APUNTES

Elementos de Teoría Cuántica de Campos

Introducción

Estas notas sólo contienen un programa de los contenidos de un curso introdución a la teoría cuántica de campos, junto a un desarrollo ideológico de estos contenidos. Los detalles aparecerán paulatinamente.

Preliminares

La Teoría Cuántica de Campos (TCC) es el andamiaje teórico que unifica la Mecánica Cuántica (MC) y Relatividad Especial (RE). Está caracterizada por valores finitos de la constante de Planck, $\hbar$, y la velocidad de la luz, c. El límite $\hbar \to 0$ es la teoría clásica de campos relativistas, de la cual el principal ejemplo es la teoría electromagnética de Maxwell del siglo XIX. El límite $c \to \infty$ es la teoría no relativista de partículas cuánticas, tal como se comportan en la física atómica. Desde este punto de vista, un sistema cuántico de partículas se comporta de forma relativista cuando los momentos típicos de las partículas son $|\mathbf{p}| \gg mc$. En este caso, la energía típica por particula es también muy superior a mc^2, de manera que la transferencia de energía entre partículas no tiene que respetar necesariamente la identidad específica de éstas. De hecho, es un hecho experimental que el número de partículas no es conservado en colisiones de alta energía.[1]

En estas condiciones, no resulta sorprendente el fracaso de los intentos de generalizar ecuaciones de ondas de tipo Schrödinger a partículas relativistas. En realidad, la mecánica cuántica relativista es idéntica a la propia TCC: el único formalismo cuántico relativista consistente involucra necesariamente transiciones en un espacio de multipartículas.

0.1 Mecánica Cuántica relativista

La mecánica cuántica relativista es simplemente la mecánica cuántica ordinaria de objetos relativistas. De hecho, la TCC no modifica ninguno de los fundamentos del andamiaje cuántico.

0.1.1 Repaso de Mecánica Cuántica y Relatividad Especial

- *Espacio de Hilbert*

  Los estados físicos de un sistema cuántico están caracterizados por rayos en un espacio de Hilbert, es decir, vectores $|\,\psi\,\rangle$ en un espacio vectorial complejo con producto escalar, definidos con una relación de equivalencia de multiplicación por un número complejo arbitrario. Si consideramos todos los vectores de estado como normalizados, $\langle\,\psi\,|\,\psi\,\rangle = 1$, la ambigüedad queda reducida a una fase compleja.

  Operadores hermíticos, con espectro real, que actúan sobre el espacio de Hilbert representan observables, al menos en principio. La propiedad física asociada a un observable determinado sólo tiene valor bien definido en un autoestado del operador hermítico correspondiente.

  Si $|\,a\,\rangle$ es autoestado normalizado del operador hermítico $\widehat{A}$, con autovalor $a \in \mathbf{R}$ entonces se puede escribir
  $$a = \left\langle\, a\,|\,\widehat{A}\,|\,a\,\right\rangle$$

  En un estado normalizado arbitrario, $|\,\psi\,\rangle$, el observable asociado al operador $\widehat{A}$ no tiene un valor bien definido. Sin embargo, se le puede asignar una densidad de probabilidad. Para comprobar esto, podemos definir el estado
  $$|\,\psi^{\otimes N}\,\rangle \equiv |\,\psi\,\rangle_1 \otimes |\,\psi\,\rangle_2 \otimes \cdots \otimes |\,\psi\,\rangle_N\,,$$

[1] En adelante, utilizamos el sistema natural de unidades $\hbar = 1 = c$.

que representa N repeticiones independientes del estado $|\psi\rangle$. El operador $\widehat{A}^{(i)}$ actúa como $\widehat{A}$ sobre el espacio de Hilbert que aparece en la posición i-ésima en el producto tensorial, y como la unidad en el resto de los factores. Entonces los operadores

$$\hat{\mu}_n^{(N)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(\hat{A}^{(i)}\right)^n$$

representan la definición frecuentista de los momentos de una distribución de probabilidad sobre la serie de estados $|\psi\rangle_i$, $i = 1, \dots, N$. Además, los $\hat{\mu}_n^{(N)}$ son tales que el estado $|\psi^{\otimes N}\rangle$ es autoestado de todos ellos en el límite formal $N \to \infty$, con autovalor

$$\mu_n = \left\langle \psi \,|\, \hat{A}^n \,|\, \psi \right\rangle = \sum_a a^n \,|\, \langle \, a \,|\, \psi \, \rangle \,|^2$$

Es decir, la función positiva definida sobre el espectro de $\widehat{A}$,

$$\rho_\psi \,(a) = |\, \langle \, a \,|\, \psi \, \rangle \,|^2$$

se puede interpretar como una distribución de probabilidad para los valor posibles de A en el estado $|\psi\rangle$. En otras palabras, se puede decir que el propio formalismo matemático "impone" la interpretación probabilística de forma natural. En particular, $\langle \, \widehat{A} \, \rangle_\psi$ y $\Delta_\psi \widehat{A} \equiv \langle \, \hat{A}^2 \, \rangle_\psi - \langle \, \hat{A} \, \rangle_\psi^2$ se interpretan respectivamente como el valor esperado y la dispersión de $\hat{A}$ en el estado $|\psi\rangle$. Así, un operador A tiene dispersión nula en un estado $|\psi\rangle$ si y sólo si éste es un autoestado. En general, dos operadores no comparten un autoestado a menos que commuten entre sí. El principio de incertidumbre caracteriza las dispersiones de dos operadores arbitrarios en un estado arbitrario en términos de su commutador:

$$\Delta_\psi \hat{A} \cdot \Delta_\psi \hat{B} \geq \tfrac{1}{2} \, \left| \left\langle \, [\hat{A}, \hat{B}] \, \right\rangle_\psi \right|^2$$

- *Acción unitaria de las simetrías sobre los estados físicos*

El teorema de Wigner establece que las simetrías de un sistema cuántico se representan unitariamente en el espacio de Hilbert (la excepción es la inversión temporal, que se representa por un operador antiunitario). Si el grupo es de Lie, parametrizado por coordenadas α_a, $a = 1, \dots, \dim(G)$ en la vecindad de la identidad, entonces podemos escribir

$$i \frac{\partial \widehat{U}(\alpha)}{\partial \alpha_a} \,|\, \psi \, \rangle = \widehat{T}_a \,|\, \psi \, \rangle$$

para todo estado $|\psi\rangle$. Los operadores $\widehat{T}_a$ representan en el espacio de Hilbert a los generadores del álgebra de Lie, en el mismo sentido que los operadores unitarios $\widehat{U}$ representan el grupo G mediante el teorema de Wigner. Si

$$\widehat{A}(s) = \sum_a \alpha_a(s) \, \widehat{T}_a \,, \qquad s \in \mathbf{R}$$

representa una trayectoria uniparamétrica γ en el álgebra de Lie, se define una única trayectoria en el grupo, $U(s)$, mediante la solución de la ecuación diferencial

$$i \frac{d}{ds} \, \widehat{U}(s) = \widehat{A}(s)$$

y representa formalmente mediante la expresión

$$\widehat{U}(s) = P \; \exp\left(-i \int_\gamma \widehat{A}\right) = \lim_{\Delta s_j \to 0} \prod_{s_j} (1 - i \Delta s_j \widehat{A}(s_j))$$

donde los s_j se suponen ordenados sobre γ. La instrucción "P" refiere a esta ordenación. Ejemplos importantes son los operadores asociados a las simetrías espaciotemporales de traslaciones y rotaciones. Los correspondientes generadores son el cuadrimomento y el momento angular. En particular, el hamiltoniano es el generador de las traslaciones temporales, y la ecuación de Schrödinger es el caso particular de la relación anterior para el caso temporal. La solución a la ecuación de Schrödinger se escribe

$$|\,\psi(t)\,\rangle = \widehat{U}(t)\,|\,\psi\,\rangle$$

con

$$\widehat{U}(t) = T\,\exp\left(-i\int dt\widehat{H}(t)\right)$$

el operador de evolución temporal. En este caso la instrucción de ordenación temporal se denota "T", de acuerdo con Dyson.

- *Espacio de Minkowski*

Minkowski $\mathcal{M}_4$ es el conjunto de puntos $(t,\mathbf{x}) = \mathbf{R}^4$ y métrica

$$ds^2 = dt^2 - d\mathbf{x}^2$$

definida globalmente, cuyas isometrías están dadas por el grupo de Poincaré, el producto semidirecto del grupo de traslaciones en $\mathbf{R}^4$ con el grupo de Lorentz, $O(3,1)$. Las componentes conexas del grupo de Lorentz, $SO(3,1)$ están generadas por los momentos angulares $\mathbf{J}$ asociados a las rotaciones $SO(3)$, y las aceleraciones $\mathbf{K}$, que son la continuación analítica bajo $t \to -it$ de rotaciones en $\mathbf{R}^2$. Las diferentes componentes conexas están relacionadas por simetrías discretas de paridad e inversión temporal.

El álgebra de Lie $SO(3,1)$ es isomorfa a $SU(2)_+ \times SU(2)_-$, generada por

$$\mathbf{J}_\pm = \mathbf{J} \pm i\,\mathbf{K}$$

por lo que la teoría de representaciones es trivial en términos de las estándar de $SU(2)$.

La ecuación de los rayos de luz, $ds^2 = 0$ determina direcciones nulas $\mathbf{x}^2 = t^2$. Con respecto a un origen arbitrario, la métrica de Minkowski define un cono causal. Los puntos con $x^2 = t^2 - \mathbf{x}^2 \geq 0$ están causalmente conectados con el origen, bien hacia el pasado o bien hacia el futuro. Por el contrario, los puntos con $x^2 < 0$ están causalmente desconectados. Puesto que x^2 es invariante Lorentz, esta clasificación es intrínseca a cualquier par de puntos y no depende del sistema de coordenadas inercial utilizado.

0.1.2 Partículas relativistas

Según el teorema fundamental de Wigner, los estados físicos de una teoría con invariancia Poincaré deben agruparse en representaciones unitarias de este grupo. Tomando el espectro del operador impulso, $\widehat{\mathbf{P}}\,|\,\mathbf{p}\,\rangle = \mathbf{p}\,|\,\mathbf{p}\,\rangle$, como índice de los números cuánticos, debemos determinar el resto de los operadores que conmutan con $\widehat{\mathbf{P}}$ para completar un conjunto completo de observables. Podemos analizar por separado las representaciones para cada valor de la masa, $M^2 = E^2 - \mathbf{p}^2$, que es un invariante del grupo.

- *Representaciones masivas*

Para partículas masivas, es útil clasificar los estados en el sistema de referencia en reposo $p = (M,0,0,0)$, en multipletes de espín $\mathbf{S}$ de $SO(3)$, el subgrupo remanente, y recuperar los estados generales mediante la acción del operador unitario que implementa la aceleración desde $\mathbf{p} = 0$. Los estados de espín $|\mathbf{S}^2,\lambda\rangle$ se clasifican con respecto al casimir de $SO(3)$ habitual $\widehat{\mathbf{S}}^2$, con espectro $s(s+1)$, $s \in \mathbf{Z}/2$, y la componente en la dirección de movimiento, la *helicidad* $\lambda = \mathbf{S}\cdot\mathbf{p}/|\mathbf{p}| \in \mathbf{Z}/2$, de espectro semientero:

$$\big|\mathbf{p},\mathbf{S}^2,\lambda\,\big\rangle = \widehat{K}_{\mathbf{p}}\,\big|\mathbf{p}=0,\mathbf{S}^2,\lambda\,\big\rangle.$$

Dado que la helicidad se puede cambiar mediante una transformación Lorentz (podemos "adelantar" a una partícula masiva), debemos especificar con cuidado el orden de las diferentes transformaciones de Lorentz en la parametrización de los estados.

- *Masa nula y "representaciones pequeñas"*

En el caso de partículas no masivas, no podemos situarlas en reposo mediante una aceleración, pero sí podemos alcanzar un momento de referencia sobre el cono de luz: $p = (\kappa, 0, 0, \kappa)$. El subgrupo remanente es $E(2)$, los movimientos en el plano, que contiene la helicidad. Las representaciones de dimensión finita y unitarias son unidimensionales, y corresponden a un valor *fijo* de la helicidad, cuyo signo se puede invertir por la acción combinada de las simetrías discretas PT. La helicidad es invariante Lorentz para partículas de masa cero, así que éstas viven en *representaciones pequeñas*. Esta propiedad resultar ser fundamental en la naturaleza, en relación con las simetrías quirales para el caso de espín $\frac{1}{2}$ y las simetrías gauge para espín 1.

0.2 De partículas relativistas a campos relativistas

Ahora nos confrontamos con la crisis básica de la MC relativista: las dificultades en la noción de localización espacio-temporal de una "partícula", tal como ha sido definida en la sección anterior. Más concretamente, se pretende hacer plausible el siguiente ideograma:

MC+RE $\rightarrow$ **multipartículas** $\approx$ **campo cuántico**

0.2.1 Paradojas y crisis

- *Ecuación de ondas de Klein–Gordon*

Con objeto de emular en el contexto relativista la noción de "densidad de probabilidad de posición", introducimos una función de onda para una superposición arbitraria $|\varphi\rangle$ de estados de una partícula (escalar, para simplificar la discusión):

$$\varphi(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} | \varphi \rangle$$

a tiempo $t = 0$. La evolución dinámica está controlada por el hamiltoniano de las partículas en cuestión, derivado de la relación de dispersión

$$E(\mathbf{p}) = \omega_{\mathbf{p}} \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}.$$

Esto nos lleva directamente a la ecuación de ondas de Klein–Gordon:

$$(\partial_\mu \, \partial^\mu + m^2) \, \varphi(\mathbf{x}, t) = 0$$

- *Crisis*

Sin embargo, eliminamos inmediatamente esta posibilidad, sobre la base de la acausalidad del propagador. Es decir, se muestra que la amplitud de propagación

$$\left\langle \mathbf{x} \left| e^{-i\,t\sqrt{\hat{\mathbf{p}}^2 + m^2}} \right| \mathbf{y} \right\rangle$$

viola el dogma fundamental de la causalidad relativista, a pesar de estar inspirado en la relación de dispersión correcta.

La crisis se puede solucionar mediante el abandono de la descripción del espacio de Hilbert basado en una sola partícula (localización espacial de partículas individuales). De acuerdo con la intuición proporcionada por el principio de incertidumbre, junto con $E = m\,c^2$, una partícula *confinada* en regiones de tamaño inferior a la longitud de onda Compton $\lambda_{\text{Compton}} = h/mc$ posee una indeterminacíon en la energía igual a su masa en reposo, y por tanto los procesos de creación de pares quedan abiertos.

0.2.2 Espacio de Fock relativista = TCC libre

Dado que no parece posible *localizar* partículas individuales, consideramos la extensión del formalismo a estados de multi-partículas.

- *Construcción del espacio de Hilbert (de Fock)*

  El espacio de Hilbert de multipartículas libres se obtiene como producto tensorial de los estados monoparticulares $|\mathbf{p}\rangle$, con la debida atención a la estadística. Utilizaremos una normalización invariante Lorentz:

$$\langle \mathbf{p} \,|\, \mathbf{q} \rangle = 2(2\pi)^3 \,\omega_{\mathbf{p}}\, \delta\,(\mathbf{p} - \mathbf{q}).$$

  Este espacio de Hilbert tiene estructura de espacio de Fock, según el formalismo de aniquiladores $\hat{a}|\text{VAC}\rangle = 0$ y creadores $\langle\text{VAC}|\hat{a}^\dagger = 0$ para estados de impulso bien definido. La normalización será tal que $|\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}\,\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}\,|\text{VAC}\rangle$. Así pues, un sistema de partículas libres relativistas es equivalente a una asamblea de osciladores armónicos; uno por cada valor del impulso, con una relación de conmutación $[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{q}}] = (2\pi)^3\delta(\mathbf{p} - \mathbf{q})$ y un hamiltoniano diagonal:

$$\widehat{H} = E_{\text{VAC}} + \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\omega_{\mathbf{p}}\,\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}\,\hat{a}_{\mathbf{p}}$$

  que a su vez determina la evolución temporal de los operadores:

$$\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}(t) = \hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}\,e^{i\omega_{\mathbf{p}}t} \qquad \hat{a}_{\mathbf{p}}(t) = \hat{a}_{\mathbf{p}}\,e^{-i\omega_{\mathbf{p}}t}$$

  Por el momento, pasamos de puntillas sobre el hecho de que E_{VAC} es formalmente infinita.

- *Definición de campo escalar libre*

  Los operadores de creación/aniquilación se pueden combinar en un *operador* que depende *localmente* de la posición y es un escalar Lorentz:

$$\widehat{\phi}(x) \equiv \widehat{\phi}(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}}\left(\hat{a}_{\mathbf{p}}(t)\,e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}(t)\,e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}}\right)$$

  La forma particular de los coeficientes en la superposición anterior está determinada por invariancia Lorentz y el carácter real del campo $\widehat{\phi}^\dagger = \widehat{\phi}$. Físicamente, la interpretación del campo $\widehat{\phi}$ es la de un operador que crea o aniquila partículas, con elementos de matriz

$$\left\langle \text{VAC} \left| \widehat{\phi}(x) \right| \mathbf{p} \right\rangle = e^{-ipx} = e^{-i\omega_{\mathbf{p}}\,t + i\mathbf{p}\,\mathbf{x}}$$

  entre estados monoparticulares y el vacío.

- *Causalidad*

  Se verifica que esta definición de campo libre, en la que el campo es un operador hermítico (en realidad, un observable), satisface la condición de localidad. Es decir, medidas de $\widehat{\phi}$ separadas por un vector de género espacio son independientes:

$$\left[\,\widehat{\phi}(x), \widehat{\phi}(y)\,\right] = 0 \quad \text{si} \quad (x - y)^2 < 0$$

- *Acción e interacciones*

  Las ecuaciones de Heisenberg que satisface el campo recién construido coinciden precisamente con la ecuación de Klein–Gordon:

$$\partial_t^2\,\widehat{\phi} = (\partial_{\mathbf{x}}^2 - m^2)\,\widehat{\phi}$$

que a su vez deriva formalmente de una acción invariante Lorentz:[2]

$$I = \int dt\, L = \int d^4x\, \mathcal{L} = \int_X \tfrac{1}{2}\, \left(\partial_\mu \phi\, \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2\right)$$

Interacciones polinómicas de estructura apropiada en los creadores/aniquiladores básicos se traducen en términos polinómicos del mismo orden en ϕ en la acción invariante Lorentz.

0.2.3 Fotones y campo de Maxwell

La teoría de la radiación libre ilustra perfectamente la fusión entre teorías de campos y teorías de (multi)-partículas relativistas.

- *Fotones*

  Recordamos de nuevo la estructura de los estados de fotón $|\gamma(p), \lambda\rangle$, definida como una partícula sin masa de espín 1, con *sólo* dos estados de polarización $\lambda = \pm 1$.

  Un campo de espín 1 debe corresponder a un cuadrivector A_μ real. La idea es construirlo de forma que sea un operador local, hermítico, y que crea/destruye fotones con respecto al vacío:

$$\left\langle \text{VAC} \left| \widehat{A}_\mu(x) \right| \gamma(p, \lambda) \right\rangle = \varepsilon^\lambda_\mu \, e^{-ipx}$$

  los números ε^λ_μ han de transformarse como un cuadrivector en el índice μ, con ciertas *ligaduras*, pues hay cuatro componentes del cuadrivector, por sólo dos estados de polarización físicos del fotón. En otras palabras; los vectores de polarización han de ser espaciales y transversales $\varepsilon^0 = \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 0$.

- *Invariancia gauge*

  A continuación explicamos un hecho de la máxima importancia: el desacuerdo entre los números de componentes del campo y estados físicos de partícula indica que la descripción en términos del cuadrivector debe ser *redundante*. Efectivamente, esta redundancia no es otra que la simetría gauge de la teoría de Maxwell: $A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x)$ para una función $\alpha(x)$ arbitraria. La redundancia se fija parcialmente mediante la condición $\partial_\mu A^\mu = 0$, que implica $p^\mu \varepsilon_\mu = 0$, o $\varepsilon^0\, p^0 = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{p}$. Sobre las ecuaciones de movimiento $p^2 = 0$, aún podemos transformar $\varepsilon_\mu \to \varepsilon_\mu + C\, p_\mu$, lo que nos permite fijar $\varepsilon^0 = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{p} = 0$.

- *Invariancia gauge y acciones covariantes*

  La invariancia gauge representa la tensión entre la localidad (utilización de variables tipo campo) y la invariancia Poincaré, en el caso de representaciones pequeñas (el fotón tiene sólo dos polarizaciones físicas de helicidad).

  Una forma de exponer esta tensión con claridad es la siguiente. Dado que el fotón tiene una relación de dispersión $E^2 = \mathbf{p}^2$, es como un par de grados de libertad tipo Klein–Gordon con operador cinético $-\partial^2$ en la acción. Sin embargo, el intento *naïve*

$$-\int_X A_\mu \, \partial^2 \, A^\mu$$

  no es viable, dado que las componentes temporales A^0 tienen energía cinética negativa. Sin embargo, podemos proyectar el campo A_μ sobre componentes transversales invariantes gauge,

$$(A_P)_\mu = P_\mu^{\ \nu}\, A_\nu \; , \qquad P_\mu^{\ \nu} = \delta^\nu_\mu - \frac{\partial_\mu\, \partial^\nu}{\partial^2}$$

[2] Notación:

$$\int dt\, d\mathbf{x} = \int d^4x = \int_X \; , \qquad \int d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{X}}$$

Este proyector se caracteriza por que

$$P\left(A_\mu + \partial_\mu \alpha\right) = P\left(A_\mu\right)\ , \qquad \partial^\mu\, P\left(A_\mu\right) = 0$$

Entonces, es fácil ver que la acción de Klein–Gordon para el campo proyectado no es otra que la acción de Maxwell,

$$-\frac{1}{2}\int_X \left(A_P\right)_\mu\, \partial^2\, \left(A_P\right)^\mu = -\frac{1}{4}\int_X F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu}$$

- *Localización de las medidas y teoría de propagadores*

  Continuación natural del ejercicio anterior sobre la interpretación monoparticular de la ecuación de Klein–Gordon. Se introduce el propagador de Feynman,

$$\left\langle \mathrm{VAC} \left| \mathrm{T}\left[\widehat{\phi}(x)\widehat{\phi}(y)\right] \right| \mathrm{VAC} \right\rangle = \mathrm{lím}_{\epsilon\to 0} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)}\, \frac{i}{p^2 - m^2 + i\,\epsilon},$$

  y su interpretación heurística, así como las diferencias con los propagadores avanzados y retardados habituales en electrodinámica. Se resuelve así la paradoja de las energías negativas en la interpretación de la ecuación de Klein–Gordon.

1 Elementos de cuantización de campos

Según el capítulo anterior, una teoría cuántica de partículas relativistas es equivalente a una teoría cuántica de campos. En el presente capítulo invertimos el orden de la presentación y, partiendo de un campo clásico, efectuamos su cuantización canónica para obtener finalmente una descripción del espacio de Hilbert en términos de partículas relativistas, en el sentido del capítulo anterior. De esta forma completamos la presentación heurística de los fundamentos de la TCC. En lo sucesivo, nuestro punto de partida será siempre una teoría clásica de campos a la cual aplicamos un procedimiento de cuantización.

"Cuantizar" significa especificar, al menos en un sentido formal, el espacio de Hilbert de estados físicos, junto con los operadores hermíticos (observables) y unitarios (simetrías) que actúan sobre él. Tal especificación de los estados físicos se realiza sobre una hipersuperficie de tiempo constante, lo que a su vez conlleva una elección explícita de una coordenada temporal, asociada a un hamiltoniano particular. De aquí que todo procedimiento canónico necesariamente oscurece las propiedades de covariancia Poincaré de la teoría de campos.

En la práctica, nos vemos obligados a recurrir a aproximaciones –tales como la teoría de perturbaciones en un acoplamiento– en nuestra descripción de la dinámica. Desde los primeros tiempos de la TCC, la experiencia indica que la implementación de los métodos perturbativos se beneficia enormemente de mantener la covariancia Lorentz explícita en el cálculo. Por esta razón una representación de las cantidades físicas de interés en términos covariantes (al menos en un sentido formal) es muy deseable. Tal es la principal ventaja de la representación funcional de Feynman.

Los métodos funcionales –integrales de caminos– son formalmente covariantes y muy transparentes desde el punto de vista intuitivo. En realidad, suelen conferir una sensación de falsa simplicidad sobre la estructura de la TCC. Por otra parte, la unitariedad no es manifiesta en este formalismo. Así que tenemos una dicotomía de carácter pedagógico que está basada en una dicotomía fundamental en la propia estructura de la TCC.

Desde un punto de vista conceptual, resaltaremos el método canónico como más fundamental, mientras que el método funcional se verá en este curso como una representación de utilidad práctica en la obtención de teoremas generales sobre amplitudes, y sobre todo, en la derivación de las reglas de Feynman para los cálculos perturbativos.

1.1 Campo escalar

El campo escalar real del capítulo anterior ofrece el punto de partida técnicamente más simple: una teoría de *mesones* sin espín.

1.1.1 Cuantización canónica

Una teoría de campos tiene grados de libertad localizados en cada punto del espacio-tiempo, interaccionando a su vez localmente. Formalmente, es el límite continuo de un sistema con coordenadas $q_i(t)$ y momentos $p_i(t)$, con hamiltoniano $H(q_i, p_i)$. Las "coordenadas" se identifican con los valores del campo $q_i(t) \to \phi_{\mathbf{x}}(t) \equiv \phi(\mathbf{x}, t) \equiv \phi(x)$ y los "momentos", $p_i(t) \to \Pi_{\mathbf{x}}(t) \equiv \Pi(\mathbf{x}, t) \equiv \Pi(x) = \partial_t \, \phi_{\mathbf{x}}(t)$. Esto deja claro que las coordenadas del espacio $\mathbf{x}$ no son más que simples índices de las variables dinámicas. Para resaltar esto usamos la notación $\phi(\mathbf{x}) \equiv \phi_{\mathbf{x}}$. Al tratarse de índices continuos, las sumas se transforman en integrales $\sum_i \to \int_{\mathbf{X}} = \int d\mathbf{x}$, y las deltas de Kronecker en deltas de Dirac según la regla $\delta_{ij} \to \delta_{\mathbf{xy}} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$. Este procedimiento no está exento de ambigüedades, ya que puede conducir a divergencias, por otra parte perfectamente naturales en una teoría con un número infinito de grados de libertad. Por lo tanto, la idea de mantener los índices espaciales como discretos puede servir para "regularizar" expresiones con un estatus matemático riguroso en el continuo.

De hecho, desde el punto de vista físico, resulta atractiva la idea de una longitud mínima, y un modelo en el que sustituimos el continuo Minkowskiano por una "red" discreta constituye hoy por hoy la definición no perturbativa más general de TCC. Aunque la red rompe la simetría Poincaré, esperamos que ésta se recupere a distancias grandes comparadas con la escala de "granulación", de la misma manera que las ecuaciones de la electrodinámica de medios dieléctricos son macroscópicamente isótropas, aunque la estructura atómica microscópica no lo es. Las condiciones y procedimientos concretos que nos permiten tomar un "límite continuo" con invariancia Poincaré constituyen el objeto de la teoría de renormalización, que abordamos en detalle más adelante. Por el momento, utilizaremos la "ficción de la red" desde un punto de vista puramente heurístico, para basarse en intuición conocida de MC y para "regularizar" expresiones formalmente escritas en notación continua.

- *Estructura canónica clásica*

  Partiendo de la acción con un potencial de interacción general

$$I = \int_X \left(\tfrac{1}{2} \, |\partial\phi|^2 - \mathcal{V}(\phi) \right)$$

  invariante Lorentz, identificamos el formalismo canónico clásico en términos del hamiltoniano

$$H(\phi, \Pi) = \int_{\mathbf{X}} \left(\tfrac{1}{2} \, \Pi_{\mathbf{x}}^2 + \tfrac{1}{2} \, |\partial_{\mathbf{x}}\phi|^2 + \mathcal{V}(\phi_{\mathbf{x}}) \right)$$

- *Cuantización en representación de Schrödinger*

  La cuantización canónica procede mediante la sustitución de las "coordenadas" $\phi_{\mathbf{x}}$ y "momentos" $\Pi_{\mathbf{x}}$ clásicos por operadores que satisfacen relaciones canónicas de conmutación a tiempo fijo $t = 0$:

$$\left[\widehat{\phi}_{\mathbf{x}}, \widehat{\Pi}_{\mathbf{y}} \right] = i \, \delta_{\mathbf{xy}}$$

  Una representación pedagógicamente interesante de estas relaciones de conmutación es la habitual de Schrödinger, basada en los autoestados del operador de campo:

$$\widehat{\phi}_{\mathbf{x}} \, |\phi_{\mathbf{x}}\rangle = \phi_{\mathbf{x}} \, |\phi_{\mathbf{x}}\rangle.$$

  Es importante recordar que $\widehat{\phi}(\mathbf{x}) = \widehat{\phi}_{\mathbf{x}}$ es un operador, análogo al operador de posición en la MC no relativista, y que no tiene nada que ver con una función de onda. En particular, $|\phi(x)|^2$ no se interpreta como la probabilidad de nada. En esta base los estados de la teoría de campos $|\Psi\rangle$, aparecen como "funcionales"

$$\Psi(\phi) \equiv \Psi[\phi_{\mathbf{x}}] \equiv \langle \phi_{\mathbf{x}} | \Psi \rangle \, ,$$

  y el momento conjugado actúa como una derivada funcional

$$\widehat{\Pi}_{\mathbf{x}} = -i \frac{\delta}{\delta \phi_{\mathbf{x}}},$$

representación ésta muy útil en las discusiones sobre integrales de caminos y cuantización de teorías gauge no abelianas.

De aquí se siguen las relaciones de completitud formales:

$$\hat{\mathbf{1}} = \int \prod_{\mathbf{x}} d\phi_{\mathbf{x}} \, |\phi_{\mathbf{x}}\rangle\langle\phi_{\mathbf{x}}| = \int \prod_{\mathbf{x}} d\Pi_{\mathbf{x}} \, |\Pi_{\mathbf{x}}\rangle\langle\Pi_{\mathbf{x}}|$$

- *Diagonalización del hamiltoniano en el caso libre*

  El problema de diagonalizar el hamiltoniano de la TCC (ecuación de Schrödinger independiente del tiempo), equivale a resolver la ecuación funcional formal

  $$\left\langle \phi \middle| \widehat{H} \middle| \Psi \right\rangle = \left[\int_{\mathbf{X}} \left(-\frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta\phi_{\mathbf{x}}^2} + (\partial_{\mathbf{x}}\phi)^2 + \mathcal{V}(\phi_{\mathbf{x}}) \right) \right] \Psi(\phi) = E \, \Psi(\phi)$$

  que podemos intentar programar en un ordenador. En la práctica, estos métodos no son muy adecuados por "costosos". Es más fácil y efectivo programar ordenadores para hacer cálculos de otros observables que consideraremos más tarde (ciertos elementos de matriz o amplitudes de transición en el estado fundamental o $|\text{VAC}\rangle$).

  Sin embargo, dado que conocemos por construcción el espectro del hamiltoniano en el caso libre (sabemos que es un espacio de Fock), debería ser posible resolver la ecuación funcional para el caso en que

  $$\mathcal{V}_{\text{libre}} = \mathcal{V}_0 + \tfrac{1}{2} \, m^2 \phi^2$$

  Por transformación de Fourier, la ecuación funcional se desacopla en un conjunto de osciladores por cada valor del momento. El resultado se pueden derivar a partir de la forma de las funciones de ondas de un oscilador (polinomios de Hermite). La función de ondas del vacío es

  $$\Psi_{\text{VAC}}(\phi) = N \, \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \phi_{\mathbf{x}} \, \Omega_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \, \phi_{\mathbf{y}} \right)$$

  donde N es una constante de normalización y Ω es un *kernel* dado por

  $$\Omega_{\mathbf{x}\mathbf{y}} = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \, e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \, \omega_{\mathbf{p}}$$

  Se verifica directamente que un estado genérico de la teoría de campos no es más que un conjunto de partículas relativistas (equivalencia entre las representaciones de Schrödinger y de Fock), mediante la aplicación del operador de creación de una partícula en un estado de momento $\mathbf{p}$, que en representación de Schrödinger se escribe:

  $$\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{p}} = \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} \int_{\mathbf{x}} e^{i\,\mathbf{p}\,\mathbf{x}} \left(\phi_{\mathbf{x}} - \frac{1}{\omega_{\mathbf{p}}} \frac{\delta}{\delta\phi_{\mathbf{x}}} \right)$$

  De esta forma generamos los "polinomios de Hermite funcionales" que representan las funciones de ondas de los estados de partícula del campo.

  La energía del vacío es divergente

  $$E_{\text{VAC}} = \text{Volumen} \times \left(\mathcal{V}_0 + \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \, \frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2} \right)$$

  salvo que la constante aditiva en el hamiltoniano se ajuste para cancelar la divergencia. He aquí el primer ejemplo de renormalización en TCC.

- *Campo escalar complejo*

  La estructura desarrollada para el campo de mesones reales se puede repetir, *mutatis mutandis*, para un campo asociado a mesones complejos. Se encuentra entonces una duplicación de los grados de libertad. Es decir, hay dos tipos de partículas, como corresponde al hecho de que un campo complejo ϕ es equivalente a un par $\text{Re}(\phi)$, $\text{Im}(\phi)$. El número cuántico que distingue entre ambas especies de partícula es una carga conservada.

1.1.2 Simetrías

En esta sección consideramos la acción de simetrías clásicas sobre el espacio de Hilbert de estados físicos.

- *Corrientes y cargas*

  Comenzamos recordando teorema de Noether que asegura la existencia de una corriente conservada, $\partial_\mu J^\mu_{\rm N} = 0$ en cualquier teoría clásica de campos con simetría continua $\phi \to \phi + \Delta(\phi)$, de tal forma que se tenga
  $$\int \mathcal{L}(\phi) = \int \mathcal{L}(\phi + \Delta(\phi))$$
  Una fórmula para la corriente de Noether es
  $$J^\mu_{\rm N} = \Delta(\phi)\,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} - \mathcal{K}^\mu$$
  donde $\partial_\mu \mathcal{K}^\mu$ es la divergencia total que permitimos en la transformación del lagrangiano.

- *Noether en el espacio de Hilbert*

  Introducimos el importante concepto de las cargas Noether como generadores de simetrías en TCC, para lo cual resulta muy adecuada la representación de Schrödinger de la cuantización canónica. Si
  $$Q = \int_{\mathbf{x}} J^0_{\rm N}$$
  es una carga Noether para una simetría $\phi \to \phi + \Delta(\phi)$, el operador unitario de Wigner asociado a esta simetría es $\widehat{U} = \exp(i\widehat{Q})$, y actúa sobre los funcionales de ondas:
  $$e^{i\widehat{Q}}\,\Psi\left(\phi\right) = \Psi\left(\phi + \Delta(\phi)\right).$$
  Esta acción corresponde a
  $$\widehat{Q} = -i \int_{\mathbf{x}} \Delta(\widehat{\phi}_{\mathbf{x}})\,\frac{\delta}{\delta \phi_{\mathbf{x}}} = \int_{\mathbf{x}} \Delta(\widehat{\phi}_{\mathbf{x}})\,\widehat{\Pi}_{\mathbf{x}},$$
  que está de acuerdo con la determinación clásica de la corriente de Noether (para simplificar la discusión, consideramos el caso $\mathcal{K}^\mu = 0$). Por su parte, ésta satisface la ecuación de conservación como ecuación de movimiento de Heisenberg para el operador:
  $$\partial_\mu \widehat{J}^\mu_{\rm N} = 0,$$
  al menos formalmente. En ocasiones, el límite al continuo interfiere con esta ecuación y ciertas simetrías, llamadas *anómalas*, no se pueden mantener a nivel cuántico.

- *Corrientes y cargas $U(1)$ para el campo escalar complejo*

  Como ejemplo importante, ilustramos la acción de la simetría $U(1) : \phi \to e^{i\alpha}\phi$ sobre el espacio de Hilbert de un campo escalar complejo. Primer contacto con las antipartículas.

1.1.3 Representación funcional

Las amplitudes de transición:
$$\mathcal{A}\left(\Psi_i \to \Psi_f\right) = \left\langle\, \Psi_f(t') \,\left| e^{-i(t'-t)\widehat{H}} \right|\, \Psi_i(t) \,\right\rangle,$$
admiten una representación en forma de integrales funcionales, también denominadas "integrales de caminos", debida a Feynman, que es *formalmente covariante Lorentz.*

Al igual que el caso de la cuantización canónica, el salto de MC a TCC es, formalmente hablando, una cuestión de mera notación. Por ello, recordamos al alumno las integrales funcionales usando los argumentos habituales en MC.

- *Fórmula hamiltoniana básica* ______________________________

  Utilizando repetidamente las relaciones de completitud en una partición fina del intervalo temporal $t - t' = N\epsilon$, se puede escribir una amplitud entre autoestados del campo como

$$\mathcal{A}(\Psi_i \to \Psi_f\,) = \int \mathcal{D}(\phi,\Pi)\;\Psi_f^*(\phi_{t'})\,\Psi_i(\phi_t)\,\exp\left(i\int_t^{t'}\Pi\,\dot\phi - \mathcal{H}(\phi,\Pi)\right)$$

  con una especificación de la medida de integración que depende de los detalles del convenio de orden de operadores, y que es *casi* el producto $\prod d\phi\, d\Pi$ en cada punto (*casi*, porque no es invariante frente a transformaciones canónicas clásicas).

- *Versión lagrangiana* ______________________________

  Para hamiltonianos suficientemente "decentes": $\widehat{\mathcal{H}} = \hat\Pi^2/2 + V(\hat\phi)$, la integral sobre las variables de impulso es gaussiana y se puede hacer explícitamente, dejando una integral sobre el espacio de configuraciones del sistema:

$$\mathcal{A}\,(\Psi_i \to \Psi_f\,) = \int \mathcal{D}\phi\;\Psi_f^*(\phi_{t'})\,\Psi_i(\phi_t)\,\exp\left(i\int_t^{t'}\mathcal{L}(\phi)\right)$$

  con la medida de integración sobre "trayectorias" que unen las configuraciones inicial y final:

$$\mathcal{D}\phi = \mathcal{N}\;\;\mathrm{lím}_{N\to\infty}\prod_{t,\mathbf{x}}\frac{d\phi(t,\mathbf{x})}{\sqrt{2\pi i}},$$

  y $\mathcal{N}$ una constante divergente que se ajusta mediante la condición de normalización del vacío:

$$\langle\,\mathrm{VAC}, t'\,|\,\mathrm{VAC}, t\,\rangle = 1.$$

  La importancia de esta representación radica en que es *formalmente* invariante Poincaré, tanto al nivel de la medida como del integrando (salvo, claro está, la dependencia en estados inicial y final). Esto convierte las integrales funcionales en las herramientas más adecuadas para el estudio de problemas en los que la covariancia Lorentz es importante, tales como la teoría de perturbaciones para el cálculo de elementos de matriz S, o la cuantización covariante de las teorías gauge.

  Conviene tener presente, sin embargo, que a este nivel la invariancia Lorentz es sólo una propiedad formal, mientras no se establezcan los detalles del paso al límite continuo. En general, este límite sólo existe para las llamadas *teorías renormalizables* e involucra un paso al límite simultáneo en los parámetros del lagrangiano.

- *Integrales y orden temporal* ______________________________

  Las fórmulas anteriores valen para elementos de matriz arbitrarios de operadores construidos como funciones (en general multilocales) de las variables canónicas $F(\phi,\Pi)$, con la particularidad de que la operación de ordenación temporal se implementa automáticamente en la integral de caminos. Por ejemplo, para la versión lagrangiana:

$$\left\langle\,\Psi_f(t')\,\middle|\,\mathrm{T}\,\left[\,F(\widehat{\phi})\,\right]\,\middle|\,\Psi_i(t)\,\right\rangle = \int \mathcal{D}\phi\;\Psi_f^*(\phi_{t'})\,\Psi_i(\phi_t)\;F(\phi)\,\exp\left(i\int_t^{t'}\mathcal{L}(\phi)\right)$$

- *Fórmula maestra* ______________________________

  La utilidad práctica de las anteriores expresiones generales es muy limitada, debido a la dependencia en las condiciones de contorno de la integral funcional, que viene caracterizada por las inserciones de las funcionales de ondas de los estados inicial y final. Estas funcionales rara vez se conocen de forma precisa. Existe sin embargo una clase de amplitudes de gran importancia, para las que la integral funcional sobre los campos es *totalmente libre*, de tal forma que la medida se simplifica dramáticamente.

Si estamos interesados en elementos de matriz de operadores arbitrarios *en el estado fundamental*, la proyección sobre la función de ondas del vacío se puede realizar formalmente tomando el límite de tiempo infinito, a lo largo de una trayectoria ligeramente "compleja". Para un funcional multilocal general de los campos $F(\phi)$, se tiene

$$\left\langle \text{VAC}, +\infty \left| \mathrm{T}\left[F(\widehat{\phi})\right] \right| \text{VAC}, -\infty \right\rangle = \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} \int \mathcal{D}\phi\, F(\phi) \exp\left(i \int_{-T}^{T} \mathcal{L}(\phi) \right)$$

donde $\epsilon \to 0$ después de tomar $T \to \infty$ (el origen de la famosa prescripción del $i\epsilon$).

Este teorema es de importancia fundamental, ya que las amplitudes $|\text{VAC}\rangle \to |\text{VAC}\rangle$ contienen esencialmente *toda* la información física de la TCC, desde la matriz S hasta el espectro del hamiltoniano. De hecho, es suficiente considerar el caso particular de las *funciones de Green*, que corresponden a tomar $F(\phi) = \phi(x_1)\cdots\phi(x_n)$ como simples productos de campos elementales. La fórmula funcional puede tomarse como punto de partida en la derivación de las técnicas perturbativas covariantes (reglas de Feynman), y también sirve como punto de partida de las definiciones no perturbativas de la TCC basadas en la simulación numérica en un ordenador.

- *Simetrías e integrales funcionales*

En el formalismo funcional, una gran cantidad de indentidades entre diferentes elementos de matriz se pueden deducir del análogo de las ecuaciones de movimiento, que están basadas en la identidad formal

$$\int \mathcal{D}\phi\, \frac{\delta}{\delta\phi}(\cdots) = 0.$$

Esto conduce a ecuaciones de Schwinger–Dyson generalizadas. Un caso particular de gran interés son las *identidades de Ward*, que se pueden ver como una consecuencia del teorema de Noether aplicado a la integral funcional.

Dada una transformación de simetría $\phi \to \phi' = \phi + \Delta(\phi)$, para la cual $\int \mathcal{L}(\phi) = \int \mathcal{L}(\phi')$, si además $\mathcal{D}\phi = \mathcal{D}\phi'$ (jacobiano unidad) entonces un simple cambio de variables formal en la integral funcional permite derivar una serie de identidades para inserciones de la corriente de Noether, J^μ_{N}, de la forma

$$\partial_\mu \left\langle \mathrm{T}\left[\widehat{J}^\mu_{\mathrm{N}}\, F(\phi)\right]\right\rangle_{\text{VAC}} = -i \left\langle \mathrm{T}\left[\Delta(\phi)\, \frac{\delta}{\delta\phi}\, F(\phi)\right]\right\rangle_{\text{VAC}}$$

que son de gran utilidad en diversos contextos en TCC. Para simetrías anómalas, se tiene que $\mathcal{D}\phi \neq \mathcal{D}\phi'$, pero aún podemos derivar *identidades de Ward anómalas* sin más que tener en cuenta el jacobiano en la integral funcional.

1.2 Campos espinoriales libres

En esta sección introducimos los campos espinoriales, considerando como ejemplos característicos los electrones y los neutrinos. Se enfatizan aspectos conceptuales fundamentales como la inevitabilidad de las antipartículas (una predicción genérica de TCC), la conexion entre espín y estadística cuántica y la reducción del número de grados de libertad para las partículas sin masa.

Evitamos conscientemente la presentación tradicional basada en la búsqueda de una ecuación de ondas para electrones relativistas. Por el contrario, el espinor de Dirac $\psi_\alpha(x)$ se interpreta desde el principio como un operador en el espacio de Hilbert multielectrónico, cuya interpretación física está contenida en la ecuación

$$\left\langle \text{VAC}|\hat{\psi}_\alpha(x)|\mathbf{p},\lambda\right\rangle = u^\lambda_\alpha(\mathbf{p})\, e^{-ip\cdot x}$$

Es decir, el campo de Dirac tiene elementos de matriz no nulos entre el vacío y los estados monoparticulares de momento $\mathbf{p}$ y helicidad λ bien definidos.

La interpretación de $u_\alpha^\lambda(\mathbf{p})$ como una función de ondas (con una interpretación probabilística habitual) requiere ciertas condiciones físicas en el problema que nos permitan despreciar los procesos de creación de pares electrón–positrón (esencialmente, el límite no relativista).

1.2.1 Espinoriada

- *Espinores de Weyl, Dirac y Majorana*

  Los espinores de Weyl se consideran fundamentales, con el espinor de Dirac (la representación $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$), como un objeto derivado del interés en considerar teorías con simetría de paridad. Análogamente, las matrices de Dirac se construyen explícitamente a partir de las matrices de Pauli como elementos básicos.

- *Lagrangianos*

  Los lagrangianos básicos para neutrinos y electrones se derivan sobre las hipótesis de simplicidad y simetría. Las condiciones para tener masas y espinores de Majorana se consideran con detalle.

  La ecuación de Dirac se introduce simplemente como la ecuación de movimiento del campo. Estudiamos el desarrollo en ondas planas de las soluciones, así como la notación habitual para las "funciones de ondas" $u(p), v(p)$ y sus convenios de normalización.

- *Helicidad y quiralidad*

  Obtenemos el importante resultado para espinores de Weyl: el autovalor de γ_5 (quiralidad) está relacionado con la helicidad.

1.2.2 Cuantización canónica

- *Anticonmutadores y estadística fermiónica*

  Primer contacto con la conexión espín–estadística. Tras una discusión de la inconsistencia de las reglas de cuantización habituales en términos de conmutadores se introduce la solución basada en reglas de anticonmutación y se demuestra que se pueden interpretar como un espacio de Fock fermiónico: *los espinores de espín $\frac{1}{2}$ son fermiones.*

  La idea aquí es que el formalismo debe reproducir la solución físicamente razonable. Es decir, un sistema de fermiones libres tiene un hamiltoniano (energía) dado por

  $$\widehat{H} - E_{\text{VAC}} = \sum_s E_s \, \widehat{N}_s$$

  donde $\widehat{N}_s$ es el operador que mide el número de partículas en el estado con números cuánticos $s = (\mathbf{p}_1, \alpha_1; \mathbf{p}_2, \alpha_2; \cdots)$, con energía igual a la suma de las energías $E_s = \sum \omega = \sum_i \sqrt{\mathbf{p}_i^2 + m^2}$ de cada partícula.

- *Antimateria*

  En el proceso, descubrimos el importante concepto de *antimateria*. Dado que el campo de Dirac no es hermítico, $\widehat{\psi}^\dagger \neq \widehat{\psi}$, las partículas que destruye:

  $$\left\langle \text{VAC} \left| \widehat{\psi}(x) \right| \text{fermión} \right\rangle \neq 0$$

  y las que crea del vacío (las antipartículas):

  $$\left\langle \text{antifermión} \left| \widehat{\psi}(x) \right| \text{VAC} \right\rangle \neq 0$$

corresponden a estados *no equivalentes.* Puesto que el campo conjugado $\widehat{\psi}^\dagger$ invierte los papeles de creación y destrucción de materia y antimateria, descubrimos que la antimateria tiene todos los números cuánticos conjugados con respecto a la materia. Ésta es una propiedad general de TCC, que degenera en el caso de campos hermíticos, tales como el campo escalar real $\widehat{\phi}^\dagger = \widehat{\phi}$, o el campo electromagnético $\hat{A}^\dagger_\mu = \hat{A}_\mu$, para los que partículas y antipartículas son idénticas.

- *Anticonmutadores y causalidad*

  Se prueba que la densidad hamiltoniana,

$$\widehat{\mathcal{H}} = -i\,\widehat{\overline{\psi}}\left(\vec{\gamma}\cdot\vec{\partial} + im\right)\widehat{\psi},$$

  o cualquier otro observable par en campos espinoriales, satisface la condicion de microcausalidad:

$$\left[\widehat{\mathcal{H}}(x), \widehat{\mathcal{H}}(y)\right] = 0, \qquad (x-y)^2 < 0.$$

- *Carga eléctrica y positrones*

  Según la discusión previa sobre antimateria, hay dos estados de partícula independientes por cada valor del impulso y el espín. El número cuántico que las distingue es el autovalor de la carga Noether asociada a la simetría $U(1)$ de fase $\psi \to e^{i\alpha}\,\psi$:

$$\widehat{Q} = e\int_{\mathbf{x}} \widehat{\overline{\psi}}\,\gamma^0\,\widehat{\psi} = \mathrm{diag}\,(\ldots, -2e, -e, 0, +e, +2e, \ldots)$$

  Por analogía con el límite no relativista, se puede interpretar ésta como la carga eléctrica. Obtenemos así los *positrones.*

- *Simetrías discretas*

  Se discute la acción de las simetrías discretas básicas, C, P, T, CP, CPT tanto en electrones como en neutrinos.

1.2.3 Métodos funcionales para fermiones

La generalización de los métodos funcionales a los sistemas de fermiones no es inmediata, en el sentido de que no se trata de una mera cuestión de notación.

Las integrales funcionales introducidas previamente para sistemas bosónicos se pueden ver como una “suma sobre todas las configuraciones posibles” del campo clásico. La extensión de esta idea al caso fermiónico presenta elementos nuevos, dado que los operadores fermiónicos no tienen un límite clásico estándar. Debido a las relaciones de anticonmutación $\{\widehat{\psi}, \widehat{\psi}^\dagger\} \sim \hbar$, en el límite clásico formal tenemos “funciones” con propiedades peculiares, pues su cuadrado se anula.

En nuestro caso, introducimos estos objetos desde un punto de vista quizá más fundamental, como la respuesta al problema de construir “funcionales de ondas” de tipo Schrödinger para sistemas de fermiones.

- *Estados “coherentes” fermiónicos*

  La noción de “variable Grassmann”, o anticonmutante, aparece de forma natural como los “autoestados” de operadores de aniquilación fermiónicos. Para el caso más simple de un sistema de dos estados $|1\rangle = \hat{b}^\dagger|0\rangle$ y $\{\hat{b}, \hat{b}^\dagger\} = 1$. Los “autovalores” de b y $b^\dagger$, definidos como

$$\hat{b}\,|\,\theta\,\rangle = \theta\,|\,\theta\,\rangle, \qquad \langle\,\bar{\theta}\,|\,\hat{b}^\dagger = \langle\,\bar{\theta}\,|\,\bar{\theta}$$

  son de tipo Grassmann o anticonmutantes: $\theta^2 = \bar{\theta}^2 = \{\theta, \bar{\theta}\} = 0$. Los autoestados en cuestión son

$$|\,\theta\,\rangle = |0\rangle + \theta\,|1\rangle = e^{\theta\,\hat{b}^\dagger}|0\rangle, \qquad \langle\,\bar{\theta}\,| = \langle 0| + \langle 1|\,\bar{\theta} = \langle 0|\,e^{\hat{b}\,\bar{\theta}}$$

Las integrales con respecto a variables Grassmann, denominadas *integrales de Berezin*, se definen de manera que la relación de completitud se escriba

$$\hat{\mathbf{1}} = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = \int |\,\theta\,\rangle\, d\theta\, \langle\,\theta\,| = \int |\,\bar{\theta}\,\rangle\, d\bar{\theta}\, \langle\,\bar{\theta}|$$

y verifican la propiedad de que la integral de una derivada es cero: $\int d\theta\, \frac{d}{d\theta} = 0$. Es decir,

$$\int d\theta = 0, \qquad \int d\theta\, \theta = -\int \theta\, d\theta = 1.$$

- *Integral funcional fermiónica* ______

  Deducimos las propiedades básicas en la manipulación de las integrales de Berezin. Estas propiedades son esencialmente la invariancia translacional $d(\theta + \theta_0) = d\theta$, y la fórmula del Jacobiano:

  $$(\text{Jacobiano Grassmann}) = (\text{Jacobiano ordinario})^{-1}$$

  Esto nos permite obtener la fórmula básica del determinante de una matriz antisimétrica

  $$\int \prod_i d\theta_i\, e^{\theta_i\, A_{ij}\, \theta_j} = [\det(A)\,]^{1/2}$$

  Utilizando las herramientas introducidas, en concreto la relación de completitud, podemos establecer una fórmula de tipo Feynman para amplitudes entre autoestados del campo fermiónico. Utilizando el hamiltoniano del campo de Dirac, obtenemos así la representación funcional como una integral de caminos de tipo Berezin, pesada con una fase $\exp(iI)$. De nuevo, $I(\bar{\psi}, \psi)$ no es otra que la acción de Dirac. La proyección del vacío se puede implementar de la misma forma que el caso bosónico, y obtenemos

  $$\left\langle \mathrm{T}\left[F\left(\widehat{\psi}, \widehat{\overline{\psi}}\right) \right] \right\rangle_{\mathrm{VAC}} = \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} \int \mathcal{D}\overline{\psi}\, \mathcal{D}\psi\, F\left(\psi, \overline{\psi}\right)\, \exp\left(i \int_{-T}^{T} \overline{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi \right)$$

  donde F representa un funcional multilocal de los campos.

2 Interacciones y teoría de perturbaciones covariante

En el caso de campos libres, la simetría Poincaré es suficiente para diagonalizar el hamiltoniano $\widehat{H}$ y resolver completamente la dinámica de la teoría de campos. En general, esta reducción de la dinámica a pura cinemática sólo es practicable en los llamados "modelos integrables". Por desgracia, las teorías de campos con aplicación fenomenológica en física de partículas no caen dentro de esta categoría, y esquemas aproximados se vuelven absolutamente necesarios. No en vano, la verdadera era de la TCC sólo se inicia históricamente en el momento en que se dispone de técnicas de cálculo versátiles.

Con la excepción de las simulaciones numéricas en ordenadores, la técnica más universal de cálculo en TCC es la teoría de perturbaciones covariante. Si podemos identificar un conjunto de grados de libertad que en buena aproximación se comportan como partículas *libres* (caracterizadas por tanto por un conjunto de representaciones del grupo de Poincaré con ciertas masas y espines), que diagonalizan un hamiltoniano libre $\widehat{H}_0$, sus interacciones se pueden calcular sistemáticamente en una serie de potencias en la interacción $\widehat{V} = \widehat{H} - \widehat{H}_0$. En la práctica, debemos calcular cualquier amplitud como suma de diagramas de Feynman.

La aplicabilidad de los diagramas de Feynman no se reduce a teorías con grados de libertad elementales débilmente acoplados. En problemas mucho más complejos, tales que los constituyentes elementales interactúan fuertemente, aún podemos con frecuencia identificar estados "compuestos" que interaccionan débilmente, principalmente mediante interacciones residuales. En principio, si podemos calcular o medir el espectro de partículas compuestas, sus interacciones residuales se pueden tratar mediante diagramas de Feynman asociados a un "lagrangiano efectivo" para los estados compuestos. En otras palabras; los diagramas de Feynman son una técnica de gran universalidad, siempre asociados de una u otra forma a aquellos sistemas de TCC que entendemos a nivel cuantitativo.

2.1 Diagramas de Feynman

En esta sección discutimos las reglas más eficientes de manipulación de la teoría de perturbaciones. Dado que trataremos aspectos bastante genéricos del formalismo, utilizaremos una notación compacta en la que los campos se denotan por $\Phi_\alpha(x)$, donde α es un índice que distingue los tipos de campos en cuestión y todos los números cuánticos, incluyendo el espín, la carga, etc. Con frecuencia omitiremos también este índice, así como el espacio-temporal propiamente dicho. Conviene pensar en Φ como un "macrovector" que contiene todas las componentes de los campos en todos los puntos del espacio-tiempo. Los operadores lineales que actúan sobre estos campos, tales como el que aparece en las ecuaciones de movimiento libres:

$$K \cdot \widehat{\Phi} = 0$$

se convierten a su vez en "macromatrices". Así, en notación compacta, escribiremos la densidad lagrangiana como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \mathcal{V} = \tfrac{1}{2}\ \Phi \cdot K \cdot \Phi - \mathcal{V}(\Phi)$$

Por ejemplo, para el campo escalar $K = -\partial^2 - m^2$, mientras que $K = i\not{\partial} - m$ para el campo de Dirac.

Comenzaremos con el desarrollo de las reglas de cálculo para funciones de Green.

$$G(x_1 \dots x_n) = \left\langle \mathrm{T} \left[\widehat{\Phi}(x_1) \dots \widehat{\Phi}(x_n) \right] \right\rangle_{\mathrm{VAC}}$$

Aunque las funciones de Green son objetos aún un tanto abstractos, su importancia central en TCC justifica la presentación de las reglas de Feynman para este conjunto particular de elementos de matriz. A su vez, encontramos una justificación puramente metodológica en la lógica de la presentación de la TCC en este curso, en el que hemos optado por derivar la teoría de perturbaciones en forma funcional, en lugar del método más tradicional basado en la fórmula de Dyson y el teorema de Wick. Dado que las funciones de Green son los objetos naturales en el formalismo funcional, es lógico presentar las técnicas perturbativas adaptadas al cálculo de éstas. La importancia de las funciones de Green como objetos de interés primario, frente al énfasis tradicional en la matriz S, es una de las características de la TCC moderna. A partir de las funciones de Green podemos obtener no sólo la propia matriz S, sino también el espectro de la teoría, así como construcciones de importancia física directa como las nociones de acción efectiva, constantes de acoplamiento efectivas, teoremas sobre reglas de suma, etc.

Sin embargo, quizá la más importante de las ventajas de trabajar con funciones de Green como objetos primarios radica en su generalidad, más allá de las aproximaciones puramente perturbativas. En todas las formulaciones no perturbativas de la TCC, especialmente en las simulaciones numéricas "en la red", las funciones de Green son los objetos de construcción más inmediata y natural. Proporcionan pues el punto de partida para la extracción de gran cantidad de propiedades de interpretación física inmediata.

2.1.1 Función de partición

Introducimos un objeto formal que permite sistematizar la manipulación de las funciones de Green de manera económica desde el punto de vista de la notación.

- *Funcional generatriz*

  La función de partición, como funcional de una fuente externa $J(x)$ se define como:

$$\mathcal{Z}(J) = \langle\ \mathrm{T} \exp\left(i \int J \cdot \widehat{\Phi} \right) \rangle_{\mathrm{VAC}}$$

  Como cualquier otro elemento de matriz en el vacío, admite una representación funcional:

$$\mathcal{Z}(J) = \int \mathcal{D}\Phi \exp\left(i \int (\mathcal{L}(\Phi) + J \cdot \Phi) \right)$$

Con objeto de dar entidad física a este objeto, y de justificar su denominación, consideramos aquí la analogía con la Mecánica Estadística bajo continuación analítica a métrica euclídea $t = -i\,\tau$ (rotación de Wick).

La utilidad de la función de partición radica en la posibilidad de recuperar cualquier función de Green sin más que tomar un término en el desarrollo en potencias de la fuente J, hecho éste que explica la denominación alternativa como "funcional generatriz". En otras palabras; una inserción de $\widehat{\Phi}$ en la función de Green es equivalente a tomar una derivada funcional con respecto a $J(x)$. De aquí obtenemos una fórmula que relaciona $\mathcal{Z}(J)$ con la función de partición en la teoría *libre*, $\mathcal{Z}_0(J)$, que se obtiene reemplazando $\mathcal{L}$ por $\mathcal{L}_0$:

$$\mathcal{Z}(J) = \exp\left[-i\int \mathcal{V}\left(-i\frac{\delta}{\delta J}\right)\right]\ \mathcal{Z}_0(J)$$

Una relación formal que es la base de nuestra teoría de perturbaciones, pues disponemos de un método iterativo de cálculo para el desarrollo en potencias de la interacción $\mathcal{V}(x)$, siempre que conozcamos la forma explícita de $\mathcal{Z}_0(J)$. Esta fórmula existe, pues $\mathcal{Z}_0(J)$ es una integral funcional gaussiana.

- *Integrales gaussianas*

Se puede decir que "resolver" la TCC es equivalente a calcular explícitamente el funcional $\mathcal{Z}(J)$. En la práctica, las únicas integrales funcionales que sabemos calcular analíticamente son las gaussianas, que corresponden a tomar campos libres $V = 0$, y se obtienen en un paso al límite formal a partir de integrales de dimensión finita:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\tfrac{1}{2}\,a\,x^2 + b\,x\right) = \frac{e^{-b^2/2a}}{\sqrt{a}}$$

En otras palabras; el paso al límite continuo se puede justificar rigurosamente en este caso, a partir de la integral correspondiente sobre "matrices".

Las propiedades básicas que necesitamos para evaluar la anterior integral elemental son la invariancia translacional de la medida y una fórmula para las integrales gaussianas puras. Ambas propiedades están formalmente garantizadas por las integrales funcionales bosónicas y fermiónicas consideradas antes. La fórmula maestra es entonces:

$$\mathcal{Z}_0(J) = \int \mathcal{D}\Phi\ e^{i\int\left(\frac{1}{2}\,\Phi\cdot K\cdot\Phi + J\cdot\Phi\right)} = \mathcal{Z}_0(J=0)\,\exp\left(-\frac{i}{2}\int\ J\cdot K^{-1}\cdot J\right)$$

El factor $\mathcal{Z}_0(0)$ es una integral puramente gaussiana que da lugar a un "determinante funcional":

$$\mathcal{Z}_0(0) = [\,\det{(K)}\,]^{\sigma/2}$$

con $\sigma = -1$ para campos bosónicos y $\sigma = +1$ para campos fermiónicos. En realidad, estos determinantes no tienen importancia física, ya que se absorben en la definición de la medida $\mathcal{D}\Phi$, que asegura la normalización correcta del vacío.

- *Propagadores*

El inverso del "operador cinético" K, o "propagador", es igual a la función de Green de dos campos libres. La prescripción $i\,\epsilon$ en la definición de la función de Green se traduce en una prescripción para definir esta inversión, que resulta ser no trivial, ya que $K = 0$ tiene como soluciones los campos de partículas libres sobre la capa de masas. El operador inverso se define como

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{i}{K + i\,\epsilon} \equiv \frac{i}{K + i\,0} = \left\langle \text{VAC}, -\infty \,\middle|\, \mathrm{T}\,\left[\widehat{\Phi}\,\widehat{\Phi}\right] \,\middle|\, \text{VAC}, +\infty \right\rangle_{V=0}.$$

De hecho, esta definición del propagador es todo el efecto de la "prescripción $i\,\epsilon$" en teoría de perturbaciones.

Como ilustración de esta discusión general consideraremos los ejemplos del campo escalar y el fermión de Dirac.

2.1.2 Diagramática

- *El algoritmo combinatorio*

  Los resultados anteriores nos permiten escribir una fórmula cerrada para la función de partición:

$$\frac{\mathcal{Z}(J)}{\mathcal{Z}_0(J)} = \exp\left[-i\int \mathcal{V}\left(-i\frac{\delta}{\delta J}\right)\right]\ \exp\left(-\frac{1}{2}\int J\cdot\frac{i}{K}\cdot J\right)$$

  De aquí, desarrollando en potencias de $\mathcal{V}$, obtenemos una serie de reglas combinatorias para calcular $\mathcal{Z}(J)$. Cada monomio polinómico en la interacción de la forma

$$\mathcal{V}^{(n)} = \frac{g_n}{n!}(\Phi)^n$$

  da lugar a un

$$\text{vértice} = -i\,g_n$$

  con n patas, que se unen a otros vértices mediante inserciones del

$$\text{propagador} = \frac{i}{K + i\,0}$$

  La dependencia en la fuente es vía la contribución de las

$$\text{patas externas} = +i\,J(x).$$

  El resultado aún ha de dividirse por el cardinal del grupo de simetría discreta del diagrama, y los fermiones contribuyen con signos adicionales debido a la estadística fermiónica.

- *$\hbar$ es un contador de loops*

  Reintroducimos $\hbar$. Tarea fácil, pues aparece homogéneamente como un prefactor en la acción y se puede determinar por análisis dimensional (salvo sutilezas fermiónicas). En el desarrollo de Feynman, la potencia de $\hbar$ es el número de *loops*. Es decir, el desarrollo en *loops* es el desarrollo semiclásico (WKB) en TCC.

- *Topología*

  En la clasificación de la topología de los diagramas, la observación básica es que la "energía libre"

$$\mathcal{W}(J) = -i\log\mathcal{Z}(J)$$

  es la funcional generatriz de diagramas conexos. Su transformada de Legendre,

$$\Gamma(\varphi) = \mathcal{W}\left(J(\varphi)\right) - \int \varphi\cdot J(\varphi)$$

  con $J(\varphi)$ obtenida mediante la inversión de,

$$\varphi = \frac{\delta\mathcal{W}}{\delta J},$$

  el la funcional generatriz de los diagramas de Feynman "una partícula irreducibles" (1PI), que son los "ladrillos básicos" en la construcción de los diagramas más generales. Esto permite interpretar Γ como una "acción efectiva" en el sentido de que el conjunto de los diagramas conexos se pueden generar como los diagramas sin *loops*, "clásicos" de Γ. Al final del curso consideraremos esta interpretación con más detalle, en el estudio de la energética del estado fundamental.

2.2 Matriz S

Las cantidades físicas más características en sistemas débilmente acoplados son las amplitudes de transición entre estados bien definidos de partículas aproximadamente libres. El conjunto de estas amplitudes se reúne en una matriz abstracta llamada *Matriz S*, cuya definición y método de cálculo perturbativo se estudia en esta sección. La importancia física de la matriz S radica en que la mayor parte de los datos experimentales en TCC se refieren a experimentos de dispersión.

La definición rigurosa de la matriz S –y de la teoría de la dispersión en general– está plagada de sutilezas, no sólo de carácter técnico, sino también fundamental en el caso de la TCC. Nuestro punto de vista en este curso será pragmático, con el objetivo de familiarizar al alumno con las técnicas de cálculo más que afinar su paladar matemático. Aquellas sutilezas que tienen su origen en las particularidades de la física de la TCC se discutirán en diferentes grados de completitud a lo largo del curso. En concreto, en una TCC los estados asintóticos no se pueden definir en general sin atender a la estructura interactiva de la teoría. En otras palabras; las interacciones de la teoría completa determinan los estados "libres" sobre los cuales definimos la dispersión. Por tanto, la idea del método adiabático (la interacción es despreciable sobre las asíntotas pasada y futura), ha de matizarse con cierto cuidado. Este tipo de cuestiones afloran recurrentemente en cualquier discusión de las propiedades infrarrojas de la TCC, incluida la propiedad de *confinamiento*.

En este curso adoptaremos un punto de vista moderno sobre la matriz S, al presentarla a partir de la estructura analítica de las funciones de Green, mediante el teorema de Lehmann, Symanzik y Zimmermann (LSZ). Esta presentación es un poco más abstracta que la habitual en libros de texto (la debida a Dyson, que aquí relegamos a un ejercicio de ampliación), pero tiene la ventaja de ser más general, aplicable a TCCs con estructura infrarroja no trivial, tales como QCD.

2.2.1 Definiciones básicas

- *Estados asintóticos* In, Out

  Se definen heurísticamente los estados asintóticos, y la matriz S como el conjunto de sus amplitudes de transición:
  $$|\mathrm{Out}\rangle = \widehat{S}\,|\mathrm{In}\rangle.$$
  Se obtiene una fórmula intuitiva para $\widehat{S}$:
  $$\widehat{S} = \text{lím}_{t_\pm \to \pm\infty}\, e^{i\,t_+ \widehat{H}_0}\, e^{-i\,(t_+ - t_-)\widehat{H}}\, e^{-i\,t_- \widehat{H}_0}$$
  donde $\widehat{H}_0$ es un hamiltoniano *libre* cuyo espectro esta dado por el espacio de Fock de los estados asintóticos.

2.2.2 Reducción LSZ

Habitualmente, la serie perturbativa se deriva directamente para los elementos de matriz S a partir de la fórmula de Dyson, por medio del teorema de Wick. En este curso, este metodo se relega a un ejercicio de ampliación, y optamos por el punto de vista más moderno, en el que obtenemos la matriz S a partir de la estructura analítica de las funciones de Green, cuyo cálculo perturbativo covariante ya se ha explicado con anterioridad en el curso.

- *Fórmula de reducción*

  Dado que el espacio de Hilbert de estados asintóticos se define como un espacio de Fock libre, el hamiltoniano libre $\widehat{H}_0$ se puede diagonalizar de manera estándar en partículas asociadas a campos libres con diversas masas y espines, que denotaremos colectivamente por $\widehat{\Phi}_\infty(x)$, con amplitudes para crear partículas asintóticas del vacío:
  $$\left\langle \mathrm{VAC}, +\infty \left| \widehat{\Phi}_\infty(x) \right| \mathbf{p}, \alpha \right\rangle = U^\alpha_{\mathbf{p}}\, e^{-i\,p\,x}, \qquad \left\langle \mathbf{q}, \beta \left| \widehat{\Phi}_\infty(y) \right| \mathrm{VAC}, -\infty \right\rangle = V^\beta_{\mathbf{q}}\, e^{i\,q\,y}$$

En general, los campos asintóticos $\widehat{\Phi}_\infty$ no están relacionados de forma sencilla con los campos microscópicos que aparecen en el lagrangiano $\widehat{\Phi}$. Supongamos sin embargo que podemos identificar operadores *locales* $\widehat{\mathcal{O}}(x) = \mathcal{O}[\widehat{\Phi}(x)]$, construidos en a partir de los campos microscópicos, y cuyos números cuánticos son tales que pueden excitar partículas asintóticas a partir del vacío. Sus elementos de matriz entre el vacío y los estados monoparticulares están determinados por invariancia Poincaré, salvo por una constante, que mide la probabilidad relativa de excitación de una única partícula ansintótica:

$$\Big\langle \mathrm{VAC}, +\infty \,\Big|\, \widehat{\mathcal{O}}(x) \,\Big|\, \mathbf{p}, \alpha \Big\rangle = \sqrt{Z_{\mathcal{O}}}\, U^{\alpha}_{\mathbf{p}}\, e^{-i\,p\,x}, \qquad \Big\langle \mathbf{q}, \beta \,\Big|\, \widehat{\mathcal{O}}(y) \,\Big|\, \mathrm{VAC}, -\infty \Big\rangle = \sqrt{Z_{\mathcal{O}}}\, V^{\beta}_{\mathbf{q}}\, e^{i\,q\,y}$$

Entonces, dada la función de Green en espacio de momentos:

$$\widetilde{G}(\dots p_i \dots q_j \dots) = \prod_i \int d^4 x_i\, e^{i p_i\, x_i} \prod_j \int d^4 y_j\, e^{-i q_j\, y_j} \,\Big\langle\, \mathrm{T}\, \Big[\cdots \widehat{\mathcal{O}}_i(x_i) \cdots \widehat{\mathcal{O}}_j(y_j) \cdots \Big] \,\Big\rangle_{\mathrm{VAC}},$$

estudiando su estructura analítica, revelamos un polo múltiple de la forma:

$$\widetilde{G}(\dots p_i \dots q_j \dots)\Big|_{\substack{p_i^2 \to m_i^2 \\ q_j^2 \to m_j^2}} = \prod_i \frac{i\sqrt{Z_i}\, U_i}{p_i^2 - m_i^2} \,\Big\langle \{\mathbf{p}_\alpha\} \,\Big|\, \widehat{S} \,\Big|\, \{\mathbf{q}_\beta\} \Big\rangle \prod_j \frac{i\sqrt{Z_j}\, V_j}{q_j^2 - m_j^2} + \text{partes no conexas}$$

Es decir, las amplitudes de matriz S son residuos de polos múltiples en las patas externas de funciones de Green.

- *Renormalización del campo*

Si las partículas asociadas a los campos del lagrangiano aparecen realmente en estados externos, entonces podemos utilizar las funciones de Green de estos mismos campos para generar la matriz S. La diferencia entre ambos es el coeficiente de normalización $\sqrt{Z}$ (si asumimos normalizaciones estándar para las funciones de ondas U, V):

$$\widehat{\Phi}(t \to \pm\infty) \approx \sqrt{Z_\Phi}\, \widehat{\Phi}_{\pm\infty}$$

la constante Z_Φ se llama en este caso "constante de renormalización de la función de ondas", y es sólo importante en el cálculo de las correcciones subdominantes a la dispersión: en teoría de perturbaciones $Z = 1 + \mathcal{O}(V)$. Sin embargo, conviene dejar claro en esta clase que los campos presentes en el lagrangiano $\widehat{\Phi}$ no están *necesariamente* asociados a partículas que efectivamente vemos en estados asintóticos. El ejemplo característico es QCD, donde la propiedad del *confinamiento* impide a los quarks y los gluones microscópicos aparecer como estados bien definidos en amplitudes de dispersión. Por el contrario, las partículas asintóticas en QCD son los *hadrones*, que ya sólo interactúan residualmente (la física nuclear), y que son estados compuestos de quarks y gluones. En la práctica, se trata de estados ligados muy relativistas, de tal forma que el número de componentes no es una cantidad bien definida, a pesar de que aproximaciones fenomenológicas como el *modelo quark* así lo asumen con cierto éxito quantitativo.

La importancia de la fórmula LSZ radica en que la matriz S para una clase dada de partículas asintóticas se puede extraer de la estructura analítica de las funciones de Green de *cualquier* operador local $\widehat{\mathcal{O}}(x)$ con elementos de matriz no nulos entre el vacío y las partículas de interés. Una aplicación importante de estas consideraciones se estudia en TCC–II (piones y QCD).

- *Fórmula de Dyson y teorema de Wick*

Aquí desarrollamos el método tradicional, debido a Dyson, en el que la serie perturbativa de la matriz S se obtiene *directamente* a partir de la solución formal de la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo. El punto de partida es la fórmula de Dyson para el operador $\widehat{S}$:

$$\widehat{S} = \mathrm{T}\, \exp\left(-i \int d^4 x\, \widehat{\mathcal{V}}(x) \right)$$

donde $\widehat{\mathcal{V}}(x) = \widehat{\mathcal{H}}(x) - \widehat{\mathcal{H}}_0(x)$ es la densidad hamiltoniana de interacción calculada sobre *campos libres*. Es decir, la dependencia temporal es de la forma (imagen de interacción)

$$\widehat{\mathcal{V}}(x) = \mathcal{V}\left(e^{i\,t\,\widehat{H}_0}\,\widehat{\Phi}_{\mathbf{x}}\,e^{-i\,t\,\widehat{H}_0}\right).$$

La aparente violación de covariancia Lorentz introducida por la instrucción de ordenación temporal no es tal para sistemas que satisfacen microcausalidad

$$\left[\widehat{\mathcal{V}}(x), \widehat{\mathcal{V}}(y)\right] = 0, \qquad (x-y)^2 < 0.$$

A continuación, el producto temporal se evalúa formalmente en potencias de V mediante el teorema de Wick, que organiza las manipulaciones de conmutación de creadores/aniquiladores de manera sistemática. Definiendo el orden normal de un operador $: F(\widehat{\Phi}) :$ como la instrucción de colocar los creadores a la izquierda de los aniquiladores, el resultado final para la matriz S es

$$\widehat{S} =: \exp\left(-\int \widehat{\Phi}\,K\,\frac{\delta}{\delta J}\right) \;:\; \mathcal{Z}(J)\Big|_{J=0}$$

es decir, obtenemos el mismo resultado. El teorema de Wick produce directamente la amputación. Esta derivación es menos general, ya que el campo asintótico y el campo microscópico que aparece en el lagrangiano han de coincidir, salvo por la constante de renormalización Z.

- *Unitariedad en diagramas* ________________________________

  El teorema óptico, ya conocido por cursos de mecánica cuántica no relativista, se considera aquí en su versión diagramática. Obtenemos las *reglas de corte* de diagramas de Cutkosky.

3 QED

Comenzamos el estudio de QED, como culminación del curso de TCC–I. Consideraremos tanto cuestiones de principio importantes (como las sutilezas asociadas a la cuantización covariante de los fotones y el papel de la simetría gauge), como los aspectos de cálculo. El objetivo principal es pues la familiarización con los procesos elementales de interacciones entre electrones, positrones, muones y fotones en el dominio relativista. Este tema proporciona un magnífico entrenamiento en el cálculo de diagramas de Feynman en un contexto de interés físico inmediato.

3.1 Cuantización

Los métodos de cuantización canónica no se adaptan bien al sistema de fotones en interacción con electrones y positrones, ya que la simetría gauge electromagnética se traduce en ciertas redundancias en la parametrización covariante en términos del potencial vector A_μ. Para eliminar esas redundancias es necesario efectuar una elección convencional del *gauge* en el que deseamos trabajar. Esto se traduce en un sistema hamiltoniano con *ligaduras*.

La cuantización de sistemas con ligaduras es un tema de gran interés teórico, que sin embargo vamos a relegar por completo a problemas de ampliación. La razón es que se impone un cierto pragmatismo si queremos que el estudiante llegue al final con cierto grado de control práctico sobre el material. Por otra parte, la mayor parte de las aplicaciones de QED utilizan la teoría de perturbaciones en un gauge covariante. Por tanto, lo más práctico es trazar la ruta más corta hacia la obtención de las reglas de Feynman correctas.

Un método de cuantización basado en el formalismo canónico y que conserva un cierto grado de "covariancia" es el llamado de Gupta–Bleuler, en el que trabajamos en principio con estados de norma negativa, que posteriormente se eliminan proyectando sobre el espacio de Hilbert físico, mediante la aplicación de la condición de gauge al nivel de los estados. Este método tiene su interés desde el punto de vista conceptual, pero resulta un tanto engorroso si nuestro objetivo es la obtención de las reglas de Feynman de la manera más sencilla posible. Además, es difícil de generalizar a teorías gauge no abelianas, el objeto del curso TCC–II.

Con la generalización no abeliana en mente, y con la intención de eliminar redundancias innecesarias en la presentación, optamos aquí por la cuantización covariante de QED en el formalismo funcional, donde las ambigüedades debidas a la simetría gauge se resuelven mediante el truco de Fadeev–Popov. Éste es ciertamente el método más popular en los últimos tiempos. Pero su interés pedagógico no radica simplemente en la generalidad del método, sino también en sus virtudes intrínsecas: se trata de un método con una clara interpretación geómetrica que lo vuelve natural, como una generalización de manipulaciones elementales en integrales de dimensión finita. Consideramos por ello que, dados el carácter asequible y la importancia del truco de Fadeev–Popov en la TCC moderna, es preceptivo incluirlo en un curso básico de TCC como éste.

3.1.1 Lagrangiano

Empezamos con una descripción del lagrangiano clásico y de sus simetrías gauge y globales, para luego pasar directamente a la cuantización funcional en teoría de perturbaciones.

- *Interacciones y simetría gauge*

Partiendo del lagrangiano de la electrodinámica clásica para la interacción entre el campo electromagnético $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ y una corriente eléctrica conservada $\partial_\mu j^\mu_{\rm em} = 0$, obtenemos el lagrangiano de QED sin más que añadir el lagrangiano de Dirac para los electrones/positrones e interpretar la corriente electromagnética como la corriente Noether derivada en la sección 2:

$$j^\mu_{\rm em} = e\,\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$$

El resultado es

$$\mathcal{L}_{\rm QED} = \mathcal{L}_{\rm Maxwell} + \mathcal{L}_{\rm Dirac} = -\tfrac{1}{4}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j^\mu_{\rm em}\,A_\mu + \overline{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi = -\tfrac{1}{4}\,|F|^2 + \overline{\psi}(iD\!\!\!\!/ - m)\psi,$$

donde el operador de Dirac se define como $iD\!\!\!\!/ = i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)$. La simetría gauge es un $U(1)$ local, en el que $\psi(x) \to e^{i\alpha(x)}\psi(x)$ a la vez que $A_\mu(x) \to A_\mu(x) - e^{-1}\partial_\mu\alpha(x)$, cuya parte *global*, para $\alpha =$ constante, actúa sólo sobre los fermiones y puede considerarse como un número fermiónico cuantizado (+1 para los electrones, –1 para los positrones). La propiedad geométrica importante del operador de Dirac $iD\!\!\!\!/$ es su *covariancia*

$$D\!\!\!\!/ \to e^{i\alpha(x)}\,D\!\!\!\!/$$

bajo transformaciónes gauge, hecho éste que explica geométricamente el acoplamiento gauge (el llamado acoplamiento mínimo) y admite una generalización al caso no abeliano como se verá en TCC–II.

3.1.2 Formalismo funcional

- *Truco de Fadeev–Popov*

El formalismo funcional está basado en el cálculo de integrales de la forma

$$\int \mathcal{D}A\; e^{iI(A)}$$

con $I(A)$ el funcional de acción invariante gauge. Sin embargo, tales objetos están forzosamente mal definidos, debido a que la invariancia gauge introduce una redundancia en la elección del potencial vector en cada punto del espacio-tiempo. Por tanto, dado que el integrando es invariante, la integral anterior suma un número infinito de copias físicamente equivalentes del campo gauge. Para eliminar esta redundancia, debemos pues dividir la medida de integración por el volumen formal del grupo gauge en cada punto del espacio-tiempo. Es decir, definimos la función de partición como

$$\mathcal{Z}(j) = \frac{1}{|G|}\int \mathcal{D}A \,\exp\left(i\int \left(-\tfrac{1}{4}|F|^2 + j_\mu A^\mu\right)\right)$$

donde G es el grupo de transformaciones gauge $A_\mu(x) \to A_\mu(x) - e^{-1}\partial_\mu \alpha(x)$ en cada punto, y formalmente

$$|G| \sim \prod_x |G_x| \sim \int \prod_x d\alpha(x).$$

Introducimos a continuación el concepto de condición gauge $G(A) = 0$, con objeto de concentrar la integral sobre una "hipersuperficie" que selecciona un representante en cada órbita gauge.

Por generalización directa de una fórmula análoga en integrales de dimensión finita, el truco de Fadeev–Popov se resume en la identidad:

$$1 = \int \mathcal{D}\alpha \;\delta(G(A))\,\det\left(\frac{\delta G(A)}{\delta\alpha}\right)$$

Entonces, el volumen formal del grupo gauge $|G|$ se cancela y las reglas de Feynman se siguen de una integral funcional *libre* sobre A_μ, con inserciones apropiadas de la delta funcional $\delta(G(A))$, y del determinante jacobiano anterior.

Una representación técnicamente útil es la siguiente: tomamos una familia de gauges covariantes $G(A) = \partial_\mu A^\mu - \omega(x) = 0$, dependiendo de $\omega(x)$, una función escalar arbitraria que integramos con un peso gaussiano de anchura ξ, es decir con un factor

$$\int \mathcal{D}\omega \,\exp\left(-i\int \frac{\omega^2}{2\xi}\right)$$

en la integral funcional (que es formalmente independiente de ξ). El resultado es un lagrangiano efectivo

$$\mathcal{L}_{\rm FP} = \mathcal{L}_{\rm QED} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2$$

que produce un propagador fotónico

$$G_{\mu\nu}(p) = \frac{-i}{p^2 + i\,0}\left(\eta_{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)$$

La dependencia en ξ (parte longitudinal) desaparece en el resultado final del cálculo de observables invariantes gauge, como por ejemplo la función de partición como función de una corriente conservada:

$$\mathcal{Z}(j) = \mathcal{Z}(j=0)\,\exp\left(-\frac{i}{2}\int j^\mu\, G_{\mu\nu}\, j^\nu\right)$$

ya que los términos proporcionales a ξ involucran $\partial_\mu j^\mu = 0$. El "gauge de Feynman" es el más habitual en cálculos de QED, que consiste en la elección $\xi = 1$. Otro gauge habitual es el de Landau: $\xi = 0$.

- *Reglas de Feynman*

Ahora podemos escribir las reglas de Feynman para evaluar perturbativamente la integral funcional relevante para el cálculo de amplitudes entre fotones A_μ, y electrones/positrones, $\psi, \overline{\psi}$:

$$\mathcal{Z}(j,\eta,\overline{\eta}) = \frac{1}{|G|}\int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}\overline{\psi}\,\mathcal{D}\psi\,\exp\left(i\int \overline{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \tfrac{1}{4}F^2 + j_\mu A^\mu + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta\right)$$

Las presentamos en espacio de momentos, adaptadas a los cálculos de amplitudes de dispersión.

- *Identidad de Ward–Takahashi*

Introducimos la identidad de Ward–Takahashi como una manipulación formal a nivel de los diagramas, cuya interpretación física consiste en la expresión combinatoria de la invariancia gauge, es decir, la transversalidad de los fotones físicos. Esto permite una disgresión sobre la aparente propagación de estados longitudinales por el propagador de Feynman.

- **Ejercicio de ampliación:***Cuantización de QED en el gauge de Coulomb*

  Un resultado clásico, que aquí hemos sacrificado en aras del pragmatismo. La cuantización en el gauge $\boldsymbol{\partial} \cdot \mathbf{A} = 0$, no covariante, incluyendo el tratamiento de términos de contacto, el papel de las ligaduras en el formalismo hamiltoniano, etc, se presenta como una justificación de la elección pedagógica en este curso.

3.2 Procesos elementales

En esta sección del curso iniciamos la exposición del estudiante a las técnicas concretas en la manipulación de diagramas de Feynman. Para ello, tomamos algunas reacciones elementales de gran importancia física (e histórica) como ejemplos a desarrollar con todo detalle: aniquilación electrón–positrón y dispersión Compton. En el proceso, ilustraremos con ejemplos la simetría de *crossing* y el uso de las variables de Mandelstam.

3.2.1 Preliminares

Comenzamos con una introducción tecnológica. El uso continuado de teoremas de reducción de trazas de productos de gammas hace aconsejable la reunión de estos trucos en una clase formal y una lista de referencia. Asimismo, introducimos el uso de las variables de Mandelstam s, t, u en las colisiones relativistas de dos cuerpos a dos cuerpos, y pasamos revista a las definiciones de sección eficaz y anchura de desintegración a partir de las amplitudes de matriz S. Éstas son tratadas con detalle en la asignatura paralela de Física de Partículas I y II, y por tanto no nos extenderemos demasiado en este punto.

3.2.2 $e^+ e^- \to \mu^+ \mu^-$

Empezamos por la más simple (y una de las más importantes) de las reacciones en QED. La ligereza del electrón comparado con el muón, $m_e \ll m_\mu$ permite aproximar la amplitud como función sólo de m_μ y el acoplamiento electromagnético $\alpha_{\rm em} = e^2/4\pi$.

- *Diagrama y sección eficaz no polarizada*

  Se realiza el cálculo del diagrama con detalle, para luego comentar la dependencia de la sección eficaz en la energía del centro de masas. En particular, en el límite de alta energía, podemos beneficiarnos de las reglas de selección debidas a la conservación aproximada de la helicidad.

- *Aplicación:* $e^+ e^- \to$ hadrones

  Disgresión heurística para obtener una fórmula fenomenológicamente importante:

$$\sigma(e^+e^- \to \text{hadrones}) \to 3 \cdot \left(\sum_i Q_i^2 \right) \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha_{\rm em}^2}{E_{\rm cm}^2}$$

  en el límite $E_{\rm cm} \to \infty$, donde Q_i son las cargas eléctricas de los quarks.

- *Sección eficaz* $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ *polarizada*

  Aquí se ilustra nuevamente el cálculo del mismo proceso atendiendo a las correlaciones entre los espines de las partículas, para luego razonar físicamente la racionalidad de la estructura encontrada, sobre la base del límite ultrarelativista y la conservación de momento angular.

3.2.3 Simetría de cruce

- $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$

  La dispersión de electrones por muones se estudia como ejemplo de diagrama *cruzado* con respecto al anterior. Esto motiva una:

- *Discusión general de la simetría de cruce*

  Una partícula cambia de miembro en una reacción, convirtiéndose en su antipartícula de impulso opuesto.

- **Ejercicio de ampliación:** *Dispersión de Bhabha* $e^+e^- \to e^+e^-$ *y de Møller* $e^-e^- \to e^-e^-$

3.2.4 Dispersión Compton

Éste es otro proceso físico de importancia clásica. Su cálculo completo presenta novedades técnicas interesantes, como el tratamiento de fotones en patas externas.

- *Los dos diagramas y la cinemática básica de* $e^-\gamma \to e^-\gamma$

- *Sumas de polarizaciones fotónicas*

  En el cálculo de la probabilidad de transición aparecen sumas sobre polarizaciones de los fotones. Aquí enunciamos algunas reglas básicas en estas manipulaciones, así como las peculiaridades derivadas de la transversalidad de los fotones físicos (primer encuentro de la *identidad de Ward*).

- *Klein–Nishina*

  Finalmente, calculamos con detalle la sección eficaz diferencial, promediada sobre polarizaciones y espines (fórmula de Klein–Nishina). Recuperamos la dispersión Thomson en el límite de bajas frecuencias. Estudiamos tambien el límite de alta energía, con la ayuda de argumentos dimensionales y de conservación de la helicidad.

- *El proceso cruzado: aniquilación de pares* $e^+e^- \to \gamma\,\gamma$

- **Ejercicio de ampliación:** *Efectos infrarrojos*

  En este ejercicio conducimos al alumno por el bosque de las divergencias infrarojas debidas a fotones de baja frecuencia. Incluye un estudio de Bremsstrahlung.

- **Ejercicio de ampliación:** *Ecuación de Dirac en átomos*

  Se estudian las condiciones para la aproximación monoparticular, la subsiguiente ecuación de Dirac como una ecuación de ondas para estados ligados, y la resultante estructura hiperfina, corrimiento Lamb, etc.

TCC–II

1 Renormalización

Después de la introducción a la estructura general de la cuantización de campos en TCC–I y de estudiar con cierto detalle algunos procesos perturbativos a primer orden, iniciamos en TCC–II el estudio sistemático de las correcciones cuánticas perturbativas; los diagramas de Feynman con *loops*. Se comprueba de inmediato que las contribuciones de los *loops* dan lugar a integrales genéricamente divergentes. El procedimiento para extraer predicciones con sentido físico, dada esta situación de partida, es la teoría de la renormalización.

La renormalización, desde el punto de vista tradicional, tiene su origen en la eliminación de las divergencias en diagramas de Feynman, debidas a estados intermedios de muy alta energía. La teoría se "regulariza" limitando la energía de los estados intermedios, (introduciendo un *cut-off*), y se toma un límite cuidadosamente especificado, en el que el que las constantes de acoplamiento del lagrangiano son funciones del *cut-off* a medida que éste se elimina. Dado que en este límite estamos definiendo el acoplamiento de los grados de libertad de alta energía, es equivalente a especificar el comportamiento de la teoría a distancias muy pequeñas: el límite continuo.

Nos proponemos en este curso introducir dos ideas básicas: En primer lugar, la renormalización es natural desde el punto de vista físico, independientemente de que ésta sea infinita o no. Es decir, existe renormalización de las parámetros del lagrangiano, independientemente de que los diagramas de Feynman presenten divergencias, de la misma manera que la constante dieléctrica que aparece en las ecuaciones de Maxwell se ve renormalizada en un medio material o, por añadir otra analogía especialmente precisa, la propagación de un electrón en un sólido está caracterizada por una "masa efectiva" que tiene en cuenta la interacción del electrón con los iones de la red. Así pues, desde el punto de vista físico, la renormalización se origina en la necesidad de definir masas y cargas efectivas, como consecuencia de la influencia de las fluctuaciones cuánticas en la propagación de partículas asociadas a los campos de interés.

La segunda idea básica, popularizada por Wilson, es la interpretación física del *cut-off*. Lejos de representar un objeto vergonzante a eliminar lo más rápidamente posible, el *cut-off* determina el dominio de validez del lagrangiano que escribirmos para definir nuestra TCC. De hecho, todas las TCC son en principio teorías efectivas, con una validez limitada por una escala, el *cut-off* Λ, que marca la transición a un conjunto diferente de grados de libertad. El ejemplo característico es la descripción de las interacciones débiles basada en la teoría de Fermi, junto con QED. A energías del orden del *cut-off* ~ 100 GeV, aparecen nuevos grados de libertad: los bosones vectoriales $W^{\pm}, Z^0$, y todo un nuevo grupo gauge $SU(2) \times U(1)$. Nuevos campos que han de incluirse en un nuevo lagrangiano con objeto de explorar la física a energías superiores 100 GeV.

Esta idea de los lagrangianos de TCC como descripciones efectivas de grandes distancias, de tipo "hidrodinámico", se ha impuesto en el último cuarto de siglo como la interpretación correcta de la TCC. La gran contribución de Wilson radica en su análisis sistemático, mediante el concepto del *grupo de renormalización*, de la influencia de grados de libertad de cortas distancias sobre la física a escalas mucho mayores. Existe una propiedad fundamental de "desacoplamiento", que nos permite describir con éxito la física a una escala dada de energías, aún cuando ignoramos los detalles del lagrangiano microscópico a escalas, digamos del orden de la masa de Planck $\sim 10^{19}$ GeV. La influencia de los grados de libertad de muy altas energías sólo se deja sentir a grandes distancias como una "renormalización" de las masas y constantes de acoplamiento. Desde este punto de vista, lo que tradicionalmente se consideran TCC de tipo *renormalizable*, son aquellas que conservan interacciones efectivas finitas a distancias arbitrariamente grandes comparadas con la escala fundamental del *cut-off*.

Sin embargo, la mala prensa que históricamente han soportado las teorías no renormalizables se nos antoja hoy día un tanto desproporcionada, puesto que incluso las teorías renormalizables como el Modelo Estándar pueden ser vistas como simples descripciones efectivas, válidas hasta una cierta escala de energías a determinar experimentalmente. En este sentido, el efecto de términos en el lagrangiano que vuelven la teoría no renormalizable –los operadores de dimensión alta– se puede reconocer como evidencia indirecta de nueva física incluso antes de que ésta sea descubierta directamente en acelaradores, mediante la producción de nuevas partículas, de la misma manera que el mal comportamiento de la teoría de Fermi en torno a los 100 GeV se podía tomar como evidencia de nueva física en esa escala.

Gran parte de la jerga actual en física de altas energías está inspirada en esta nueva interpretación de las TCC como una sucesión de teorías efectivas en una suerte de "matroshka", siempre que la simetría Poincaré no resulte explícitamente violada a una escala determinada. En otras palabras; la física de las TCC ha de organizarse en términos de escalas de energía, en vez del punto de vista tradicional basado en la jerarquía proporcionada por los diagramas de Feynman (las potencias de la constante de acoplamiento y la serie semiclásica en potencias de $\hbar$).

Incluyendo una sección con abundante discusión heurística de estos conceptos, así como una presentación de los resultados tradicionales con un lenguaje más moderno, pretendemos equipar al alumno con los elementos del lenguaje moderno en TCC.

1.1 Eliminación de divergencias

Aquí reunimos el conjunto de resultados tradicionales sobre renormalización en teoría de perturbaciones. Aunque la discusión heurística será genérica, los ejemplos de cálculos concretos se presentan sobre la TCC de un escalar con potencial cuártico como modelo, y nos mantenemos en la aproximación de un sólo *loop*. Esto nos permite obviar, en primera aproximación, tanto la cuestión de las "divergencias solapantes" como las sutilezas derivadas de la presencia de partículas no masivas en representaciones "pequeñas" de espín, asociadas a simetrías quirales o de gauge. Este tipo de cuestiones se tratan en una sección especialmente dedicada a la renormalización en detalle de QED a un *loop*.

1.1.1 Folklore

En esta sección iniciamos la exposición a partir del ejemplo más sencillo: la divergencia cuadrática a la masa de un escalar. Este ejemplo es de gran importancia física, pues se puede considerar la base del "problema de las jerarquías", al menos en una de sus manifestaciones más características: la dificultad de mantener jerarquías de masas en presencia de escalares. El estilo es heurístico, basado en argumentos y estimaciones dimensionales.

El objetivo de esta discusión es poner de manifiesto de la forma más elemental posible que la relación entre los parámetros del lagrangiano y cantidades físicas –masas y acoplamientos– es indirecta, y contiene contribuciones de las fluctuaciones cuánticas del campo.

- *Masa efectiva*

  Se considera la corrección a un *loop* a la masa, definida como el polo del propagador, de un escalar con interacción cuártica. Esto nos lleva de forma natural a la suma geométrica de los diagramas encadenados de la autoenergía:

  $$-i\,\Sigma(p) = \langle\widehat{\phi}(-p)\,\widehat{\phi}(p)\rangle_{\substack{\text{1PI}\\ \text{amputada}}}$$

  para obtener un propagador

  $$\frac{i}{p^2 - m_\Lambda^2 - \Sigma_\Lambda(p^2, m_\Lambda^2, \lambda_\Lambda)}$$

  donde Λ es el *cut-off*, la máxima energía de los estados mesónicos que se propagan en el *loop*. Según lo dicho antes, representan una escala física a partir de la cual la descripción en términos del escalar $\phi_\Lambda(x)$ deja de ser adecuada. Está asociado a un "espaciado de red" efectivo de orden $a \sim \Lambda^{-1}$. La masa efectiva se define pues como la que satisface la ecuación que determina el polo:

  $$m_{\text{eff}}^2 = m_\Lambda^2 + \Sigma_\Lambda(p^2 = m_{\text{eff}}^2)$$

  A primer orden en λ_Λ, y en el régimen $p, m_\Lambda \ll \Lambda$, el diagrama correspondiente se comporta como

  $$\Sigma_\Lambda \sim \lambda_\Lambda \int^\Lambda \frac{d^4k}{k^2} \sim \lambda_\Lambda\,\Lambda^2$$

Por tanto, $m_{\text{eff}}^2 \sim m_\Lambda^2 + \lambda_\Lambda \Lambda^2$. En otras palabras; a menos que $m_\Lambda \sim \Lambda$ desde el principio, la masa efectiva del mesón está dominada por la corrección cuántica y es muy grande, de orden Λ. De hecho, es difícil conseguir un escalar *ligero*, $m_{\text{eff}} \ll \Lambda$ en comparación con el *cut-off*, a menos que *ajustemos* con mucha precisión el valor de m_Λ, la masa que aparece en el lagrangiano original. Si estamos interesados en definir matemáticamente el límite al continuo, conservando una partícula de masa efectiva m_{eff} finita, estas consideraciones nos dicen que debemos tomar el límite $\Lambda \to \infty$, combinado con $m_\Lambda^2 \to m_{\text{eff}}^2 - \lambda_\Lambda \Lambda^2 + \mathcal{O}(\lambda_\Lambda^2)$. Esta operación es la que se denomina como *renormalización.*

Por el contrario, si la escala Λ posee una interpretación física, en el espíritu de Wilson (como la de una partícula muy masiva que se acopla al campo $\phi(x)$), entonces descubrimos que el escalar tiende a conservar una masa de orden Λ, salvo que alguna simetría adicional asegure la cancelación precisa entre m_Λ^2 y la corrección cuántica. Tales simetrías son por ejemplo las simetrías gauge para fotones, la simetría quiral para fermiones sin masa, o la supersimetría para escalares (problema de las jerarquías).

- *Acoplamiento efectivo*

La discusión heurística anterior se generaliza a las correcciones a la constante de acoplamiento, que podemos definir físicamente en términos de una amplitud de dispersión para partículas sobre la capa de masas (como el valor de la función de vértice cuártico con las patas en $p^2 = m_{\text{eff}}^2$). Se obtiene en este caso una divergencia *logarítimica* de los “diagramas del pez” con un *loop*

$$\lambda_{\text{eff}} \sim \lambda_\Lambda - C\, \lambda_\Lambda^2 \log\left(\Lambda/m_{\text{eff}}\right) + \dots$$

relación que nos dicta la “trayectoria de renormalización”: la dependencia funcional $\lambda_\Lambda(\Lambda \to \infty)$ que asegura la finitud de la constante efectiva.

Aquí descubrimos un hecho importante. Si $\Lambda \gg m_{\text{eff}}$, es posible que $\lambda_{\text{eff}} \ll 1$ aun cuando λ_Λ ya no sea pequeña. De hecho, sería deseable reorganizar la serie perturbativa como un desarrollo en potencias del acoplamiento efectivo λ_{eff}, que mide realmente la fuerza de las interacciones entre partículas. Esta reorganización de la serie perturbativa, que en ocasiones da lugar a una mejora en la precisión, se denomina “teoría de perturbaciones renormalizada” y será objeto de estudio en la sección siguiente.

- *Contaje de potencias y renormalizabilidad*

La pregunta obvia en este punto es si todas las cantidades físicas son *finitas*, cuando se expresan en función de la masa y acoplamiento efectivos, es decir, una vez que hemos absorbido la divergencia de la masa y la constante de acoplamiento en términos de la trayectoria de renormalización para m_Λ y λ_Λ, en el límite $\Lambda \to \infty$. La respuesta es accesible, en un sentido genérico, por simple contaje dimensional, teniendo en cuenta las propiedades combinatorias de los diagramas de Feynman.

Considerando una función de Green conexa con N patas externas, un diagrama de Feynman que contribuye tendrá en general P propagadores, V vértices y $L = P - V + 1$ *loops*. En una teoría con interacción ϕ^n hay n líneas confluyendo en cada vértice: $nV = N + 2P$. El grado superficial de divergencia del diagrama se obtiene, por análisis dimensional:

$$\text{diagrama} \sim \Lambda^{\text{Div}}$$

con

$$\text{Div} = 4\,L - 2P = 4 - N + (n-4)\,V$$

De aquí deducimos que en la teoría ϕ^4 sólo divergen superficialmente las amplitudes con menos de cuatro patas externas. Sin embargo, en ϕ^6 o superior, todas las amplitudes divergen para un número de vértices suficientemente alto. Esto implica que necesitaríamos ajustar un número infinito de cantidades físicas para absorber estas divergencias, con lo cual la teoría no es predictiva en un sentido estricto. Para completar este argumento, debemos comentar que el criterio dimensional falla en presencia de simetrías (como es el caso de QED), y de divergencias *solapantes* (en cuyo caso se aplica a los subdiagramas divergentes de un diagrama mayor).

Por inspección directa, obtenemos pues un *criterio de renormalizabilidad*, basado en nuestra capacidad de absorber las divergencias en un número finito de cantidades físicas. El criterio es simplemente que la constante de acoplamiento tenga dimensión de masa *positiva o cero.*

1.1.2 Normalización de las cantidades físicas

La idea básica a transmitir es la necesidad de especificar el valor de una magnitud física medible por cada parámetro ajustable –masas y acoplamientos– que aparece en el lagrangiano "microscópico". De esta forma determinamos otros tantos parámetros efectivos, que de paso absorben las divergencias en el resto de las cantidades físicas.

En adelante, nos referimos a los parámetros que aparecen en el lagrangiano "desnudos" como $m_\Lambda, \lambda_\Lambda, \ldots$ y a los "renormalizados", efectivos o físicos como $m, \lambda, \ldots$.

- *Propagador exacto*

  Aquí nos apartamos del estilo heurístico para obtener un resultado exacto de gran importancia, aunque en cierta medida ya implícito en nuestro análisis de la reducción LSZ en TCC–I. Nos referimos a la representación espectral (de Lehmann) del propagador. Nos permite dar una definición física de la masa efectiva (en adelante, masa física o exacta), y de su relación con la masa que aparece en el lagrangiano (la masa desnuda m_Λ). Al mismo tiempo, recuperamos la definición LSZ de la constante Z de renormalización de la función de onda.

  Partiendo de la función de Green exacta, introducimos la unidad en el espacio de Hilbert de estados asintóticos,

$$\hat{\mathbf{1}} = \sum |\, \mathrm{In}\, \rangle \langle\, \mathrm{In}\, | = \sum |\, \mathrm{Out}\, \rangle \langle\, \mathrm{Out}\, |$$

  Se obtiene así la representación espectral sin más que usar las propiedades de covariancia Poincaré del campo:

$$\widetilde{G}_2(p) = \int d^4x\, e^{i\,p\,x} \left\langle \mathrm{T}\left[\widehat{\phi}(x)\, \widehat{\phi}(y) \right] \right\rangle_{\mathrm{VAC}} = \int_0^\infty \frac{dM^2}{2\pi}\, \rho(M^2)\, \frac{i}{p^2 - M^2 + i\,0}$$

  donde $\rho(M^2)$ es la densidad espectral

$$\rho(M^2) = \sum_{s_0} (2\pi)\, \delta(M^2 - m_s^2)\ \left| \left\langle \mathrm{VAC} \left| \widehat{\phi}(0) \right| s_0 \right\rangle \right|^2$$

  como suma sobre estados de momento total cero $\widehat{\mathbf{P}}|s_0\rangle = 0$ con energía $\widehat{H}|s_0\rangle = m_s\,|s_0\rangle$. Si la teoría tiene estados asintóticos de tipo monopartícula de masa m, la densidad espectral tiene la forma $\rho(M^2) = 2\pi\, Z\, \delta(M^2 - m^2)$ cerca de $M^2 = m^2$, con

$$Z = \left| \left\langle \mathrm{VAC} \left| \widehat{\phi}(0) \right| \text{partícula} \right\rangle \right|^2$$

  de acuerdo con la definición de Z basada en LSZ. Si hay estados ligados, tenemos otras deltas en masas $M^2_{\text{ligados}} = m_\ell^2 \leq (2m)^2$, mientras que en $M^2 \geq (2m)^2$ tenemos el continuo de estados de multipartículas. Todo esto se traduce en una estructura analítica para el propagador exacto dada por

$$\widetilde{G}_2(p) = \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\,0} + \sum_{\text{ligados}} \frac{iZ_\ell}{p^2 - m_\ell^2 + i\,0} + \int_{\text{corte} \geq 4m^2} \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) \frac{i}{p^2 - M^2 + i\,0}$$

  Este resultado es importante porque muestra cómo las funciones de Green se pueden utilizar para recuperar información física no contenida en los elementos de matriz S, en concreto, detalles sobre el espectro exacto de la teoría.

  Para nuestra discusión de renormalización, la importancia de este resultado radica en que nos permite definir la masa exacta, así como la constante de renormalización del campo en términos de la estructura analítica de la función de Green a dos puntos.

- *Acoplamiento exacto*

  Análogamente, definimos el acoplamiento exacto mediante la amplitud de matriz S a momento cero:

$$\lambda = i \left\langle \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = 0 \left| \ \widehat{S}\ \right| \mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_4 = 0 \right\rangle = i\, (\sqrt{Z})^4\ \widetilde{G}_4(p_i^0 = m, \mathbf{p}_i = 0) \Big|_{\substack{\text{conexa} \\ \text{amputada}}}$$

donde hemos usado LSZ en la segunda relación. De nuevo, tenemos una definición física sin ambigüedades, siempre que realizemos la amputación y la normalización en términos del propagador exacto derivado antes. En teoría de perturbaciones la amputación se efectúa extrayendo la suma de diagramas 1PI en cada una de las cuatro patas.

Es importante comunciar al alumno una de las constantes recurrentes en toda discusión de renormalización. La definición de las constantes de acoplamiento, al realizarse sobre amplitudes físicas concretas, no tiene una validez absoluta. La estructura del programa de renormalización dependerá de la definición precisa adoptada para las constantes de acoplamiento. Por supuesto, el valor numérico de las cantidades físicas debe ser el mismo, independientemente de cómo se articulen las definiciones de objetos útiles en el análisis intermedio.

1.1.3 Teoría de perturbaciones renormalizada

La manipulación de la teoría de perturbaciones en términos de los parámetros desnudos $m_\Lambda, \lambda_\Lambda, ...$, oscurece el hecho de que son los parámetros efectivos los que tienen una interpretación física directa. Resulta pues útil reescribir la serie perturbativa como un desarrollo en potencias del acoplamiento efectivo λ. En principio, ésta es una simple reorganización de la serie. En la práctica, sin embargo, sólo podemos calcular unos pocos órdenes en el desarrollo perturbativo, y una organización astuta de la serie perturbativa puede redundar en una mejor aproximación cuantitativa.

Aunque el verdadero tratamiento sistemático de estas cuestiones requiere la introducción de los métodos del grupo de renormalización, aquí introducimos la teoría de perturbaciones renormalizada como una manera de presentar los cálculos sin referencia explícita a los parámetros desnudos.

- *Contratérminos*

La idea básica consiste en sumar y restar un lagrangiano canónicamente normalizado en términos de un campo renormalizado $\phi = Z^{-1/2}\,\phi_\Lambda$, y con acoplamientos efectivos m, λ:

$$\mathcal{L}_\Lambda = \frac{1}{2}\,(\partial\phi_\Lambda)^2 - \frac{1}{2}\,m_\Lambda^2\,\phi_\Lambda^2 - \frac{\lambda_\Lambda}{4!}\,\phi_\Lambda^4 = \frac{1}{2}\,(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}\,m^2\,\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\,\phi^4 + \mathcal{L}_{\rm contra}$$

donde

$$\mathcal{L}_{\rm contra} = \frac{1}{2}\,\delta_Z\,(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}\,\delta_m\,\phi^2 - \frac{\delta_\lambda}{4!}\,\phi^4$$

$$\delta_Z \equiv Z - 1, \qquad \delta_m \equiv Z\,m_\Lambda^2 - m^2, \qquad \delta_\lambda = \lambda_\Lambda\,Z^2 - \lambda$$

A continuación tomamos $\frac{1}{2}\,(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}\,m^2\phi^2$ como lagrangiano libre que define el propagador (exacto), y el resto como una perturbación. Obviamente, esta reorganización de la serie de Feynman es equivalente a trabajar en serie de potencias de λ_Λ, al menos en un sentido formal. En la práctica, la dificultad de trabajar con más vértices (los contratérminos) se ve justificada con creces por una estructura mucho más sencilla de la normalización de cantidades físicas.

- *Cálculo de los contratérminos*

  La determinación de los contratérminos $\delta_Z, \delta_m, \delta_\lambda$ se realiza orden a orden en la serie en potencias de λ, el acoplamiento físico. El procedimiento que elimina las divergencias es el mismo considerado anteriormente: fijamos un número equivalente de cantidades físicas. En este caso, la autoenergía (incluyendo la contribución de los contratérminos) ha de satisfacer

  $$\Sigma(p^2 = m^2) = \frac{d\Sigma}{dp^2}(p^2 = m^2) = 0$$

  como consecuencia de la normalización del propagador exacto. Por ejemplo, en la teoría ϕ^4 a un *loop* se obtiene $\delta_Z = 0$, $\delta_m \sim -\lambda\Lambda^2/m^2$, donde la anulación de δ_Z a un *loop* es una propiedad especial de la teoría ϕ^4. Asimismo, calculando la amplitud de cuatro patas amputada:

  $$\widetilde{G}_4(s = 4m^2, t = u = 0)\Big|_{\substack{\text{conexa} \\ \text{amputada}}} = -i\lambda$$

  se obtiene $\delta_\lambda \sim \lambda^2 \log(\Lambda/m)$. En todos los casos, las constantes de proporcionalidad son tales que las divergencias en cualquier amplitud a un *loop* quedan canceladas al introducir los contratérminos.

1.1.4 Renormalización de QED a un *loop*

Aquí presentamos la renormalización en detalle en el caso de más interés físico que mantiene sin embargo la simplicidad padagógica: QED. Con esto completamos el estudio detallado de QED como TCC modelo, iniciado en el curso del primer cuatrimestre.

Las novedades más importantes de esta sección son de carácter técnico. Introducimos la regularización dimensional como la forma más efectiva de parametrizar divergencias ultravioleta en teorías gauge.

- *Estructura general de divergencias en QED*

  Consideramos el contaje dimensional que estima el grado de divergencia superficial de los diagramas en QED: para un diagrama con L *loops*, P_e propagadore electrónicos, y P_γ propagadores fotónicos

  $$\text{Div} = 4L - P_e - P_\gamma = 4 - N_\gamma - \frac{3}{2}\,N_e$$

  donde N_γ, N_e es el número de patas externas de fotón y electrón, respectivamente. El resultado es independiente del número de vértices, así que sólo un número finito de amplitudes pueden diverger (salvo por divergencias en subdiagramas).

  El contaje dimensional ha de corregirse en muchos casos, como consecuencia de las simetrías de la teoría. Por ejemplo, las funciones a uno y tres patas del fotón se anulan por conjugación de carga (Furry). La autoenergía del electrón es (superficialmente) linealmente divergente, pero la simetría quiral en el límite $m_e \to 0$ implica que el diagrama es de hecho proporcional a m_e. Por tanto la divergencia real es sólo logarítmica. Por último, las amplitudes de fotones pares (polarización del vacío y dispersión de fotones por fotones) son, respectivamente, logarítmicamente divergentes y finitas, debido a la identidad de Ward, que implica la transversalidad con respecto a la polarización de los fotones en patas externas. La única amplitud que respeta el grado de divergencia superficial –logarítimica en este caso– es el vértice $e^+\,\gamma\,e^-$.

- *Contratérminos y teoría de perturbaciones renormalizada*

  En términos de los campos renormalizados $\psi_\Lambda = \sqrt{Z_\psi}\,\psi$, $A^\mu_\Lambda = \sqrt{Z_A}\,A^\mu$ tenemos un lagrangiano de contratérminos

  $$\mathcal{L}_{\text{contra}} = -\frac{\delta_A}{4}|F|^4 + \overline{\psi}(i\delta_\psi\,\partial\!\!\!/ - \delta_m)\,\psi - e\,\delta_e\,\overline{\psi}\gamma^\mu\,\psi\,A_\mu$$

  $$\delta_{A,\psi} \equiv Z_{A,\psi} - 1, \qquad \delta_m \equiv m_\Lambda\,Z_\psi - m, \qquad \delta_e = \frac{e_\Lambda}{e}\,Z_\psi\sqrt{Z_A} - 1$$

  Las condiciones físicas que determinan los contratérminos se escriben en términos de la polarización del vacío $\langle j^{mu}_{\text{em}}(q) j^\nu_{\text{em}}(-q)\rangle = i(\eta^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)\Pi(q^2)$, la autoenergía del electrón $-i\Sigma(p\!\!\!/)$, y el vértice amputado $e^+e^-\gamma$, $-ie\Gamma^\mu(p,p')$. Las condiciones en cuestión involucran simplemente la definición de m como la masa física del electrón, $m_\gamma = 0$ para el fotón a todos los órdenes, como se desprende de la simetría gauge, y la definición física de la carga eléctrica efectiva e:

$$\Sigma(\not p = m) = \frac{d\Sigma}{d\not p}(\not p = m) = \Pi(q^2 = 0) = 0, \qquad -ie\Gamma^\mu(p - p' = 0) = -ie\gamma^\mu$$

- *Evaluación de diagramas en regularización dimensional*

  La regularización intuitiva en términos de un *cut-off* en momentos Λ resulta demasiado violenta en QED, puesto que no respeta la invariancia gauge. Como consecuencia, el fotón adquiere una masa y la renormalización se complica *ad infinitum.* Aquí ilustramos en este ejemplo concreto de QED a un *loop* una de las reglas de oficio básicas en TCC: la necesidad de buscar reguladores adecuados según las circunstancias del cálculo en cuestión.

  Con diferencia, el método más potente en teoría de perturbaciones es la regularización dimensional. Aquí introducimos las ideas esenciales del truco de la continuación analítica en el número de dimensiones. Previamente convertimos las integrales en espacio de momentos minkowskiano en integrales euclídeas mediante la rotación de Wick en las componentes de los momentos.

  Este tratamiento es técnico y requiere unas dos clases completamente dedicadas a la manipulación de diagramas en la pizarra, incluyendo la parametrización en términos de parámetros de Feynman.

  Armados con estos resultados, estamos en condiciones de calcular los contratérminos de QED $\delta_e, \delta_\psi, \delta_A, \delta_m$ a un *loop.*

- *Ejemplo: correcciones cuánticas a la dispersión Coulomb*

  Como ejemplo de cálculo de una cantidad física hasta el final, consideramos la dispersión de un electrón por una carga muy masiva. El diagrama dominante a nivel árbol simplemente da lugar a la interacción de Coulomb habitual. Las correcciones a un *loop* al potencial de Coulomb se pueden relacionar con la transformada de Fourier de la función de polarización del vacío $\Pi(q)$.

  Avanzamos una interpretación física de los resultados, basada en la analogía con el apantallamiento de la carga eléctrica por un medio dieléctrico. Desde este punto de vista, la renormalización aparece como una consecuencia natural de la existencia de fluctuaciones a todas las escalas de distancias y no sólo como un truco matemático para evitar expresiones divergentes.

- **Ejercicio de ampliación:** *La función de vértice del electrón y el momento magnético anómalo*

  En este ejercicio consideramos las correcciones debidas a fotones virtuales en la interacción elemental entre un electrón y un fotón. En el proceso descubriremos aplicaciones importantes de la identidad de Ward. Utilizamos este ejemplo para mostrar un método de regularización alternativo de gran utilidad en QED: el método de Pauli–Villars, que consiste en introducir una partícula ficticia muy masiva con término cinético de signo opuesto.

- **Ejercicio de ampliación:** *Un ejemplo a dos loops*

  Aquí llevamos al alumno por el bosque de las divegencias solapantes. Sin entrar en la solución general de BPHZ, mostramos los elementos de la renormalización más allá de un *loop* con un ejemplo extraído de la teoría ϕ^4.

1.2 Grupo de renormalización

Una vez puesto de manifiesto que las cantidades físicas, expresadas como función de la escala fundamental Λ de la TCC y de los parámetros microscópicos $m_\Lambda, \lambda_\Lambda, \ldots$, están dominadas en ocasiones por la contribución de modos de alta energía, es natural tratar de estudiar éstos con cuidado, con objeto de sistematizar el cálculo de sus efectos en la física a escalas de energía muy por debajo del *cut-off* $p^2 \ll \Lambda^2$. El resultado de este análisis, denominado genéricamente *grupo de renormalización*, es una noción precisa de *acoplamiento efectivo*, y una explicación fundamental del papel de las teorías renormalizables en física.

1.2.1 Método de Wilson

La idea de Wilson consiste en calcular la integral funcional de una TCC en una serie de pasos, cada uno de los cuales sólo incluye fluctuaciones de una energía dada. En otras palabras; consideramos una escala $\Lambda' < \Lambda$ e integramos todas las fluctuaciones en esta "capa de momentos" $\Lambda' < |p| < \Lambda$. La función de partición parcial que resulta se escribe de nuevo en términos de un lagrangiano efectivo, cuyo *cut-off* es ahora Λ'.

- *Acción efectiva Wilsoniana*

La idea básica del método de Wilson es pues escribir

$$[\mathcal{D}\,\phi]^{\Lambda} = [\mathcal{D}\,\phi]^{\Lambda'}\ [\mathcal{D}\,\phi]^{\Lambda}_{\Lambda'}$$

y efectuar la integración sobre $\phi(\Lambda' < |p| < \Lambda)$.

$$\mathcal{Z}_\Lambda = \int [\mathcal{D}\phi]^{\Lambda}\ e^{iI_\Lambda} = \mathcal{Z}_{\Lambda'} = \int [\mathcal{D}\phi]^{\Lambda'}\ e^{iI_{\Lambda'}}$$

con

$$I_{\Lambda'} = I_\Lambda - i\log \int [\mathcal{D}\,\phi]^{\Lambda}_{\Lambda'}\ e^{iI_\Lambda}$$

En principio, estas transformaciones están definidas para una teoría de campos regularizada en general. En la práctica, las integrales se pueden calcular no perturbativamente por medio de simulaciones numéricas, o perturbativamente, mediante el cálculo de diagramas de Feynman. Aquí vamos a suponer que estamos en una situación perturbativa, es decir, el lagrangiano original es aproximadamente libre:

$$\mathcal{L}_\Lambda = \tfrac{1}{2}\,(\partial\phi)^2 - \sum_{\mathcal{O}} (\Lambda)^{d-d_{\mathcal{O}}}\ \lambda_{\mathcal{O},\Lambda}\,\mathcal{O}(\phi)$$

donde escribimos el lagrangiano más general en dimensión espacio-temporal d, en términos de operadores $\mathcal{O}(\phi)$ de dimensión $d_{\mathcal{O}}$, con acoplamientos normalizados $\lambda(\mathcal{O})$, que se suponen pequeños, y las dimensiones dadas por el *cut-off*. Por ejemplo, para una masa $m^2_\Lambda = \Lambda^2\,\lambda_{\phi^2,\Lambda}$, mientras que el acoplamiento cuártico $\lambda_\Lambda = \lambda_{\phi^4,\Lambda}$.

Perturbativamente, se definen los acoplamientos renormalizados a la escala Λ' mediante la ecuación:

$$I_{\Lambda'} \equiv \int \left(\tfrac{1}{2}\,(\partial\phi')^2 - \sum_{\mathcal{O}} (\Lambda')^{d-d_{\mathcal{O}}}\ \lambda_{\mathcal{O},\Lambda'}\,\mathcal{O}(\phi') \right) = I_\Lambda + \sum_{\substack{\text{diagramas}\\ \text{conexos}}} \big(\Lambda' < |p|_{\text{virtual}} < \Lambda\big)$$

El nuevo lagrangiano efectivo a escala Λ' sólo depende de modos del campo con momento inferior a Λ', que es el nuevo *cut-off*. La normalización de la medida en $\mathcal{Z}_{\Lambda'}$ difiere de la considerada originalmente para $\mathcal{Z}_\Lambda$ si expresamos el lagrangiano efectivo con normalización canónica. Es decir, ajustamos al valor unidad el coeficiente del término cinético en $I_{\Lambda'}$, mediante una transformación

$$\phi' = (1 + \delta Z_\phi)^{1/2}\,\phi$$

donde δZ_ϕ es la contribución al operador $(\partial\phi)^2$ debido a diagramas de partículas con momento a la capa de integración.

Una observación importante: salvo la acción de simetrías (que han de serlo de la integral funcional completa), todos los acoplamientos *ad infinitum* son $\neq 0$ en $I_{\Lambda'}$, independientemente de su valor a momento superior. ¿ Qué sentido tiene entonces escribir un lagrangiano con unos pocos términos, si todos los demás se generan mediante fluctuaciones cuánticas?

- *Flujos de renormalización*

La evolución de los acoplamientos con Λ/Λ' define un *flujo de renormalización.* De las ecuaciones anteriores se deduce que la renormalización dominante de los acoplamientos adimensionales está dada por simple contaje dimensional, es decir:

$$\lambda_{\mathcal{O},\Lambda'} = \left(\frac{\Lambda}{\Lambda'}\right)^{d-d_{\mathcal{O}}} (\lambda_{\mathcal{O},\Lambda} + \delta\lambda_{\mathcal{O}})\,(1+\delta Z)^{-\frac{\#\phi}{2}},$$

donde $\delta\lambda, \delta Z$ proceden de los diagramas y son pequeños si la teoría de perturbaciones en λ_Λ es buena. De aquí obtenemos un resultado importante: los operadores de dimensión alta $d_{\text{irrelevante}} > d$ son *irrelevantes* a baja energía $\Lambda' \ll \Lambda$, por razones puramente dimensionales. Los operadores *relevantes*, tales como las masas, tienen dimensión $d_{\text{relevante}} < d$ y dominan la física de baja energía. Mientras que los operadores con acoplamiento sin dimensión nominal $d_{\mathcal{O}} = d_{\text{marginal}} = d$, se denominan marginales y su evolución depende completamente de la contribución de los *loops.* Por ejemplo, en la teoría ϕ^4 tenemos

$$\lambda_{\Lambda'} = \lambda_\Lambda - C\,\lambda_\Lambda^2 \log(\Lambda/\Lambda')$$

- *Renormalizabilidad explicada*

Dado que los operadores irrelevantes no son importantes para $\Lambda' \ll \Lambda$ –salvo por las contribuciones logarítmicas a los coeficientes de los operadores relevantes y marginales– la acción efectiva en el sentido tradicional que resultaría de tomar el límite al continuo $\Lambda \to \infty$ con Λ' fijo *no contiene* operadores irrelevantes. De aquí que, por ejemplo, en la teoría ϕ^4 podemos obviar la introducción de operadores ϕ^6, ϕ^8, etc. en el lagrangiano, siempre que el *cut-off* se pueda considerar infinito desde el punto de vista físico.

De esta manera, obtenemos la explicación fundamental del criterio de renormalizabilidad estudiado anteriormente sobre la lógica tradicional de la eliminación de divergencias: operadores con dimensión mayor que cuatro (constante de acoplamiento de dimensión negativa) nunca aparecen en una teoría en la que el *cut-off* es, de forma efectiva, infinito. Al revés, mientras los acoplamientos efectivos sean pequeños, toda teoría *fluye* a baja energía a una con operadores de dimensión menor o igual a cuatro. Si la teoría resultante es libre $\lambda_{\text{eff}} \to 0$, la original era *no renormalizable.* Si las interacciones sobreviven el límite de baja energía, entonces tenemos forzosamente una teoría renormalizable.

Es muy importante que el alumno entienda estos sencillos conceptos en toda su profundidad, ya que son absolutamente básicos en el paradigma actual sobre la interpretación física de las TCC. En concreto, la renormalizabilidad del Modelo Estándar se puede ver como una consecuencia de las ideas Wilsonianas, donde las interacciones que sobreviven estarían determinadas por la simetría gauge, que así adquiere un papel mucho más fundamental del asumido previamente.

- *Lagrangianos efectivos*

Finalizamos la exposición de las ideas Wilsonianas con una pequeña disgresión sobre algunos ejemplos característicos de lagrangianos efectivos en los que el uso de operadores no renormalizables es útil desde el punto de vista práctico. Uno es el efecto de un término de la forma

$$\delta\mathcal{L}_{\text{dim 5}} \sim \frac{1}{\Lambda}\,\overline{\psi}\,\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\psi$$

en el acoplamiento entre el electrón y el fotón, y la determinación de sus efectos en el momento magnético anómalo como una forma de acotar Λ, la escala de la nueva física responsable de la aparición de este operador. El segundo ejemplo es un operador de dimensión 6

$$\mathcal{L}_{\text{dim 6}} \sim \frac{1}{\Lambda^2}\,(\overline{\psi}\,\overline{\psi}\,\psi\,\psi).$$

Este caso tiene famosas aplicaciones: la teoría de Fermi de interacciones débiles, $\Lambda_{\text{Fermi}} \sim 100$ GeV, y el operador efectivo para desintegración de un protón en una teoría de Gran Unificación (GUT): $\Lambda_{\text{GUT}} \sim 10^{16}$ GeV.

1.2.2 Logaritmos y comportamiento asintótico

En esta sección final de la discusión sobre renormalización abordamos una serie de conceptos de gran utilidad práctica. La estructura del grupo de renormalización tal como se ha introducido en la sección anterior, en términos del *flujo* de acoplamientos efectivos como función del *cut-off*, pone de manifiesto que para estudiar la física de una TCC a escala de energías de orden E, es conveniente escribir un lagrangiano efectivo en el que las fluctuaciones cuánticas de frecuencia $\omega > E$ han sido integradas explícitamente, e incorporadas en un conjunto de acoplamientos efectivos.

Esta idea básica de la interpretación Wilsoniana se puede implementar también al nivel de la teoría de perturbaciones renormalizada, donde el *cut-off* ha desaparecido explícitamente de las fórmulas, sustituido por la escala física a la cual efectuamos la sustracción de divergencias ultravioletas (por ejemplo la masa física de las partículas en cuestión).

En este sentido, un problema genérico que nos encontramos es la aparición de logaritmos cuyo valor puede invalidar *de facto* la precisión de la serie perturbativa. Supongamos que tenemos un acoplamiento λ_m definido a una escala m por una amplitud de dispersión física $A(m)$ entre partículas de masa física m. En teoría de perturbaciones, esta amplitud adquiere, a energías $p^2 > m^2$, una dependencia del tipo $A(p) \sim \lambda_m + \lambda_m^2 \log(p^2/m^2)$. De hecho, n diagramas encadenados, con una divergencia logarítimica primitiva cada uno, dan lugar a correcciones de orden $\mathcal{O}\left(\lambda_m^{n+1}\left[\log(p^2/m^2)\right]^n\right)$, de manera que el parámetro de desarrollo efectivo no es λ_m, sino la combinación $\lambda_m \log(p^2/m^2)$. Si $p^2 \gg m^2$ la teoría de perturbaciones no es válida en términos cuantitativos.

La solución a este problema es encontrar un parámetro de desarrollo más astuto. En vez de efectuar un desarrollo perturbativo en λ_m, a medida que consideramos procesos a energías alejadas de m, deberíamos utilizar una definición de acoplamiento efectivo adecuada a la escala en cuestión. Esto nos lleva a la introducción de acoplamientos *running*.

- *Ecuación de Callan–Symanzik*

  La discusión anterior conduce directamente a la definición de acoplamientos efectivos a una escala arbitraria μ, que utilizaremos como parámetro de desarrollo perturbativo para estudiar la física a energías de orden μ. En la práctica, la forma más efectiva de calcular λ_μ en términos del acoplamiento físico λ_m es mediante la integración de una ecuación diferencial,

  $$\mu \frac{d\lambda_\mu}{d\mu} = \beta(\lambda_\mu, m/\mu)$$

  llamada de Callan–Symanzik. La función *beta* $\beta(\lambda)$ mide el efecto de una variación infinitesimal en μ y se puede calcular mediante la evaluación de diagramas. Al involucrar un cambio infinitesimal en la energía, este procedimiento está libre del efecto de los logaritmos y la precisión depende únicamente de que $\lambda_\mu \ll 1$.

  Si $\mu \gg m$ la función beta sólo depende de λ_μ y podemos escribir una solución formal:

  $$\log\left(\frac{\mu}{M}\right) = \int_{\lambda_M}^{\lambda_\mu} \frac{dx}{\beta(x)}$$

  válida con tal de que $\beta(x)$ no se anule en el intervalo de integración. La escala M es una condición inicial, que se toma suficientemente alta como para que $m/M \ll 1$, pero aún $\log(M/m) \sim 1$, de forma que podemos calcular λ_M en términos de λ_m sin grandes correcciones debidas a logaritmos entre estas dos escalas.

- *Ejemplo: carga efectiva de QED*

  De nuevo consideramos la carga efectiva de QED como ejemplo característico. La función beta de QED

  $$\beta(e) = \frac{e^3}{12\pi^2} + \mathcal{O}(e^5)$$

se obtiene de los resultados de la sección anterior, donde desarrollamos con detalle la estructura de renormalización a un *loop*. La solución para $\alpha = e^2/4\pi$ es

$$\alpha_\mu = \frac{\alpha_{\rm em}}{1 - \frac{\alpha_{\rm em}}{3\pi}\left(\log\left(\mu^2/m_e^2\right) - \frac{5}{3}\right)}$$

donde $\alpha_{\rm em} \sim 1/137$ es la constante de estructura fina definida a la escala de la masa del electrón $m_e \sim 0.5$ MeV. Se puede por ejemplo calcular la constante de estructura fina efectiva a la escala de las colisiones en LEP: $\alpha(91\,{\rm GeV}) \approx 1/134.6 > \alpha_{\rm em}$.

- *Tipos de comportamiento asintótico*

  Una vez ilustrada la utilidad del concepto de acoplamientos *running* pasamos a enumerar los diferentes tipos de comportamiento asintótico a alta energía: $\lambda_\mu(\mu \to \infty)$. Para ello consideramos las diferentes formas cualitativas que puede tomar la función beta, dependiendo del signo, o la posibilidad de que se anule a un valor dado del acoplamiento.

  Hay básicamente cuatro escenarios:

  – Crecimiento continuo: $\lambda_{\mu\to\infty} \to \infty$.
  – Singularidad a energía finita: $\lambda_{\mu\to\mu_\infty} \to \infty$. Este es el caso de QED, y μ_∞ es el famoso polo de Landau.
  – Punto fijo: $\lambda_{\mu\to\infty} \to \lambda_*$, ocurre cuando la función beta tiene un cero: $\beta(\lambda_*) = 0$.
  – Libertad asintótica: $\lambda_{\mu\to\infty} \to 0$. Esto ocurre cuando $\beta(\lambda) < 0$ en la vecindad de $\lambda \sim 0$.

- **Ejercicio de ampliación:** *Ecuación de Callan–Symanzik general y dimensiones anómalas*

  Consideramos la forma más general de la ecuación de Callan–Symanzik, correspondiente al *running* de acoplamientos de dimensión arbitraria, asociados a perturbaciones por operadores de dimensión $d_{\mathcal{O}}$

$$\delta I = \sum_{\mathcal{O}} \mu^{4-d_{\mathcal{O}}}\,\lambda_{\mathcal{O},\mu}\int \mathcal{O}$$

  Definimos las *dimensiones anómalas* de los operadores $\gamma_{\mathcal{O}}$ a partir de las funciones beta, mediante

$$\beta_{\mathcal{O}} = (d_{\mathcal{O}} - 4 + \gamma_{\mathcal{O}})\,\lambda_{\mathcal{O}}$$

  Esto nos permite determinar la evolución de un acoplamiento arbitrario evaluar el comportamiento asintótico de funciones de Green de operadores arbitrarios. El análisis se completa con el cálculo de dimensiones anómalas a un *loop* en la teoría ϕ^4 y en QED.

2 Teorías gauge no abelianas

Las teorías gauge representan la piedra angular de nuestra descripción básica de la naturaleza. Constituyen una clase particular de TCC cuya propiedad definitoria es una enorme simetría local, la simetría gauge, que actúa como un principio geométrico limitando las clases posibles de interacciones. De hecho, todas las interacciones fundamentales conocidas son teorías gauge (incluyendo la gravitación en su versión einsteniana). Como tales, todas se pueden ver como generalizaciones de la electrodinámica.

Una idea fundamental a resaltar en este curso es la la diferencia en la interpretación física de las simetrías globales usuales y de las simetrías gauge. Mientras las primeras "actúan" sobre estados físicos de una forma determinada (por un operador unitario adecuado, vía el teorema de Wigner), las segundas corresponden a *redundancias* en nuestra descripción de los grados de libertad del sistema. En otras palabras; la simetría local es un efecto del uso de campos con grados de libertad no físicos.

Todas las simetrías gauge –salvo gravitación– están asociadas a partículas vectoriales sin masa. Tal como vimos en las primeras sesiones de TCC–I, las partículas vectoriales sin masa tienen menos grados de libertad que las masivas: dos estados de polarización por cada valor del impulso en vez de los tres que esperaríamos para un estado de espín 1. Sin embargo, la descripción covariante Lorentz de los campos asociados siempre involucra cuadrivectores A_μ con cuatro componentes. Los grados de libertad sobrantes corresponden a la "redundancia gauge" $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \alpha$, que es una simetría del lagrangiano de Maxwell para un vector sin masa. Si las partículas gauge conservan estas propiedades en sus interacciones con la materia, éstas han de respetar esta simetría gauge. Ésta es la razón por la cual la hipótesis de una simetría gauge concreta implica importantes restricciones en las interacciones que experimentan los campos de la teoría. Sin embargo, a diferencia de las simetrías globales habituales, al interpretar la simetría gauge como una redundancia, sólo los estados invariantes gauge tienen interpretación física libre de ambigüedades.

Es posible, al menos en principio, escoger uniformemente un "representante" de cada clase de campos relacionados por transformaciones gauge, y trabajar sólo con grados de libertad físicos. En una tal descripción la simetría gauge desaparece, tal como corresponde a una pura redundancia. Sin embargo, esta proyección sobre los grados de libertad físicos es con frecuencia incompatible con la covariancia Lorentz manifiesta, que a su vez es de gran importancia práctica en los cálculos. Por lo tanto, en la presentación conceptual a los estudiantes, podemos resaltar la idea de que las simetrías gauge son *redundancias útiles* en nuestra descripción de las interacciones que involucran partículas vectoriales no masivas, de las cuales el fotón es el ejemplo característico. Con frecuencia la lógica de esta presentación se invierte y nos encontramos con la afirmación de que las simetrías gauge son la "razón de ser" de las partículas vectoriales no masivas, tales como los fotones o los gluones.

A continuación nos introducimos en el aspecto más pragmático de obtener las reglas de Feynman covariantes para una teoría gauge general, en el formalismo funcional usando el truco de Fadeev–Popov, que muestra aquí su neta superioridad. Discutiremos los fantasmas y su papel en la unitariedad de la teoría de perturbaciones, para pasar a continuación a estudiar con detalle la teoría gauge no abeliana por excelencia: QCD.

2.1 Teoría clásica

Se introducirá con cierto detalle la estructura geométrica subyacente a la simetría gauge, en una introducción con un estilo tal vez más axiomático que el del resto del curso.

2.1.1 Origen geométrico de los campos gauge

- *Derivadas covariantes*

  Tomando el caso de QED como guía, introducimos la noción de derivada covariante como la solución al problema de escribir un lagrangiano invariante gauge para un fermión de Dirac. Utilizamos el lenguage discreto, reemplazando derivadas por diferencias, lo cual nos permite introducir los conceptos de derivada covariante y de *curvatura gauge* $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ a partir de su versión discretizada (el operador de *plaqueta* de Wilson).

- *Grupos gauge*

  Reconociendo la simetría gauge de QED como una redundancia $U(1)$ por cada punto del espacio-tiempo, la generalización a otros grupos continuos de transformaciones es natural. El resultado básico es que aparece un campo gauge A^a_μ independiente por cada generador del álgebra de Lie del grupo gauge: $a = 1, \ldots, \dim(G)$. Estos campos se pueden ensamblar en una matriz $A_\mu = \sum_a A^a_\mu T^a$, donde $(T^a)^\dagger = T^a$ generan los elementos de G: $\Omega_x = \exp(i\alpha^a_x T^a)$ y satisfacen las reglas de conmutación de un álgebra de Lie: $[T^a, T^b] = i\, f^{abc}\, T^c$. Las transformaciones gauge actúan como $A_\mu \to \Omega \left(A_\mu + \frac{1}{ig}\partial_\mu\right) \Omega^{-1}$ y la intensidad de campo $[D_\mu, D_\nu] = ig\,(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig\,[A_\mu, A_\nu]) = ig\, F_{\mu\nu}$ se transforma covariantemente: $F_{\mu\nu} \to \Omega\, F_{\mu\nu}\, \Omega^{-1}$.

  Aquí recogemos algunas propiedades generales de las álgebras de Lie que se usan con frecuencia en física, tales como la caracterización básica de $SU(N), O(N), Sp(N)$, las constantes de estructura, algunas generalidades sobre representaciones, y la definición y cálculo de Casimires.

2.1.2 Lagrangianos

A continuación escribimos los lagrangianos más generales compatibles con una simetría gauge general.

- *Posibilidades*

Se consideran los elementos en la construcción de lagrangianos polinómicos invariantes gauge. Han de ser funciones de las potencias invariant es de intensidad de campo F^n, y de sus derivadas covariantes $D^m F^n$.

Con sólo dos derivadas, tenemos el lagrangiano de Yang–Mills para los campos gauge:

$$\mathcal{L}_{\rm YM} = -\frac{1}{4}\, F^a_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu}_a$$

del cual escribimos sus ecuaciones de campo e indentidades de Biachi. Resaltamos la novedad más importante desde el punto de vista físico: las teorías gauge puras (sin materia) *son interactivas* en el caso no abeliano, a diferencia de los fotones, que son libres en ausencia de materia.

Se construyen derivadas covariantes en diferentes representaciones del grupo gauge para acoplar diferentes clases de materia. El acoplamiento sigue siendo de la forma $J_\mu A^\mu$, mediante la corriente gauge *covariantemente* conservada

$$(D_\mu J^\mu)^a = 0$$

El lagrangiano más general conteniendo campos gauge, escalares y fermiones de espín $\frac{1}{2}$, y compatible con la condición de renormalizabilidad superficial es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}{\rm Tr}\,|F|^2 + i\overline{\psi}\,\not{D}\,\psi + \left(D_\mu\phi\right)^\dagger\left(D^\mu\phi\right) - V(\phi) - \overline{\psi}\,(M_1(\phi) + i\gamma_5\, M_2(\phi))\,\psi$$

donde ψ y ϕ denotan colecciones de campos en representaciones determinadas del grupo gauge. El Modelo Estándar es un caso particular de este lagrangiano. En realidad, es el lagrangiano más general compatible con el grupo gauge $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$, y una asignación de representaciones dada.

2.2 Cuantización

Discutimos algunas características básicas de la cuantización canónica –el papel de la ley de Gauss bajo cuantización– con objeto de ilustrar en fórmulas las ideas anteriores sobre la simetría gauge como redundancia en la descripción de los grados de libertad del sistema. Esto nos permite recuperar la discusión análoga para QED como un caso particular, un aspecto que hemos decidido obviar por razones de tiempo en nuestro tratamiento de QED en TCC–I.

2.2.1 Estados físicos y simetría gauge

- *Variables canónicas*

Nuestro objetivo aquí es identificar el campo eléctrico $\mathbf{E}^a$ como el momento conjugado del potencial vector espacial $\mathbf{A}^a$, mientras que la componente temporal A_0^a juega el papel de un multiplicador de Lagrange, cuya ecuación de movimiento impone la ley de Gauss

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} = 0$$

Ilustramos cómo esta ecuación no se puede imponer en sentido fuerte en la teoría cuántica. Es decir, como ecuación para el operador $\widehat{\mathbf{E}}^a$ es incompatible con las reglas de conmutación canónicas.

- *Gauge temporal y ley de Gauss*

En el gauge temporal $A_0^a = 0$, el hamiltoniano se escribe

$$\widehat{H} = \int_{\mathbf{x}} \tfrac{1}{2}\left(\widehat{\mathbf{E}}^a\cdot\widehat{\mathbf{E}}^a + \widehat{\mathbf{B}}^a\cdot\widehat{\mathbf{B}}^a\right)$$

y la representación de Schrödinger se realiza mediante

$$\widehat{\mathbf{E}}^a = -i\frac{\delta}{\delta\mathbf{A}^a}$$

Una consecuencia elemental es que la ley de Gauss está asociada a una carga conservada. Para funciones arbitrarias $\alpha^a(\mathbf{x})$, la carga

$$\widehat{Q}_\alpha = -\int_{\mathbf{x}} \alpha^a(\mathbf{x})\,(\mathbf{D}\cdot\widehat{\mathbf{E}})^a(\mathbf{x})$$

conmuta con el hamiltoniano $[\widehat{Q}_\alpha, \widehat{H}] = 0$ para cualquier función $\alpha(\mathbf{x})$. Por inspección, podemos ver que genera transformaciones gauge independientes del tiempo:

$$\widehat{Q}_\alpha\,\Psi(\mathbf{A}) = \Psi(\mathbf{A} - i\,\mathbf{D}\,\alpha)$$

que son las residuales después de tomar el gauge temporal $A_0^a = 0$. Por lo tanto, la condición de Gauss se realiza en el espacio de Hilbert en sentido débil: mediante la declaración de que los estados físicos son *invariantes* frente a transformaciones gauge, o lo que es lo mismo, son aniquilados por el generador:

$$(\mathbf{D}\cdot\widehat{\mathbf{E}})^a\,\Psi(\mathbf{A}) = -i\left(\mathbf{D}\cdot\frac{\delta}{\delta\mathbf{A}}\right)^a\,\Psi(\mathbf{A}) = 0$$

En presencia de campos de materia ψ, la condición se modifica:

$$\left(\mathbf{D}\cdot\widehat{\mathbf{E}} - J^0(\hat{\psi}, \hat{\Pi}_\psi)\right)\,\Psi(\mathbf{A}, \psi) = 0$$

Estas relaciones reinterpretan la ley de Gauss como una condición sobre los estados físicos, en vez de una identidad para operadores en sentido fuerte.

- **Ejercicio de ampliación:** *Gupta–Bleuler*

  En este ejercicio recuperamos uno de los tratamientos clásicos en los libros de texto. En el caso abeliano (QED) las condiciones de invariancia gauge impuestas sobre estados físicos son equivalentes al viejo formalismo de Gupta–Bleuler.

2.2.2 Notación y convenios

Densidad lagrangiana de Yang–Mills

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2}\operatorname{tr} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4g^2}\sum_a F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu\,a}$$

donde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] = \sum_a F^a_{\mu\nu}T^a$$

El álgebra de Lie,

$$(T^a)^\dagger = -T^a \qquad \operatorname{tr} T^aT^b = -\tfrac{1}{2}\,\delta^{ab}\,, \qquad [T^a, T^b] = \sum_c f^c_{ab}T^c$$

con índices $a = 1, 2, \ldots, \dim(G)$.

El espaciotiempo X es una 4-variedad Riemanniana que asumimos estática, es decir, que admite la foliación por 3-espacios $\mathbf{X}$ a tiempo dado,

$$X = \mathbf{R}\times\mathbf{X}$$

donde $x \in X$ es de la forma $x = (t, \mathbf{x})$ con $t \in \mathbf{R}$ el tiempo y $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$.

La signatura Lorentziana se toma $(+---)$ por convenio. Con frecuencia trabajamos con la continuación analítica euclídea $t \to -it$, aunque entonces tomamos signatura $(++++)$ para la métrica. En X aplicamos el convenio de sumación de índices de Einstein. En $\mathbf{X}$ la suma sobre índices es explícita. En aplicaciones, siempre tomamos $\mathbf{X} = \mathbf{R}^3$, o bien en el caso compacto $\mathbf{X} = \mathbf{T}^3, \mathbf{S}^3$ o productos de éstas, donde $\mathbf{T}^3 = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ es un 3-toro.

Las transformaciones gauge $U(x)$ son aplicaciones suficientemente suaves del espacio base en el grupo

$$U : X \longrightarrow G$$

Su acción sobre los campos gauge A está definida por

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu^U = U^{-1}\,(A_\mu + \partial_\mu)\,U$$

Para transformaciones cercanas a la identidad en el grupo, podemos trabajar en el álgebra de Lie $\mathcal{G}$,

$$U = e^\varepsilon \in G\,, \qquad \varepsilon = \varepsilon^a T^a \in \mathcal{G}$$

y se tiene, a primer orden en ε,

$$\delta_\varepsilon A_\mu = D_\mu \varepsilon \equiv \partial_\mu \varepsilon + [A_\mu, \varepsilon]$$

Si la variedad base, sea ésta X o $\mathbf{X}$ tiene topología no trivial, las transformaciones gauge U se pueden utilizar como "reglas de pegado" para construir configuraciones de campos gauge topológicamente inequivalentes (fibrados gauge).

2.3 Formalismo hamiltoniano

Descomponiendo la variedad espaciotiempo en forma hamiltoniana, $X = \mathbf{R} \times \mathbf{X}$, con $\mathbf{R}$ representando la coordenada temporal, tenemos un lagrangiano

$$L = \int_{\mathbf{X}} \mathcal{L} = \frac{1}{2g^2} \int_{\mathbf{X}} \sum_{i,a} (F_{0i}^a)^2 - \frac{1}{4g^2} \int_{\mathbf{X}} \sum_{i,j,a} (F_{ij}^a)^2$$

La formulación hamiltoniana arranca del cálculo de los momentos conjugados a las variables dinámicas A_μ,

$$\Pi_\mu^a = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{A}_\mu^a} = \frac{1}{g^2} F_{0\mu}^a$$

De aquí se sigue de inmediato que los momentos conjugados a las componentes espaciales están *a priori* bien definidos

$$\Pi_i^a = \frac{1}{g^2} F_{0i}^a \equiv \frac{1}{g^2} E_i^a$$

donde $\mathbf{E}^a$ denota el campo "cromoeléctrico". Pero no ocurre así con el momento conjugado al potencial temporal, que se anula idénticamente $\Pi_0^a = 0$. Esto no es admisible, ya que sería incompatible con la imposición de relaciones canónicas de conmutación. La solución a este *impasse* consiste en la eliminación de la "coordenada" problemática, A_0, mediante una elección de *gauge*, con lo que su momento conjugado también desaparece del formalismo. La elección del *gauge temporal* $A_0 = 0$ nos deja variables dinámicas lagrangianas $(\mathbf{A}, \dot{\mathbf{A}})$ y variables dinámicas canónicas $(\mathbf{A}, \mathbf{\Pi})$. En este gauge se tiene $\mathbf{E} = \dot{\mathbf{A}}$ y el hamiltoniano se escribe

$$H = \int_{\mathbf{X}} \sum_a \mathbf{\Pi}^a \cdot \mathbf{A}^a - L = \frac{1}{2g^2} \sum_a \int_{\mathbf{X}} \left((\mathbf{E}^a)^2 + (\mathbf{B}^a)^2 \right)$$

donde $B_i = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} F^{jk}$ representa el campo "cromomagnético". En forma canónica,

$$H = \frac{1}{2} \sum_a \int_{\mathbf{X}} \left(g^2 (\mathbf{\Pi}^a)^2 + (\mathbf{B}^a)^2 \right)$$

Aparentemente hemos resuelto los problemas derivados de la trivialidad de Π_0. Sin embargo, la eliminación de A_0 nos hace perder, a nivel clásico, la ecuación de movimiento asociada a este potencial, es decir la *ley de Gauss*. Esta ecuación debe ser por tanto impuesta como una *ligadura* directamente sobre las soluciones del problema hamiltoniano en las variables $(\mathbf{A}, \mathbf{\Pi})$:

$$\sum_i D_i F_{0i} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = 0$$

2.4 Cuantización

Aplicando las reglas canónicas al par de variables conjugadas $(\mathbf{A}, \mathbf{\Pi})$, obtenemos un álgebra de Heisenberg operadores

$$\left[\, \widehat{A}^a_j(\mathbf{x}) \, , \widehat{\Pi}^b_k(\mathbf{y}) \, \right] = i \; \delta_{ij} \; \delta^{ab} \; \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

Podemos representar los operadores en un espacio de Hilbert de tipo Schrodinger, dado por funcionales de los campos

$$\left\langle \, \mathbf{A}(\mathbf{x}) \; \middle| \; \Psi \, \right\rangle = \Psi \, [\mathbf{A}(\mathbf{x})]$$

Es decir, el operador $\widehat{\mathbf{A}}$ se representa por multiplicación, y el operador $\widehat{\mathbf{\Pi}}$ por derivación,

$$\widehat{\mathbf{A}}^a \; \Psi \, [\mathbf{A}] = \mathbf{A}^a \; \Psi \, [\mathbf{A}] \;\; , \qquad \widehat{\Pi}^a_k \; \Psi \, [\mathbf{A}] = -i \frac{\delta}{\delta A^a_k} \; \Psi \, [\mathbf{A}]$$

En esta representación, la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, que determina el espectro de la teoría, se escribe

$$\int_{\mathbf{X}} \sum_a \left[-\frac{g^2}{2} \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{A}^a \cdot \delta \mathbf{A}^a} + \frac{1}{2g^2} \left(\mathbf{B}^a \right)^2 \right] \; \Psi \, [\, \mathbf{A} \,] = E \; \Psi \, [\, \mathbf{A} \,]$$

2.5 Ley de Gauss e invariancia gauge

La ley de Gauss, impuesta como una ligadura

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{\Pi} = 0$$

no se puede promocionar sin más a una identidad entre operadores, puesto que es incompatible con las relaciones de conmutación canónicas. Sin embargo, basta imponer su anulación sobre elementos de matriz en un subespacio de Hilbert,

$$\left\langle \; \Psi' \; \middle| \; \widehat{\mathbf{D}} \cdot \widehat{\mathbf{\Pi}} \; \middle| \; \Psi \; \right\rangle = 0$$

para $|\Psi\rangle, |\Psi'\,\rangle \in \mathcal{H}_{\rm ph}$, el espacio de Hilbert de estados físicos.

La interpretación física de esta ligadura es interesante. Su imposición punto a punto en $\mathbf{X}$,

$$\left(\mathbf{D} \; \frac{\delta}{\delta \mathbf{A}(\mathbf{x})} \right)^a \; \Psi \, [\; \mathbf{A} \;] = 0$$

es equivalente a

$$\int_{\mathbf{X}} \sum_a \varepsilon^a(\mathbf{x}) \; \left(\mathbf{D} \; \frac{\delta}{\delta \mathbf{A}(\mathbf{x})} \right)^a \; \Psi \, [\; \mathbf{A} \;] = 0$$

para cualquier función $\varepsilon^a(\mathbf{x})$ con soporte compacto en $\mathbf{X}$. Integrando por partes, se tiene

$$\int_{\mathbf{X}} \; \sum_a \left(\mathbf{D} \varepsilon \right)^a \frac{\delta}{\delta \mathbf{A}^a} \; \Psi \; [\; \mathbf{A} \;] = 0$$

o, equivalentemente, la funcional de ondas es invariante frente a transformaciones gauge "pequeñas", generadas por $\varepsilon(\mathbf{x})$, a primer orden en ε,

$$\Psi \;\; [\; \mathbf{A} + \mathbf{D} \, \varepsilon \;] = \Psi \;\; [\; \mathbf{A} \;] + O(\varepsilon^2)$$

Por tanto, obtenemos un resultado muy importante. La ley de Gauss, impuesta como un proyector sobre el espacio de Hilbert, es equivalente al requerimiento de invariance gauge con respecto a las transformaciones gauge que no ha sido fijadas por la elección $A^0 = 0$.

La condición de soporte compacto para $\varepsilon(\mathbf{x})$ está basada en el carácter local de la ligadura de Gauss. Por otra parte, sólo es físicamente necesario especificar las transformaciones gauge a nivel de observables locales. Si $\mathbf{X}$ es compacta, esto no impone condiciones particulares sobre las transformaciones gauge, excepto que éstas sean "infinitesimales", en el sentido de que su acción sobre los estados se construye perturbativamente en ε.

2.6 Fórmula funcional

La imposición de la ley de Gauss tiene consecuencias en la derivación de las fórmulas funcionales.

Consideremos la función de partición térmica a temperatura $1/\beta$,

$$Z(\beta) = \mathrm{Tr}\ \exp\left(-\beta\, \widehat{H}\right)$$

donde la traza se toma sobre el espacio de Hilbert de estados físicos. En el límite $\beta \to \infty$, este objeto produce la funcional generatriz de vacío.

La amplitud de transición entre estados con valor de $\mathbf{A}$ bien definido,

$$\left\langle\, \mathbf{A}' \,|\, e^{-it\widehat{H}}\ |\, \mathbf{A}\,\right\rangle$$

no es invariante gauge, dado que los $|\mathbf{A}\rangle$ no lo son. Para imponer la ley de Gauss, podemos simplemente incorporar un proyector, formalmente, una función delta en cada punto que impone la ligadura,

$$\widehat{P}_G \sim \prod_{\mathbf{x}} \delta(\,\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\,)$$

Introduciendo una representación integral de la delta en cada punto,

$$\widehat{P}_G \sim \int \mathcal{D}\Lambda\ \exp\left(i\int_{\mathbf{X}} \sum_a \Lambda^a\,(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E})^a\right)$$

....

2.7 Topología

El conjunto de aplicaciones del "espacio" en el grupo G no es en general conexo. Este hecho introduce un parámetro nuevo en la física de las teorías gauge. El conjunto de transformaciones gauge genuinas, por las cuales estamos "dividiendo" en la cuantización canónica, son de la forma $U = \exp(\varepsilon)$, con $\varepsilon = 0$ fuera de un compacto arbitrario, y son deformables continuamente en la identidad.

2.7.1 Cuantización funcional

- *Truco de Fadeev–Popov*

La cuantización funcional sigues las pautas ya explicadas en TCC–I en el caso de QED. Como entonces, introducimos una superposición gaussiana con anchura ξ de condiciones gauge

$$G^a(A) = \partial\cdot A^a - \omega^a = 0$$

Esto produce un lagrangiano efectivo con un término covariante pero no invariante gauge:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{gf}} = -\frac{1}{2\xi}\,(\partial^\mu A^a_\mu)^2$$

La diferencia es que ahora el jacobiano en el truco de Fadeev–Popov no es trivial, sino que depende explícitamente del campo gauge:

$$\frac{\delta G(A_{(\alpha)})}{\delta\,\alpha} = \frac{1}{g}\partial^\mu\, D_\mu = \frac{1}{g}\,\partial^\mu(\partial_\mu + igA_\mu)$$

Por consiguiente, no podemos absorberlo sin más en la normalización de la medida. Para introducir su efecto perturbativamente en un algoritmo de diagramas de Feynman, escribimos el determinante como una integral funcional sobre *escalares fermiónicos* (nótese la estadística exótica), que se denominan *fantasmas (ghosts) de Fadeev–Popov.*

$$\det\,(\partial\cdot D) \sim \int \mathcal{D}\,\overline{c}\,\mathcal{D}\,c\,\exp\left(\int \overline{c}\,\partial\cdot D\,c\right)$$

Obtenemos pues un lagrangiano efectivo del cual leer las reglas de Feynman por inspección directa:

$$\mathcal{L}_{\rm FP} = \mathcal{L}_{\rm YM} + \mathcal{L}_{\rm gf} + \mathcal{L}_{\rm ghost} + \mathcal{L}_{\rm materia} = -\frac{1}{4}{\rm Tr}\,|F|^2 - \frac{1}{2\xi}{\rm Tr}\;(\partial A)^2 - i\,\overline{c}\,\partial\cdot D\;c + \mathcal{L}_{\rm materia}$$

- *Reglas de Feynman*

  Escribimos las reglas de Feynman en espacio de momentos, resaltando los nuevos vértices y propagadores para los fantasmas.

- *Fantasmas y unitariedad*

  Para ayudar al estudiante a absorber la física detrás de los exóticos “fantasmas” de Fadeev–Popov, consideramos la más sencilla de sus manifestaciones, aparente incluso en el límite de acoplamiento cero $g\to 0$. En este caso, la integral funcional en el gauge de Feynman $\xi = 1$ se reduce a un determinante del operador de Laplace. Normalmente consideramos este determinante como parte de la normalización de la integral de caminos. Para darle entidad física podemos considerar la teoría en volumen finito V y capturar la dependencia funcional del determinante en el volume de la caja, que es entonces una cantidad física (su logaritmo es la energía del estado fundamental en la caja). Entonces, la función de partición tiene la forma

$$\text{lím}_{g\to 0}\mathcal{Z}(V) = \int \mathcal{D}A^a_\mu\;\mathcal{D}\,\overline{c}_a\;\mathcal{D}\,c^a\;\exp\left(i\int_V A^\mu_a(-\partial^2)\,A^a_\mu - i\,\overline{c}_a\,(-\partial^2)\,c^a\right) =$$

$$\left[\left({\rm det}_V\,[-\partial^2]\right)^{-4/2}\cdot\left({\rm det}_V\,[-\partial^2]\right)^{+1}\right]^{N^2-1} = \left({\rm det}_V^{-\frac{1}{2}}\;[-\partial^2]\right)^{2(N^2-1)}$$

  Es decir, aunque el campo libre A^a_μ cuenta como *cuatro* escalares por cada grado de libertad de color, los fantasmas cancelan justamente el efecto de dos de ellos. Esto está directamente relacionado con el hecho de que sólo dos de las polarizaciones de los campos gauge son físicas. Cuando introducimos los efectos de la constante de acoplamiento, los fantasmas interactúan de forma no trivial, pero el hecho de que cancelan el efecto de las polarizaciones no físicas de A_μ sigue siendo cierto en general.

- **Ejercicio de ampliación:** *BRST*

  La discusión del papel de los fantasmas en la restauración de unitariedad se simplifica mucho mediante el uso de la simetría BRST, una simetría fermiónica del lagrangiano de Fadeev–Popov, que aquí introducimos como una forma elegante de asegurar la no propagación de polarizaciones longitudinales en estados intermedios (versión no abeliana de la identidad de Ward).

  La simetría BRST se puede utilizar como punto de partida en la cuantización de teorías gauge, y es una herramienta de gran importancia en aplicaciones avanzadas de TCC. Por esta razón éste es un ejercicio de ampliación que merece atención especial por parte de aquellos alumnos de vocación más teórica.

2.8 Libertad asintótica

Entre las propiedades físicas características de las teorías gauge no abelianas, la más importante entre las que son accesibles al cálculo perturbativo es la *libertad ansintótica* (otras, tales como ruptura dinámica de simetría quiral o el confinamiento son efectos no perturbativos). Dependiendo del grupo gauge y la cantidad y tipo de materia, las teorías gauge pueden exhibir *antiapantallamiento* de la interacción gauge: la constante de acoplamiento efectiva $g_{\text{eff}}(\mu)$ a una escala de masas de referencia μ verifica

$$\text{lím}_{\mu\to\infty}\, g_{\text{eff}}(\mu) = 0$$

En otras palabras; los "quarks y gluones" de tales teorías se vuelven aproximadamente libres a muy alta energía. Dado que la teoría de perturbaciones es una buena aproximación si la constante de acoplamiento es pequeña, precisamente a alta energía esperamos que los diagramas de Feynman de la teoría gauge, derivados en la sección anterior, constituyan una herramienta útil de cálculo.

En esta sección del curso derivamos este resultado por un método que permite una interpretación física relativamente intuitiva del efecto en cuestión (el *antiapantallamiento*). Nos referimos al método del campo de fondo (*background field method*), que de hecho tiene gran interés teórico en sí mismo como formalismo general para estudiar la renormalización de las teorías gauge con un control elegante de la simetría.

2.8.1 Campo de fondo

Los elementos del método del campo de fondo se introducen antes. La idea es estudiar el generador funcional como función de un campo gauge de referencia $\mathcal{Z}(\overline{A})$, que se obtiene sin más que efectuar la sustitución $A \to A + \overline{A}$ en la integral funcional.

- *Fijación del gauge*

  Es conveniente trabajar con derivadas covariantes sin dependencia explícita del acoplamiento, lo cual se consigue absorbiendo éste en los campos. Considerando $\overline{A}$ fijo, el campo fluctuante A tiene una ley de transformación gauge

  $$A \to A + \overline{D}\alpha + [A, \alpha]$$

  donde α es el parámetro de una transformación infinitesimal, y $\overline{D}_\mu = \partial_\mu + i\overline{A}_\mu$ es la derivada covariante con respecto al campo de fondo. La fijación de esta simetría en la integral funcional

  $$\mathcal{Z}(\overline{A}) = \frac{1}{|G|}\int [\mathcal{D}\, A \cdots]\ \exp\Big(i\, I(\overline{A} + A, \psi, \ldots)\Big)$$

  se realiza de manera estándar, mediante el procedimiento de Fadeev–Popov, para llegar a un lagrangiano efectivo con los añadidos

  $$\mathcal{L}_{\text{gf}} + \mathcal{L}_{\text{ghost}} = -\frac{1}{2g^2\xi}\text{Tr}\ (\overline{D}A)^2 - i\,\overline{c}\,\overline{D}^2\, c$$

2.8.2 Función beta de QCD

- *Acción efectiva Wilsoniana*

  Nuestro objetivo será calcular la constante de acoplamiento efectiva definida de forma Wilsoniana como el coeficiente del término proporcional a $\int \overline{F}^2$ en la acción efectiva

  $$I_{\text{eff}}(\overline{A}) = -i \log \mathcal{Z}(\overline{A})$$

  En la aproximación cuadrática

  $$\mathcal{Z}(\overline{A}) = e^{iI(\overline{A})}\int \mathcal{D}\, A\, \mathcal{D}\,\overline{c}\, \mathcal{D}\, c \exp\left(i\int I^{(2)}(A) + \mathcal{O}(A^4)\right)$$

con $I^{(2)}$ un lagrangiano efectivo cuadrático en A que se simplifica considerablemente en el gauge de Feynman $\xi = 1$:

$$I^{(2)}(A) = I_{\rm ghost} - \frac{1}{2g^2} \int \text{Tr } (\overline{D}_\mu A_\mu)^2 + 2[A_\mu, A_\nu]\, \overline{F}^{\mu\nu}$$

En el sentido Wilsoniano:

$$\left[I_{\rm eff}(\overline{A})\right]_{\Lambda'} = -\frac{1}{4g^2_{\Lambda'}} \int \text{Tr}\, |\overline{F}|^2 + \ldots = -\frac{1}{4g^2_\Lambda} \int \text{Tr}\, |\overline{F}|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Lambda'}^{\Lambda} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}\, \overline{A}^a_\mu(-p)\, \Pi^{\mu\nu}_{ab}(p)\, \overline{A}^b_\nu(p) + \ldots$$

donde la autoenergía $\Pi_{\mu\nu}$ se calcula con los diagramas de Feynman derivados de $I^{(2)}(A)$ arriba.

- *La escala dinámica:* $\Lambda_{\rm QCD}$

Evaluando los diagramas a un *loop* en aproximación logarítmica, obtenemos

$$\frac{8\pi^2}{g^2_{\Lambda'}} = \frac{8\pi^2}{g^2_\Lambda} - b_0 \log \left(\frac{\Lambda}{\Lambda'}\right)$$

que equivale a una función beta

$$\beta(g) = \Lambda\, \frac{dg}{d\Lambda} = -\frac{g^3}{16\pi^2}\, b_0$$

donde b_0 viene dado, para una teoría $SU(N)$ con N_f fermiones de Dirac (sabores de quarks):

$$b_0 = \frac{11}{3}\, N - \frac{2}{3}\, N_f$$

Éste es el resultado fundamental. La función beta es *negativa* para N suficientemente alto. En QCD $N = 3$, pero basta que $N_f < 16$ para que tengamos libertad asintótica. La constante de acoplamiento efectiva a escala μ se puede escribir

$$\alpha_{\rm eff}(\mu) = \frac{g^2_{\rm eff}(\mu)}{4\pi} = \frac{2\pi}{b_0 \log\left(\mu/\Lambda_{\rm QCD}\right)}$$

donde $\Lambda_{\rm QCD}$ es la escala dinámicamente generada por la teoría. En el nivel de aproximación de un *loop* en el que nos encontramos, está relacionada con los parámetros microscópicos a escala del *cut-off* Λ por:

$$\Lambda_{\rm QCD} = \Lambda \exp\left(-\frac{8\pi^2}{b_0\, g^2_\Lambda}\right)$$

Por lo tanto, dado que $b_0 > 0$ en el caso asintóticamente libre, esta escala dinámica es *no perturbativa* desde el punto de vista de la teoría microscópica. Esto ilustra la potencia conceptual de la idea de libertad asintótica: deja la puerta abierta para que efectos no perturbativos modifiquen la física de bajas energías hasta el punto de exhibir por ejemplo la propiedad del confinamiento.

- *Interpretación heurística*

A la vista del comportamiento contrario en QED, en donde hemos derivado un efecto de apantallamiento de la constante de acoplamiento por el efecto de las fluctuaciones cuánticas (polarización del vacío), sería interesante para el alumno reconocer el origen físico de la diferencia. En el formalismo del campo de fondo, el problema consiste en determinar el efecto de las fluctuaciones de gluones virtuales en la energía de un "campo medio" $\overline{A}$. La interacción entre los gluones virtuales A_μ y este campo medio tiene dos componentes, a la vista de la acción $I^{(2)}(A, \overline{A})$ considerada anteriormente:

Tenemos un término "paramagnético"

$$\mathcal{L}_{\rm paramag} \sim \text{Tr } \overline{D}_\mu A_\mu\, \overline{D}^\mu A^\nu$$

que tiene análogo en QED, y representa la interacción del campo de fondo $\overline{A}$ con el "momento angular orbital" de los gluones virtuales. Este término contribuye al efecto de *apantallamiento*. Pero precisamente en el caso no abeliano, tenemos otro término:

$$\mathcal{L}_{\text{diamag}} \sim \text{Tr}\ \overline{F}_{\mu\nu}\,[A^\mu, A^\nu]$$

de tipo "diamagnético", que no tiene análogo en QED, debido a la aparición del conmutador. Este término representa el efecto del "diamagnetismo de Pauli", en el que el campo de fondo interacciona directamente con el espín de los gluones virtuales.

3 Ruptura espontánea de simetría

Iniciamos en la última sección del curso el estudio de la ruptura espontánea de simetrías en TCC. Dada la importancia de los principios de simetría en TCC, el hecho de que en ocasiones la física no manifieste la simetría de las ecuaciones de movimiento resulta un tanto sorprendente para los estudiantes en su primera exposición al tema. No en vano hemos hecho del teorema de Wigner para la representación de simetrías sobre el espacio de Hilbert uno de los pilares de nuestra presentación de la TCC en este curso.

Sin embargo, la ruptura de simetrías en TCC es absolutamente fundamental desde el punto de vista físico, pues ocurre a todos los niveles en física de partículas. Por una parte, las simetrías débilmente rotas (simetrías aproximadas) juegan un papel fenomenológico importante en la física de hadrones (ruptura débil de las simetrías de sabor). En el mismo contexto, la propia existencia de los piones y el éxito cualitativo del modelo quark se pueden atribuir a la ruptura espontánea de simetrías de sabor *quirales*.

Desde un punto de vista más fundamental, la posibilidad de que simetrías gauge se puedan romper espontáneamente es uno de las bases de nuestra actual comprensión de la física de partículas.

La situación puede resumirse pues en un aforismo: "la diversión siempre supone romper la simetría". La mayor parte del "folklore" relacionado con la ruptura de simetrías aparece en cualquier curso de fenomenología de partículas, tal como los cursos paralelos en este plan de estudios. El propósito de estos temas finales del curso es proporcionar al alumno una visión más profunda de este "floklore", mediante el estudio de las propiedades dinámicas de las TCC que lo hacen posible.

Desde un punto de vista más teórico, el estudiante puede comprobar la riqueza dinámica de la TCC, que puede ser muy diferente de la dictada por simple inspección del lagrangiano (reglas de Feynman). Genéricamente, estas propiedades no son accesibles al cálculo perturbativo, pero una explotación sistemática de las ligaduras impuestas por la propia simetría subyacente nos permite ir muy lejos en el cálculo de propiedades físicas de interés inmediato. El andamiaje básico de la TCC como una descripción universal para sistemas relativistas, y la generalidad de la idea de los "lagrangianos efectivos" hacen posible este estudio sistemático.

Nuestro tratamiento está dividido de forma natural en simetrías globales por una parte, y simetrías gauge por otra. Aunque la física en ambos casos es muy diferente, el formalismo es paralelo y la comprensión adecuada del caso gauge se nutre de intuición ganada en el estudio del caso global.

3.1 Simetrías globales y bosones de Goldstone

Para familiarizar al estudiante con el concepto de ruptura espontánea de simetría, así como con algunas de las técnicas que utilizaremos, una vez debidamente generalizadas, introducimos heurísticamente el problema de un sistema de espines (modelo de Ising de un sistema magnético).

La ruptura espontánea de simetría se explica como un resultado de la competición entre energía y entropía que da lugar a la estabilización sobre todo el sistema de una pequeña perturbación no simétrica aplicada sobre la frontera. Tal estabilización se produce sólo en el límite de volumen infinito.

3.1.1 Teorema de Nambu–Goldstone

Uno de los teoremas básicos de la TCC. Comenzamos con una derivación de carácter general, basada en el hecho de que, si una serie de cargas actúan no trivialmente sobre el estado fundamental: $\widehat{Q}^a|\text{VAC}\rangle \neq 0$, podemos hacer rotaciones locales del vacío, con un coste energético tan pequeño como queramos: es decir, tenemos un campo no masivo por cada carga independiente que no aniquila el vacío.

- *Análisis clásico*

  Mostramos que una teoría con potencial de interacción $V(\phi)$ tiene "direcciones planas" en el espacio de campos en torno a una configuración mínima ϕ_0 que rompe una simetría global: $\delta_\alpha \phi = \alpha_a T^a \phi \neq 0$ en $\phi = \phi_0$. Esto se prueba sin más que tomar derivadas en la relación que establece la simetría del potencial frente a las transformaciones $V(\phi) = V(\phi + \delta_\alpha \phi)$. Dado que la matriz de masas es la segunda derivada del potencial, se obtiene

  $$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial\phi\,\partial\phi}\right|_{\phi=\phi_0} \cdot \delta_\alpha \phi_0 = M^2(\phi_0) \cdot (\alpha \cdot T\phi_0) = 0$$

  Por lo tanto, por cada generador que no deja la configuración mínima invariante: $T^a\phi_0 \neq 0$, tenemos un autovalor nulo de la matriz de masas: un bosón de Goldstone.

- *Caso general*

  Presentamos la prueba habitual en libros de texto, basada en la representación espectral de un conmutador con un operador que exhibe la ruptura de simetría:

  $$0 \neq \langle \left[\widehat{Q}_a, \widehat{\mathcal{O}}\right] \rangle_{\mathrm{VAC}}$$

  Esto nos lleva a que la corriente Noether asociada a la simetría en cuestión crea estados de partícula –los bosones de Goldstone– a partir del vacío, con los números cuánticos de la componente temporal:

  $$\langle B \left| \widehat{J}_0 \right| \mathrm{VAC} \rangle \neq 0.$$

  Por tanto, por invariancia Lorentz,

  $$\langle B_k(p) \left| \widehat{J}^a_\mu(x) \right| \mathrm{VAC} \rangle = -i\, p_\mu\, F^a_k\, e^{-ipx}$$

  para ciertas constantes F^a_k. Dado que la corriente Noether es conservada como operador: $\partial_\mu \widehat{J}^\mu = 0$, aplicando una derivada a la ecuación anterior, resulta que el bosón de Goldstone tiene masa cero, $p^2 = m_B^2 = 0$, siempre que su acoplamiento al vacío $F \neq 0$.

  Ahora podemos conectar ambas discusiones, identificando los acoplamientos F en el ejemplo clásico anterior:

  $$F^a_k = (T^a \cdot \phi_0)_k$$

- *Un sólo vacío*

  Introducimos un comentario sobre una sutileza frecuentemente malinterpretada a causa de lo engañoso del argumento clásico basado en la forma del potencial. No es cierto que existan una multitud de "vacíos" degenerados en la teoría cuántica. En realidad, si el sistema tiene un número finito de grados de libertad, el estado fundamental se realiza en modo de Wigner–Weyl, tal como un rotor cuántico por ejemplo. Si el sistema tiene un número infinito de grados de libertad, el estado fundamental puede romper la simetría, pues las amplitudes de mezcla entre éste y los demás degenerados en energía se anulan. En este caso, el vacío es realmente único, ya que los operadores que lo conectan con los "adyacentes" –las cargas– no son normalizables. La norma de $\widehat{Q}|\mathrm{VAC}\rangle$ es infinita como se comprueba de:

  $$\langle \mathrm{VAC} \left| \widehat{Q}^2 \right| \mathrm{VAC} \rangle = \int_{\mathbf{x}} \langle \mathrm{VAC} \left| \widehat{Q}\, \widehat{J}_0(\mathbf{x}) \right| \mathrm{VAC} \rangle \propto \text{Volumen} \to \infty$$

  en el límite de volumen infinito. Por esta razón debemos ser cuidadosos y definir los bosones de Goldstone en términos locales, como la acción de las *corrientes* –en vez de la acción de la carga Noether– sobre el vacío.

3.1.2 Acción efectiva y potencial efectivo

Puesto que el criterio de ruptura espontánea de la simetría consiste en que un operador no invariante adquiera un valor esperado en el vacío: $\langle\widehat{\phi}\rangle_{\rm VAC} \neq 0$, la cuestión es si existe un procedimiento para calcular este objeto en la teoría cuántica, realizando un ejercicio de minimización semejante al que determina ϕ_0 en nuestro ejemplo clásico anterior.

- *Acción efectiva y diagramas 1PI*

  La solución a este problema está contenida en realidad en el curso TCC–I. El generador funcional de amplitudes 1PI, $\Gamma(\varphi)$, definido entonces como la transformada de Legendre del generador conexo $\mathcal{W}(J)$, es función de un campo clásico $\varphi(x)$ que verifica:

  $$\varphi(x) = \frac{\delta\,\mathcal{W}}{\delta J(x)} = \frac{\langle{\rm VAC},+\infty|\widehat{\phi}(x)|{\rm VAC},-\infty\rangle_J}{\langle{\rm VAC},+\infty|{\rm VAC},-\infty\rangle_J} = \frac{\langle\widehat{\phi}(x)\rangle_J}{\langle\hat{1}\rangle_J}.$$

  En el límite $J\to 0$, la función $\varphi(x)$ calcula el valor esperado en el vacío del operador $\widehat{\phi}(x)$. La otra relación definitoria de la transformada de Legendre:

  $$\frac{\delta\,\Gamma}{\delta\,\varphi} = -J \to 0$$

  implica entonces que podemos *calcular* $\varphi = \langle\widehat{\phi}\rangle = \phi_0$ resolviendo las ecuaciones de movimiento de $\Gamma(\varphi)$, tratada como una acción efectiva. En esta sección resulta muy útil explotar la analogía con la termodinámica: el uso de la energía libre de Gibbs para calcular la magnetización espontánea mediante un problema de minimización.

- *Potencial efectivo*

  De nuevo, para discusiones de la estructura del vacío, la simetría Poincaré implica que podemos restringirnos a configuraciones constantes. Basta pues considerar el *potencial efectivo*:

  $$\Gamma(\varphi_{\rm const}) = -{\rm Volumen}\times V_{\rm eff}(\varphi_{\rm const})$$

  Como la función a dos puntos $(1PI)_2 = \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\varphi\delta\varphi}$ es el inverseo del propagador exacto, es igual a M^2 a momento cero (campos constantes). De aquí obtenemos que el espectro de masas exacto se puede obtener diagonalizando la matriz de la segunda derivada del potencial $\partial^2_\phi\, V_{\rm eff}(\langle\widehat{\phi}\rangle)$. En otras palabras; la versión clásica del teorema de Goldstone es exacta si se formula en términos del potencial efectivo.

- **Ejercicio de ampliación:** *Cálculo del potencial efectivo a un loop*

  La sistemática del cálculo del potencial efectivo de Coleman–Weinberg a un *loop* se discute en este ejercicio de ampliación. Consideramos la teoría renormalizable más general incluyendo escalares, fermiones de espín $\frac{1}{2}$ y campos gauge para obtener:

  $$V_{\rm eff}(\varphi) = V_{cl}(\varphi) + \sum_{\rm especies} C_i {\rm Tr}\,\left[\mathcal{M}_i^2(\varphi)\right]^2\,\log\left(\mathcal{M}_i^2(\varphi)/\mu^2\right)$$

3.1.3 Lagrangianos quirales y piones

En esta sección introducimos la aplicación más famosa del teorema de Goldstone: la descripción de los piones en QCD. El estudiante ha sido expuesto a la fenomenología hadrónica, incluyendo las simetrías de sabor, en el curso de Física de Partículas. Aquí pretendemos completar el tratamiento mediante la introducción de los aspectos de TCC que están detrás de esta fenomenología. Presentando la física hadrónica de bajas energías como una aplicación de la física de bosones de Goldstone, mostramos que la dinámica de QCD a bajas energías es totalmente diferente de la que esperaríamos según la teoría de perturbaciones.

La idea principal a comunicar es que el conocimiento detallado de la dinámica no es imprescindible para obtener resultados, si utilizamos con astucia la información contenida en las simetrías del problema.

- *Estructura de sabor en QCD*

Se introduce la estructura de las simetrías de sabor en QCD, tal como aparecen al nivel del lagrangiano de quarks y gluones:

$$\mathcal{L}_{\rm QCD} = -\frac{1}{4}{\rm Tr}\,|F|^2 + \sum_f \bar{q}_f\,(i\not{D} - m_f)\,q_f$$

donde hemos omitido los índices de color. Si N_f masas son iguales, tenemos una simetría global $U(N_f)$ que rota los espinores de Dirac. Si N_f masas son nulas $m_f = 0$, entonces la rotación de las componentes Weyl de cada sabor de quark se puede realizar independientemente, y tenemos $U(N_f) \times U(N_f)$ como grupo de simetría global. En la práctica, el número de quarks aproximadamente quirales es $N_f = 2$, el sistema u, d, o como mucho $N_f = 3$ si incluimos el quark extraño. Para los demás, las masas son demasiado grandes como para aproximarlas por cero.

- *Piones como bosones de Goldstone*

Los piones se introducen como los bosones de Goldstone asociados a la ruptura espontánea de la parte *axial* de la simetría anteriormente considerada en el sector u, d. Es decir, si las corrientes del $SU(2)_{\rm axial}$ son

$$j_5^{\mu\,a} = \overline{Q}\,\gamma^\mu\gamma^5\,\sigma^a\,Q$$

con $Q = (u, d)$, los piones se definen a la LSZ como

$$\langle \pi_a(p)\,\big|\hat{j}_5^{\mu\,b}(x)\big|\,{\rm VAC}\rangle = -i\,\delta_a^b\,p^\mu\,f_\pi\,e^{-ipx}$$

en el límite quiral $m_u = m_d = 0$, que a su vez implica $m_\pi = 0$.

- *Lagrangianos quirales*

La forma más eficiente de estudiar las interacciones entre bosones de Goldstone es escribir un lagrangiano efectivo, válido en el límite de baja energía. Aquí consideramos las reglas que llevan a la construcción de este lagrangiano efectivo.

Si el bilineal de quarks toma un valor esperado en el vacío:

$$0 \neq \langle\widehat{\overline{Q}}\widehat{Q}\rangle_{\rm VAC} \equiv \langle\overline{Q}Q\rangle = \langle\overline{Q}_L Q_R + \overline{Q}_R Q_L\rangle$$

el grupo $U(2)_L \times U(2)_R$ se rompe al diagonal $U(2)_{\rm vector}$, que consta de las transformaciones $U_L = U_R$. El resto, $U(2)_{\rm axial}$, está espontáneamente roto por el valor esperado anterior y el conjunto de configuraciones de la forma anterior es isomorfo al grupo $U(2)$ mismo. Así que caracterizamos los bosones de Goldstone en términos de una matriz unitaria Σ. El lagrangiano hasta dos derivadas es

$$\mathcal{L}_{\rm quiral} = \frac{f_\pi}{4}{\rm Tr}\;\partial^\mu\Sigma\,\partial_\mu\Sigma^{-1} + \mathcal{O}(\partial^4).$$

Se considera la adición de pequeñas masas para los quarks, y la correspondiente masa de los piones que se genera:

$$m_\pi^2 = \frac{m_u + m_d}{f_\pi}\;\big|\langle\overline{Q}Q\rangle\big|$$

Esta importante ecuación premite derivar el orden de magnitud de las masas microscópicas de los quarks, sabiendo $f_\pi \sim 93$ MeV y el valor del condensado quark–antiquark en el vacío, $\langle\overline{Q}Q\rangle \sim 400$ MeV. Resulta $m_u + m_d \sim 10$ MeV.

A continuación ilustramos la potencia del método de los lagrangianos efectivos, obteniendo fácilmente las razones de masas microscópicas de los quarks como función de las masas de los piones y kaones, y las relaciones de Gell-Mann–Okubo.

- *Anomalía axial*

Comentamos el hecho de que este tratamiento sólo es estrictamente válido para el $SU(2)_{\rm axial}$, pues la componente de fase global $U(1)_{\rm axial}$ es anómala.

- **Ejercicio de ampliación:** *Cálculo de la anomalía axial*

En este ejercicio invitamos al alumno a repetir el cálculo de la anomalía axial por el transparente método de Fujikawa: calculando el jacobiano de la integral funcional frente a transformaciones quirales $\psi \to e^{-i\alpha\gamma_5}\psi$. Para una simetría quiral general el resultado es

$$\partial^\mu J^5_{a\,\mu} = -\frac{g^2}{16\pi^2}\,\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F^c_{\alpha\beta}F^d_{\mu\nu}\ \mathrm{Tr}\,(T^a\{T^c,T^d\})$$

Mostramos cómo la anomalía axial en el $U(1)_{\mathrm{axial}}$ de QCD contribuye al proceso $\pi^0 \to \gamma\,\gamma$. Por el contrario, comentamos sobre la inconsistencia de las teorías en las que la simetría gauge es anómala.

3.2 Simetrías gauge y mecanismo de Higgs

La situación es totalmente diferente cuando es una simetría gauge la que se rompe espontáneamente. En este caso, los bosones de Goldstone desaparecen como partículas no masivas del espectro. Quedan incorporados como las componentes longitudinales de los bosones gauge, que ahora son *masivos*. Esta particular "violación" del teorema de Goldstone forma la base de nuestro entendimiento actual sobre la teoría de las interacciones débiles.

El propio concepto de "ruptura de la simetría gauge" se tratará de cualificar en la medida de lo posible, pues la simetría gauge no se "rompe" en absoluto. La discusión basada en el mecanismo de Higgs hace uso de una elección particular de gauge que parece sugerir una ruptura efectiva de la simetría gauge, aunque en realidad se trata solamente de una particular elección de gauge. Esto ha dado lugar históricamente a uno de los mayores abusos del lenguaje en física de partículas. En este curso entendemos por ruptura espontánea de simetría gauge simplemente el hecho de que aparezcan bosones vectoriales *masivos* cuando un sistema con bosones de Goldstone (por tanto con ruptura espontánea de simetría global) se acopla débilmente a un campo gauge.

3.2.1 Mecanismo de Higgs

En el estudio del mecanismo de Higgs, trataremos de dar una idea lo más general posible de los elementos en juego. El fenómeno característico del mecanismo de Higgs: los bosones gauge "se comen" a los bosones de Goldstone y se vuelven masivos, se considera antes con la mayor generalidad, aún cuando la discusión detallada y más rigurosa se realizará en el lenguaje lagrangiano habitual, estando por tanto constreñido a situaciones perturbativas.

- *Análisis no perturbativo*

  Dada la ecuación fundamental que define los bosones de Goldstone en términos de los elementos de matriz de la corriente Noether (nos restringimos por simplicidad al caso de una simetría $U(1)$):

  $$\langle B(p)\left|\widehat{J}^\mu(x)\right|\mathrm{VAC}\rangle = -i\,F\,p^\mu\,e^{-ipx}$$

  podemos identificar, a efectos de física *on shell*, en el sentido de la reducción LSZ estudiada en TCC–I, los campos de Goldstone y la corriente de acuerdo con

  $$J^\mu(x) \to F\,\partial^\mu B(x) + \mathcal{O}(\partial^2)$$

  los términos despreciados indican que esta idenficación es válida a baja energía. La interacción de los campos gauge con los bosones de Goldstone está pues caracterizada en términos del acoplamiento mínimo a la corriente de Noether: $\mathcal{L} \sim J_\mu A^\mu$, lo que proporciona un vértice efectivo

  $$B(p)\ \ ----\bullet----\ \ A^\mu(-p)\ \ =\ \ -i\,g\,F\,p^\mu$$

  Con esta información podemos calcular la contribución singular a la autoenergía del campo gauge, debida al intercambio de un bosón de Goldstone:

  $$\Pi_{\mu\nu}(p) = \langle\widehat{A}_\mu(p)\,\widehat{A}_\nu(-p)\rangle_{\mathrm{amputada}} = \langle\widehat{J}_\mu(p)\,\widehat{J}_\nu(-p)\rangle = -i\,g\,F\,p_\mu\cdot\frac{i}{p^2}\cdot i\,g\,F\,p_\nu + \dots$$

Dado que la corriente es conservada: $p^\mu \langle \widehat{J}_\mu(p) \widehat{J}_\nu(-p)\rangle = 0$, la autoenergía ha de ser proporcional al tensor $(p_\mu p_\nu - \eta_{\mu\nu} p^2)$. Por lo tanto, obtenemos una autoenergía característica de un vector masivo

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = -i \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \left(M_A^2 + \mathcal{O}(p^2) \right)$$

con masa

$$M_A = g\, F$$

Éste es el resultado fundamental. Esta derivación deja claro al alumno que el mecanismo de Higgs, en el sentido de que los bosones de Goldstone se incorporan como los grados de libertad longitudinales de los campos gauge masivos, es totalmente general. Una comprensión más detallada se obtiene sin embargo en el caso en que la ruptura de simetría se puede entender en términos del lagrangiano.

- *Argumento lagrangiano*

  Dado que hemos relacionado la constante de acoplamiento entre la corriente Noether y el bosón de Goldstone F, con el valor esperado del campo que rompe la simetría: $F = \phi_0 = \langle \widehat{\phi} \rangle$, esperamos que en un modelo lagrangiano la masa del campo gauge y el valor esperado del campo escalar estén relacionados por

  $$M_A = g\, \langle \widehat{\phi} \rangle$$

  En este caso, $\widehat{\phi}$ es un *campo de Higgs*. Un modelo característico es un campo escalar complejo acoplado a un fotón, con simetría gauge $U(1)$:

  $$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\, |F|^2 + |D_\mu \phi|^2 - V(\phi)$$

  y con un potencial que favorece energéticamente un valor no nulo de ϕ, por ejemplo

  $$V(\phi) = -\mu^2\, \phi^* \phi + \frac{\lambda}{2} (\phi^* \phi)^2$$

  con $\mu^2, \lambda > 0$. Entonces el mínimo está en $\phi_0 = |\mu|/\sqrt{\lambda}$, o cualquier otro valor relacionado por una transformación de fase $U(1)$. Asumiendo que $\langle \widehat{\phi} \rangle = \phi_0$ y desarrollando el lagrangiano en torno a este valor, se obtiene una masa efectiva para el fotón $M_A = g\, \phi_0$. De los dos grados de libertad del escalar complejo, $\phi = \rho\, e^{i\theta}$, uno (la fase, θ) se incorpora como la polarización longitudinal del fotón masivo, mientras que el otro (el radio, ρ), adquiere una masa $m_\rho \sim \mu$ dependiente de los detalles del potencial.

  Completamos la presentación, por otra parte muy estándar, interpretando este lagrangiano como un modelo de superconductividad.

- *Sistemática del mecanismo de Higgs*

  Aquí consideramos la situación general de un sistema de escalares con grupo gauge G parcialmente roto a un subgrupo H. Se obtiene la fórmula general para la matriz de masas

  $$M^2_{ab}(A) = g^2\, (T^a \phi_0)_i\, (T^b \phi_0)_i$$

3.2.2 El Modelo Estándar

Finalmente, en este último capítulo del curso, aplicamos la estructura general sobre ruptura espontánea de simetrías gauge al caso del sector electrodébil $SU(2) \times U(1)$ del modelo estándar. Puesto que el modelo estándar se estudia en la asignatura paralela de Física de Partículas, el grado de detalle con el que desarrollamos este último tema del curso dependerá en gran medida del tiempo disponible.

En una primera aproximación, cubriremos aquellos aspectos puramente “lagrangianos” del modelo, tales como la obtención de las masas de los bosones electrodébiles $W^\pm, Z^0$, la relación con el valor esperado del bosón de Higgs, y con la constante fenomenológica de Fermi $G_F = \sqrt{2} g^2 / 8 M_W^2$. También la estructura de masas y mezclas de los fermiones, como resultado de los acoplamientos de tipo Yukawa al Higgs.

Finalmente, consideramos los coeficientes de las anomalías gauge del modelo estándar $\mathrm{Tr}\, T^a\{T^b, T^c\}$, con T^a generadores arbirarios de $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ en las representaciones que aparecen en el Modelo Estándar. Por inspección demostramos que todas las anomalías gauge se cancelan adecuadamente. Por ejemplo, para la hipercarga:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{\mathrm{L}} Y - \mathrm{Tr}_{\mathrm{R}} Y &= \left[3\cdot 2\left(\frac{1}{6}\right)^3\right]_{(u,d)_{\mathrm{L}}} + \left[2\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]_{(\nu,e)_{\mathrm{L}}} - \left[3\left(-\frac{2}{3}\right)^3\right]_{u_{\mathrm{R}}} - \left[3\left(-\frac{1}{3}\right)^3\right]_{d_{\mathrm{R}}} - \left[(-1)^3\right]_{e_{\mathrm{R}}} \\ &= \left(-\frac{3}{4}\right)_{\mathrm{quarks}} + \left(\frac{3}{4}\right)_{\mathrm{leptones}} = 0\end{aligned}$$

Éste es un ejercicio muy interesante para acostumbrar al alumno a la estructura de números cuánticos del Modelo Estándar, así como la *perversidad quiral* de estas asignaciones.

Epílogo: el arte de las estimaciones

Aún cuando las estimaciones y los modelos simplificados son el punto de partida de toda investigación en física, los estudiantes suelen sufrir una cierta infatuación con el formalismo que les lleva a desdeñar los argumentos físicos intuitivos. Si bien el rigor tiene su importancia, nos es menos cierto que, incluso en el área de la física matemática, la heurística es más valiosa que la axiomática. En este curso hemos tratado de presentar la TCC como una disciplina que emerge de forma natural a partir de los elementos básicos de la Mecánica Cuántica y la Relatividad Especial. Hemos tratado de resaltar la claridad conceptual y la capacidad de efectuar cálculos concretos, sobre las delicadezas del estatus matemático de muchas de las fórmulas que escribimos.

Con objeto de rescatar en los estudiantes el gusto por las estimaciones y los modelos simplificados, incluimos al final del curso una o dos clases llenas de "trucos del oficio" que consisten esencialmente en el uso hábil de las estimaciones de órdenes de magnitud basadas en análisis dimensional y algunas fórmulas básicas de la teoría.

Obtenemos las cantidades físicas básicas de la física atómica (radio de Bohr, energía típica de ionización) y el orden de magnitud de efectos relativistas.

A continuación estimamos algunas secciones eficaces elementales de QED, que se han estudiado en detalle durante el curso: Compton, procesos de aniquilación, etc.

Finalmente, consideraremos algunos procesos típicos en el modelo estándar que han dominado la física experimental de altas energías en los últimos años: los procesos básicos de las colisiones e^+e^- en LEP y la producción de quarks *top*, así como los procesos de colisión inelástica de neutrinos sobre núcleos.