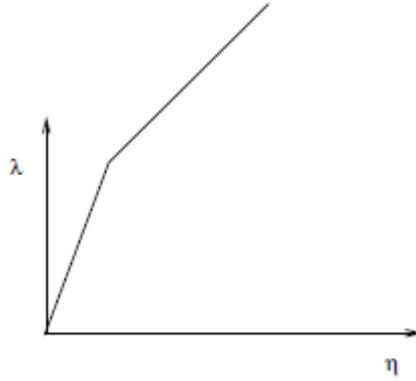


Figura 4.16: La soluzione che nel caso $U(1)$ rotazionale rappresenta una riscrittura di $AdS_7 \times S^4$

Date le definizioni di cui sopra è possibile computare tramite la formula 4.90 la curvatura scalare R della soluzione a meno di termini costanti moltiplicativi non interessanti a questo scopo.

Per fare ciò utilizzeremo una soluzione specifica di tale classe corrispondente a prendere i parametri nel seguente modo⁸:

$$b = 1, \quad w = -1, \quad q = 1, \tag{4.150}$$

⁸La soluzione completa risulta caratterizzata dalle seguenti funzioni del potenziale elettrostatico:

$$\dot{V} = -2\eta + \sqrt{(\eta - 1)^2 + \rho^2} - \sqrt{(\eta + 1)^2 + \rho^2} \tag{4.148}$$

$$V'' = \frac{1}{\sqrt{(\eta + 1)^2 + \rho^2}} - \frac{1}{\sqrt{(\eta - 1)^2 + \rho^2}} \tag{4.149}$$

Data la complessità e la lunghezza dei calcoli da svolgere e dei risultati ottenuti, ometteremo la forma completa di tale curvatura calcolata tramite il software Mathematica e ci limiteremo a rappresentarla tramite dei grafici che verranno poi discussi.

Nel seguito verranno rappresentate le seguenti quantità:

- il grafico 3D della curvatura scalare $R(\eta, \rho)$ 4.17;
- il grafico di una sezione della curvatura scalare, in particolare di $R(3, \rho)$ 4.18;
- il grafico di un'altra sezione della curvatura scalare, in particolare $R(\eta, 3)$ 4.19.

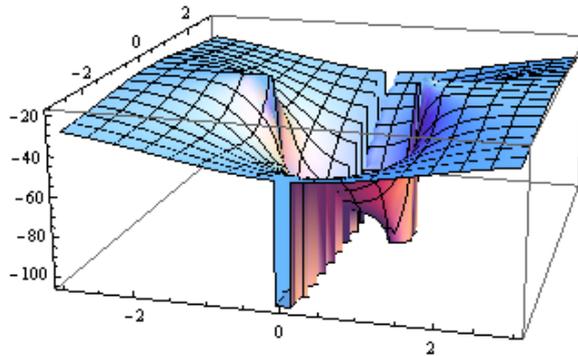


Figura 4.17: Curvatura scalare $R(\eta, \rho)$

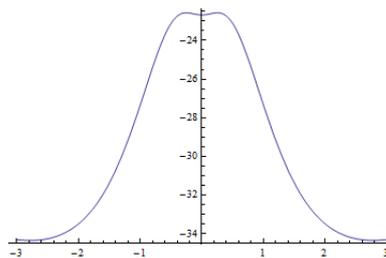


Figura 4.18: Curvatura scalare $R(3, \rho)$

Da questi grafici si evince chiaramente che la curvatura scalare della soluzione in questione non sia costante e che pertanto la soluzione doppiamente lineare nel caso di simmetria $U(1)$ traslazionale non rappresenti una riscrittura formale della geometria $AdS_7 \times S^4$.

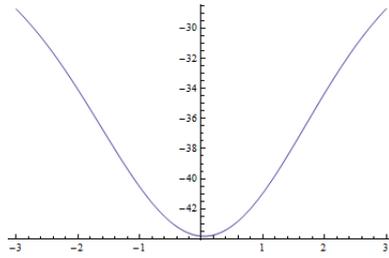


Figura 4.19: Curvatura scalare $R(\eta, 3)$

4.10.7 Soluzioni nuove vs soluzioni di Gaiotto

Come abbiamo più volte sottolineato, le soluzioni da noi studiate sono analoghe a quelle trovate da Gaiotto in [12]; ciò che differenzia queste due classi di soluzioni è la simmetria $U(1)$ che le caratterizza. Nel nostro caso la simmetria $U(1)$ scelta è di tipo rotazionale ossia è in realtà una proprietà di Invarianza Traslazionale lungo la coordinata x_2 , la quale permette di definire la funzione $D(x_1, x_2, y)$ come dipendente solamente dalle variabili $x_1 \equiv x$ e y . In questo caso la terza coordinata in gioco x_2 non viene definita periodica a priori e il map elettrostatico che mappa l'Equazione di Toda nell'Equazione di Laplace è rappresentato da:

$$\rho^2 = e^D, \quad y = \dot{V} = \rho \partial_\rho V, \quad x = V' = \partial_\eta V \quad (4.151)$$

Nel caso studiato da Gaiotto invece la simmetria $U(1)$ è una simmetria propriamente rotazionale⁹ e la funzione $D(x_1, x_2, y)$ è definita dipendente solamente dalla coordinata y e dalla coordinata radiale $x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. In questo secondo caso il map elettrostatico 4.151 deve essere modificato in:

$$\rho^2 = x^2 e^D, \quad y = \dot{V} = \rho \partial_\rho V, \quad \log x = V' = \partial_\eta V \quad (4.153)$$

Ciò detto, a priori le due classi di soluzioni sembrano essere totalmente differenti e slegate tra loro.

Abbiamo però dimostrato che affinché le soluzioni del primo tipo, da noi studiate, siano regolari la coordinata x_2 debba essere comunque definita come una coordinata periodica di periodo non arbitrario ma fissato dalle condizioni di regolarità ad essere $2\pi\zeta$ in cui la costante $\zeta \in \mathbb{R}$ rappresenta la scala di

⁹Si utilizza un map nel piano $\{x_1, x_2\}$ definito da:

$$x_1 + ix_2 = x e^{i\beta} \quad (4.152)$$

con la coordinata β definita periodica di periodo 2π . In questo modo la simmetria $U(1)$ rotazionale si traduce nell'invarianza per traslazioni della coordinata angolare β .

lunghezza caratteristica della geometria del sistema. In questo senso sorge il dubbio che le due classi di soluzioni siano in qualche modo legate le une dalle altre e che possano essere semplicemente differenti riscritture dello stesso oggetto fisico.

Tale ipotesi viene ulteriormente supportata dal fatto che la soluzione più semplice di entrambi gli insiemi sia in entrambi i casi corrispondente ad una funzione $e^{D(x,y)}$ di forma fattorizzata equivalente alla soluzione di Maldacena-Nunez sotto l'azione delle Trasformazioni Conformi.

Il fatto che un'altra semplice soluzione, quella creata a partire da una distribuzione di carica costituita da due rette di pendenza diversa, porti a risultati differenti a seconda della classe scelta rappresenta però una ottima prova a favore del fatto che le due classi di soluzioni siano indipendenti e portino a geometrie diverse e di conseguenza a oggetti fisici differenti. Abbiamo infatti dimostrato numericamente che nel caso in cui la simmetria $U(1)$ sia di tipo traslazionale tale soluzione non sia una semplice riscrittura della geometria $AdS_7 \times S^4$ come accade invece nel caso in cui la simmetria $U(1)$ sia di tipo rotazionale. Bisogna comunque precisare che tale argomento non risulti decisivo e che non escluda la possibilità che esista una certa distribuzione di carica (ovviamente non quella costituita da due rette di pendenza diversa come nel caso delle soluzioni di Gaiotto) caratterizzante una soluzione con geometria equivalente a $AdS_7 \times S^4$. Un metodo per tentare di risolvere la controversia potrebbe essere quello di andare a studiare proprio i cicli compatti della geometria $AdS_7 \times S^4$ e verificare se risultano compatibili con quelli delle nostre soluzioni.

Certamente questa analisi deve essere ulteriormente investigata poichè costituisce un punto fondamentale per la totale comprensione della classe di soluzioni da noi costruita e studiata. La prova appena descritta non esaurisce in modo soddisfacente il problema in questione; dimostrare in modo rigoroso che tali due classi portino a oggetti geometrici e fisici differenti è senz'altro un compito piuttosto arduo ma sicuramente un compito che deve essere portato a termine in futuro. E' chiaro che la strada rigorosa per fare tutto ciò sarebbe andare ad analizzare la curvatura scalare delle due diverse soluzioni e confrontarla; è altrettanto evidente che tale via risulti piuttosto impervia da attuare analiticamente.

Capitolo 5

Soluzioni per M2-Brane wrappate

In questo ultimo capitolo ci proponiamo di esplorare le soluzioni 1/2 BPS con simmetria globale $SO(6) \times SO(1,2)$ che corrispondono questa volta a configurazioni gravitazionali di M2 brane wrappate su un 2-ciclo.

Innanzitutto andremo a descriverne la struttura generale ricavandola analiticamente dalle soluzioni 1/2 BPS con simmetria globale $SO(6) \times SO(3)$ ([23]) tramite continuazione analitica. Anche in questo caso la geometria della soluzione sarà parametrizzata da una funzione $D(x_1, x_2, y)$ soddisfacente l'equazione differenziale di Toda.

In seguito andremo alla ricerca di soluzioni specifiche per questo problema cercando di definire la forma funzionale di tale funzione affinché la soluzione gravitazionale sia fisicamente accettabile; come vedremo tutto ciò risulterà molto arduo motivo per cui attualmente non esiste ancora alcuna soluzione regolare conosciuta. Andremo comunque ad indagare quali condizioni matematiche debbano essere soddisfatte affinché la soluzione gravitazionale sia fisicamente accettabile e proveremo comunque a testare alcune soluzioni specifiche. In particolare studieremo a fondo l'ipotesi più semplice che si possa fare, ossia l'esistenza di una soluzione fattorizzata.

Dimostreremo che tale problema non ammetta soluzioni fattorizzate ma che necessiti di soluzioni dalla forma funzionale più complessa e andremo a indagare proprio questa ultima possibilità.

In conclusione ci verrà il forte sospetto che l'ulteriore simmetria $U(1)$ imposta per semplificare il problema e mapparlo in un problema elettrostatico nel caso della M2 brana risulti una condizione troppo forte. E' molto probabile che tale restrizione vanifichi la ricerca di soluzioni fisicamente accettabili per la M2 brana le quali vanno invece andranno cercate nella più ampia classe di soluzioni da noi descritte prive della simmetria $U(1)$ già citata.

5.1 Struttura generale delle soluzioni e loro significato

Come abbiamo già accennato, le soluzioni BPS che andremo a studiare corrispondono a M2-brane wrapate su un 2-ciclo.

Abbiamo già spiegato nel capitolo precedente che un 2-ciclo non rappresenta nient'altro che uno spazio compatto 2D su cui andremo appunto ad *arrotolare* la M2 brana. Abbiamo ricavato nei capitoli precedenti che la soluzione corrispondente a una M2 brana risulti:

$$ds_{11}^2 = H_2^{-2/3} dx_{\parallel}^2 + H_2^{1/3} dx_{\perp}^2 \quad (5.1)$$

$$A_{012} = -\frac{1}{H_2} \quad (5.2)$$

$$H_2 = 1 + \frac{Q_2}{r^6} \quad (5.3)$$

Si può verificare che nel già descritto precedentemente *near horizon limit* la soluzione di M2 brana venga a corrispondere a una geometria del tipo:

$$AdS_4 \times S^7$$

Il meccanismo di wrapare la M2 brana sul 2-ciclo è esattamente analogo, a meno di considerazioni dimensionali, al caso già studiato per la M5 brana.

Anche in questo caso se immaginiamo di compattificare due delle dimensioni dello spazio AdS_4 e creare appunto un 2-ciclo compatto Σ su cui *arrotolare* la M2 brana allora il gruppo di simmetria $SO(1,4)$ si riduce al gruppo $SO(1,2)$ e la geometria del problema diventa:

$$AdS_2 \times \Sigma \times S^7$$

Allo stesso modo la simmetria $SO(8)$ viene rotta e ne sopravvive solamente una più piccola rappresentata dal gruppo $SO(6)$; è quindi chiaro che la geometria finale risultante sia in questo caso:

$$AdS_2 \times ds_4^2 \times S^5$$

che come vedremo sarà esattamente la struttura geometrica delle soluzioni che andremo ad indagare. Analogamente alla M5 brana anche questa configurazione preserva 16 delle 32 supercariche e rappresenta pertanto una soluzione 1/2 BPS.

Come si può notare dalla struttura geometrica della soluzione, quest'ultima rappresenta sicuramente un tipo di soluzione alla quale si può applicare la

nota dualità AdS-CFT¹. Secondo tale corrispondenza introdotta nel primo capitolo, le soluzioni caratterizzate dalla presenza di uno spazio geometrico AdS_2 dovrebbero essere duali a teorie di campo conformi in $D = 1$ dimensioni, ossia dovrebbero essere duali a teorie di Meccanica Quantistica Supersimmetrica. Quest'ultima rappresenta un campo di ricerca molto interessante e largamente inesplorato. Per una maggiore comprensione di tale argomento rimandiamo alla bibliografia ([8],[18]).

Come abbiamo già accennato, la struttura generale di tali soluzioni può essere elegantemente dedotta dalle soluzioni con simmetria globale $SO(6) \times SO(3)$ ampiamente studiate nell'articolo LLM [23]. Per semplicità di lettura riportiamo la struttura più generale di tali soluzioni 1/2 BPS con simmetria $SO(6) \times SO(3)$, che risulta essere:

$$ds_{11}^2 = e^{2\lambda} \left[4d\Omega_5^2 + y^2 e^{-6\lambda} d\tilde{\Omega}_2^2 - 4(1 + y^2 e^{-6\lambda}) (dt + V_i dx^i)^2 + \frac{e^{-6\lambda}}{1 + y^2 e^{-6\lambda}} (dy^2 + e^D d\vec{x}^2) \right]$$

$$\begin{aligned} G_{(4)} &= F \wedge d^2\tilde{\Omega}, \quad F = dB_t \wedge (dt + V) + B_t dV + d\hat{B}, \\ V_i &= \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \partial_j D, \quad B_t = -4y^3 e^{-6\lambda}, \quad e^{-6\lambda} = \frac{\partial_y D}{y(1 - y\partial_y D)} \\ d\hat{B} &= 2*_3 [(y\partial_y^2 D + y(\partial_y D)^2 - \partial_y D) dy + y\partial_i \partial_y D dx^i] \end{aligned}$$

Partendo da questa soluzione, è agendo tramite *rotazione di Wick* sulle coordinate (y, x_i) nel seguente modo:

$$y = y'; \quad x_i = ix'_i \tag{5.4}$$

possiamo ottenere la soluzione da noi desiderata con simmetria $SO(6) \times SO(1, 2)$.

Per chiarire meglio come il meccanismo di continuazione analitica trasformi spazi sferici in spazi di Anti de Sitter rimandiamo all'Appendice B.

La struttura geometrica delle soluzioni 1/2 BPS con simmetria $SO(6) \times SO(1, 2)$ è rappresentata da:

$$ds_{11}^2 = e^{2\tilde{\lambda}} \left(4ds_{S^5}^2 + y^2 e^{-6\tilde{\lambda}} ds_{AdS_2}^2 + ds_4^2 \right) \tag{5.5}$$

¹Purtroppo per questioni di spazio, di tempi e di complessità degli argomenti non abbiamo potuto in questa tesi dilungarci molto su questo aspetto che risulta sicuramente uno tra i più interessanti. Rimandiamo la trattazione di tale argomento alla bibliografia ([34],[37]).

$$ds_4^2 = 4(y^2 e^{-6\tilde{\lambda}} - 1)(d\chi + V)^2 + \frac{e^{-6\tilde{\lambda}}}{y^2 e^{-6\tilde{\lambda}} - 1} [dy^2 + e^D(dx_1^2 + dx_2^2)] \quad (5.6)$$

$$= \frac{4}{y\partial_y D - 1} (d\chi + V)^2 + \frac{\partial_y D}{y} [dy^2 + e^D(dx_1^2 + dx_2^2)] \quad (5.7)$$

con:

$$e^{-6\tilde{\lambda}} = \frac{\partial_y D}{y(y\partial_y D - 1)}, \quad V = \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\partial_j D dx^i \quad (5.8)$$

$$G^{(4)} = F \wedge d\Omega_{AdS_2}^{(2)}, \quad F = (d\chi + V) \wedge dB_\chi - B_\chi dV + d\hat{B} \quad (5.9)$$

$$B_\chi = 2y^3 e^{-6\tilde{\lambda}}, \quad d\hat{B} = y^2 \partial_y \left(\frac{\partial_y e^D}{y} \right) dx^1 \wedge dx^2 + y\epsilon_{ij}\partial_i \partial_j D dy \wedge dx^i \quad (5.10)$$

Queste soluzioni sono ancora una volta totalmente definite da una funzione scalare tridimensionale $D(x_i, y)$ che soddisfa la solita equazione di Toda tridimensionale:

$$\partial_i^2 D + \partial_y^2 e^D = 0 \quad (5.11)$$

ma in realtà la struttura geometrica, come vedremo in seguito, risulterà ben più complessa dei casi precedenti.

Notiamo inoltre come queste soluzioni posseggano esattamente la geometria corrispondente a una M2 brana wrappata su un 2-ciclo di cui abbiamo discusso precedentemente.

5.2 MG è soluzione...?

Ancora prima di inoltrarci nello studio analitico generale della soluzione andiamo a verificare se la soluzione introdotta da Maldacena e Nunez [12] corrisponda ad una soluzione accettabile non solo per il problema gravitazionale di una M5-brana wrappata su un 2-ciclo ma anche per quello di una M2-brana wrappata sul medesimo.

Per far ciò andiamo a verificare la soluzione parametrizzata dalla funzione fattorizzata:

$$e^D = \frac{N^2 - y^2}{x^2} \quad (5.12)$$

Senza dilungarci troppo nella parte calcolistica avente a che fare con questo problema, andiamo subito a descrivere la metrica risultante da questo tipo

di ipotesi, la quale risulta:

$$ds_{11}^2 = \left(\frac{N^2 + y^2}{2} \right)^{1/3} \left(4ds_{S^5}^2 + \frac{2y^2}{N^2 + y^2} ds_{AdS_2}^2 + ds_4^4 \right) \quad (5.13)$$

$$ds_4^2 = 4 \left(\frac{y^2 - N^2}{N^2 + y^2} \right) (d\chi + V)^2 + \frac{2}{y^2 - N^2} \left[dy^2 + \frac{N^2 - y^2}{x^2} (dx_1^2 + dx_2^2) \right] \quad (5.14)$$

Come possiamo vedere, il coefficiente della parte di metrica relativa alle coordinate (x_1, x_2) risulta essere:

$$g_{22} = -\frac{1}{x^2} \quad (5.15)$$

e quindi definito negativo.

Questa ovviamente rappresenta una patologia nella segnatura della metrica e fa svanire purtroppo il tentativo di rendere la soluzione MG una soluzione accettabile anche nel caso di simmetria $SO(6) \times SO(1, 2)$ corrispondente alla M2 brana.

5.3 Analisi della soluzione fattorizzata

In questa sezione andremo a studiare analiticamente questo tipo di soluzioni e in particolare andremo a studiare le condizioni algebriche e differenziali che la funzione e^D fattorizzata deve soddisfare affinché la relativa soluzione gravitazionale sia sensata e appaia pertanto fisicamente accettabile.

Innanzitutto, analogamente al caso della M5 brana, occorre che la soluzione ammetta l'esistenza di una 7-sfera trasversa alla M2 brana, su cui verrà calcolato il flusso del duale di Hodge 11-dimensionale della 4-forma (che risulta pertanto una 7-forma correttamente integrabile su di una varietà 7-dimensionale).

Per la precisione, la carica di una soluzione di M2-brana è legata al seguente flusso:

$$\int_{S^7} *_{11} G^{(4)} \quad (5.16)$$

Data la geometria che caratterizza la struttura generale delle soluzioni lo spazio topologicamente equivalente ad una 7-sfera può essere composto da:

$$S^1 \times S^5 \times \{y \in [y_1, y_2]\} \quad (5.17)$$

ossia da un cerchio creato dalla coordinata t degenerare, dalla sfera 5-dimensionale presente nella geometria della soluzione e da un intervallo finito nella coordinata y .

In definitiva i requisiti da controllare per la validità della nostra soluzione risultano:

- corretta segnatura della metrica e di tutti i suoi coefficienti;
- positività della funzione che genera la soluzione e^D ;
- ipotesi di degenerazione della coordinata t e della ipersfera S^5 ;
- regolarità intorno ai punti in cui gli spazi di cui sopra degenerano;
- comportamento regolare all'infinito;
- flusso della 4-forma sulla 7-sfera trasversa alla M2 finito e privo di patologie.

Questo è quello che cercheremo di fare nei prossimi paragrafi.

Prima di fare ciò però ripercorriamo brevemente le analisi fatte nel paragrafo 4.6 per fissare a priori la forma funzionale della soluzione fattorizzabile.

Abbiamo già verificato analiticamente che nel caso fattorizzato la soluzione appaia funzionalmente nella forma:

$$e^D = f(y) 2 g_{z\bar{z}}(z, \bar{z}) \quad (5.18)$$

in cui $f(y)$ è un polinomio di secondo grado nella variabile y e $g_{z\bar{z}}(z, \bar{z})$ vedremo avrà a che fare con la metrica del piano iperbolico \mathbb{H}_2 .

E' ora chiaro che sotto tali ipotesi l'equazione differenziale di Toda si traduca nel semplice requisito che la curvatura scalare del piano (z, \bar{z}) sia definita costante:

$$R = \partial_y^2 f(y) = k \quad (5.19)$$

Di conseguenza due possibili scelte risultano essere per esempio:

$$g_{z\bar{z}} = \frac{2}{(1 - z\bar{z})^2} \quad (5.20)$$

$$g_{z\bar{z}} = \frac{2}{(1 + z\bar{z})^2} \quad (5.21)$$

Tali due diverse scelte, come d'altra parte tutte quelle possibili, sono in realtà legate da una trasformazione conforme nel piano complesso (z, \bar{z}) .

In conclusione è chiaro a questo punto che l'ipotesi di fattorizzabilità fissi

in un certo senso la forma funzionale della soluzione. La parte relativa alla coordinata y non può che essere un polinomio di secondo grado, mentre la parte relativa alle coordinate x_1, x_2 non può essere nient'altro che la metrica del piano iperbolico \mathbb{H}_2 a curvatura costante o una sua equivalente conforme. Nel seguito pertanto fisseremo la forma funzionale a tale ipotesi e andremo a verificarne i comportamenti analitici. E' chiaro che a questo punto quel che occorre indagare è se esista o meno una funzione $f(y)$ e/o un dominio di definizione che rispettino tutti i requisiti affinché la soluzione sia regolare e fisicamente accettabile.

5.3.1 Spazi degeneri e condizioni di regolarità

Definita la forma che la soluzione fattorizzata deve rispettare per soddisfare l'equazione di Toda procediamo con lo studio delle condizioni analitiche che ci assicurino la presenza di uno spazio trasverso alla M2 topologicamente equivalente a una 7-sfera attraverso l'esistenza di regioni dello spazio in cui alcune coordinate degenerano.

Prendiamo atto del fatto che la forma funzionale non possa essere che:

$$e^D = f(y) 2 g_{z\bar{z}}(z, \bar{z}) \quad (5.22)$$

in cui $f(y)$ risulta un polinomio di secondo grado nella variabile y e $g_{z\bar{z}}(z, \bar{z})$ la metrica del piano iperbolico \mathbb{H}_2 a curvatura scalare costante.

Inoltriamoci nell'analisi analitica.

Innanzitutto, occorre che l'ipersfera S^5 sia degenera in qualche regione di spazio e questo ci viene assicurato solamente dal requisito:

$$e^{\tilde{2}\lambda} = 0 \quad (5.23)$$

Ovviamente va controllato che nella regione di spazio in cui questo accade le parti della metrica relative alle altre coordinate siano finite e regolari.

Ipotizzando che questo accada sulla regione di spazio descritta dall'equazione $y = 0$, allora il requisito 5.23 si traduce nella condizione:

$$\left(\frac{y(y\partial_y D - 1)}{\partial_y D} \right)^{1/3} \propto ay, \quad y \rightarrow 0 \quad (5.24)$$

Si può anche facilmente notare come tale requisito sistemi anche la presenza di eventuali patologie nella parte di metrica relativa allo spazio AdS_2 , poichè il relativo coefficiente è perfettamente finito in tale limite:

$$g_{AdS_2} = y^2 e^{-4\tilde{\lambda}} \propto \frac{1}{a^2} = \text{finite}, \quad y \rightarrow 0 \quad (5.25)$$

Ritornando allo studio della condizione precedente, questa si traduce nella relazione differenziale sulla funzione scalare D:

$$\partial_y D \propto \frac{1}{y}(1 + a^3 y), \quad y \longrightarrow 0 \quad (5.26)$$

e in definitiva²:

$$e^D \approx by(1 + a^3 y), \quad y \longrightarrow 0 \quad (5.27)$$

Ora occorre anche che la coordinata χ sia degenere e che il relativo coefficiente della metrica si annulli in qualche regione dello spazio:

$$1 + y^2 e^{-6\lambda} = 0 \iff \frac{1}{y\partial_y D - 1} = 0 \quad (5.28)$$

il qual requisito può essere verificato solamente se:

$$y\partial_y D \longrightarrow \infty \quad (5.29)$$

Inoltre, affinché la soluzione sia sensata occorre che la funzione $e^{-6\tilde{\lambda}}$ rimanga finita quando $y\partial_y D \longrightarrow \infty$, ossia:

$$e^{-6\tilde{\lambda}} \longrightarrow \frac{1}{y^2} = \text{finito} \quad (5.30)$$

questo implica necessariamente che in tale limite la coordinata y rimanga finita e diversa da zero.

Pertanto, in fin dei conti, il requisito affinché la coordinate χ degeneri in modo regolare risulta essere:

$$\partial_y D \longrightarrow \infty, \quad y \longrightarrow y_c \quad (5.31)$$

Occorre però controllare che in tale limite le altre parti della metrica rimangano finiti ed in particolare controllare che il coefficiente della parte $dx_1^2 + dx_2^2$ sia finito:

$$\frac{\partial_y D e^D}{y} \longrightarrow \text{finite}, \quad y \longrightarrow y_c \quad (5.32)$$

Questo implica che in tale limite la funzione e^D abbia uno zero, ossia si comporti come:

$$e^D \propto (y - y_c)^a \quad y \longrightarrow y_c \quad (5.33)$$

²Sviluppando $e^{a^3 y} \approx 1 + a^3 y$.

Va però verificato che la metrica degeneri in modo regolare nel punto $y = y_c$. In particolare, la parte di metrica singolare in tale limite risulta:

$$\frac{1}{y_c} \left[\frac{a}{y - y_c} dy^2 + \frac{4(y - y_c)}{a} d\chi^2 \right] = \frac{1}{y_c} \left[a^2 d\rho^2 + \rho^2 d\chi^2 \right] \quad (5.34)$$

che è manifestatamente regolare assumendo che la coordinata χ abbia periodo $2\pi a$. Nel seguito per semplicità fisseremo la periodicità della variabile χ ad essere 2π come nel caso della M5 brana definendo $a = 1$; la trattazione sarà comunque totalmente generale e non dipenderà da tale assunzione. Riassumendo in modo schematico quanto finora è stato detto circa la forma della soluzione, quest'ultima deve soddisfare i seguenti comportamenti analitici:

- $e_{(y \rightarrow 0)}^D \longrightarrow ay(1 + by)$ (S5 degenera e AdS_2 finito);
- $e_{(y \rightarrow y_c)}^D \longrightarrow (y - y_c)^a$ (χ degenera e $dx_1^2 + dx_2^2$ finito);
- $a=1$ affinché la periodicità della variabile χ venga fissata a 2π .

Ciò posto la forma funzionale della soluzione e^D non può essere nient'altro che del tipo:

$$e^D = y(y - y_c)f(x_1, x_2) \quad (5.35)$$

in cui la funzione f è limitata per $y = 0$ e $y = y_c$ e non presenta zeri in quell'intervallo.

5.3.2 Flusso 7-forma e primo dominio di definizione possibile

Il secondo punto che andremo ad indagare risulta essere la carica della soluzione ed in particolare il flusso del duale di Hodge della 4-forma lungo la 7-sfera trasversa alle direzioni su cui si estende la M2-brana.

Come abbiam già accennato quel che va calcolato è:

$$\int_{S^7} *_{11} G^{(4)} \quad (5.36)$$

in definitiva quindi dovremmo andare a studiare il comportamento della funzione $*_{11} G^{(4)}$.

Iniziamo col riportare la definizione della 4-forma $G^{(4)}$ che risulta essere:

$$G^{(4)} = F \wedge d\Omega_{AdS_2}^{(2)} \quad (5.37)$$

in cui:

$$\begin{aligned}
F = & 2y \frac{y(\partial_y D)^2 - y\partial_y^2 D - 2\partial_y D}{(y\partial_y D - 1)^2} (d\chi + V) \wedge dy - \\
& - 2y^2 \frac{\partial_y \partial_i D}{(y\partial_y D - 1)^2} (d\chi + V) \wedge dx_i - \\
& - \frac{2y(\partial_y D)^2 + y\partial_y^2 D - \partial_y D}{y\partial_y D - 1} e^D dx_1 \wedge dx_2 - y \frac{\partial_y \partial_j}{y\partial_y D - 1} \epsilon_{ij} dy \wedge dx_i
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Ricordiamo che lo spazio topologicamente equivalente alla 7-sfera è ancora una volta composto da una sfera 5d fibrata su di un disco che termina a $y = 0$; in particolare tale sfera 7D può essere costruita a partire dalla coordinata χ degenerare, dalla sfera S^5 e da un segmento compatto definito sulla coordinata y .

In questa ottica si nota che l'unica componente di F a dare contributo al flusso della soluzione risulta essere:

$$F_{(S^7)} = - \frac{2y(\partial_y D)^2 + y\partial_y^2 D - \partial_y D}{y\partial_y D - 1} e^D dx_1 \wedge dx_2 \tag{5.39}$$

Ora, quel che interessa per il calcolo della carica è il duale di Hodge 11-dimensionale³ di tale forma, che risulta essere:

$$*_{11} G_{(S^7)}^{(4)} = 2^6 d(e^{6\lambda}) \wedge d\chi \wedge d\Omega_{S^5}^{(5)} \tag{5.40}$$

In ultima analisi il flusso della 7-forma in questione risulta proporzionale alla funzione $e^{6\lambda}$ calcolata tra gli estremi dello spazio compatto sulla coordinata y considerato.

Consideriamo in questa prima parte della trattazione di scegliere come possibile dominio di definizione sull'asse y lo spazio formato dalle due semirette ($y < 0, y > y_c$) come si può osservare in figura 5.1.

E' chiaro che tale dominio di definizione contenga al suo interno la regione

³Si definisce duale di Hodge di una forma A la seguente relazione:

$$*A_{\mu_1 \dots \mu_{d-p}} = \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_{d-p}}^{\nu_1 \dots \nu_p} A_{\nu_1 \dots \nu_p}$$

in cui ϵ è il tensore di Ricci definito a partire dal simbolo di permutazione di Levi-Civita secondo :

$$\epsilon_{ij \dots k} = \sqrt{g} \eta_{ij \dots k}$$

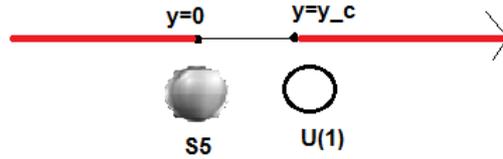


Figura 5.1: dominio di definizione considerato

$y \rightarrow \infty$ ed è altrettanto chiaro pertanto che la funzione $e^{6\lambda}$ debba essere finita in tale limite, ossia:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} e^{6\lambda} = \text{finito} \quad (5.41)$$

Ricordando che:

$$e^{6\lambda} = \frac{y^2(y\partial_y D - 1)}{y\partial_y D} \quad (5.42)$$

si osserva che in entrambi i seguenti casi:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y\partial_y D = \infty \quad (5.43)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y\partial_y D = \text{finito} \quad (5.44)$$

la funzione $e^{6\lambda}$ si comporterebbe come y^2 e questo ovviamente sarebbe patologico, poichè divergente.

L'unica soluzione a tale problema sarebbe assumere che la funzione $y\partial_y D$ abbia la forma⁴:

$$y\partial_y D = 1 + \alpha y^a, \quad \text{con } a < -2 \quad (5.46)$$

⁴Questo implica che :

$$e^D = \beta y \left(1 - \frac{\alpha}{2y^2}\right) \quad (5.45)$$

in questo caso la funzione $e^{6\lambda}$ avrebbe un andamento del tipo y^{2+a} che in ogni caso non sarebbe divergente nel limite $y \rightarrow \infty$.

Notiamo però come la stessa funzione moltiplichi l'intera metrica e pertanto non possa essere nemmeno nulla in tale limite. Osservando nuovamente l'andamento della funzione, risulta evidente che l'unico modo per far sì che questo non accada sia fissare il valore dell'esponente $a = -2$: in questo caso la funzione $e^{6\lambda}$ tenderebbe in tale limite a una costante e quindi sarebbe perfettamente regolare.

Andiamo però sotto questa ipotesi a valutare le altre parti della metrica e in particolare:

$$g_{AdS_2} = y^2 e^{-4\lambda} \longrightarrow y^2 \longrightarrow \infty \quad (5.47)$$

$$g_{\chi\chi} = \frac{4}{y \partial_y D - 1} \longrightarrow y^2 \longrightarrow \infty \quad (5.48)$$

$$g_{22} = \frac{y \partial_y D}{y^2} e^D \longrightarrow \frac{1}{y} \longrightarrow 0 \quad (5.49)$$

Osserviamo subito che se rispettiamo le condizioni di non divergenza del flusso della 7-forma (5.46) andiamo incontro a molte difficoltà per quanto riguarda l'analisi della metrica e la sua regolarità.

Analizzeremo meglio questo fatto e le possibili soluzioni nel prossimo paragrafo.

5.3.3 Fallimento prima ipotesi e possibili alternative

Come abbiamo visto nel paragrafo precedente, nel caso in cui ci restringiamo a un dominio di definizione della soluzione che contenga la regione di spazio all'infinito $y \rightarrow \infty$ incontriamo molte difficoltà nella descrizione di una soluzione fisicamente accettabile e priva di patologie.

In particolare ci accorgiamo che imponendo che la carica della soluzione non sia divergente in tale limite e pertanto il flusso della 7-forma sia finito andiamo a scontrarci con le condizioni di regolarità della metrica che sembrano in qualche modo essere inconciliabili con il requisito precedente. In questa ottica di idee possiamo affermare che una soluzione fattorizzata per questo problema definita in una regione di spazio contenente $y \rightarrow \infty$ non può in alcun modo esistere.

L'unico *escamotage* per aggirare tale problema sarebbe quello di trovare una soluzione fisicamente accettabile definita su di un dominio spaziale non contenente la regione di bordo $y \rightarrow \infty$.

L'unico dominio sull'asse y di questo tipo che porterebbe a uno spazio geodesicamente completo privo di buchi risulta essere il segmento $y \in [0, y_c]$ (5.2),

il quale rappresenta l'ultima speranza per trovare una soluzione di M2-brana fattorizzata regolare e accettabile.

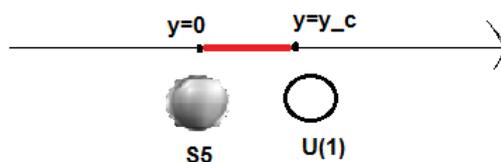


Figura 5.2: nuovo dominio di definizione

Nei prossimi paragrafi andremo essenzialmente ad analizzare la possibilità dell'esistenza di una soluzione sul dominio compatto $y \in [0, y_c]$, il quale risulta essere l'unica speranza per la definizione di una soluzione regolare. Prima di fare ciò soffermiamoci solo un attimo, senza svilupparle matematicamente, sulle condizioni da rispettare circa la segnatura della metrica.

Queste risultano essere:

$$e^D > 0 \tag{5.50}$$

$$\frac{\partial_y D}{y} > 0 \tag{5.51}$$

$$y \partial_y D - 1 > 0 \tag{5.52}$$

e vedremo giocheranno un ruolo importante nella ricerca della soluzione sul dominio compatto $y \in [0, y_c]$.

5.3.4 Ricerca soluzione fattorizzata su dominio compatto alternativo e conclusioni

Come abbiamo già sottolineato l'unico *escamotage* che potrebbe portarci a trovare una soluzione fattorizzata per le M2-brane wrappate risulta essere quello di prendere come dominio di definizione l'intervallo finito $y \in [0, y_c]$. Prendiamo ancora una volta la funzione e^D nella forma fattorizzata:

$$e^D = y(y - y_c)f(x_1, x_2) \tag{5.53}$$

In questo caso, se vogliamo che il dominio di definizione sia quello limitato definito precedentemente occorrerà sicuramente che la funzione f soddisfi il requisito (perlomeno nella regione $y \in [0, y_c]$):

$$f(x_1, x_2) < 0 \tag{5.54}$$

Ma le altre due condizioni sulla segnatura della metrica 5.50 risultano:

$$\frac{y}{y - y_c} > 0 \tag{5.55}$$

$$\frac{2y - y_c}{y^2(y - y_c)} > 0 \tag{5.56}$$

che purtroppo non vengono soddisfatte nell'intervallo finito preso in considerazione.

Sembrerebbe pertanto che anche in questo caso esista un netto contrasto tra le condizioni di non divergenza della carica e le condizioni per la corretta segnatura della metrica, contrasto che sembra far svanire la possibilità dell'esistenza di una soluzione fattorizzata per la configurazione gravitazionale di M2-brane wrappate su un 2-ciclo.

In conclusione, per quanto riguarda le soluzioni 1/2 BPS fattorizzate con simmetria globale $SO(6) \times SO(1, 2)$ la situazione pare essere la seguente:

- Se consideriamo come dominio di definizione l'intervallo non compatto $y < 0, y > y_c$ allora non esiste soluzione fattorizzata poichè la condizione che la carica non diverga per $y = \infty$ contrasta con le condizioni di regolarità della metrica;
- Se prendiamo invece come dominio di definizione l'intervallo $y \in [0, y_c]$ allora non vengono rispettate le condizioni di segnatura della metrica;

In conclusione possiamo ora affermare che *la ricerca di soluzioni fattorizzate a tale problema risulti vano* per i motivi appena presentati.

Occorre in definitiva abbandonare tale ipotesi che si è dimostrata priva di esiti positivi ed andare a investigare soluzioni non fattorizzate dalla forma geometrica più complessa.

5.4 Soluzione non fattorizzata

Preso atto del fallimento della forma funzionale fattorizzata in questo contesto di M2-brana, andiamo in questa sezione ad analizzare brevemente il problema delle soluzioni non fattorizzate.

E' chiaro che sotto l'ipotesi più ampia di non fattorizzabilità lo spettro delle soluzioni da testare risulta piuttosto ampio e questo rende molto difficoltosa la scelta della direzione da prendere.

Per semplicità e comodità, in questo lavoro analizzeremo la parte di tale spettro proveniente dalle soluzioni aventi corrispettivo elettrostatico analogo a quello studiato nel capitolo precedente per il caso delle M5 brane. In particolare, andremo a descrivere la soluzione di M2 brana proveniente da una distribuzione di carica generale ma analoga alla soluzione di M5 brana di Maldacena-Nunez; andremo in definitiva a studiare la soluzione di M2 brana nella configurazione di una distribuzione lineare di carica $\lambda(\eta)$ situata a $\rho = 0$ e di un piano infinito conduttore a $\eta = 0$.

La geometria dei coefficienti per la soluzione di M2-brana, come abbiamo già visto in passato, si differenzia da quella di M5-brana solamente per la parte di metrica 4-dimensionale, la quale viene ribaltata di segno:

$$ds_4^2 \longrightarrow -ds_4^2 \quad (5.57)$$

Considerato questo cambiamento è chiaro che possiamo ripetere pari pari lo studio circa gli sviluppi della metrica nell'intorno della distribuzione di carica λ , ossia nel limite $\rho \rightarrow 0$.

In tale limite possiamo riciclare gli sviluppi per il potenziale e le sue derivate 4.66 già utilizzati nel contesto di M5 brana e con tali sviluppi possiamo facilmente andare a valutare la forma della metrica intorno alla distribuzione lineare di carica.

Mantenendo la solita convenzione per la metrica:

$$\begin{aligned} ds_{11}^2 &= e^{2\tilde{\lambda}} \left[4 ds_{S_5}^2 + g_{AdS_2} ds_{AdS_2}^2 + ds_4^2 \right] \\ ds_4^2 &= g_{tt} (Dt)^2 + g_{\rho\rho} (d\rho^2 + d\eta^2) + g_{22} dx_2^2 \end{aligned} \quad (5.58)$$

gli sviluppi di quest'ultima nel limite $\rho \rightarrow 0$ risultano:

$$g_{\rho\rho} = -\frac{2V''}{\dot{V}} = +\frac{\alpha'}{\lambda} - \frac{\lambda''}{\lambda} \log \rho^2 + \dots \quad (5.59)$$

$$g_{22} = -\frac{2V''\rho^2}{\dot{V}\Delta^2} = \rho^2 \left(+\frac{\alpha'}{4\lambda(\lambda')^2} - \frac{\lambda''}{4\lambda(\lambda')^2} \log \rho^2 \right) + \dots \quad (5.60)$$

$$\frac{4}{g_{tt}} = -1 + \frac{\lambda\alpha'}{(\lambda')^2} - \frac{\lambda\lambda''}{(\lambda')^2} \log \rho^2 + \dots \quad (5.61)$$

$$e^{6\tilde{\lambda}} = \frac{(1 - \frac{\lambda\alpha'}{4(\lambda')^2} + \frac{\lambda\lambda''}{4(\lambda')^2} \log \rho^2) 4(\lambda')^2}{\frac{\lambda''}{\lambda} \log \rho^2} = \lambda^2 + \dots \quad (5.62)$$

$$g_{AdS_2} = 1 + \rho^2 \left(\frac{\alpha'}{2\lambda} + \frac{\lambda''}{4\lambda} \right) \dots \quad (5.63)$$

Tramite tali relazioni è possibile quantomeno andare alla ricerca di quali condizioni la distribuzione di carica λ debba necessariamente soddisfare. Innanzitutto notiamo che le funzioni $[\log(\rho^2), \rho^2 \log(\rho^2)]$ abbiano segnatura definitiva negativa nell'intorno di $\rho = 0$ e questo sicuramente influenza le condizioni di segnatura della metrica. Infatti gli sviluppi 5.59 sono dominati da tali termini e occorre senz'altro che questi termini siano positivi. Per far sì che questo accada occorre che:

$$\lambda(\eta)\lambda''(\eta) > 0 \tag{5.64}$$

Questa rappresenta sicuramente una condizione necessaria affinché la segnatura della metrica sia quella corretta.

Inoltre dagli sviluppi 5.59 si nota chiaramente che il coefficiente dello spazio sferico 5-dimensionale S^5 in tale limite sia proporzionale alla distribuzione di carica secondo la relazione:

$$g_{S^5} \propto \lambda^2 \tag{5.65}$$

Questo implica che affinché la sfera 5-D degeneri in qualche regione di spazio occorre che almeno in un punto risulti:

$$\lambda = 0 \tag{5.66}$$

Questo fatto però porta con sé spiacevoli conseguenze per le altre parti della metrica, come già spiegato anche nel capitolo relativo alle soluzioni di M5 brana.

In definitiva la ricerca di una soluzione per il caso della M2 brana risulta assai più arduo e tira in ballo la costruzione di configurazioni elettrostatiche più complesse. Questa direzione di ricerca dovrà essere ulteriormente investigata e approfondita.

In particolare esiste il forte sospetto che restringere la classe più generale di soluzioni del problema a quelle caratterizzate da simmetria $U(1)$ sia una restrizione troppo forte nel caso della M2 brana e che non porti a nessun tipo di risultato positivo. Diversamente dal caso della M5 brana, occorrerà abbandonare questa simmetria e il map elettrostatico conseguente per andare alla ricerca di soluzioni più generali, le quali potrebbero essere questa volta regolari e di conseguenza fisicamente accettabili.

Purtroppo per motivi di tempo e spazio non è stato possibile farlo in questo lavoro.

Capitolo 6

Conclusioni e possibili sviluppi futuri

In questa tesi ci siamo occupati delle compactificazioni AdS_2 e AdS_5 aventi simmetria $SO(6) \times SO(1, 2) \times \mathcal{R}$ e $SO(1, 5) \times SO(3) \times \mathcal{R}$ provenienti dalle soluzioni 1/2 BPS di M-Teoria appartenenti alla cosiddetta classe delle *geometrie LLM* [23]. Tali oggetti, deformazioni delle originali *geometrie LLM* con simmetria globale $SO(6) \times SO(3) \times \mathcal{R}$, corrispondono fisicamente a soluzioni gravitazionali di membrane avvolte su particolari superfici compatte bidimensionali. In particolare gli oggetti in questione sono le M2 e M5 brane che descrivono la Teoria di Stringa in quella regione dello spazio dei moduli in cui appunto le stringhe in quanto oggetti fondamentali vengono rimpiazzate da membrane.

Tali membrane sono collegate tra loro dalla dualità elettromagnetica che si traduce algebricamente nella dualità di Hodge e costituiscono gli oggetti elettrici e magnetici fondamentali della teoria; in un certo senso possono essere pensate come il corrispettivo 11D delle particelle cariche e dei monopoli magnetici in 4D.

Abbiamo studiato le soluzioni 1/2 BPS con isometrie $SO(1, 5) \times SO(3) \times \mathcal{R}$ e abbiamo caratterizzato in modo completo la loro geometria nel capitolo 3 utilizzando gli strumenti forniti dai requisiti di Supersimmetria. Queste soluzioni corrispondono a configurazioni gravitazionali di M5-brane *wrappate* su Superfici di Riemann costituenti 2-cicli compatti. Abbiamo verificato che i requisiti di simmetria considerati nelle ipotesi riducano il problema 11-dimensionale ad un problema 3-dimensionale e che la soluzione risulti parametrizzata in modo completo da una funzione scalare $D(x_1, x_2, y)$. Tale funzione scalare soddisfa l'equazione differenziale non lineare di Toda:

$$(\partial_1^2 + \partial_2^2)D + \partial_y^2 e^D = 0 \tag{6.1}$$

Il problema in questione risulta matematicamente ben definito: trovata una soluzione dell'equazione di Toda $\tilde{D}(x_1, x_2, y)$ non resta che inserirla nelle equazioni 3.58 per ottenere una soluzione di tipo metrica e quindi una soluzione delle equazioni di Einstein in undici dimensioni.

Una volta definita la struttura geometrica generale della soluzione siamo andati alla ricerca di soluzioni specifiche a tale problema. Attualmente esiste una sola classe di soluzioni note che è stata ricavata da J.Maldacena e D.Gaiotto in [12], la quale generalizza l'unica soluzione precedentemente conosciuta dovuta allo stesso J.Maldacena insieme a C.Nunez. Ispirandoci al precedente articolo abbiamo ipotizzato la presenza di una simmetria U(1) nella soluzione, già presente in quella di Maldacena-Nunez, che ci ha permesso di costruire una pittura duale in cui il problema gravitazionale risulti più familiare. La simmetria U(1) semplifica ulteriormente la struttura geometrica delle soluzioni che diventano dipendenti in questo caso da una funzione $D(x, y)$ bidimensionale e non più da una funzione scalare tridimensionale. Sotto tale ipotesi, la quale implica l'esistenza di un *vettore di Killing extra*, l'equazione di Toda viene mappata nell'equazione di Laplace in coordinate cilindriche e di conseguenza il nostro problema gravitazionale 11-dimensionale viene mappato in un problema elettrostatico 2-dimensionale con simmetria cilindrica.

Il map in questione ci permette di tradurre il problema gravitazionale fortemente non lineare in un problema elettrostatico classico lineare che sappiamo avere infinite soluzioni corrispondenti a tutte le distribuzioni di carica pensabili. Il vero problema tecnico dell'intero lavoro è stato studiare la corrispondenza tra soluzioni gravitazionali fisicamente accettabili e soluzioni elettrostatiche; in particolare il map 4.14 che gestisce il passaggio risulta anch'esso non lineare e non garantisce che una soluzione elettrostatica regolare venga univocamente mappata in una soluzione gravitazionale a sua volta regolare e quindi fisicamente accettabile. In altre parole possiamo affermare che la non linearità del map non preservi la regolarità delle soluzioni definite nelle due diverse pitture. Non è ancora stato capito a fondo infatti come le condizioni di segnatura della metrica e di regolarità di quest'ultima vengano tradotte nella pittura elettrostatica duale in condizioni restrittive sulle distribuzioni di carica possibili.

Abbiamo in primo luogo rappresentato la soluzione Maldacena-Nunez, che sappiamo corrispondere ad una soluzione gravitazionale palesemente regolare, in questo nuovo contesto elettrostatico duale e verificato che quest'ultima corrisponda alla configurazione di un piano conduttore e di una distribuzione lineare di carica trasversa al piano e avente espressione analitica:

$$\lambda(\eta) = \frac{N}{2} \text{sign}(\eta) \tag{6.2}$$

Mantenendo la stessa struttura elettrostatica abbiamo analizzato come potesse essere generalizzata tale soluzione e abbiamo trovato che le sole e uniche distribuzioni di carica corrispondenti a soluzioni 11-dimensionali fisicamente accettabili risultino essere quelle che soddisfino il requisito:

$$\lambda''(\eta) = 0 \tag{6.3}$$

Abbiamo inoltre dimostrato la necessità della presenza di un piano conduttore nella configurazione elettrostatica affinché lo spazio sferico degeneri in modo regolare.

Abbiamo in seguito generalizzato la distribuzione di carica Maldacena-Nunez aggiungendole discontinuità di prima specie e abbiamo verificato tramite il calcolo della curvatura scalare che tali generalizzazioni non vengano tradotte in soluzioni gravitazionali regolari e quindi fisicamente accettabili. Le radici di tale problema sono da ricercarsi nella presenza di curve su cui V'' e \dot{V} si annullino indipendentemente a causa della quali la curvatura scalare risulta esplicitamente divergente.

Abbiamo indagato un altro tipo di generalizzazioni caratterizzate elettrostaticamente da una distribuzione di carica lineare a tratti scoprendo che tale insieme costituisca una collezione di nuove soluzioni perfettamente regolari, ottime candidate a rappresentare la configurazione gravitazionale di una M5 brana wrappata su di una Superficie di Riemann. Lo studio e la definizione di queste nuove soluzioni è stato affrontato nel paragrafo 4.10.

Le soluzioni appartenenti a tale classe sono analoghe a quelle studiate in [12] ma rappresentano in tutto e per tutto nuove geometrie in quanto caratterizzate da simmetria $U(1)$ di tipo traslazionale e non rotazionale come nel caso già noto.

Ne abbiamo investigato la regolarità, la geometria e le cariche associate. Abbiamo inoltre verificato che la più semplice di esse, definita da una distribuzione di carica lineare e poi costante, rappresenti una soluzione fattorizzata al problema e quindi equivalente sotto trasformazioni conformi a quella nota di Maldacena-Nunez.

Abbiamo altresì studiato tramite una analisi numerica un altro tipo di soluzione, definita da una distribuzione di carica costituita da due tratti lineari di diversa pendenza, per verificare se come nel caso di simmetria $U(1)$ rotazionale questa rappresentasse una riscrittura della geometria $AdS_7 \times S^4$; in questo caso ciò non accade, poichè la curvatura scalare non risulta costante. Il lavoro circa tali soluzioni non è assolutamente terminato in questa tesi e va ulteriormente analizzato in futuro. In primo luogo va ancora verificato in modo completo e rigoroso che questa classe di soluzioni non sia equivalente a quella trovata da Gaiotto in [12]; come abbiamo già discusso nel paragrafo 4.10.7 esistono numerosi sospetti a riguardo. L'argomentazione numerica

fornita nel paragrafo 4.10.6 costituisce una forte prova a favore della non equivalenza delle due diverse classi di soluzioni, bensì non una prova decisiva: potrebbe per esempio accadere che la relazione tra le due classi sia più complessa di quella pensata e che differenti distribuzioni di carica appartenenti a classi opposte si traducano in soluzioni gravitazionali equivalenti. Un metodo rigoroso per dimostrare o meno l'equivalenza delle due classi di soluzioni sarebbe sicuramente quello di calcolare la curvatura scalare nei due diversi casi e confrontarla.

Una volta risolto il problema appena enunciato occorre senza dubbio studiare più a fondo il significato delle soluzioni collezionate in tale classe per andare a capire a quali oggetti esse corrispondano. L'analisi proposta è da svolgersi parallelamente su due versanti: quello gravitazionale e quello delle teorie di campo conformi. Innanzitutto va compreso il significato gravitazionale di tali oggetti regolari riconducibili a configurazioni di M5 brane arrotolate su Superfici di Riemann. Va compreso come la geometria della Superficie su cui la brana viene arrotolata influenzi la definizione della soluzione corrispondente e come tale geometria sia legata alla configurazione elettrostatica duale con cui può essere descritto l'oggetto in questione. Va successivamente capito a fondo il significato delle cariche provenienti dai flussi sui differenti 4-cicli compatti; è necessario inoltre analizzare ulteriormente il significato del *quanto di pendenza* che governa le condizioni di regolarità delle soluzioni. Abbiamo ormai capito che rappresenta la *scala di lunghezza* caratteristica della geometria del problema, ma quale significato fisico assume tale valore? D'altro canto occorre investigare in modo esaustivo la controparte duale di tali oggetti. Come abbiamo spiegato nel paragrafo 1.5 la corrispondenza AdS-CFT giustifica l'esistenza di una descrizione alternativa degli oggetti gravitazionali aventi a che fare con spazi di Anti de Sitter come quelli da noi studiati. Seguendo tali prescrizioni è necessario ricercare le teorie di campo conformi a cui corrispondono le soluzioni regolari presenti nella classe da noi studiata. Tale studio potrebbe essere fortemente significativo nello studio delle teorie di Gauge abeliane e non e potrebbe dare vita anche ad applicazioni di vario genere.

Sarebbe altresì produttivo andare a testare altri tipi di soluzioni provenienti da configurazioni elettrostatiche differenti e più complesse. Valutata la necessità della presenza di un piano conduttore è possibile complicare a piacimento la soluzione nella pittura elettrostatica aggiungendo per esempio altri piani conduttori o superfici conduttrici di forma diversa come fatto per le soluzioni con simmetria $U(1)$ rotazionale in [1]. Abbiamo analizzato in questo lavoro il caso in cui la distribuzione di carica sia lineare e trasversa al piano conduttore; è chiaro che sia possibile innanzitutto variare l'angolo tra il piano conduttore e la distribuzione di carica e in secondo luogo andare a investi-

gare distribuzioni di carica superficiali di diverse forme. A questo scopo le direzioni da investigare sono notevoli e aperte alle *fantasie ingegneristiche* che la pittura elettrostatica mette a disposizione.

Infine va analizzato ulteriormente il map non lineare che traduce il problema gravitazionale nel problema elettrostatico ed in particolare occorre capire come le condizioni di regolarità della soluzione gravitazionale, per esempio la segnatura della metrica, vengano tradotte nella pittura elettrostatica duale. Esiste oggi la convinzione che tale traduzione sia piuttosto ardua e che non si possano definire in modo completo condizioni necessarie e sufficienti sulla distribuzione di carica affinché la relativa soluzione gravitazionale sia regolare e fisicamente accettabile; in questo lavoro ci siamo limitati nella pittura elettrostatica a descrivere le condizioni necessarie, che ci hanno permesso di restringere fortemente il campo di ricerca delle possibili soluzioni fisiche corrispondenti.

Nell'ultima parte di questa tesi ci siamo occupati di quello che doveva essere il fine ultimo di questo lavoro ossia delle soluzioni $1/2$ BPS di M-Teoria con simmetria globale $SO(6) \times SO(1, 2) \times \mathcal{R}$ corrispondenti alla situazione gravitazionale di M2-brane *wrappate* su superfici 2-dimensionali compatte. La geometria di tali soluzioni parametrizzata ancora una volta secondo la funzione scalare $D(x_1, x_2, y)$ soddisfacente l'equazione differenziale di Toda può essere ricavata in modo elegante e veloce dalle geometrie LLM con simmetria $SO(6) \times SO(3)$ tramite rotazione di Wick su alcune specifiche coordinate. Attualmente non esistono soluzioni note per questo problema che risulta notevolmente più complesso rispetto a quello relativo alla membrana 5-dimensionale precedentemente discusso. Abbiamo investigato la possibilità dell'esistenza di una soluzione fattorizzata per tale problema e studiato a fondo le contraddizioni che nascono sotto questa ipotesi. Sembrerebbe in ultima analisi che soluzioni fattorizzate per il problema di M2-brane *wrappate* su 2-cicli non possano esistere.

Abbiamo infine cercato di mostrare delle linee guida per la ricerca di soluzioni non fattorizzate al problema dalla forma analitica più complessa.

Anche la ricerca di soluzioni non fattorizzate proveniente da una configurazione elettrostatica duale analoga a quella della soluzione MG per la M5-brana non conduce a risultati positivi. In effetti l'ipotesi caratterizzata da una distribuzione di carica lineare e un piano conduttore infinito trasverso sembra condurre a patologie non eliminabili nella metrica 11-dimensionale.

In ultima analisi esiste oramai il sospetto che restringersi alla sottoclasse di soluzioni aventi simmetria $U(1)$ sia una richiesta troppo forte nel caso della M2-brana. A differenza del caso della M5 brana, occorrerà abbandonare questa ulteriore richiesta e la pittura elettrostatica duale che ne consegue per andare alla ricerca di soluzioni fisicamente accettabili provenienti da una più

generale funzione $D(x_1, x_2, y)$.

La ricerca di tali soluzioni sarebbe sicuramente importante per lo studio della teoria di campo conforme duale; infatti tali configurazioni dovrebbero corrispondere secondo la già citata corrispondenza AdS-CFT a Modelli Supersimmetrici di Meccanica Quantistica ([8],[18]). Quest'ultimo campo di ricerca risulta largamente inesplorato e rappresenta tuttora un ambito di grande interesse all'interno della Fisica Teorica.

6.1 Ringraziamenti

Ringrazio *in primis* i miei due relatori, Stefano Giusto e Camillo Imbimbo, per la disponibilità che hanno dimostrato in questo anno di lavoro e per l'opportunità che mi hanno dato. Mi hanno trasmesso molto e di questo gli sono grato; mi scuso inoltre per avergli intasato la posta elettronica, vi mancherò. Ringrazio il professor Carlo Maria Becchi, mio correlatore, per aver avuto la pazienza di leggere le 10^{23} versioni non definitive di questa tesi; avrebbe potuto sicuramente spendere il suo tempo in modo migliore.

Ringrazio il professor Enrico Massa per le sempre interessanti conversazioni e per l'aiuto circa la parte geometrica di questo lavoro: sempre disponibile come al solito.

Ringrazio i miei genitori...beh direi che non c'è neanche bisogno di trovare una motivazione, grazie. Non ce la farai mai...

Ringrazio mia sorella per avermi sostenuto nei mie studi e per avermi prospettato le peggiori situazioni lavorative future...vabbeh, non regge, ti ringrazio per la tuta di Jordan di natale che spaccava veramente.

Ringrazio Bri per essermi stata sempre vicina durante questo anno e per essere riuscita a fingere sempre entusiasmo e interesse in queste ca**ate 11-dimensionali. Questo è amore...Pinkie promise!

Ringrazio i miei nonni paterni, Helga e Renato, perchè mi hanno sempre guardato con stima e mi han sempre chiamato dottore prima che lo fossi, spero continuino a farlo.

Un pensiero particolare va al nonno il cui ricordo porto ogni giorno sulla mia pelle, avrei voluto ci fossi ma son sicuro tu mi stia sempre guardando...

Ringrazio i miei nonni materni, Emma e Giovanni, peccato nonna per quel pezzo di pizza, la lettera sarebbe stata davvero bella...

Ringrazio mio cugino Corrado per studiare, almeno lui, qualcosa di utile al genere umano.

Ringrazio mia cugina Serena per aver fatto quest'anno tutte le serate che avrei dovuto fare io, te ne sono debitore, per il fegato non ti preoccupare...

Ringrazio zio andrea per l'ospitalità e per avermi trasmesso tutta la curiosità

che penso di avere...

Ringrazio zia marta per tutti i soggiorni piemontesi...non so manco più che faccia hai...

Ringrazio zio massimo per avermi avvicinato fin da piccolo alla scienza...

Ringrazio ale perchè tutti i fottuti grafici di questa tesi li ha fatti lui in fin dei conti...Rispetto anche se stai prima di \hbar ...

Ringrazio il bonjo, per avermi sottratto tutte le pollastrelle in giro e non avermi indotto in tentazione liberami dal male amen...

Ringrazio pata perchè assomiglia troppo a Howard di Big Bang Theory che è un fico e perchè sicuramente smarmella più di me...

Ringrazio marco che è a Parigi a farsi i ca**i suoi...

Ringrazio dolce perchè sweet è sweet...

Ringrazio cappo perchè...è una cazzata!

Ringrazio dome per non essersi fatto mai vedere a lezione.

Ringrazio giulio perchè è un capo...

Ringrazio donde perchè senza di lui tutta la burocrazia universitaria mi avrebbe ucciso...

Ringrazio carlo per avermi fatto sentire sempre in orario anche quando arrivavo minuti e minuti dopo l'inizio della lezione...

Ringrazio la marti nonostante sia una fisica dell'altra sponda...una sperimentale...

Ringrazio dario per le numerose e interessanti conversazioni su queste strane teorie,ma quand'è che parleremo di f**a?Inizio a preoccuparmi...

Ringrazio danilo per avermi indotto a questo look dalla barba incolta che ha molto fascino e per essere il mio consigliere sentimentale personale...

Ringrazio valentina, gaia e ale i miei supercoinquilini...siamo così diversi che stiam troppo bene insieme...mi mancate!

Ringrazio la marti perchè non conosco persona al mondo più tenera di lei, un cuoricino!

Ringrazio la ste che è ancora convinta ora che io sia uguale a suo fratello, la devi smettere di bere!

Ringrazio la betty e la fra, per aver litigato per me...lol

Ringrazio martina per aver tentato inutilmente più volte di farmi credere che la fisica sperimentale sia interessante...

Ringrazio fede perchè ogni parola che dice sono risate...

Ringrazio bargi per aver creduto almeno un secondo che fossi un giocatore di basket professionista...

Ringrazio Ez per avermi conosciuto e apprezzato nonostante tutto...

Ringrazio shari per l'idea originale circa questi ringraziamenti...

Ringrazio laura per avermi distratto durante la stesura di questi ringraziamenti...

Ringrazio marco, perchè anche se non ci vediamo mai ogni volta che accade è super...

Ringrazio chine per i numerosi soggiorni toscani...

Ringrazio irene perchè oramai è una donna di carriera...e se ce l'ha fatta lei a mettersi lo smalto, i tacchi 12 cm e il tubino ogni giorno io posso fare anche il fisico teorico...

Ringrazio nena, perchè la considero una delle persone più brillanti che conosco, mi manchi!

Ringrazio ire perchè ogni volta che vado a spiaggia con lei sono risate e perchè ha una sorella...!

Ringrazio silvia perchè quando volo sulle nuvole mi riporta sempre al piano terra...

Ringrazio supa, che non la vedo mai ma è sempre stata una sorellona per me...

Ringrazio il negro, perchè avercela una mano destra come lui...peccato per il resto

Ringrazio leo e joe per avermi fatto vincere ehm...una schedina?bella vetch!

Ringrazio michela per aver corretto tutti gli accenti, apostrofi o come si chiamano...

Ringrazio la franceschina, perchè forse finalmente a sta belin di laurea ci vedremo...

Ringrazio vitto che mi regala sempre troppo affetto...

Dovrei ancora ringraziare milioni di persone, compagni di classe, compagni di squadra, amici, amiche, amanti...

Spero di non essermi dimenticato di nessuno¹...

Se siete tra quei nessuno, beh GRAZIE lo stesso...

¹Nel caso siate stati dimenticati, rivolgetevi per lamentele alla mia segretaria Anabella Fagina.

Appendice A

Notazioni e convenzioni utilizzate

Questa breve appendice si propone di descrivere ed elencare brevemente le notazioni e le convenzioni utilizzate in questa tesi per evitare incomprensioni o incompletezze. L'esposizione non è stata curata a fondo ma vuole essere semplicemente un elenco degli strumenti usati.

A.1 Capitolo 2

La soluzione generica per una D-p brana BPS nello string frame risulta:

$$\begin{aligned} ds^2 &= H(r)^{-1/2}(-dt^2 + dx_{\parallel}^2) + H(r)^{1/2}dx_{\perp}^2 \\ e^{\Phi} &= H(r)^{\frac{1}{4}(3-p)} \\ C_{01\dots p} &= g_s^{-1}(1H^{-1}(r)) \end{aligned}$$

in cui la funzione $H(r)$ è una funzione armonica nello spazio trasverso alla brana.

Ricordiamo per completezza le seguenti definizioni basilari che vengono utilizzate con frequenza in questo lavoro:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = \eta_{AB}e^Ae^B$$

in cui e^A sono i cosiddetti Vielbein o Tetradi caratterizzanti il formalismo di Cartan.

$$de^A + \omega^A_B \wedge e^B = 0$$

è l'equazione per i Vielbein sulle varietà Riemanniane definente il requisito di Torsione nulla.

$$\omega_B^A = \omega_{B\mu}^A dx^\mu$$

sono le cosiddette connessioni di spin.

La derivata covariante sulla varietà curva è definita come:

$$D_\mu \epsilon = \partial_\mu \epsilon + 1/4 \omega_{AB\mu} \Gamma^{AB} \epsilon$$

Le matrici gamma sulla varietà sono definite rispettando la seguente definizione:

$$\Gamma^\mu = e_a^\mu \Gamma^a$$

in cui Γ^a sono le matrici Gamma sullo spazio piatto.

Ricordiamo che la definizione dell'operatore Laplaciano in un background curvo risulti:

$$\nabla^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} g^{\mu\sigma} \partial_\sigma)$$

Si definisce duale di Hodge di una forma A la seguente relazione:

$$*A_{\mu_1 \dots \mu_{d-p}} = \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_{d-p}}^{\nu_1 \dots \nu_p} A_{\nu_1 \dots \nu_p}$$

in cui ϵ è il tensore di Ricci definito a partire dal simbolo di permutazione di Levi-Civita secondo :

$$\epsilon_{ij\dots k} = \sqrt{g} \eta_{ij\dots k}$$

La dimensione dello spazio delle p-forme è la dimensione dello spazio dei tensori antisimmetrici di rango p che risulta $\binom{n}{p}$; ed è noto dall'algebra combinatoria che sia valida la relazione:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

A.2 Capitolo 3

In riferimento all'equazione di Toda tridimensionale e ai numerosi calcoli presenti in tale capitolo, ci riferiamo al simbolo Δ in quanto Laplaciano rispetto alle coordinate x_1, x_2 , ossia:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

Per semplicità di notazione definiamo nella trattazione le coordinate sullo spazio di Anti de Sitter AdS_5 come θ^a , quelle sulla sfera $\tilde{\Omega}_2$ come θ^α e le restanti sullo spazio quadridimensionale come x^μ .

La rappresentazione 32 dimensionale da noi scelta per le 11 matrici Gamma risulta:

$$\begin{aligned} \Gamma^a &= \rho^a \otimes \gamma^7, & \Gamma_\alpha &= 1 \otimes \sigma_\alpha \otimes \gamma^5, & \Gamma_\mu &= 1 \otimes 1 \otimes \gamma_\mu \\ \gamma_7 &= \sigma_3 \otimes \gamma_5 & (\gamma_7)^2 &= +1 \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \Gamma_0^2 &= -1 \\ \Gamma_i^2 &= 1 \\ \gamma_0^\dagger &= -\gamma_0 \\ \gamma_i^\dagger &= \gamma_i \\ \gamma_5 &= -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \\ \gamma_5^\dagger &= \gamma_5 \end{aligned}$$

Si può verificare che tali matrici soddisfino l'algebra di Clifford $\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$.

Il generatore della rappresentazione spinoriale del gruppo di Lorentz viene indicato con J_{cd} e vale $J_{cd} = \frac{1}{4}[\rho_c, \rho_d]$.

La derivata covariante è definita secondo $D_i\Psi = \partial_i\Psi + \frac{1}{4}\omega_\mu^{\rho\sigma}\mathcal{J}_{\rho\sigma}$.

E utile ricordare che il tensore di Riemann per uno spazio AdS di raggio

unitario valga $R_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} = -\delta_{\mu}^{[\rho}\delta_{\nu}^{\sigma]}$.

Le matrici Gamma sullo spazio curvo vengono indicate con Γ^{μ} e pertanto le relative matrici Gamma *appiattite* risultano $\Gamma^a = e_{\mu}^a \Gamma^{\mu}$ dove le tetradi e_{μ}^a sono definite dalla relazione $g^{ab}(x) = \eta^{\mu\nu} e_{\mu}^a(x) e_{\nu}^b(x)$.

I bilineari spinoriali sono oggetti costruiti semplicemente inserendo tra due spinori un prodotto qualsiasi di matrici gamma nel seguente modo:

$$\bar{\epsilon} \Gamma_{\mu_1 \dots \mu_n} \epsilon \tag{A.1}$$

a seconda del prodotto di matrici gamma tali bilineari avranno comportamento scalare, vettoriale, spinoriale, pseudoscalare, ecc. . .

Ricordiamo che $\gamma_{\mu}^{\dagger} \gamma_0 = -\gamma_0 \gamma_{\mu}$ e che pertanto, per esempio, la complessa coniugata di $\nabla_{\mu} \epsilon + \frac{im}{2} \gamma_{\mu} \epsilon - \frac{1}{8} e^{-3\tilde{\lambda} - 2\tilde{A}} F_{\mu\nu} \gamma^{\nu} \gamma^5 \epsilon = 0$ risulta essere $\nabla_{\mu} \bar{\epsilon} - \frac{im}{2} \bar{\epsilon} \gamma_{\mu} + \frac{1}{8} e^{-3\tilde{\lambda} - 2\tilde{A}} F_{\mu\nu} \bar{\epsilon} \gamma^{\nu} \gamma^5 = 0$.

Ricordiamo che un vettore di Killing su una varietà Riemanniana è totalmente definito dalla relazione $\nabla_{[\nu} K_{\mu]} = 0$.

Appendice B

Dalla sfera all'AdS...

In questa breve appendice andremo ad approfondire un po meglio la *stretta parentela* tra gli spazi sferici e gli spazi di Anti de Sitter e in particolare cercheremo di analizzare a fondo il significato della continuazione analitica che li collega.

In questo lavoro di tesi, abbiamo usato più volte questo *trick* per ricavare in modo rapido nuovi tipi di geometrie associate a soluzioni 1/2 BPS di M-Teoria. In particolare abbiamo visto come le soluzioni LLM con simmetria globale $SO(6) \times SO(3)$ sono intimamente legate a quelle da noi studiate con simmetria $SO(1, 5) \times SO(3)$ e $SO(6) \times SO(1, 2)$ e che questo legame sia proprio rappresentato dall'azione di una continuazione analitica o rotazione di Wick che scambia appunto gli spazi sferici presenti nella prima soluzione (S^5, S^2) con gli spazi di Anti de Sitter presenti nelle seconde soluzioni (AdS_5, AdS_2).

Facciamo subito un esempio molto semplice ma piuttosto esplicativo, se non altro dal punto di vista pratico.

Prendiamo la metrica di una S^5 parametrizzata nel seguente modo:

$$ds_{S^5}^2 = \cos^2 \alpha d\psi^2 + d\alpha^2 + \sin^2 \alpha d\Omega_3^2 \quad (\text{B.1})$$

ed effettuiamo la continuazione analitica sulla coordinata angolare α :

$$\psi \longrightarrow \tau, \quad \alpha \longrightarrow i\rho \quad (\text{B.2})$$

allora per computo diretto la metrica della S^5 in seguito a tale trasformazione diventa:

$$ds^2 \longrightarrow -(-\cosh^2 \rho d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_3^2) \equiv -ds_{AdS_5}^2 \quad (\text{B.3})$$

che risulta essere a meno di un segno esattamente la metrica di uno spazio Anti de Sitter 5D.

Per capire ancora più a fondo questo aspetto geometrico proponiamo un altro procedimento esplicativo.

Consideriamo ora nello spaziotempo di Minkowski \mathcal{M}^5 l'ipersuperficie di equazione:

$$dS_4 = \{x \in \mathcal{M}^5, x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = -R^2\} \quad (\text{B.4})$$

Questo è uno spazio De Sitter con curvatura costante negativa $-\frac{12}{R^2}$ ed è asintoticamente equivalente allo spazio tempo Minkowskiano.

L'elemento di linea invariante dello spazio De Sitter è ottenuto restringendo l'intervallo invariante 5-dimensionale alla varietà dS_4 :

$$ds^2 = [dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 - dx_4^2]_{dS_4} \quad (\text{B.5})$$

Questa rappresenta la più simmetrica soluzione dell'equazione di campo di Einstein con la costante cosmologica Λ ed ha come gruppo di simmetria il gruppo $SO(1, 4)$.

Questo spazio è fortemente relazionato con la geometria della sfera, infatti se effettuiamo una continuazione analitica lungo la coordinata temporale x_0 :

$$x_0 \longrightarrow ix_0 \quad (\text{B.6})$$

la varietà (Euclidea) De Sitter diventa una sfera con gruppo di simmetria $SO(5)$.

Aggiungiamo invece questa volta una direzione temporale allo spazio di Minkowski \mathcal{M}^4 ottenendo uno spazio-piatto 5-dimensionale $\mathcal{E}^{(2,3)}$ (che non rappresenta uno *spazio-tempo* nel senso ordinario del termine poichè contiene due direzioni *timelike*) e consideriamo l'ipersuperficie:

$$AdS_4 = \{x \in \mathcal{E}^{(2,3)}, x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 = R^2\} \quad (\text{B.7})$$

Questo è uno spazio-tempo di tipo Anti De Sitter con curvatura scalare costante asintoticamente equivalente allo spazio di Minkowski.

L'elemento di linea invariante su tale spazio è rappresentato da:

$$ds^2 = [dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 + dx_4^2]_{AdS_4} \quad (\text{B.8})$$

ed è la soluzione massimamente simmetrica dell'equazione di campo di Einstein con costante cosmologica Λ negativa. Il gruppo di isometria di tale spazio è $SO(2, 3)$ e tale spazio è fortemente legato al suo *parente* De Sitter. Infatti effettuando una continuazione analitica sulla seconda coordinate *timelike*:

$$x_4 \longrightarrow ix_4 \quad (\text{B.9})$$

lo spazio (euclideo) Anti De Sitter è esattamente una coppia dello spazio iperbolico 4-dimensionale $\mathcal{H}^4 = \{x \in \mathcal{M}^4, x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = R^2\}$ e viene ad avere gruppo di isometria $SO(1, 4)$.

Abbiam mostrato, anche se non in modo preciso e completo, come gli spazi sferici, De Sitter e Anti De Sitter siano spazi geometrici fortemente collegati tra di loro.

Questo collegamento, dal punto di vista metrico, può essere rappresentato proprio dall'azione di continuazione analitica, che dal punto di vista fisico coincide a nient'altro che immaginare una direzione come immaginaria.

Completiamo questa breve trattazione con una discussione sulle rappresentazioni parametriche di questi spazi.

Prendiamo uno spazio 5-dimensionale \mathcal{V}^5 avente metrica:

$$\phi = k_{ab} dx^a \otimes dx^b, \quad k_{ab} = \text{diag}(1, 1, 1, -1, -1) \quad (\text{B.10})$$

e la superficie che rappresenta uno spazio di Anti De Sitter:

$$S : k_{ab} x^a x^b = -R^2 \quad (\text{B.11})$$

allora la rappresentazione parametrica di tale ipersuperficie risulta:

$$x^1 = R \sinh \mu \cosh \tau \sin \theta \cos \phi \quad (\text{B.12})$$

$$x^2 = R \sinh \mu \cosh \tau \sin \theta \sin \phi \quad (\text{B.13})$$

$$x^3 = R \sinh \mu \cosh \tau \cos \theta \quad (\text{B.14})$$

$$x^4 = R \sinh \mu \cosh \tau \quad (\text{B.15})$$

$$x^5 = R \cosh \mu \quad (\text{B.16})$$

con cui la metrica indotta diventa:

$$\phi_S = R^2 [d\mu^2 + \sinh^2 \mu \cosh^2 \tau (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) - \sinh^2 \mu d\tau^2] \quad (\text{B.17})$$

Prendiamo invece ora un altro spazio 5-dimensionale \mathcal{W}^5 avente questa volta metrica:

$$\phi = m_{ab} dx^a \otimes dx^b, \quad m_{ab} = \text{diag}(1, 1, 1, -1, 1) \quad (\text{B.18})$$

e la superficie che rappresenta uno spazio di De Sitter (*pseudosfera*):

$$S' : m_{ab} x^a x^b = R^2 \quad (\text{B.19})$$

allora la rappresentazione parametrica di tale ipersuperficie risulta:

$$x^1 = R \sin \mu \cosh \tau \sin \theta \cos \phi \quad (\text{B.20})$$

$$x^2 = R \sin \mu \cosh \tau \sin \theta \sin \phi \quad (\text{B.21})$$

$$x^3 = R \sin \mu \cosh \tau \cos \theta \quad (\text{B.22})$$

$$x^4 = R \sin \mu \cosh \tau \quad (\text{B.23})$$

$$x^5 = R \cos \mu \quad (\text{B.24})$$

con cui la metrica indotta diventa:

$$\phi_{S'} = R^2 [d\mu^2 + \sin^2 \mu \cosh^2 \tau (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) - \sin^2 \mu d\tau^2] \quad (\text{B.25})$$

Infine andiam a considerare lo spazio piatto \mathcal{E}^5 con metrica $\phi = \delta_{ab} dx^a \otimes dx^b$ e la superficie sferica:

$$S'' : \delta_{ab} x^a x^b = R^2 \quad (\text{B.26})$$

la cui rappresentazione parametrica risulta:

$$x^1 = R \sin \mu \cos \tau \sin \theta \cos \phi \quad (\text{B.27})$$

$$x^2 = R \sin \mu \cos \tau \sin \theta \sin \phi \quad (\text{B.28})$$

$$x^3 = R \sin \mu \cos \tau \cos \theta \quad (\text{B.29})$$

$$x^4 = R \sin \mu \cos \tau \quad (\text{B.30})$$

$$x^5 = R \cos \mu \quad (\text{B.31})$$

con la quale la metrica indotta diventa:

$$\phi_{S''} = R^2 [d\mu^2 + \sin^2 \mu \cos^2 \tau (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) - \sin^2 \mu d\tau^2] \quad (\text{B.32})$$

Partendo dallo spazio Anti De Sitter, la trasformazione $x^5 \rightarrow \iota x^5$ porta la metrica di \mathcal{V}^5 in quella di \mathcal{W}^5 ; se accompagnata da $R \rightarrow \iota R$ allora trasforma la superficie S nella superficie S'.

Nella rappresentazione parametrica, il passaggio da S (Anti De Sitter) a S' (De Sitter) è implementato da $\mu \rightarrow \iota \mu$ e contemporaneamente da $R \rightarrow \iota R$ che trasformano la metrica indotta ϕ_S nella metrica indotta $\phi_{S'}$.

In maniera analoga si passa da \mathcal{V}^5 a \mathcal{E}^5 effettuando la trasformazione ($x^5 \rightarrow \iota x^5, x^4 \rightarrow \iota x^4$) e da S a S'' con la trasformazione $R \rightarrow \iota R$.

Il passaggio dall'Anti de Sitter (S) alla sfera (S'') è infine rappresentato sotto forma parametrica dalle trasformazioni ($\mu \rightarrow \iota \mu, \tau \rightarrow \iota \tau$) accompagnate da $R \rightarrow \iota R$.

Bibliografia

- [1] J.Simon A.Donos. The electrostatic view on M-Theory LLM geometries. *arXiv*, (2010).
- [2] E.Rabinovici A.giveon, M.Porrati. Target space duality in string theory. *Phys. Rep. V.244*, pages 77–202, (1994).
- [3] M.Jabbari A.Mosaffa. On classification of bubbling geometries. *arXiv*, (2006).
- [4] A.Peet. TASI lectures on Black Holes in String Theory. *arXiv*, (2000).
- [5] A.Tseytlin. Born-Infeld action, supersimmetry and string theory. *arXiv*, (1999).
- [6] W.Wen B.Chen;A.Donos;S.Cremonini;F.Lin;H.Li;, D;Vaman. Bubbling AdS and droplet descriptions of BPS geometries in IIB supergravity. *arXiv*, (2007).
- [7] B.Zwiebach. *A first course in String Theory*. Cambridge University Press, (2004).
- [8] David J. Fernandèz C. Supersymmetric Quantum Mechanics. *arXiv*, (2009).
- [9] C.Johnson. D-Brane Primer. *arXiv*, (2000).
- [10] C.Ruef. *Black Holes in String Theory: towards an understanding of quantum gravity*. PhD thesis, Université Paris Sud 11, (2010).
- [11] D.Bernam. M-Theory branes and their interactions. *arXiv*, (2007).
- [12] J.Maldacena D.Gaiotto. The gravity duals of N=2 superconformal field theories. *arXiv*, (2009).
- [13] D.Marolf. String/M-branes for relativists. *arXiv*, (1999).

- [14] D.Morrison. TASI lectures on Compactification and Duality. *arXiv*, (2004).
- [15] H.Yavartanoo E.Colgàin, Jun-Bao Wu. On the generality of the LLM geometries in M-Theory. *arXiv*, (2011).
- [16] E.Witten. Anti de Sitter space and Holography. *arXiv*, (1998).
- [17] D. Olive F. Gliozzi, J. Scherk. *Nucl.Phys. B 122*, (1977).
- [18] U.Sukhatme F.Cooper, A.Khare. Supersymmetry and Quantum Mechanics. *arXiv*, (1994).
- [19] G.Gibbons. Quantum gravity/String/M-Theory as we approach the 3rd millennium. *arXiv*, (1998).
- [20] G.Veneziano. Construction of a crossing-symmetric, Regge-behaved amplitude for linearly rising trajectories.. *Nuovo Cimento,A57:190-7*, (1968).
- [21] M.V.Raamsdonk H-H Shieh, G.V.Anders. Coarse-Graining the Lin-Maldacena geometries. *arXiv*, (2007).
- [22] H.Lin. *BPS geometry,AdS/CFT and String Theory*. PhD thesis, Princeton University, (2006).
- [23] J.Maldacena H.Lin, O.Lunin. Bubbling AdS space and 1/2 BPS geometries. *arXiv*, (2004).
- [24] G.'t Hooft. A planar diagram theory for strong interactions. *Nuclear Physics B72*, (1974).
- [25] Z.Yin H.Ooguri. Lectures on perturbative string theories. *arXiv*, (1997).
- [26] N.Warner I.Bena. One ring to rule them all ...and in the darkness bind them?. *arXiv*, (2004).
- [27] J. H. Schwarz J. Scherk. Dual models for non-hadrons. *Phys.Lett.B 57*, (1975).
- [28] N.Lambert J.Bagger. Modeling multiple m2's. *arXiv*, (2007).
- [29] J.Sparks;D.Waldram J.Gauntlett, D.Martelli. Supersymmetric AdS5 solutions of M-Theory. *arXiv*, (2004).

- [30] N.Kim J.Gauntlett. Geometries with killing spinors and supersymmetric AdS solutions. *arXiv*, (2007).
- [31] S.Pakis J.Gauntlett, J.Gutowski. The geometry of D=11 null killing spinors. *arXiv*, (2003).
- [32] S.Pakis;D.Waldram J.Gauntlett, D.Martelli. G-Structures and wrapped NS5-branes. *arXiv*, (2002).
- [33] J.Maldacena. The large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Adv.Theor.Math.Phys.*2, (1998).
- [34] J.Maldacena. TASI 2003 lectures on AdS-CFT. *arXiv*, (2004).
- [35] C.Nunez J.Maldacena. Supergravity description of field theories on curved manifolds and a no go theorem. *arXiv*, (2000).
- [36] P.Pal J.Nieves. Generalized Fierz identities. *arXiv*, (2003).
- [37] J.Petersen. Introduction to the Maldacena conjecture on AdS/CFT . *arXiv*, (1999).
- [38] J.Polchinski. TASI lectures on D-Brane. *arXiv*, (1997).
- [39] J.Polchinski. *String Theory*, volume [1]. Cambridge University Press, (1998).
- [40] J.Polchinski. *String Theory*, volume [2]. Cambridge University Press, (1998).
- [41] M.Taylor K.Skenderis. Anatomy of bubbling solutions. *arXiv*, (2008).
- [42] K.S.Stelle. BPS branes in supergravity. *arXiv*, (2009).
- [43] L.Bao. *Aspects of wrapped branes in String and M-Theory*. PhD thesis, Chalmers University of Technology, (2009).
- [44] L.Susskind. Harmonic oscillator analogy for the veneziano amplitude. *Phys.Rev.Lett.*23, (1969).
- [45] J.Lindesay L.Susskind. *An introduction to black holes, information and the string theory revolution*. World Scientific, (2005).
- [46] M.Ganjali. On Toda equations and Half BPS supergravity solutions in M-Theory. *arXiv*, (2006).

- [47] E.Witten N.Seiberg. String theory and non-commutative geometry. *JHEP09*, (1999).
- [48] P.K.Townsend. Four lectures on M-Theory. *arXiv*, (1997).
- [49] A.Jevicki S.Cremonini, R.Koch. Matrix model maps and reconstruction of AdS SUGRA interactions. *arXiv*, (2007).
- [50] S.Martin. A supersymmetry primer. *arXiv*, (1997).
- [51] L.Susskind T.Banks;W.Fishler, S.H.Shenker. M theory as a matrix model:a conjecture. *arXiv*, (1996).
- [52] T.Buscher. A simmetry of the string background field equations. *Phys.Lett.B194*, pages 59–62, (1987).
- [53] U.Lindstrom. A brief review on supersymmetric non-linear sigma models and generalized complex geometry. *arXiv*, (2006).
- [54] Y.Nambu. A kinematical model for quarks and hadrons. In *Proc.Int.Conf.Simmetries and Quark Models*, (Gordon and Breach, 1970).