Preprint typeset in JHEP style - HYPER VERSION

IFT-UAM/CSIC-08

DRAFT. Mecánica Teórica

Enrique Álvarez

Instituto de Física Teórica UAM/CSIC and Departamento de Física Teórica
Universidad Autónoma de Madrid, E-28049–Madrid, Spain
E-mail: enrique.alvarez@uam.es

Abstract:

Contents

---

1. Ecuaciones de Lagrange y de Hamilton.

En un sistema de N partículas con $K \leq N$ ligaduras

$$f_A(\vec{x}_a, t) = 0 \tag{1.1}$$

$(a = 1 \ldots N,\ A = 1 \ldots K)$. Las ligaduras definen una hipersuperficie de dimension $n \equiv 3N - K$ del espacio coordenado total de dimension 3N. La segunda ley de Newton implica que

$$m\ddot{\vec{x}}_a = \vec{F}_a + \vec{R}_a \tag{1.2}$$

donde las fuerzas externas $\vec{F}_a$ se suponen conocidas, pero las reacciones de las ligaduras, $\vec{R}_a$ no. Este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) es indeterminado, ya que consiste en 3N+K ecuaciones con 6N incógnitas (las $\vec{x}_a$ y las $\vec{R}_a$).

Llamaremos *ligaduras ideales* a aquellas cuyas reacciones son normales a la hipersuperficie definida por las ligaduras.

$$\vec{R}_a = \sum_A \lambda_A \vec{\nabla}_a f_A \tag{1.3}$$

de forma que si proyectamos con vectores tangentes (que satisfacen que $\sum_a \vec{\tau}_a \vec{\nabla}_a f_I = 0$) entonces

$$\sum_a \vec{R}_a \vec{\tau}_a = \sum_{Aa} \lambda_A \vec{\nabla}_a f_A \vec{\tau}_a = 0 \tag{1.4}$$

Introducimos ahora *coordenadas generalizadas*, tales que

$$\begin{aligned} q^i &= q^i(\vec{x}_a, t) \\ q^{n+B} &= g^B(f_1, \ldots f_K) \end{aligned} \tag{1.5}$$

Supondremos que el jacobiano no se anula, de forma que el cambio es invertible, y, en particular,

$$f_A = f_A(q^{n+1} \dots q^{n+K}) \tag{1.6}$$

de forma que si se satisfacen las ligaduras las K últimas coordenadas generalizadas son constantes. Las coordenadas $q^i \in \mathbb{Q}$ $(i = 1 \dots n)$ engendran el *espacio de configuración* $\mathbb{Q}$.En estas condiciones, los vectores tangentes vienen dados por

$$\vec{\tau}_a^i = \frac{\partial \vec{x}_a}{\partial q^i} \tag{1.7}$$

ya que

$$\sum_a \frac{\partial \vec{x}_a}{\partial q^i} \vec{\nabla}_a f_I = \frac{\partial f_I}{\partial q^i} = 0 \tag{1.8}$$

(ya que las funciones f_I sólo dependen de las últimas K coordenadas $q^{n+1}) \dots q^{n+K}$. La proyeccion tangente de la segunda ley de Newton reza

$$\sum_a \left(m_a \ddot{\vec{x}}_a - \vec{F}_a \right) \frac{\partial \vec{x}_a}{\partial q^i} = 0 \tag{1.9}$$

Y trabajando las derivadas, se demuestra sin dificultad que cuando las fuerzas externas derivan de un potencial esto es equivalente a

$$\sum_a \frac{d}{dt} \left(m_a \dot{\vec{x}}_a \frac{\partial \dot{\vec{x}}_a}{\partial \dot{q}^i} \right) - m_a \dot{\vec{x}}_a \frac{\partial \dot{\vec{x}}_a}{\partial q^i} = 0 \tag{1.10}$$

que se puede expresar en términos de la energía cinética

$$T \equiv \frac{1}{2} \sum_a m_a \dot{\vec{x}}_a^2 \tag{1.11}$$

en la forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} + \frac{\partial V}{\partial q^i} = 0 \tag{1.12}$$

e intropduciendo el lagrangiano,

$$L(q, \dot{q}) \equiv T - V \tag{1.13}$$

en la forma de *ecuaciones de Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \tag{1.14}$$

EJERCICIO (1.1) Idealice un patín como dos puntos materiales unidos por una varilla rígida de masa despreciable
Escriba la ligadura correspondiente al movimiento plano.

EJERCICIO (1.2)
Escriba los desplazamientos correspondientes a una partícula que se mueve sobre la superficie de una esfera cuyo radio es $R = t$

EJERCICIO (1.3) Escriba las ligaduras en el ejercicio anterior

EJERCICIO (1.4) Estudie el movimiento de una partícula constreñida a moverse sobre una superficie esférica.

EJERCICIO (1.5) Escriba la energía cinética de un péndulo esférico.

EJERCICIO (1.6)
Escriba el lagrangiano correspondiente al problema newtoniano de dos cuerpos.

EJERCICIO (1.7)
Escriba el lagrangiano correspondiente al problema newtoniano de tres cuerpos.
Estudie el límite llamado *restringido*
en el que $\frac{m_3}{m_1} << 1$, y $\frac{m_3}{m_2} << 1$

EJERCICIO (1.8)
Demuestre que la ecuación de Lagrange para un péndulo simple es:
$\ddot{\phi} + \frac{g}{l} \sin \phi = 0$. Resuelva la ecuación.

EJERCICIO (1.9)
Considere el lagrangiano cuadr
'atico en las velocidades
$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q)$. Escriba otro lagrangiano equivalente lineal en las velocidades.

Es fácil verificar que las ecuaciones de Lagrange implican que la cantidad

$$E \equiv \sum_i \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L \tag{1.15}$$

satisface

$$\dot{E} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{1.16}$$

por lo que se conserva cuando el potencial no depende explícitamente del tiempo.

EJERCICIO (1.10)
Escriba la expresion de la energía cinética en la forma
$T = a + \sum_i b_i \dot{q}^i + \sum_{ij} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j$
Demuestre que si $\frac{\partial \vec{x}_a}{\partial t} = 0$
entonces T es una función homogénea de grado dos de las velocidades generalizadas, por lo que se puede escribir $E = T + V$

No es difícil demostrar que las ecuaciones de Lagrange son invariantes bajo *transformaciones puntuales*, $\bar{q} = \bar{q}(q)$. Partiendo de que

$$\bar{L}(\bar{q}) = L(q) \tag{1.17}$$

un cálculo sencillo conduce a

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{q}}^i} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{q}^i} \right) = \sum_j \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial L}{\partial q^j} \right) \frac{\partial q^j}{\partial \bar{q}^i} \tag{1.18}$$

EJERCICIO (1.11)
Estudie el sistema compuesto por una cuenta que se mueve sin rozamiento sobre un aro que gira com velocidad angular Ω conrespecto a un eje vertical

1.1 Principio de mínima acción

Definimos un funcional de las trayectorias que para $t = t_i$ pasan por $q_i \in \mathbb{Q}$, y para $t = t_f$ por $q_f \in \mathbb{Q}$:

$$S(t_i, q_i; t_f, q_f; q(t)) \equiv \int_{t_i}^{t_f} L(q, \dot{q}, t) dt \tag{1.19}$$

Las variaciones que estamos considerando satisfacen todas que

$$\delta q(t = t_i) = \delta q(t = t_f) = 0 \tag{1.20}$$

así como

$$\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q \tag{1.21}$$

La variación de la acción está definida como aquel funcional lineal δS tal que

$$S(q + \delta q) - S(q) \equiv \delta S(\delta q) + \epsilon ||\delta q|| \tag{1.22}$$

donde $\epsilon \to 0$ cuando $||\delta q|| \to 0$, donde, por ejemplo $||f||_n \equiv \sum_{i=0}^n max\,|f^{(i)}(x)|$.

Taylor implica:

$$
\delta S(\delta q) = \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta \dot{q}^i \right) =
$$

$$
\int_{t_i}^{t_f} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i \right) \tag{1.23}
$$

El término en derivada total se integra a cero en virtud de las condiciones de contorno. La condición para que el funcional definido por el lagrangiano en las condiciones anteriormente estipuladas es precisamente que se satisfagan las ecuaciones de Lagrange. Es éste uno de los principios más profundos y misteriosos de la física.

Estas ecuaciones para un funcional arbitrario se llaman ecuaciones de Euler.El estudio de la condición necesaria y suficiente para un mínimo necesita de la segunda variación, y se puede encontrar en el libro de Gelfand y Fomin.

1.2 El teorema de Noether

En algunos casos sucede que el lagrangiano es invariante bajo una transformación concreta (que salvo casos excepcionales, no forma parte de las variaciones estudiadas en el apartado anterior). En este caso diremos que el lagrangiano posee una *simetría*.

EJERCICIO (1.12)
Estudie simetrías del siguiente lagrangiano
$L = \frac{1}{2}\sum_1^3 m\left(\dot{q}^i\right)^2 - \sum_1^3 k^2\left(q^i\right)^2$

La variación de la acción (que es nula por hipótesis) será:

$$
0 = \delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i \right) \tag{1.24}
$$

No es posible eliminar la derivada total en general. Lo que se puede decir es que si se satisfacen las ecuaciones de Lagrange, entonces

$$
0 = \delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i \right) \tag{1.25}
$$

Como esta igualdad no depende de los valores extremos, es necesario que

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}\delta \dot{q}^i \right) = 0 \tag{1.26}
$$

es decir, que hay una *integral primera* o *constante del movimiento* cuyo valor no cambia en virtud de las ecuaciones del movimiento:

$$
Q = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i \tag{1.27}
$$

Hay casos más complicados en los que el lagrangiano depende de derivadas segundas de las coordenadas generalizadas, etc. En esos casos resulta útil escribir

$$\delta q^i = \epsilon T^i_j q^j \tag{1.28}$$

Y si existe simetría cuando $\dot{\epsilon} = 0$ diremos que la simetría es *global*. En el caso general resulta útil efectuar la transformación en el lagrangiano en el caso en que el parámetro depende del tiempo. Aunque no es una simetría, la variación de la acción ha de ser proporcional a la integral de la derivada del parámetro (dado que sabemos que es invariante cuando el parámetro es independiente del tiempo).

$$0 = \delta S = \int dt \dot{\epsilon} Q_N(q, \dot{q}) = \int dt \frac{d}{dt} \left(\epsilon Q_N(q, \dot{q})\right) - \epsilon \frac{d}{dt} Q_N(q, \dot{q}) \tag{1.29}$$

Como la dependencia temporal del parámetro ϵ es ahora arbitraria, es posible escogerlo de forma que

$$\epsilon(t_i) = \epsilon(t_f) = 0 \tag{1.30}$$

lo cual permite eliminar el término en derivada total. Por otra parte, con esta elección de función ϵ, la variación es una de las que están comprendidas en el PMA, de forma que la variación de la acción tiene que anularse. En conclusión.

$$\frac{d}{dt} Q_N = 0 \tag{1.31}$$

EJERCICIO (1.13)
Calcular la carga de Noether para
$L = \sum_i \ddot{q}^i q^i$

2. Hamiltoniano

2.1 La transformación de Legendre

Hechos de la vida: Partimos de una funcion de n variables, x, y de otras variables que no participan en la jugada, que denotamos por a:

$$f(x,a) \tag{2.1}$$

Introducimos unas variables

$$y_i \equiv \frac{\partial f}{\partial x^i} \tag{2.2}$$

Y definimos una nueva función

$$g(y,a) \equiv \sum x^i y_i - f \tag{2.3}$$

Es evidente que

$$\frac{\partial g}{\partial y_i} = x^i + \sum_k y_k \frac{\partial x^k}{\partial y_i} - \sum_l \frac{\partial f}{\partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial y_i} = x^i \tag{2.4}$$

Y respecto de las variables espectadoras

$$\frac{\partial g}{\partial a^i} + \sum_k \frac{\partial g}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial a^i} = \sum_l \left(x^l \frac{\partial y_l}{\partial a^i} + y_l \frac{\partial x^l}{\partial a^i} \right) - \sum_l \frac{\partial f}{\partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial a^i} - \frac{\partial f}{\partial a^i} \tag{2.5}$$

de forma que finalmente

$$\frac{\partial g}{\partial a^i} = -\frac{\partial f}{\partial a^i} \tag{2.6}$$

Apliquemos estas ideas a la función lagrangiana. Las $\dot{q}$ son el análogo de las x, y las q son las a. Definimos las variables y:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \tag{2.7}$$

y el análogo de la función g, que es el hamiltoniano:

$$H(p,q) = \sum_i p_i \dot{q}^i - L \tag{2.8}$$

La fórmula (2.4) garantiza entonces que

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}^i \tag{2.9}$$

Por otra parte, respecto de las variables espectadoras,

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \tag{2.10}$$

En el *fibrado cotangente*, o *espacio de fases*, $\xi^a = (q^i, p_j) \in T^*\mathbb{Q}$, $(a = 1 \dots 2n)$ las ecuaciones de Hamilton se expresan de una manera muy sencilla:

$$\dot{\xi}^a = \sum_b \omega^{ab} \partial_b H \tag{2.11}$$

donde la matriz ω es completamente antisimétrica (es decir, una *2-forma*, la *2-forma simpléctica*).

$$\omega \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

Es claro que

$$\begin{aligned} \omega^2 &= -1 \\ \omega^t &= -\omega \end{aligned} \tag{2.13}$$

de forma que

$$\sum_b \omega_{ab} \dot{\xi}^b = \partial_a H \tag{2.14}$$

Las ecuaciones de Hamilton de pueden obtener mediante un principio variacional en el espacio de las fases. El lagrangiano es

$$L = \sum_i p_i \dot{q}^i - H(p, q) \tag{2.15}$$

o en términos de las coordenadas ξ

$$L(\xi, \dot{\xi}) = -\frac{1}{2} \sum \xi^a \omega_{ab} \dot{\xi}^b - H(\xi) \tag{2.16}$$

Efectivamente, las ecuaciones de Euler de este nuevo lagrangiano son:

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \xi^a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^a} = -\frac{1}{2} \sum_b \omega_{ab} \dot{\xi}^b - \frac{\partial H}{\partial \xi^a} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_b \left(\xi_b \omega^{ba} \right) \tag{2.17}$$

El *corchete de Poisson* entre dos funciones en $T * \mathbb{Q}$ es

$$\{f, g\} \equiv \sum_{ab} \partial_a f \omega^{ab} \partial_b g \tag{2.18}$$

El espacio de todas las funciones definidas sobre el espacio de las fases, $\mathcal{F}\left(\mathcal{T}^*\mathbb{Q}\right)$ es un álgebra de Lie respecto de las estructura de corchete de Poisson.

Las ecuaciones de Hamilton en términos de corchetes se escriben

$$\dot{\xi}^a = \{\xi^a, H\} \tag{2.19}$$

La forma simpléctica tiene también una representación sencilla:

$$\omega^{ab} = \{\xi^a, \xi^b\} \tag{2.20}$$

EJERCICIO (1.14)
Verificar linealidad y antisimetría de los corchetes
Verificar la identidad de Jacobi usando fuerza bruta.

Una *integral primera* $f \in \mathcal{F}\,(T * \mathbb{Q})$ es una función tal que

$$\{f, H\} = 0 \tag{2.21}$$

lo que significa físicamente que es una constante del movimiento.

EJERCICIO (1.15)
Demostrar, usando Jacobi, que el corchete de dos integrales primeras es otra integral primera.

EJERCICIO (1.16)
Calcular los corchetes de Poisson $\{J_i, J_j\}$

En general, un *sistema dinámico* viene dado por

$$\dot{\xi}^a = f^a(\xi) \tag{2.22}$$

Para que ese sistema sea hamiltoniano, es necesario que exista una función H tal que

$$f^a = \sum_b \omega^{ab} \partial_b H \tag{2.23}$$

Es fácil ver que ello es estrictamente equivalente a que $\forall f, g \in \mathcal{F}\,(\mathcal{T}^*\mathbb{Q})$

$$\frac{d}{dt}\{f, g\} = \{\dot{f}, g\} + \{f, \dot{g}\} \tag{2.24}$$

Efectivamente, la condición es necesaria, ya que si el sistema es hamiltoniano, entonces

$$\frac{d}{dt}\{f, g\} = \{\{f, g\}, H\} + \partial_t\{f, g\} = -\{\{g, H\}, f\} - \{H, f\}, g\} + \partial_t\{f, g\} \tag{2.25}$$

y además

$$\partial_t \left(f_a \omega^{ab} g_b\right) = \partial_t f_a \omega^{ab} g_b + f_a \omega^{ab} \partial_t g_b = \{\partial_t f, g\} + \{f, \partial_t g\} \tag{2.26}$$

lo cual implica

$$\frac{d}{dt}\{f,g\} = \{\dot{f},g\} + \{f,\dot{g}\} \tag{2.27}$$

La suficiencia también es clara. Partimos de

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\{\xi^a,\xi^b\} = \frac{d}{dt}\omega^{ab} = 0 = \{\dot{\xi}^a,\xi^b\} + \{\xi^a,\dot{\xi}^b\} = \\
&\{f^a,\xi^b\} + \{\xi^a,f^b\} = \partial_c f^a \omega^{cd}\partial_d \xi^b + \partial_c \xi^a \omega^{cd}\partial_d f^b = \\
&\partial_c\left(f^a\omega^{cb}\right) + \partial_d\left(\omega^{ad} f^b\right)
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Multiplicando por ω^{ea},

$$\omega^{cb}\partial_c Z_e - \partial_e f^b = 0 \tag{2.29}$$

con

$$Z_a \equiv \omega_{ab} f^b \tag{2.30}$$

Y multiplicando otra vez por ω^{bf}

$$-\partial_f Z_e + \partial_e Z_f = 0 \tag{2.31}$$

que es lo que queríamos demostrar QED.

2.2 Campos de vectores asociados a funciones

A cada funcion f definida sobre el espacio de las fases, asociaremos un campo de vectores X_f definido mediante:

$$i(X_f)\omega = df \tag{2.32}$$

En términos de componentes, esto es:

$$\omega_{ab}\xi^a_f = \partial_b f \tag{2.33}$$

o lo que es lo mismo,

$$X^a_f = \omega^{ab}\partial_b f \tag{2.34}$$

es decir, que los índices se suben y se bajan con la dos-forma simpléctica.

2.3 Repaso de formas diferenciales.

Identificaremos los vectores $\vec{v} \in T_x$ con las derivaciones de funciones definidas en un punto de la variedad.

$$\vec{v}(f) \equiv v^\mu \partial_\mu f \tag{2.35}$$

Una base es' a constituída por los vectores

$$\partial_\mu \tag{2.36}$$

Dada una función arbitraria, definimos su diferencial, $df \in T_x^*$ tal que

$$df\,(\vec{v}) \equiv \vec{v}\,(f) \tag{2.37}$$

Las formas diferenciales son aplicaciones lineales antisimétricas

$$\omega_1\ : v\ \in \mathbb{R}^n \rightarrow \omega(v) \in \mathbb{R} \tag{2.38}$$

Base local:

$$dx^a(\partial_b) = \delta^a_b \tag{2.39}$$

$$\omega_2\ : (v, w)\ \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \omega_2(v, w) \in \mathbb{R} \tag{2.40}$$

2.4 Producto exterior

Producto de uno-formas:

$$(\omega_1 \wedge \alpha_1)(v_1, v_2) \equiv \det \begin{pmatrix} \omega_1(v_1) & \alpha_1(v_2) \\ \omega_1(v_2) & \alpha_1(v_1) \end{pmatrix} \tag{2.41}$$

En general

$$(\omega_k \wedge \omega_l)\,(v_1 \ldots v_{k+l}) \equiv \sum \pm\omega_k(v_{i_1} \ldots v_{i_k})\omega_l(v_{i_{k+1}} \ldots v_{i_{k+l}}) \tag{2.42}$$

2.5 Expresión en coordenadas locales

$$\omega_k \equiv \sum_{\iota_1 < \ldots < \iota_k} \omega_{\iota_1 \ldots \iota_k} dx^{\iota_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\iota_k} \tag{2.43}$$

2.6 Diferencial exterior

$$df \equiv \sum \partial_a f dx^a \tag{2.44}$$

$$d\omega \equiv \sum_{\iota_1 < \ldots < \iota_k} d\omega_{\iota_1 \ldots \iota_k} \wedge dx^{\iota_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\iota_k} \tag{2.45}$$

2.7 El teorema de Stokes

Volumen de una celda elemental definida por tres vectores de $\mathbb{R}^3$

- Se anula si los vectores son linealmente dependientes
- No varía si a un vector se le suma una combinación lineal de los otros vectores
- Depende de forma lineal de cada uno de los vectores.

Es claro que todas esas propiedades son satisfechas por la fórmula elemental

$$V = \sum \epsilon_{ijk} v_1^i v_2^j v_3^k = \eta\,(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) \tag{2.46}$$

donde el elemnto de volumen es

$$\eta \equiv dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \tag{2.47}$$

Esto conduce de forma natural a volúmenes por integración.

$$\int_{\partial V} \omega = \int_V d\omega \tag{2.48}$$

2.8 La derivada de Lie

Funciones

$$\vec{v}(f) = \pounds(\vec{v}) f \tag{2.49}$$

1-formas

$$\pounds(\vec{v}) df \equiv d\vec{v}(f) \tag{2.50}$$

Para formas generales, se aplica Leibnitz:

$$\pounds(\vec{v}) a_a d\xi^a = (\pounds(\vec{v}) a_a) d\xi^a + \alpha_a \pounds(\vec{v}) d\xi^a \tag{2.51}$$

Para vectores, mediante la aplicación dual:

$$\pounds(\vec{v})\langle\alpha, \vec{X}\rangle = \langle\pounds(\vec{v})\alpha, \vec{X}\rangle + \langle\alpha, \pounds(\vec{v})\vec{X}\rangle \tag{2.52}$$

EJERCICIO
Demostrar que
$\pounds(\vec{X})\vec{Y} = [\vec{X}, \vec{Y}]$

EJERCICIO
Verificar que
$\pounds(\vec{X}) = i(\vec{X})d + di(\vec{X})$
para $\omega = f dg$
y para $\alpha = df \wedge dg$

EJERCICIO
Demostrar Gauss a partir de Stokes.

EJERCICIO (2.4)
Verificar que al efectuar un cambio de variables, las formas cambian con el jacobiano adecuado para que la integral quede invariante.

2.9 Difeomorfismos

Supongamos un difeomorfismo (activo)

$$\xi : x \in M \to y = \xi(x) \in M \tag{2.53}$$

Sobre vectores, dada $g : y \to \mathbb{R}$, entonces $g \circ \xi : x \to \mathbb{R}$ y $v \in T_x$, definimos otro vector $\xi_* v \in T_y$ mediante

$$\xi_*(v)(g) \equiv v(g \circ \xi) \tag{2.54}$$

En un sistema de coordenadas locales

$$(\xi_* v)^\mu(y) = v^\rho \partial_\rho \xi^\mu(x) \tag{2.55}$$

Dada una forma $\omega \in T_y^*$ definimos una forma $\xi^* \omega \in T_x$ mediante

$$\xi^* \omega(v) \equiv \omega(\xi_* v) \tag{2.56}$$

En coordenadas locales,

$$(\xi^* \omega)_\alpha(x) = \omega_\mu(y) \partial_\alpha \xi^\mu(x) \tag{2.57}$$

Si se tratase de una 2-forma,

$$(\xi^* \omega)(v, w) = \omega(v, w) \tag{2.58}$$

es decir,

$$(\xi^* \omega)_{\alpha\beta}(x) = \omega_{\mu\nu}(y) \partial_\alpha \xi^\mu \partial_\beta \xi^\nu \tag{2.59}$$

2.10 El teorema de Goursat

Demostremos que si en una variedad de dimensión par existe una dos forma ω cerrada tal que

$$d\omega = 0 \tag{2.60}$$

y no singular, es decir, que su determinante no es nulo, entonces existen coordenadas en las que la matriz de la dos forma se escribe

$$\omega = i\sigma_2 \otimes I_n \tag{2.61}$$

Llamaremos ξ^a a las coordenadas genéricas, y X^a a las especiales cuya existencia vamos a demostrar.

2.11 Fluídos hamiltonianos

Dado un campo de vectores $\vec{v}$, las curvas integrales se definen mediante:

$$\frac{d\xi^a}{ds} = v^a(\xi) \tag{2.62}$$

Para cada punto P con coordenadas $\bar{\xi}^a$, (supondremos que) existe una sola curva integral que pasa por ese punto para un valor del parámetro que se puede tomar como origen:

$$\xi^a = \xi^a(s, \bar{\xi}^a) \tag{2.63}$$

tal que $\xi^a(s = 0, \bar{\xi}^a) = \bar{\xi}^a$. La parametrización define un grupo abeliano uniparamétrico, localmente isomorfo al de las traslaciones, $\mathbb{T}$:

$$g_t \bar{\xi}^a = \xi(t, \bar{\xi}^a) \tag{2.64}$$

Se pueden visualizar lasw curvas integrales como las líneas de corriente de un fluído; de ahí el nombre. Es obvio que

$$g_t g_s = g_{t+s} \tag{2.65}$$

Dada una función definida sobre el espacio de las fases, define un flujo canónicamente mediante el vector asociado, cuyas componentes son:

$$X^a_f \equiv \omega^{ab} \partial_b f \tag{2.66}$$

La variacion de una función arbitraria , digamos $g(\xi)$ a lo largo de la corriente será:

$$\pounds(\vec{X}_f)g = \sum_a X^a_f \partial_a g = \sum_a \omega^{ab} \partial_b f \partial_a g = \{g, f\} \tag{2.67}$$

En el caso de un flujo hamiltoniano, $f = H$, las integrales primeras o constantes del movimiento satisfacen

$$\{g, H\} = 0 \tag{2.68}$$

También puede adoptarse el punto de vista opuesto, y decir que el hamiltoniano, considerado como función, es invariante bajo el grupo de transformaciones generado por la función $g(\xi)$.

Es un hecho de la vida que la forma simpléctica es invariante bajo el grupo generado por una función arbitraria $g(\xi)$, aunque no sea integral primera (y no sólo bajo el hamiltoniano). Efectivamente,

$$\pounds(\vec{X}_g)\omega = \left(i(\vec{X}_g)d + di(\vec{X}_g)\right)\omega = 0 \tag{2.69}$$

EJERCICIO
Demostrarlo
Ayuda: $i(\vec{X}_g)\omega = -dg$

2.12 El teorema de Liouville

El volumen de una región cualquiera del espacio de las fases se conserva en el curso del movimiento. En general, definimos un grupo uniparamétrico (Arnold)

$$g_t : \xi_0 \equiv (p_0, q_0) \rightarrow \xi_t \equiv (p_t, q_t) \tag{2.70}$$

Por definición

$$V_t \equiv \int_{D_t} d\xi \tag{2.71}$$

donde

$$D_t \equiv g_t D \tag{2.72}$$

Claramente

$$V_t = \int_{D_0} J d\xi \tag{2.73}$$

donde $J \equiv \frac{\partial g_t \xi}{\partial \xi}$. Pero

$$\dot{\xi} \equiv F(\xi) \tag{2.74}$$

es decir que

$$g_t \xi = F(\xi) t + o(t^2) \tag{2.75}$$

El jacobiano será:

$$J = 1 + \partial F t + o(t^2) \tag{2.76}$$

Al orden más bajo

$$det\, J = 1 + t\, div\, F + o(t^2) \tag{2.77}$$

Ahora bien,

$$\frac{dV_t}{dt}|_0 = \int_{D_0} div\, F d\xi \tag{2.78}$$

En nuestro caso

$$div\, F = 0 \tag{2.79}$$

implica Liouville.

EJERCICIO (2.1) Verificar explícitamente Liouville para un oscilador.

2.13 El teorema del eterno retorno de Poincaré

De hecho este teorema no s
'olo es aplicable a un flujo hamiltoniano, sino a toda aplicaci
'on biyectiva continua que preserve el volumen y que deje invariante un cierto dominio acotado del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$.

En estas condiciones, en todo entorno U de cualquier punto de D existe un punto $x \in U$ tal que $\exists n > 0$,

$$g^n \xi \in U \tag{2.80}$$

La demostración es sencilla. Las sucesivas imágenes gU, g^2U ... g^nU tienen todas el mismo volumen, que ha de ser un número positivo. Si su intersección fuese siempre nula, necesariamente el volumen de D sería infinito

$$\therefore g^k U \cap g^l U \neq 0 \tag{2.81}$$

$g^{k-l}U \cap U \neq 0$, y necesariamente $\exists x \in U, g^{k-l}\xi = \xi \in U$QED.

EJERCICIO (2.2)
Hacer una estimación del tiempo de recurrencia de Poincaré para un sistema macroscópico.

2.14 Variedades simplécticas

La estructura esencial es una dos forma cerrada no singular, esto es:

$$\begin{aligned} &d\omega = 0 \\ &\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in T,\ \omega(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \neq 0 \end{aligned} \tag{2.82}$$

Esto sólo es posible en dimensión par. En coordenadas (p, q), la forma simpléctica se escribe:

$$\omega = \sum_i dp_i \wedge dq^i \tag{2.83}$$

Claramente

$$\omega = d\theta_0 \tag{2.84}$$

donde

$$\theta_0 \equiv \sum_i p_i dq^i \tag{2.85}$$

La matriz que representa esta forma $J \equiv (\omega_{ab})$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.86}$$

Evidentemente,como matriz,

$$J^2 = -1 \tag{2.87}$$

que se puede usar para definir lo que se llama una *estructura compleja.*

En general, no existe una métrica natural en una variedad simpléctica. Pero sí que se pueden subir y bajar índices:

$$a_a \equiv \sum_b J_{ab} a^b \tag{2.88}$$

lo cual implica por consistencia

$$a_b = -\sum_c J_{bc} a^c \tag{2.89}$$

En un lenguaje un tanto fantasioso, las ecuaciones de Hamilton se escriben entonces

$$\dot{x} = J dH(x) \tag{2.90}$$

Hay un elemento de volumen natural en $T^*\mathbb{Q}$

$$\eta \equiv \frac{1}{n!}\omega \wedge \ldots \omega \equiv dq^1 \wedge dp^1 \ldots dq^n \wedge dp^n \tag{2.91}$$

que además es invariante bajo transformaciones canónicas, como veremos.

3. Variaciones generales de la acción

Para ir calentando los músculos, demostremos que si consideramos un sistema ficticio con $2n$ grados de libertad, que son precisamente las q y las p de nuestro sistema físico, $q^* \equiv (q, p)$ y postulamos un lagrangiano para ese sistema igual a

$$L^*(q^*, p^*) \equiv \sum p_i \dot{q}^i - H(t, q, p) \tag{3.1}$$

entonces las ecuaciones de Lagrange para el sistema estrella son

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}^*} - \frac{\partial L^*}{\partial q^*} = 0 \tag{3.2}$$

esto es

$$\begin{aligned} \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} &= 0 \\ \dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} &= 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

esto es, las ecuaciones de Hamilton de nuestro sistema físico.

Partimos del funcional de acción:

$$S[q] \equiv \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt \tag{3.4}$$

y consideramos variaciones generales, en las que los extremos de las curvas también varían.

Dada una curva parametrizada,

$$t \in I \equiv [t_0, t_1] \rightarrow q(t) \tag{3.5}$$

(de forma que

$$\begin{aligned} q(t_0) &= q_0 \\ q(t_1) &= q_1) \end{aligned} \tag{3.6}$$

y otra curva diferente

$$t \in I' \equiv [t'_0, t'_1] \rightarrow q'(t) \tag{3.7}$$

(tal que

$$\begin{aligned} q'(t_0) &= q'_0 \\ q'(t_1) &= q'_1) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Una definición natural de distancia entre las dos curvas es

$$d(q,q') \equiv max|q-q'| + max|\dot{q}-\dot{q}'| + d(q_0-q_0') + d(q_1-q_1') \tag{3.9}$$

Como los intervalos de definición son distintos en general, $I \neq I'$, hay que extender las funciones q y q' de manera adecuada (por ejemplo por la tangente en los extremos) para que estén definidas ambas en un intervalo J que contenga a los dos intervalos de definición iniciales, $I, I' \in J$.

Denotemos ahora

$$\begin{aligned}
&\delta q(t) \equiv q'(t) - q(t)\\
&\delta t_0 \equiv t_0' - t_0\\
&\delta t_1 \equiv t_1' - t_1\\
&\delta q_0 \equiv q'(t_0+\delta t_0) - q(t_0)\\
&\delta q_1 \equiv q'(t_1+\delta t_1) - q(t_1)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Es natural definir la *variación de la acción* como aquella expesión que siendo lineal en todas las variaciones δq, $\delta\dot{q}$, δt_0, $\delta t_1, \delta q_0$, δq_1, difiere del incremento total

$$\Delta S \equiv S[q+\delta q] - S[q] \tag{3.11}$$

en cantidades de orden dos relativas a la distancia que acabamos de introducir.

Calculemos:

$$\begin{aligned}
&\Delta S \equiv \left(\int_{t_0+\delta t_0}^{t_1+\delta t_1} L(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}, t)dt - \int_{t_0}^{t_1} L(q,\dot{q},t)\right) =\\
&\int_{t_0}^{t_1} (L(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}, t)dt - L(q,\dot{q},t)) + \int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} dtL(t, q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}) -\\
&\int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} dtL(t, q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q})
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Salvo cantidades de orden dos,

$$\begin{aligned}
&\Delta S \equiv \int_{t_0}^{t_1} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q}(q,\dot{q},t)\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q,\dot{q},t)\delta\dot{q}\right) + L(q,\dot{q},t)\big|_{t_1}\delta t_1 - L(q,\dot{q},t)\big|_{t_0}\delta t_0 =\\
&\int_{t_0}^{t_1} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q + L_1\delta q_1 + \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right|_{t_1} - L_0\delta q_0 - \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right|_{t_0}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Y al mismo orden,

$$\begin{aligned}
&\delta q(t_0) = \delta q_0 - \dot{q}_0\delta t_0\\
&\delta q(t_1) = \delta q_1 - \dot{q}_1\delta t_1
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Todo esto conduce a

$$
\begin{aligned}
&\Delta S \equiv \int_{t_0}^{t_1} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q + \left(L - \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \Big|_{t_1} \delta t_1 \\
&- \left(L - \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \Big|_{t_0} \delta t_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_0} = \\
&\int_{t_0}^{t_1} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q + \left(L - \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta t \Big|_{t_0}^{t_1} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_0}^{t_1} = \\
&\int_{t_0}^{t_1} dt \frac{\delta S}{\delta q} + (p \delta q - H \delta t)|_{t_0}^{t_1} + O(2)
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

3.1 La ecuación de Hamilton-Jacobi

Consideremos el funcional de acción como función del extremo superior, dejando el inferior fijo, y donde la acci'on está evaluada sobre la trayectoria extremal. Representaremos el extremo superior sin subíndices:

$$
S = S(t, q) \tag{3.16}
$$

Utilizando la ecuación que acabamos de obtener, podemos escribir:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial t} &= -H \\
\frac{\partial S}{\partial q^i} &= p_i
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

lo cual implica la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$
\frac{\partial S}{\partial t} + H \left(t, q^i, \frac{\partial S}{\partial q^i} \right) = 0 \tag{3.18}
$$

cuyo significado geométrico estudiaremos en un momento. Veamos antes un pequeño

Teorema.

Dada una solución de HJ que depende de un número m($\leq n$) de parámetros,

$$
S = S(t, q^i, \alpha_1 \ldots \alpha_m) \tag{3.19}
$$

entonces las m derivadas

$$
\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \tag{3.20}
$$

son integrales primeras de las ecuaciones de Euler

$$
\begin{aligned}
\dot{q}^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\
\dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q^i}
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

Efectivamente, calculemos la derivada en la dirección del movimiento:

$$\left(\dot{q}\frac{\partial}{\partial q}+\dot{p}\frac{\partial}{\partial p}+\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}=$$
$$\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_j \partial q^i}+\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha_j} \tag{3.22}$$

ya que $\frac{\partial S}{\partial p_i}=0$. Ahora bien, HJ implica precisamente que

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha_j}+\sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial \alpha_j}=0 \tag{3.23}$$

lo que demuestra el teorema. Las soluciones para las cuales $m=n$ se denominan *integrales completas*. En el caso de que el determinante

$$det\,\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial q^j}\neq 0 \tag{3.24}$$

podemos enunciar un segundo

Teorema.

Definamos n constantes arbitrarias β^i. Utilizamos las ecuaciones

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}=\beta_i \tag{3.25}$$

para definir las n funciones

$$q^i=q^i(t,\alpha^i,\beta^i) \tag{3.26}$$

Los momentos los encontramos a partir de

$$p_i=\frac{\partial S}{\partial q^i} \tag{3.27}$$

donde después de derivar, substituímos las q que acabamos de encontrar. Pues bien, este conjunto de funciones (q,p) proporciona la solución general del sistema canónico.

Efectivamente, de la ecuación de definición de las q se deduce que:

$$0=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial S}{\partial \alpha^i}=\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha_i}+\sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial q^j \partial \alpha_i}=\sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial q^j \partial \alpha_i}\left(\dot{q}^j-\frac{\partial H}{\partial p_j}\right) \tag{3.28}$$

en virtud de (3.23). Dado que la matriz es no singular por hipótesis, se sigue que

$$\dot{q}^j-\frac{\partial H}{\partial p_j}=0 \tag{3.29}$$

Por otra parte, de la ecuación de definición de las p se deduce que

$$\dot{p}_i=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\sum_j \dot{q}^j\frac{\partial}{\partial q^j}\right)\frac{\partial S}{\partial q^i} \tag{3.30}$$

Y de la propia ecuación de HJ,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q^i} + \frac{\partial H}{\partial q^i} + \sum_j \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial^2 S}{\partial q^j \partial q^i} = 0 \tag{3.31}$$

$\therefore$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \tag{3.32}$$

quod erat demostrandum.

4. El invariante integral de Poincaré

Supongamos una 2-forma ω en $\mathbb{R}_{2n+1}$. Es un hecho de la vida que

$$\exists \xi \in T \tag{4.1}$$

tal que

$$\omega(\xi, v) = 0 \, \forall v \in \mathbb{R}_{2n+1} \tag{4.2}$$

Esto es consecuencia del hecho de que el determinante de una matriz antisimétrica de dimensión impar se anula. Naturalmente, este teorema se aplica en el caso particular de que

$$\omega = d\alpha \tag{4.3}$$

A las curvas integrales del campo ξ les llamaremos *curvas características* de la 1-forma α.

Dada una curva cerrada C, las características provenientes de puntos $P \in C$ forman un tubo σ. Se tiene entonces que

$$\int_{C_1} \alpha = \int_{C_2} \alpha \tag{4.4}$$

siempre que

$$C_1 - C_2 = \partial\sigma \tag{4.5}$$

Esto es claro, ya que Se tiene entonces que

$$\int_{C_1} \alpha - \int_{C_2} \alpha = \int_\sigma d\alpha = 0 \tag{4.6}$$

EJERCICIO
Considere la siguiente 1-forma en $\mathbb{R}^3$
$\alpha = xdy + zdx$
Demuestre que su vector característico es $(0, 1, 1)$
La ecuación de un cilindro Σ tangente a las carcaterísticas es:
$x = cos\,\theta$
$y = \frac{1}{\sqrt{2}} sin\,\theta + r$
$z = -\frac{1}{\sqrt{2}} sin\,\theta + r$
Demostrar que $\int_\Sigma d\alpha = 0$

En nuestro caso $\mathbb{R}_{2n+1} = (p, q, t)$, y resulta conveniente considerar

$$\alpha \equiv pdq - Hdt \tag{4.7}$$

Claramente

$$d\alpha = \sum \left(dp_i \wedge dq^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \wedge dt - \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i \wedge dt \right) \tag{4.8}$$

cuya forma matricial es

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \partial_p H \\ 1 & 0 & \partial_q H \\ -\partial_p H & -\partial_q H & 0 \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

Es inmediato verificar que el vector

$$(-\partial_q H, \partial_p H, 1) \in \mathbb{R}_{2n+1} \tag{4.10}$$

corresponde a un autovalor nulo, de forma que define las direcciones de las características de α, dadas en virtud de ello por las ecuaciones de Hamilton.

En virtud de Stokes, es evidente que

$$\int_{C_1} (\sum pdq - Hdt) = \int_{C_2} (\sum pdq - Hdt) \tag{4.11}$$

Aplicando este hecho a curvas compuestas de estados simultáneos, obtenemos el llamado invariante integral relativo de Poincaré:

$$\int_C \sum pdq = \int_\sigma \sum dp_i \wedge dq_i \tag{4.12}$$

4.1 Transformaciones canónicas

Son transformaciones de coordenadas (difeomorfismos) que preservan el invariante integral relativo, o lo que es lo mismo, la forma

$$\omega \equiv \sum dp_i \wedge dq_i \equiv \frac{1}{2} \sum J_{ab} d\xi^a \wedge d\xi^b \tag{4.13}$$

$$g^* \omega = \omega \tag{4.14}$$

EJERCICIO
Demostrar que $g^* \omega \wedge \omega = \omega \wedge \omega$
Demostar que ω^n es proporcional al elemento de volumen.
Demostrar que toda TC deja invariante el elemento de volumen en el espacio de las fases.

Equivalentemente, se puede considerar la invariancia del principio variacional definido por el lagrangiano

$$L^* \equiv \sum p\dot{q} - H(p, q, t) \tag{4.15}$$

Caracterizarenos las TC mediante

$$pdq - Hdt = PdQ - KdT + dS \tag{4.16}$$

y las nuevas ecuaciones de Hamilton son

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dT} &= -\frac{\partial K}{\partial Q} \\ \frac{dQ}{dT} &= \frac{\partial K}{\partial P} \end{aligned} \tag{4.17}$$

donde en el caso de que la transformacion dependa paramétricamente del tiempo,

$$K(P, Q, t) = H(p, q, t) - \frac{\partial S}{\partial t} \tag{4.18}$$

siendo S la integral independiente del camino (gracias al invariante integral)

$$S = \int_{p_0, q_0}^{p_1, q_1} pdq - PdQ \tag{4.19}$$

- Diremos que las TC son *libres* si

$$det \frac{\partial Q}{\partial p} \neq 0 \tag{4.20}$$

Esto garantiza la independencia de las variables (t, q, Q) que pueden ser tomadas como variables fundamentales.

$$\sum PdQ - \hat{H}dt = \sum pdq - Hdt - S(t, q, Q) \tag{4.21}$$

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{\partial S}{\partial q} \\
P &= -\frac{\partial S}{\partial Q} \\
\hat{H} &= H + \frac{\partial S}{\partial t}
\end{aligned} \tag{4.22}
$$

- En el caso general, se podrán tomar como variables independientes las magnitudes
$$(q_1 \dots q_l; p_{l+1} \dots p_n; Q_1 \dots Q_m; P_{m+1} \dots P_n) \tag{4.23}$$
Claramente
$$\sum_{i=1}^{m} P_i dQ^i - \sum_{j=m+1}^{n} Q_j dP^j - \hat{H} dt = \sum_{i=1}^{l} p_i dq^i - \sum_{j=l+1}^{n} q_i dp^i - H dt - d\left(F + \sum_{i=m+1}^{n} Q^i P_i - \sum_{j=l+1}^{n} q^i p_i\right) \tag{4.24}$$
Si llamamos
$$U \equiv F + \sum_{i=m+1}^{n} Q^i P_i - \sum_{j=l+1}^{n} q^i p_i \tag{4.25}$$
podemos reescribirlo de la forma
$$-\sum_{i=1}^{m} P_i dQ^i + \sum_{j=m+1}^{n} Q_j dP^j + \hat{H} dt + \sum_{i=1}^{l} p_i dq^i - \sum_{j=l+1}^{n} q_i dp^i - H dt = dU \tag{4.26}$$
se deduce
$$
\begin{aligned}
P_i &= -\frac{\partial U}{\partial Q_i}\, i = 1 \dots m \\
Q_j &= \frac{\partial U}{\partial P_j}\, j = m+1 \dots n \\
\hat{H} - H &= \frac{\partial U}{\partial t} \\
p_a &= \frac{\partial U}{\partial q_k}\, a = 1 \dots l \\
q_b &= -\frac{\partial U}{\partial p_b}\, b = l+1 \dots n
\end{aligned} \tag{4.27}
$$

Veamos algunos casos particulares

- $U_1(q, Q)$. Esto corresponde a
$$
\begin{aligned}
l &= n \\
m &= n
\end{aligned} \tag{4.28}
$$

La transformación es

$$\begin{aligned} P_a &= -\frac{\partial U_1}{\partial Q_a} \\ p_b &= \frac{\partial U_1}{\partial q_b} \end{aligned} \tag{4.29}$$

- $U_2(q, P)$. Esto corresponde a

$$\begin{aligned} l &= n \\ m &= 0 \end{aligned} \tag{4.30}$$

La transformación es

$$\begin{aligned} Q_a &= \frac{\partial U_2}{\partial P_a} \\ p_b &= \frac{\partial U_2}{\partial q_b} \end{aligned} \tag{4.31}$$

- $U_3(p, P)$. Esto corresponde a

$$\begin{aligned} l &= 0 \\ m &= 0 \end{aligned} \tag{4.32}$$

La transformación es

$$\begin{aligned} Q_a &= \frac{\partial U_3}{\partial P_a} \\ q_b &= -\frac{\partial U_3}{\partial q_b} \end{aligned} \tag{4.33}$$

- $U_4(p, Q)$. Esto corresponde a

$$\begin{aligned} l &= 0 \\ m &= n \end{aligned} \tag{4.34}$$

La transformación es

$$\begin{aligned} P_a &= -\frac{\partial U_4}{\partial Q_a} \\ q_b &= -\frac{\partial U_4}{\partial q_b} \end{aligned} \tag{4.35}$$

4.2 La ecuación de Hamilton-Jacobi y el invariante integral

Por definición,

$$S_{(q_0,t_0)}(q,t) \equiv \int_\gamma L dt \tag{4.36}$$

donde la curva γ es la única solución de las ecuaciones de movimiento que satisface

$$q(t_0) = q_0 \tag{4.37}$$

y

$$q(t) = q \tag{4.38}$$

Es un hecho de la vida que

$$dS = pdq - Hdt \tag{4.39}$$

Para verlo, efectuamos una variación $(\delta q, \delta t)$ en el punto final, y elevamos las trayectorias al espacio de las fases, siendo β la elevacion de la variación. Esto quiere decir que la elevacion del punto

$$(q,t) \to (q, p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, t) \tag{4.40}$$

Al estar construida la superficie σ con características del invariante integral, podemos escribir:

$$0 = \int_\sigma d(pdq - Hdt) = \int_{\partial\sigma} pdq - Hdt = \left(\int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2} + \int_\beta - \int_\alpha\right) pdq - Hdt \tag{4.41}$$

Ahora bien: Sobre α, $dq = dt = 0$

Sobre γ_1 y γ_2

$$pdq - Hdt = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - H\right) dt = Ldt \tag{4.42}$$

De forma que

$$\left(\int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2}\right) Ldt = \delta S = \int_\beta pdq - Hdt \tag{4.43}$$

QED.

Una consecuencia de todo esto es que

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} &= -H(p,q,t) \\ p &= \frac{\partial S}{\partial q} \end{aligned} \tag{4.44}$$

la acción satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t) = 0 \tag{4.45}$$

En una transformación canónica

$$pdq - PdQ = dS(p,q) \tag{4.46}$$

Cuando el jacobiano

$$det\,\frac{\partial(Q,q)}{\partial(p,q)} \neq 0 \tag{4.47}$$

entonces localmente

$$S(p,q) = S_1(Q,q) \tag{4.48}$$

Estas transformaciones canónicas se dicen *libres*, y a la función S_1 se la llama *función generatriz*. Claramente

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial S_1}{\partial q} \\ P &= -\frac{\partial S_1}{\partial Q} \end{aligned} \tag{4.49}$$

Si consiguiésemos encontrar una transformación tal que el hamiltoniano sólo dependiese de las coordenadas,

$$H = K(Q) \tag{4.50}$$

entonces las ecuaciones de Hamilton rezan:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= 0 \\ \dot{P} &= \frac{\partial K}{\partial Q} \end{aligned} \tag{4.51}$$

que se integran mediante

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q(0) \\ P(t) &= P(0) + t\frac{\partial K}{\partial Q}|_0 \end{aligned} \tag{4.52}$$

La ecuación correspondiente es:

$$H(\frac{\partial S(Q,q)}{\partial q}, q, t) = K(Q) \tag{4.53}$$

El *teorema de Jacobi* garantiza que si se encuentra una solución de esta ecuación dependiente de n parámetros, entonces las funciones $Q(p,q)$ definidas por las ecuaciones

$$p = \frac{\partial S(Q,q)}{\partial q} \tag{4.54}$$

son n integrales primeras de las ecuaciones de movimiento.

En el caso particular en que q_1 y $\frac{\partial S}{\partial q_1}$ sólo aparezcan en la combinación

$$f(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}) \tag{4.55}$$

se dice que esta variable es *separable*. En este caso existen soluciones de la forma

$$S = S_1(q_1) + S(q_2 \dots q_n) \tag{4.56}$$

y la ecuación para $S(q_2 \dots q_n)$ se obtiene haciendo

$$f(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}) = constante \tag{4.57}$$

Siempre se puede efectuar una transformación de Legendre para cambiar a una función generatriz involucrando diferentes variables.

Por ejemplo, si

$$pdq - PdQ = dS \tag{4.58}$$

podemos escribir

$$pdq + QdP = d(PQ + S) \equiv S_2(P, q) \tag{4.59}$$

de forma que

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial S_2}{\partial q} \\ Q &= \frac{\partial S_2}{\partial P} \end{aligned} \tag{4.60}$$

Por ejemplo, la transformación identidad corresponde a

$$S_2 = Pq \tag{4.61}$$

lo cual conduce de manera natural a las transformaciones canónicas infinitesimales, cuya función generatriz es

$$Pq + \epsilon S(P, q, \epsilon) \tag{4.62}$$

es decir

$$\begin{aligned} p &= P + \epsilon \frac{\partial S}{\partial q} \\ Q &= q + \epsilon \frac{\partial S}{\partial P} \end{aligned} \tag{4.63}$$

Es un hecho de la vida que

$$\begin{aligned} \left(\frac{dP}{d\epsilon}\right)_{\epsilon=0} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \left(\frac{dQ}{d\epsilon}\right)_{\epsilon=0} &= \frac{\partial H}{\partial p} \end{aligned} \tag{4.64}$$

con hamiltoniano

$$H(p, q) = S(p, q, 0) \tag{4.65}$$

4.3 Separación de variables en la ecuación de Hamilton-Jacobi

Cuando el hamiltoniano es independiente del tiempo, podemos escribir:

$$S(q,Q,t) = W(q,Q) + T(t) \tag{4.66}$$

donde la *funcion característica de Hamilton*, W satisface la ecuación:

$$H(q, \frac{\partial W}{\partial q}) = E \tag{4.67}$$

siendo

$$T(t) = -Et \tag{4.68}$$

Por otra parte, cuando se pueda escribir

$$W = \sum_1^n W_i(q^i, Q^i) \tag{4.69}$$

diremos que el sistema es *completamente separable.*

- Veamos cómo se soluciona el oscilador armónico en este lenguaje. Partimos de

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \tag{4.70}$$

Escribimos

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = E \tag{4.71}$$

De donde

$$S = -Et + \sqrt{2mE}\int^q dx\sqrt{1 - \frac{1}{2E}m\omega^2 x^2} \tag{4.72}$$

Aplicamos ahora la técnica general, y escribimos

$$\beta_E \equiv \frac{\partial S}{\partial E} = \sqrt{\frac{m}{2E}}\int dx \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 x^2}{2E}}} - t \tag{4.73}$$

e integrando

$$t + \beta = \frac{1}{\omega} sin^{-1} q\sqrt{m\omega^2} 2E \tag{4.74}$$

o sea

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} sin\,\omega(t+\beta) \tag{4.75}$$

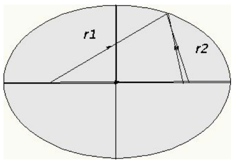

Figure 1: El problema de tres cuerpos.

- Resolvamos ahora un problema no trivial, a saber, el problema de los tres cuerpos restringido (dos masas iguales y una masa despreciable) mediante la técnica de Hamilton-Jacobi (Este es un problema clásico, resuelto en el siglo XIX por Charlier).

Llamemos $2a$ a la distancia entre la masa M en $(-a, 0)$ y la masa M en $(a, 0)$, y r_1 y r_2 a las coordenadas del tercer cuerpo de masa m respecto de los dos centros. Usaremos coordenadas elípticas,

$$\begin{aligned}\xi &\equiv r_1 + r_2 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2} + \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \\ \eta &\equiv r_1 - r_2 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2} - \sqrt{(x-a)^2 + y^2}\end{aligned} \tag{4.76}$$

de forma que las curvas $\xi = constante$ son elipses en tanto que las $\eta = constante$ son hipérbolas. Lo primero que queremos hacer es expresar la métrica euclídea en las variables (ξ, η). Se puede hacer a lo bestia, o mediante razonamientos astutos.

- Veamos primero el cálculo. Se puede verificar que

$$\begin{aligned}\xi\eta &= r_1^2 - r_2^2 \\ \xi^2 + \eta^2 &= 2\left(r_1^2 + r_2^2\right) \\ \xi^2 - \eta^2 &= 4r_1 r_2\end{aligned} \tag{4.77}$$

así como

$$\begin{aligned}x &= \frac{\xi\eta}{4a} \\ y &= \frac{1}{4a}\sqrt{4a^2\left(\xi^2+\eta^2\right) - \xi^2\eta^2 - 16a^4} = \frac{1}{4a}\sqrt{\left(4a^2-\eta^2\right)\left(\xi^2-4a^2\right)}\end{aligned} \tag{4.78}$$

de donde

$$\begin{aligned}4adx &= \xi d\xi + \eta d\eta \\ 4ady &= \xi d\xi\sqrt{\frac{4a^2-\eta^2}{\xi^2-4a^2}} - \eta d\eta\sqrt{\frac{\xi^2-4a^2}{4a^2-\eta^2}}\end{aligned} \tag{4.79}$$

de donde

$$ds^2 = \frac{\xi^2 - \eta^2}{4}\left(\frac{d\xi^2}{\xi^2 - 4a^2} + \frac{d\eta^2}{4a^2 - \eta^2}\right) \tag{4.80}$$

- Veamos ahora, siguiendo a Arnold, como se puede obtener el mismo resultado con menos trabajo. Dado que las líneas coordenadas son mutuamente ortogonales

$$ds^2 = g_\xi^2 d\xi^2 + g_\eta^2 d\eta^2 \tag{4.81}$$

En las elipses,

$$d\xi = 0\,, dr_1 = ds\cos\alpha\,, dr_2 = -ds\cos\alpha\ \therefore\ d\eta = 2ds\cos\alpha \tag{4.82}$$

En las hipérbolas,

$$\begin{aligned} & d\eta = 0\,, dr_1 = ds\sin\alpha \\ & dr_2 = ds\sin\alpha \therefore d\xi = 2ds\sin\alpha \\ & \therefore\ g_\xi = \frac{1}{4\sin^2\alpha}\,, g_\eta = \frac{1}{4\cos^2\alpha} \end{aligned} \tag{4.83}$$

En una elipse, $x = a\cos\theta\,, y = b\sin\theta$, los focos están en $(\pm\sqrt{a^2-b^2}, 0)$

$$\therefore r_1^2 = (a\cos\theta + \sqrt{a^2-b^2})^2 + b^2\sin^2\theta \tag{4.84}$$

$$\therefore r_1 = a + \sqrt{a^2-b^2}cos\,\tau \tag{4.85}$$

y

$$r_2^2 = (a\cos\theta - \sqrt{a^2-b^2})^2 + b^2\sin^2\theta \tag{4.86}$$

$$\therefore r_2 = a - \sqrt{a^2-b^2}cos\,\tau \tag{4.87}$$

El vector tangente :

$$t = (-asin\,\tau, bcos\,\tau)/\sqrt{a^2sin^2\,\tau + b^2cos^2\tau} \tag{4.88}$$

$$\therefore\ r_1.t \equiv r_1\cos\alpha = -r_1\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a^2sin^2\,\tau + b^2cos^2\,\tau}\sin\theta \tag{4.89}$$

y

$$\therefore\ r_2.t \equiv r_2\cos\beta = r_2\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a^2sin^2\,\tau + b^2cos^2\,\tau}\sin\theta \tag{4.90}$$

es decir

$$cos\,\alpha = -cos\,\beta, \therefore \beta = \pi - \alpha \tag{4.91}$$

La fórmula del coseno:

$$r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\pi - 2\alpha) = 4a^2 \tag{4.92}$$

$$\therefore\ \cos^2\alpha = \frac{4a^2 - (r_1-r_2)^2}{4r_1r_2} \tag{4.93}$$

- En todo caso

$$ds^2 = \frac{\xi^2 - \eta^2}{4} \left(\frac{d\xi^2}{\xi^2 - 4a^2} + \frac{d\eta^2}{4a^2 - \eta^2} \right) \tag{4.94}$$

Hecho de la vida: si

$$ds^2 = \sum g_i^2 dx_i^2, \tag{4.95}$$

entonces, el lagrangiano de una partícula libre será

$$L = \frac{m}{2} \sum g_i \dot{q}_i^2 - V(q) \tag{4.96}$$

Y el correspondiente hamiltoniano

$$H = \sum \frac{p_i^2}{2mg_i} + V \tag{4.97}$$

En nuestro caso la energía potencial es

$$-\frac{Mm}{r_1} - \frac{Mm}{r_2} = -2Mm \frac{\xi}{\xi^2 - \eta^2} \tag{4.98}$$

El hamiltoniano por unidad de masa

$$\therefore\ H = 2p_\xi^2 \frac{\xi^2 - 4a^2}{m(\xi^2 - \eta^2)} + 2p_\eta^2 \frac{4a^2 - \eta^2}{m(\xi^2 - \eta^2)} - \frac{4k\xi}{\xi^2 - \eta^2} \tag{4.99}$$

La ecuación de HJ se escribe

$$2 \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \right)^2 \left(\xi^2 - 4a^2 \right) - 4k\xi - Em\xi^2 = -2 \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} \right)^2 \left(4a^2 - \eta^2 \right) - Em\eta^2 \tag{4.100}$$

De donde la acción se obtiene mediante cuadraturas:

$$S = -Et + \int^\xi \frac{4kx + Emx^2 + \alpha}{2\left(x^2 - 4a^2\right)} + \int^\eta \frac{Emx^2 + \alpha}{2\left(x^2 - 4a^2\right)} \tag{4.101}$$

y la trayectoria se saca de las ecuaciones

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\partial S}{\partial E} \\ \beta_2 &= \frac{\partial S}{\partial \alpha} \end{aligned} \tag{4.102}$$

EJERCICIO

Considere el problema de un campo central

$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r)$

Separe variables en HJ: $W = W_r(r) + W_\theta(\theta)$

$W_r = \int^r \sqrt{2mQ_1 - 2mV(x) - \frac{Q_2}{x^2}}$

$W_\theta = Q_2\theta$

$\therefore p_\theta = \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} = Q_2$

La TC viene especificada por $P = -\frac{\partial S}{\partial Q}$

EJERCICIO (2.8)

En un sistema con $n = 2$ grados de libertad, expresar la función generatriz en función de las variables $S_3(P_1, Q_2, q)$. Cuándo es ello posible?

5. El límite de infinitos grados de libertad. Campos clásicos.

Consideremos un sistema discreto definido en una red cúbica

$$\Gamma \equiv \{\mathbb{Z}a\} \tag{5.1}$$

donde $-N \leq n_i \leq N$. En cada punto de la red está definida una variable

$$q_{na} \tag{5.2}$$

Tenemos entonces $(2N+1)^3$ grados de libertad, un número finito de ellos. El lagrangiano será:

$$L \equiv a^3 \sum_{\vec{n}} \frac{1}{2} \left(\dot{q}(t)^2_{a\vec{n}} - \sum_i \left(\frac{q(t)_{a(\vec{n}+\vec{e_i})} - q(t)_{a\vec{n}}}{a} \right)^2 - m^2 q(t)^2_{a\vec{n}} \right) \tag{5.3}$$

donde

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= (1,0,0) \\ \vec{e}_2 &= (0,1,0) \\ \vec{e}_3 &= (0,0,1) \end{aligned} \tag{5.4}$$

Los momentos serán

$$p_n = a^3 \dot{q}_n(t) \tag{5.5}$$

y satisfacen

$$\{q_{\vec{n}}, p_{\vec{n}'}\} = \delta_{n,n'} \tag{5.6}$$

Tomamos ahora un *límite continuo*, en el que $N \to \infty$ y $a \to 0$ de forma que

$$(2N+1)a \to L \tag{5.7}$$

y L es una cantidad finita, que define el volumen físico del sistema $V \equiv L^3$, que a su vez haremos tender a infinito en su momento. En ese límite el sistema adquiere un número infinito de grados de libertad, y define un campo clásico, escalar en nuestro caso, mediante:

$$\phi(t, \vec{x}) = q_{a\vec{n}}(t) \tag{5.8}$$

Las sumas se reducen de manera natural a integrales de Riemann:

$$a^3 \sum_{\vec{n}} f(a\vec{n}) \to \int d^3x f(\vec{x}) \tag{5.9}$$

Las deltas de Kronecker satisfacen

$$\sum_{\vec{n}} \delta_{\vec{n},\vec{n}'} = 1 \tag{5.10}$$

Claramente

$$\delta_{\vec{n},\vec{n}'} \rightarrow a^3 \delta^{(3)}\left(\vec{x}-\vec{x}'\right) \tag{5.11}$$

de tal manera que

$$1 = \sum_{\vec{n}} \delta_{\vec{n},\vec{n}'} \rightarrow \frac{1}{a^3}\int d^3x\, a^3\, \delta^{(3)}\left(\vec{x}-\vec{x}'\right) = 1 \tag{5.12}$$

En cuanto a las variaciones,

$$\frac{\delta q_{\vec{n}}}{\delta q_{\vec{n}'}} = \delta_{\vec{n},\vec{n}'} \tag{5.13}$$

de manera que

$$\sum_{\vec{n}} \frac{\delta q_{\vec{n}}}{\delta q_{\vec{n}'}} = 1 \rightarrow \int d^3y \frac{\delta\phi(t,\vec{x})}{\delta\phi(t,\vec{y})} = \int d^3x \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) = 1 \tag{5.14}$$

Por otra parte

$$\frac{q(t)_{a(\vec{n}+\vec{e_i})} - q(t)_{a\vec{n}}}{a} \rightarrow \partial_i\phi(t,\vec{x}) \tag{5.15}$$

El lagrangiano se reduce a

$$L = \int d^3x \left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2\right) \tag{5.16}$$

EJERCICIO (5.1) Demostrar, que el límite continuo de las ecuaciones de movimiento del sistema discreto es la ecuación de Klein-Gordon

$$(\Box + m^2)\phi = 0$$

5.1 Corrientes de Noether asociadas a la invariancia Poincaré

El teorema de Noether permite obtener una corriente conservada siempre que exista una simetría en la acción. Aunque nuestro interés en este curso se reduce a la invariancia bajo transformaciones de Poincaré, no cuesta ningún trabajo analizar una situación ligeramente más general. Consideraremos entonces un lagrangiano que depende de un conjunto de campos, denotados gen
'ericamente por ϕ_i y de sus derivadas primeras, $L(\phi_i, \partial_\mu\phi_j)$.

El tipo de transformaciones que vamos a considerar es

$$\begin{aligned} &\delta x^\mu \equiv \xi^\mu(x) \equiv a^\mu + \omega^\mu_\nu x^\nu \\ &\delta\phi_i \equiv \phi'(x) - \phi(x) = D_i^j(\xi)\phi_j + d_i^{j\mu}(\xi)\partial_\mu\phi_j + t_i \end{aligned} \tag{5.17}$$

En el caso particular de que $\xi = 0$, se dice que las transformaciones son *internas*. Diremos que las transformaciones (5.17) son una simetrí a, si $\delta S = 0$ sin utilizar las ecuaciones de movimiento. Por ejemplo, el lagrangiano para N campos escalares ϕ_i,

$$S = \int d^4x \frac{1}{2}\delta_{ij}\partial_\alpha\phi^i\partial^\alpha\phi^j \tag{5.18}$$

es invariante frente a las $N(N-1)/2$ transformaciones con

$$\begin{aligned}
&\xi^\mu = 0 \\
&d_i^{j\mu} = 0 \\
&D_i^j(\xi) = \omega_i^j
\end{aligned} \tag{5.19}$$

siempre que $\omega_{(ij)} = 0$.(Estas transformaciones generan el grupo de rotaciones en N dimensiones, llamado $SO(N)$).

5.2 Invariancia bajo trasformaciones internas

Para encontrar la corriente, efectuamos una variación de la acción correspondiente a una transformación de simetrí a, pero con el parámetro dependiente del punto. El integrando de la variación resulta ser entonces automáticamente proporcional a la derivada del parámetro con respecto a las coordenadas, siendo el coeficiente precisamente la corriente conservada.

$$\delta S = \int \frac{\partial L}{\partial \phi_i} D_i^j \phi_j + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi_i)}(\partial_\mu (D_i^j \phi_j) \equiv \int \partial_\mu (j^\mu)^i_j D_i^j \tag{5.20}$$

donde

$$(j^\mu)^i_j \equiv \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \phi_j \tag{5.21}$$

5.3 Invariancia bajo traslaciones espacio-temporales

Frente a las traslaciones, $\xi^\alpha = a^\alpha$, todos los campos se transforman de la misma manera,

$$\delta \phi_i = -a^\beta \partial_\beta \phi_i \tag{5.22}$$

es decir, que

$$\begin{aligned}
&\xi^\mu = a^\mu \\
&D_i^{j\mu} = 0 \\
&d_i^{j\beta}(\xi) = -a^\beta \delta_i^j
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Incidentalmente, esto implica que, para teorí as invariantes bajo traslaciones, al considerar otras transformaciones, como las de Lorentz puras, no es preciso considerar el efecto de las matrices ${d_i}^j$, en la ecuación (5.17), ya que corresponden simplemente a una traslación del punto.

Por otra parte, la variación del lagrangiano se puede calcular de la siguiente manera:

$$-\delta L = \frac{\partial L}{\partial \phi_i} \delta \phi_i + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \delta(\partial_\mu \phi_i) + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi_i)} \delta(\partial_\mu \partial_\nu \phi_i) + \ldots \tag{5.24}$$

lo cual se puede escribir como (considerando que el parámetro de la traslación pueda depender del punto)

$$-\delta L = a^\rho \left(\frac{\partial L}{\partial \phi_i} \partial_\rho \phi_i + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \partial_\mu \partial_\rho \phi_i + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi_i)} \partial_\mu \partial_\nu \partial_\rho \phi_i \right) +$$
$$\partial_\alpha a^\rho \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \phi_i)} \partial_\rho \phi_i + 2 \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \partial_\mu \phi_i)} \partial_\rho \partial_\mu \phi_i \right) +$$
$$+ \partial_\alpha \partial_\beta a^\rho \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \partial_\beta \phi_i)} \partial_\rho \phi_i \tag{5.25}$$

Una posible reescritura de esta variación es

$$-\delta L = -a^\rho \frac{\delta S}{\delta \phi_i} \partial_\rho \phi_i + \partial_\rho W^\rho \tag{5.26}$$

con

$$W^\rho = \partial_\beta a^\alpha \phi_\alpha \frac{\partial L}{\partial(\partial_\rho \partial_\beta \phi_i)} - a^\rho \partial_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \partial_\beta \phi_i)} \partial_\beta \phi_i \right) + 2 a^\beta \frac{\partial L}{\partial(\partial_\rho \partial_\mu \phi_i)} \partial_\mu \partial_\beta \phi_i \tag{5.27}$$

No nos interesa ahora esta forma, aunque conviene recordarla cuando estudiemos Diff., ya que entonces proporcionará identidades tipo Bianchi.

Cuando el parámetro es constante esta variación ha de ser cero por hip 'otesis; para verlo podemos reescribir la variación en la forma:

$$-\delta L = \partial_\alpha \left(a^\alpha L + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \partial \rho \phi_i)} \partial_\rho a^\sigma \partial_\sigma \phi_i \right)$$
$$-(\partial_\alpha a^\alpha) L + \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \phi_i)} \partial_\rho \phi_i + 2 \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \partial_\mu \phi_i)} \partial_\rho \partial_\mu \phi_i - \right.$$
$$\left. \partial_\beta \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \partial_\beta \phi_i)} \partial_\rho \phi_i \right) \right) \partial_\alpha a^\rho \tag{5.28}$$

Ahora bien, si escogemos variaciones dependientes del punto, podemos conseguir que se anulen en la frontera, por lo que el principio de mínima acción garantiza que la variación de la acción se anula independientemente de la existencia de una simetría. Esto conduce a

$$0 = -\delta S = \int T^\alpha_\beta \partial_a a^\beta \tag{5.29}$$

con

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu \phi_i)} \partial_\nu \phi_i + \frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu \partial^\alpha \phi_i)} \partial^\alpha \partial_\nu \phi_i - \partial^\beta \frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu \partial^\beta \phi_i)} \partial_\nu \phi_i - L \eta_{\mu\nu} \tag{5.30}$$

5.4 Cargas a partir de corrientes

Es fácil convencerse de que la existencia de una corriente conservada, $\partial_\alpha j^\alpha = 0$, implica automáticamente que existe una *carga* asociada, independiente del tiempo, a saber,

$$Q \equiv \int d^3x j^0(t, \vec{x}) \tag{5.31}$$

De hecho $\frac{dQ}{dt} = \int d^3x \partial_0 j^0 = \int d^3x \nabla \vec{j} = 0$ (siempre que los campos que constituyen la corriente se anulen suficientemente r
'apido en el infinito espacial.)

En el caso general, de que la corriente tenga más de un í ndice, la carga correspondiente tendrá todos los í ndices de la corriente, menos uno. Así por ejemplo, la carga asociada al tensor energí a-momento, normalmente conocida como *cuadrimomento*, ser
'a

$$P^\mu \equiv \int d^3x T^{\mu 0} \tag{5.32}$$

(la componente temporal de este cuadrivector representa la energí a, y las componentes espaciales, el trimomento).

5.5 Invariancia bajo el grupo de Lorentz

Al efectuar una transformación de Lorentz resulta conveniente eliminar la traslación resultante del hecho de que en las trasformaciones tensoriales el campo transformado está evaluado siempre en el punto transformado (despu
'es de todo, sabemos que nuestra teorí a es invariante bajo traslaciones, y ya hemos extraí do las consecuencias de esta invariancia, a saber, la conservación del tensor energí a momento)

$$\delta\phi_i = \omega^{\alpha\beta}(D_{\alpha\beta})_i^j \phi_j \tag{5.33}$$

Precisamente al haber eliminado la traslación el lagrangiano es invariante (y no sólo la acción). Explícitamente,y teniendo en cuenta que la derivada del campo se transforma como un tensor con un índice adicional,

$$\delta L = 0 = \frac{\partial L}{\partial \phi_i}(\omega.D)_i{}^j \phi_j + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\rho \phi_i)}((\omega.D)_i{}^j \partial_\rho \phi_j - \omega^\mu{}_\rho \partial_\mu \phi_i) \tag{5.34}$$

Y usando las ecuaciones de movimiento, esto es equivalente a:

$$\partial_\rho (\frac{\partial L}{\partial(\partial_\rho \phi_i)} D_{\mu\nu\, i}{}^j \phi_j) = T_{[\mu\nu]} \tag{5.35}$$

(nótese que la parte del tensor energí a-momento proporcional al lagrangiano no contribuye a la parte antisimétrica).

A su vez esto sugiere refedinir el tensor energía-momento de forma que sea simétrico en sus dos índices (Belinfante):

$$T_{\mu\nu}^{bel} \equiv T_{\mu\nu} - \partial_\rho \left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\rho \phi_i)} D_{\mu\nu\, i}{}^{j} \phi_j - \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} D_{\rho\nu\, i}{}^{j} \phi_j - \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu \phi_i)} D_{\rho\nu\, i}{}^{j} \phi_j \right] \tag{5.36}$$

En términos del tensor de Belinfante, la densidad de momento angular será

$$M^{\lambda\mu\nu} \equiv x^\mu T^{\lambda\nu}_{bel} - x^\nu T^{\lambda\mu}_{bel} \tag{5.37}$$

cuya conservaci
'on es consecuencia de la simetrí a del tensor de Belinfante.

En el caso concreto del campo de Maxwell, el tensor canónico se escribe:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu} - F_{\rho\mu} \partial_\nu A^\rho) \tag{5.38}$$

que no es simétrico, ni invariante gauge.

El correspondiente tensor de Belinfante se escribe

$$T_{\mu\nu}^{bel} = \frac{1}{2}(\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu} - F_{\rho\mu} F^\rho_\nu) \tag{5.39}$$

Un ejercicio sencillo nos permite escribir la densidad de energí a como

$$T_{00} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \tag{5.40}$$

así como la densidad de momento lineal (vector de Poynting):

$$T^{0i} = -\frac{1}{2}(\vec{E} \times \vec{B})^i \tag{5.41}$$

- Ejercicio. Calcular la corriente de Noether correspondiente a la invariancia de fase en el lagrangiano

$$L = \phi^* f(\Box) \phi \tag{5.42}$$

- Solución Al efectuar una transformación $\delta\phi = i\alpha(x)\phi$ la acción se transforma como

$$\delta S = \int d^4x j^\mu \partial_\mu \alpha \tag{5.43}$$

Si luego escogemos la función $\alpha(x)$ de tal forma que $\alpha|_{\partial D} = 0$, entonces la variación es un caso particular de las variaciones del principio de mí nima acción, por lo que la variación de la acción ha de anularse. Integrando por partes se obtiene

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{5.44}$$

5.6 Bosones cargados y acoplo mínimo. Fases y cargas.

Existen en la naturaleza campos (cuánticos) escalares, como los que describen partí culas elementales, como el todaví a no encontrado experimentalmente bosón de Higgs. Su acci
'on se escribe como:

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2}\partial_\alpha\phi^*\partial^\alpha\phi - \frac{1}{2}m^2\phi\phi^*\right] \tag{5.45}$$

de forma que la ecuación de movimiento correspondiente es:

$$(\Box + m^2)\phi = 0 \tag{5.46}$$

Si descomponemos el campo en su parte real e imaginaria,$\phi = \phi_1 + i\phi_2$ la misma acción se escribe como:

$$S = \int d^4x \sum_{j=1,2} \left[\frac{1}{2}\partial_\alpha\phi_j\partial^\alpha\phi_j - \frac{1}{2}m^2\phi_j\phi_j\right] \tag{5.47}$$

En su forma compleja, la acción es invariante frente a cambios de fase constantes

$$\phi' = \phi\, e^{iq\theta} \tag{5.48}$$

(donde $q \in \mathbb{R}$ es un número real arbitrario). Estas transformaciones de fase constituyen un grupo abeliano, que transforma un número complejo unimodular en otro número complejo unimodular, y que se suele denotar como el grupo $U(1)$. En la forma real todo esto se traduce en rotaciones de $\mathbb{R}^2$, que matemáticamente constituyen matrices bidimensionales ortogonales de determinante unidad, es decir, transformaciones de $SO(2)$

$$\phi'_i \equiv M_{ij}\phi_j \tag{5.49}$$

con

$$\delta^{ij}M_{il}M_{jk} = \delta_{lk} \tag{5.50}$$

La corriente de Noether asociada a esa ley de conservación será simplemente

$$j^\mu \equiv \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi = iq(\partial^\mu\phi^*\phi - \partial^\mu\phi\phi^*) \tag{5.51}$$

donde el prefactor es convencional para que la corriente sea hermí tica.

$$(j^\mu)^+ = j^\mu \tag{5.52}$$

La correspondiente carga será:

$$Q \equiv iq \int d^3x(\dot{\phi}^*\phi - \dot{\phi}\phi^*) \tag{5.53}$$

Para verificar que esta carga corresponde realmente a la carga eléctrica del campo escalar, podemos acoplar es campo al electromagetismo, usando acoplo mí nimo, que en este caso es equivalente a substituir la derivada ordinaria por la derivada covariante el el lagrangiano:

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - iqA_m \tag{5.54}$$

(es éste el único sitio donde aparece el cuanto de carga del bosón representado por el campo ϕ). Al efectuar un cambio de fase,

$$(D_\mu \phi)' = e^{iq\theta} D_\mu \phi \tag{5.55}$$

ya que el término proveniente de derivar la fase, $iq\partial_\mu \theta$, se cancela con el que proviene de efectuar una transformación gauge del potencial electromagnético, $-iq\partial_\mu \theta$. El lagrangiano completo

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2} D_\alpha \phi^* D^\alpha \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi \phi^* - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \tag{5.56}$$

es invariante entonces frente a las mismas transformaciones de fase que tení amos en el caso libre, pero adem ás con la posibilidad añadida de poder cambiar las fases de forma diferente en cada punto; esto es, que las fases satisfagan que $\partial_\mu \theta(x) \neq 0$.

6. Hamiltonianos de teorías gauge

Veamos una introducción sucinta al formalismo de Dirac para el tratamiento de sistemas en los que no es posible efectuar la transformación de Legendre.

Ligaduras primarias

$$\phi_m(q,p) = 0 \tag{6.1}$$

Hamiltoniano

$$H^* = H + c_m \phi_m \tag{6.2}$$

Ecuaciones débiles (válidas sólo en la hipersuperficie definida por las ligaduras)

$$\phi_m \sim 0 \tag{6.3}$$

Utilizando multiplicadores de Lagrange nos vemos abocados a

$$\dot{g} \sim \{g, H_T\} \tag{6.4}$$

$$H_T = H + u_m \phi_m \tag{6.5}$$

Ecuaciones de movimiento

$$\dot{g} = \{g, H\} + u_m \{g, \phi_m\} \tag{6.6}$$

Una regla general es que hay que calcular los paréntesis antes de usar las ligaduras Para que la derivada temporal de las ligaduras primarias se anule, es necesario a veces introducir ligaduras secundarias. Al final de los tiempos, juntando todas las ligaduras,

$$\phi_j \sim 0 \tag{6.7}$$

$j = 1 \ldots M + K$. Las ecuaciones de consistencia son del tipo

$$\{\phi_j, H\} + \sum_m u_m \{\phi_j, \phi_m\} \sim 0 \tag{6.8}$$

Si el lagrangiano es consistente, debe de haber una solución de este sistema, del tipo

$$u_m = U_m(q,p) \tag{6.9}$$

El correspondiente sistema homogéneo es

$$V_m \{\phi_j, \phi_m\} = 0 \tag{6.10}$$

que suponemos admite un número A de soluciones independientes.

La solución general será de la forma

$$u_m = U_m + \sum_a v_a V_{am} \tag{6.11}$$

$$
\begin{aligned}
H_T &= H' + \sum_a v_a \phi_a \\
H' &= H + \sum_m U_m \phi_m \\
\phi_a &= \sum_m V_{am} \phi_m
\end{aligned} \tag{6.12}
$$

Ahora definimos variables de *primera clase*,R si

$$
\{R, \phi_j\} \sim 0 \tag{6.13}
$$

($j = 1 \ldots J = M + K$). En caso contrario, diremos que R es de *segunda clase*. Tenemos entonces

$$
\{R, \phi_j\} = \sum_k r_{jk} \phi_k \tag{6.14}
$$

Una aplicación sencilla de la identidad de Jacobi nos demuestra que el corchete de dos cantidades de primera clase es también de primera clase.

Consideradas como generadoras de transformaciones de contacto infinitesimales, dan lugar a transformaciones de las q y de las p que no afectan al estado físico.

La existencia de ligaduras de segunda clase quiere decir que hay grados de libertad que no son físicamente importantes.

Definimos la matriz

$$
\sum_t C_{st} \{\chi_t, \chi_u\} = \delta_{su} \tag{6.15}
$$

y e paréntesis de Dirac

$$
[\xi, \eta] = \{\xi, \eta\} - \sum_{st} \{\xi, \chi_s\} C_{st} \{\chi_t, \eta\} \tag{6.16}
$$

Si se usan paréntesis de Dirac, las ligaduras de segunda clase se pueden implementar en sentido fuerte.

Evidentemente las ecuaciones de movimiento se pueden escribir como

$$
\dot{g} = [g, H_T] \tag{6.17}
$$

Por otra parte, para cualquier función definida en el espacio de las fases,

$$
[\xi, \chi_s] = 0 \tag{6.18}
$$

6.1 La partícula relativista

$$L = -m\int ds = -m\int\sqrt{\left(\frac{dx^0}{d\lambda}\right)^2 - \left(\frac{d\vec{x}}{d\lambda}\right)^2}d\lambda = -mc^2\int\sqrt{1-\left(\frac{d\vec{x}}{cdt}\right)^2}dt \quad (6.19)$$

Si tomamos λ como "tiempo", de forma que

$$\dot{f} \equiv \frac{df}{d\lambda} \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} p_0 &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^0} = -mc^2\frac{\dot{x}^0}{\sqrt{\dot{x}_0^2 - \dot{\vec{x}}^2}} \\ p_i &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = -mc^2\frac{-\dot{x}_i}{\sqrt{\dot{x}_0^2 - \dot{\vec{x}}^2}} \end{aligned} \quad (6.21)$$

es fácil ver que

$$p_0^2 - \sum_i p_i^2 = m^2c^2 \quad (6.22)$$

por lo que no es posible expresar las velocidades en función de los momentos para efectuar la transformación de Legendre.

Si por el contrario, escogemos el tiempo como de ordinario, esto es

$$\dot{f} \equiv \frac{df}{dt} \quad (6.23)$$

entonces

$$p_i = \frac{mv_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (6.24)$$

y es posible invertir

$$v_i = \frac{p_i c}{\sqrt{p^2 + m^2c^2}} \quad (6.25)$$

El hamiltoniano resulta

$$\begin{aligned} H &= \sum_i v_i p_i - L = \sum_i \frac{p_i^2c^2}{\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}} + \frac{m^2c^4}{\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}} = \sqrt{p^2c^2+m^2c^4} = \\ & mc^2\sqrt{1+\frac{p^2}{m^2c^2}} = mc^2\left(1+\frac{p^2}{2m^2c^2} + O\left(\frac{p^4}{m^4c^4}\right)\right) \end{aligned} \quad (6.26)$$

que tiene un sentido físico evidente.

6.2 El caso abeliano: el lagrangiano de Maxwell

Una característica de la acción de Maxwell es que algunos de los momentos canónicamente conjugados a las variables campo se anulan.

$$\begin{aligned}\pi_i &\equiv \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 A^i)} = E_i \\ \pi_0 &\equiv \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 A^0)} = 0\end{aligned} \tag{6.27}$$

debido a que $\partial_0 A^0$ no aparece en el lagrangiano. Esto constituye una *ligadura primaria* en el lenguaje de Dirac.

Podemos invertir:

$$\dot{A}_i = 2\pi_i + \partial_i A_0 \tag{6.28}$$

El correspondiente hamiltoniano será:

$$H = \sum_i p_i \dot{q}^i - L = \int d^3x \pi_i(\pi_i + \partial_i A_0) + \frac{1}{2}(-\pi_i^2 + B_i^2) = \int d^3x \frac{1}{2}[\pi_i^2 + B_i^2] \tag{6.29}$$

Para poder construir un hamiltoniano consistente, tenemos que asegurar que las derivadas de las ligaduras primarias también se anulan; lo cual quiere decir físicamente que si inicialmente se constriñe el movimiento del sistema a la hipersuperficie del espacio de las fases definida por las ligaduras primarias, entonces la evolución dinámica del sistema, regida por los corchetes de Poisson, no va a sacar al sistema de la hipersuperficie en cuestión. Esto es

$$\dot{\pi_0} = \{\pi_0, H\} = 0 \tag{6.30}$$

En algunos casos, eso conduce a la necesidad de imponer nuevas ligaduras. En el caso presente, lo que resulta es la ley de Gauss:

$$\partial_i \pi^i = \partial_i E^i \tag{6.31}$$

- **Ejercicio.** Es frecuente,como hemos visto, que la misma exigencia de consistencia con la evolución canónica aplicada a las ligaduras secundarias, resulte en todavía más ligaduras. Verificar que éste no es nuestro caso, y que la ley de Gauss como tal es ya consistente con dicha evolución.

El término en el hamiltoniano canónico en el que aparec la componente temporal del potencial se puede integrar por partes:

$$\int d^3x \pi_i \partial^i A_0 = \int d^3x A_0 \partial_i E^i = 0 \tag{6.32}$$

siempre que los momentos espaciales (es decir, el campo eléctrico) se anulen suficientemente rápido en el infinito espacial). El hamiltoniano resultante es

$$H = \int d^3x \frac{1}{2}\left(E^2 + B^2\right) \tag{6.33}$$

que coincide con la integral del T_{00} de Belinfante.

Si no hiciéramos la integral por partes, y siguiéramos punto por punto la prescripción de Dirac, nos veríamos abocados a

$$H_0 = \int d^3x \frac{1}{2}\left(\pi^2 + B^2 - \vec{\pi}.\vec{\nabla}A^0 + v_1\pi_0\right) \tag{6.34}$$

6.3 El gauge de radiación

El conjunto completo de ligaduras es, en ste caso,

$$\begin{aligned}
&\phi_1 \equiv \pi_0 \sim 0\\
&\phi_1 \equiv \vec{\nabla}\vec{\pi} \sim 0\\
&\phi_3 \equiv A_0 \sim 0\\
&\phi_4\vec{\nabla}\vec{A} \sim 0
\end{aligned} \tag{6.35}$$

La matriz de corchetes resulta ser:

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \vec{\nabla}^2_{\vec{x}}\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\vec{\nabla}^2_{\vec{x}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$$

Y usando el hecho de la vida de que

$$\vec{\nabla}^2_{\vec{x}} \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} = -\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) \tag{6.36}$$

se obtiene sin dificultad:

$$C^{-1}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\\ \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\vec{x}-\vec{y}|} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De donde se deducen sin dificultad los paréntesis de Dirac.

$$\begin{aligned}
&[\pi^\mu(t,\vec{x}), A^\nu(t,\vec{y})] = (\eta^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu)\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) + \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial y^\nu}\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\\
&[\pi^\mu, \pi^\nu] = [A^\mu, A^\nu] = 0
\end{aligned} \tag{6.37}$$

6.4 El método de Faddeev-Jackiw

Consideremos un lagrangiano de la forma (mucho más general de lo que parece)

$$L = a_i(q)\dot{q}^j - V(q) \tag{6.38}$$

Ecuaciones de movimiento:

$$f_{ij}\dot{q}^j = \partial_i V \tag{6.39}$$

$$f = da \tag{6.40}$$

En el caso de que

$$det\, f_{ij} \neq 0 \tag{6.41}$$

$$\dot{q}^i = f_{ij}^{-1}\partial_j V \tag{6.42}$$

Se tiene además que

$$H = V \tag{6.43}$$

lo que quiere decir que las coordenadas q viven realmente en el espacio de las fases (algunas son coordenadas y algunas momentos). Escribiendo

$$\dot{q}^i = \{V, q^i\} = \partial_k V\{q^k, q^i\} \tag{6.44}$$

nos vemos abocados a la proposición de que los corchetes correctos (equivalentes a los de Dirac) son

$$\{q^i, q^j\} = f_{ij}^{-1} \tag{6.45}$$

El caso en que el determinante se anula es un poco más complicado.En este caso, el teorema de Darboux garantiza que existen otras variables tales que

$$q = (P, Q, Z) \tag{6.46}$$

donde el recorrdo de las antiguas variables es $q^i, i = 1 \ldots n$, y las nuevas son $Q^a, P^a, a = 1 \ldots N$, en tanto que las $Z^s, s = 1 \ldots n - 2N$. Se sigue que

$$L = P_i\dot{Q}^i - \Phi(P, Q, Z) \tag{6.47}$$

las ecuaciones

$$\frac{\partial\Phi}{\partial Z^s} = 0 \tag{6.48}$$

se pueden usar para despejar las Z en función de las P y las Q. Si el hessiano se anulase, se repite el procedimiento.

7. Solución de algunos ejercicios.

EJERCICIO (1.1) Representaremos los puntos por P_1 y P_2, tales que $z_1 = z_2 = 0$.
Las ligaduras no holónomas son:
$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = l^2$ y
$(\frac{\dot{x_1}+\dot{x_2}}{2}, \frac{\dot{y}_1+\dot{y}_2}{2}) = \lambda(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$

EJERCICIO (1.2) Los desplazamientos posibles vienen dados por
$\vec{n}d\vec{r} = t$
Y los desplazamientos virtuales por
$\vec{n}\delta\vec{r} = 0.$

EJERCICIO (1.3) Es evidente por simetría que los desplazamientos virtuales están contenidos en el plano tangente a la esfera, en tanto que las reacciones son radiales:
$\vec{R}.\delta r = 0$

EJERCICIO (1.4) Partimos de $m\ddot{\vec{r}}\delta\vec{r} = 0$ y de $\delta z = -\frac{x\delta x + y\delta y}{z}$
$\frac{\ddot{x}}{x} = \frac{\ddot{y}}{y} = \frac{\ddot{z}}{z} \equiv \rho$
Por otra parte $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \Rightarrow x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 0$
Y derivando otra vez: $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z} = 0$
y usando la ecuación de movimiento, $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = -\rho$
Lo que conduce a $\dot{\rho} = 0$, de forma que $\rho = -\vec{v}_0^2$ El movimiento viene descrito por $(v_0 \equiv |\vec{v}_0|)$
$\vec{r} = \vec{r}_0 \, cos \, v_0 t + \frac{\vec{v}_0}{v_0} \, sin \, v_0 t$ donde $\vec{r}_0^2 = 1$ y $\vec{r}_0\vec{v}_0 = 0$
Para determinar las reacciones de las ligaduras, partimos de
$(\lambda\vec{r} + \vec{R})\delta\vec{r} = 0$, de forma que $\lambda = -\frac{R_z}{z} \Rightarrow \frac{R_x}{R_z} = \frac{x}{z}; \frac{R_y}{R_z} = \frac{y}{z}$

EJERCICIO (1.6) $L = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^2 - V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$
Coordenadas del CDM: $(m_1 + m_2)\vec{R} \equiv m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2$;
distancia relativa: $\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$
$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r}$; $\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M}\vec{r}$
$$L = \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M}\dot{\vec{r}}\right)^2 + \frac{1}{2}m_1\left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M}\dot{\vec{r}}\right)^2 - V(r)$$
$$L = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{M}\dot{\vec{r}}^2 - V(r)$$

EJERCICIO (1.7)

Intentamos repetir la jugada: $M\vec{R} \equiv m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3$

$$\vec{r}_{12} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \; ; \vec{r}_{13} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_3$$

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M}\vec{r}_{12} + \frac{m_3}{M}\vec{r}_{13}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r}_{12} - \frac{m_3}{M}\vec{r}_{32} = \vec{R} - \frac{m_1+m_3}{M}\vec{r}_{12} + \frac{m_3}{M}\vec{r}_{13}$$

$$\vec{r}_3 = \vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r}_{13} - \frac{m_2}{M}\vec{r}_{23} = \vec{R} + \frac{m_2}{M}\vec{r}_{12} - \frac{m_1+m_2}{M}\vec{r}_{13}$$

el CDM se sigue desacoplando

$$L = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 - \frac{m_2m_3}{M}\dot{\vec{r}}_{12}\dot{\vec{r}}_{13} + \frac{m_2(m_1+m_3)M}{2M}\dot{\vec{r}}_{12}^2$$

$$+\frac{m_3(m_1+m_2}{2M}\dot{\vec{r}}_{13}^2 - V(\vec{r}_{12}, \vec{r}_{13})$$

En el sistema (Sol, Tierra, Luna) se tiene $\frac{m_2}{m_1} \sim 10^{-6}$ y $\frac{m_3}{m_1} \sim 10^{-8}$

En este caso el lagrangiano relevante es:

$$L = \frac{m_2}{2}\dot{\vec{r}}_2^2 + \frac{m_3}{2}\dot{\vec{r}}_3^2 + \frac{Gm_1m_2}{r_2} + \frac{Gm_1m_3}{r_3} + \frac{Gm_3m_2}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|} +$$

Definimos el CDM del sistema tierra-luna

$$\vec{\rho} \equiv \frac{m_2\vec{r}_2+m_3\vec{r}_3}{m_2+m_3}$$

$$\vec{\delta}\delta \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_3$$

$$\mu \equiv \frac{m_2m_3}{m_2+m_3}$$

$$m \equiv m_2 + m_3$$

Es fácil ver que:

$$\vec{r}_2 = \vec{\rho} + \frac{\mu}{m_2}\vec{\delta}$$

$$\vec{r}_3 = \rho - \frac{\mu}{m_3}\delta$$

La energía cinética se escribe:

$$K = \frac{m}{2}\dot{\vec{\rho}}^2 + \frac{\mu}{2}\dot{\vec{\delta}}^2$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{|\vec{\rho}+\frac{\mu}{m_2}\vec{\delta}|}$$

$$\frac{1}{r_3} = \frac{1}{|\vec{\rho}-\frac{\mu}{m_3}\vec{\delta}|}$$

$$\frac{1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|} = \frac{1}{\delta}$$

Y usando $(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^3)$

desarrollamos en $\frac{\delta}{\rho}$:

$$\frac{m_2}{r_2} = \frac{m_2}{\rho}\left(1 - \frac{\mu}{m_2}\frac{\vec{\rho}\vec{\delta}}{\rho^2} - \frac{\mu^2}{2m_2^2}\frac{\delta^2}{\rho^2} + \frac{3\mu^2}{2m_2^2}\frac{\left(\vec{\rho}\vec{\delta}\right)^2}{\rho^4}\right)$$

$$\frac{m_3}{r_3} = \frac{m_3}{\rho}\left(1 + \frac{\mu}{m_3}\frac{\vec{\rho}\vec{\delta}}{\rho^2} - \frac{\mu^2}{2m_3^2}\frac{\delta^2}{\rho^2} + \frac{3\mu^2}{2m_3^2}\frac{\left(\vec{\rho}\vec{\delta}\right)^2}{\rho^4}\right)$$

Finalmente el lagrangiano al orden considerado reza:

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{\rho}}^2 + \frac{\mu}{2}\dot{\vec{\delta}}^2 + \frac{m}{\rho} - \frac{\mu}{2}\frac{\delta^2}{\rho^3} + \frac{3\mu}{2}\frac{\left(\vec{\rho}\vec{\delta}\right)^2}{\rho^5}$$

EJERCICIO(1.9)

$$L = p\dot{q} - \frac{p^2}{2} - V(q)$$

$L = \sum_i p\dot{q} - H(p,q)$ (Faddeev y Jackiw)

EJERCICIO(1.11)

Utilizando coordenadas polares,

$$L = \frac{m}{2}\left(R^2\dot{\theta}^2 + R^2\Omega^2 sin^2\,\theta\right) + mgRcos\,\theta$$

EM:$\ddot{\theta} = \Omega^2 sin\,\theta cos\,\theta - \frac{g}{R} sin\,\theta$

EJERCICIO (2.1)

$$q = q_0 \cos\omega t + \frac{p_0}{\omega}\cos\omega t$$

$$p = -q_0\omega\sin\omega t + p_0\cos\omega t$$

$$dq \wedge dp = dq_0 \wedge dp_0 \cos^2 - dp_0 \wedge dq_0 \sin^2 = dq_0 \wedge dp_0$$

La celda unidad se transforma en un romboide de vértices:

$(0,0); (cos\,\omega T - \omega\sin\,\omega T); (\frac{1}{\omega} sin\,\omega T, cos\,\omega T); (cos\,\omega T + \frac{1}{\omega} sin\,\omega T - \omega sin\,\omega T + cos\,\omega T)$

La base mide $\sqrt{\omega^2 sin^2\,\omega T + cos^2\,\omega T}$ y la altura $\frac{1}{\sqrt{\omega^2 sin^2\,\omega T + cos^2\,\omega T}}$

EJERCICIO (2.2)

$$\Delta q \sim v\Delta t$$

$$\Delta p \sim ma\Delta t \sim mv$$

$$\delta p\Delta q \sim mv^2 \sim E\Delta t \sim kT\Delta t$$

Por otra parte el volumen del espacio de las fases (por grado de libertad)

$$V_f \sim Lmc$$

Esto lleva a la estimación:

$$T_P \sim \frac{mcL}{kT} \sim 1\frac{gramo \times c^2 \times 1metro}{c \times 300K} \sim \frac{5\times10^{23}GeV}{3\times10^2\times10^{-13}GeV}\frac{10^{-3}Km}{3\times10^5 Km/sec} \sim 10^{25} seg \sim 10^{17} anos \sim 10^7 eones$$

EJERCICIO (2.3)

$$v \equiv \sum v_i dx^i \Rightarrow dv = \sum dv_i \wedge dx^i = \sum \partial_j v_i dx^j \wedge dx^i =$$

$$\sum \frac{1}{2}(\partial_j v_i - \partial_i v_j) dx^j \wedge dx^i \equiv \frac{1}{2}\sum \epsilon_{jik}(\nabla \times v)_k dx^j \wedge dx^i$$

$$w \equiv \sum w_k \epsilon_{kij} dx^i \wedge dx^j \Rightarrow dw = \sum_k \partial_k w_k dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

$$f(b) - f(a) = \int_a^b \vec{\nabla} f ds$$

$$\int_{\partial S} \vec{v} d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{v}) d\vec{S}$$

$$\int_{S=\partial V} \vec{v} d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla}\vec{v} dV$$

EJERCICIO (2.5)

Es evidente que si g es canónica, entonces $g^*(\omega \wedge \omega) = \omega \wedge \omega$

$g^*(\omega \wedge \ldots \wedge \omega) = \omega \wedge \ldots \wedge \omega$

QED

EJERCICIO (2.6)

Las trayectorias correspondientes a las ecuaciones del movimiento en coordenadas arbitrarias son las características de la 1-forma $\alpha \equiv pdq - Hdt = \sum \alpha_i dx^i$

Si escribimos $pdq - Hdt = PdQ - KdT + dS$ entonces $\frac{dP}{dT} = -\frac{\partial K}{\partial Q}$ $\frac{dQ}{dT} = \frac{\partial K}{\partial P}$

En el caso particular $g : \mathbb{R}_{2n} \to \mathbb{R}_{2n}$,

el nuevo hamiltoniano es $K(P, Q, t) = H(p, q, t)$

$\oint_\gamma pdq - PdQ = 0 \therefore \int pdq - PdQ \equiv S$ no depende del camino.

$\therefore$ en $\mathbb{R}^{2n+1}$ $pdq - Hdt = PdQ - Hdt + dS$

EJERCICIO (2.7)
Llamemos $2a$ a la distancia entre la masa M en 1 y la masa M en 2, y r_1 y r_2 a las coordenadas del tercer cuerpo de masa m respecto de los dos centros.
Usaremos coordenadas elípticas, $\xi \equiv r_1 + r_2$ y $\eta \equiv r_1 - r_2$
$\xi = constante$ son elipses; $\eta = constante$ son hipérbolas. Como son mutuamente ortogonales
$ds^2 = g_\xi^2 d\xi^2 + g_\eta^2 d\eta^2$
En las elipses, $d\xi = 0\,, dr_1 = ds\cos\alpha\,, dr_2 = -ds\cos\alpha \therefore d\eta = 2ds\cos\alpha$
En las hipérbolas, $d\eta = 0\,, dr_1 = ds\sin\alpha, dr_2 = ds\sin\alpha \therefore d\xi = 2ds\sin\alpha$
$\therefore\ g_\xi = \frac{1}{4\sin^2\alpha}\,, g_\eta = \frac{1}{4\cos^2\alpha}$
En una elipse, $x = a\cos\theta\,, y = b\sin\theta$, los focos están en $(\pm\sqrt{a^2-b^2}, 0)$
$\therefore r_1^2 = (a\cos\theta + \sqrt{a^2-b^2})^2 + b^2\sin^2\theta$
$\therefore r_1 = a + \sqrt{a^2-b^2}cos\,\tau$
y $r_2^2 = (a\cos\theta - \sqrt{a^2-b^2})^2 + b^2\sin^2\theta$
$\therefore r_2 = a - \sqrt{a^2-b^2}cos\,\tau$
Vector tangente :$t = (-asin\,\tau, bcos\,\tau)/\sqrt{a^2sin^2\,\tau + b^2cos^2\tau}$
$\therefore\ r_1.t \equiv r_1\cos\alpha = -r_1\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a^2sin^2\,\tau+b^2cos^2\,\tau}\sin\theta$
y
$\therefore\ r_2.t \equiv r_2\cos\beta = r_2\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a^2sin^2\,\tau+b^2cos^2\,\tau}\sin\theta$
es decir
$cos\,\alpha = -cos\,\beta, \therefore \beta = \pi - \alpha$
La fórmula del coseno: $r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\pi - 2\alpha) = 4a^2$
$\therefore\ \cos^2\alpha = \frac{4a^2-(r_1-r_2)^2}{4r_1r_2}$
Hecho de la vida: si $ds^2 = \sum g_i^2 dx_i^2$, entonces, $H = \sum\frac{p_i^2}{2g_i^2} + V$
En nuestro caso $ds^2 = \frac{\xi^2-\eta^2}{4}\left(\frac{d\xi^2}{\xi^2-4a^2} + \frac{d\eta^2}{4a^2-\eta^2}\right)$
$-\frac{Mm}{r_1} - \frac{Mm}{r_2} = -2Mm\frac{\xi}{\xi^2-\eta^2}$
El hamiltoniano por unidad de masa
$\therefore\ H = 2p_\xi^2\frac{\xi^2-4a^2}{m(\xi^2-\eta^2)} + 2p_\eta^2\frac{4a^2-\eta^2}{m(\xi^2-\eta^2)} - \frac{4k\xi}{\xi^2-\eta^2}$

EJERCICIO (2.7) (Continuación)
Hamilton-Jacobi:
$(\frac{\partial S}{\partial\xi})^2(\xi^2-4a^2) + (\frac{\partial S}{\partial\eta})^2(4a^2-\eta^2) = K(\xi^2-\eta^2) + 4k\xi$
separando variables
$(\frac{\partial S}{\partial\xi})^2(\xi^2-4a^2) - 4k\xi - K\xi^2 = c_1$
$(\frac{\partial S}{\partial\eta})^2(4a^2-\eta^2) + K\eta^2 = -c_1$
La integral completa (Charlier)
$S = \int\sqrt{\frac{c_1+c_2\xi^2+4K\xi}{\xi^2-4a^2}}d\xi + \int\sqrt{\frac{-c_1-c_2\eta^2}{4a^2-\eta^2}}d\eta$

EJERCICIO (4.1) Calcular las variables acción ángulo para el oscilador armónico.

$H = \frac{p^2}{2m} + m\omega^2 q^2$. La elipse $H = E$ viene dada por:

$$p = \sqrt{2mE} sin\,\theta$$

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \cos\,\theta$$

$$\Delta S = \int_0^{2\pi} \sqrt{2mE - 2mE cos^2\,\theta}(-1)\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} sin\,\theta d\theta = -\frac{2E\pi}{\omega}$$

$$\therefore I = \frac{E}{\omega}$$

$$S = \sqrt{2mE}\int_0^q \sqrt{1 - \frac{m\omega^2 Q^2}{2mE}} dQ = I\left(q\sqrt{\frac{m\omega}{2I}}\sqrt{1 - \frac{m\omega q^2}{2I}} + arc\,sin\,q\sqrt{\frac{m\omega}{2I}}\right) =$$

$$q\sqrt{\frac{m\omega}{2}\left(I - \frac{m\omega q^2}{2}\right)} + I arc\,sin\,q\sqrt{\frac{m\omega}{2I}}$$

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = 2I\sqrt{\frac{m\omega}{2I}\left(1 - \frac{m\omega q^2}{2I}\right)}$$

$$\phi = \frac{\partial S}{\partial I} = arc\,sin\,q\sqrt{\frac{m\omega}{2I}}$$

EJERCICIO (4.2) Comencemos demostrando el llamado teorema de Jacobi.

Sea $S^1 \equiv \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, y consideremos el automorfismo

$x \rightarrow x + \omega\,mod\,1$. Entonces las órbitas del tal automorfismo son densas

sii ω es irracional.

En efecto, si $\phi = \frac{p}{q}$ entonces $\phi^q x = x + q\omega = x + p = x$

Por otra parte,si ω es irracional, entonces, $\phi^n x = \phi^m x$ implica $(n-m)\omega \in \mathbb{Z} \therefore n = m$

En dos dimensiones, consideremos el toro

$$x = cos\,\phi\,(1 + rcos\,\psi)$$

$$y = sin\,\phi\,(1 + rcos\,\psi)$$

$$z = rsin\,\psi$$

Claramente $ds^2 = r^2 d\psi^2 + d\phi^2(1 + rcos\,\psi)^2$

Las ecuaciones de las geodésicas se escriben:

$$r^2\dot{\psi}^2 + (1 + rcos\,\psi)^2\dot{\phi}^2 = E$$

$$\dot{\phi}(1 + rcos\,\psi)^2 = J$$

EJERCICIO (4.3)

Demostrar que cuando $k = l = 1$ y

$$\dot{\phi} = \omega$$

$$\dot{I} = \epsilon g(\phi)$$

entonces $\forall t, 0 \leq t \leq \frac{1}{\epsilon}$, y si definimos $J(t) = I(0) + \epsilon \bar{g} t$, entonces,

$$|I(t) - J(t)| < c\epsilon.$$

Definamos $\tilde{g}(I, \phi) \equiv g(I, \phi) - \bar{g}(I)$. Es evidente que $h(\phi) \equiv \int_0^\phi d\theta \tilde{g}(\theta) d\theta$ es una función periódica, y, por consiguiente, acotada.

Es un hecho de la vida que $\int_0^t d\tau \tilde{g}(\phi_0 + \omega\tau) = \int_0^{\omega t} d\theta \tilde{g}(\theta) \frac{d\theta}{\omega}$

Claramente $I(t) - I(0) = \int_0^t \epsilon g(\phi_0 + \omega\tau) d\tau = \epsilon \bar{g} t + \frac{\epsilon}{\omega} h(t\omega)$

Esto se traduce físicamente en una evolución sistemática de velocidad $\epsilon \bar{g}$, unida a una serie de oscilaciones de orden ϵ que dependen de la función complicada $\tilde{g}$.

EJERCICIO (4.4)

$$\dot{\phi} = -\frac{\partial}{\partial I}\left(H_0(I) + \epsilon H_1(I, \phi)\right)$$

$$\dot{I} = \frac{\partial}{\partial \phi}\left(H_0(I) + \epsilon H_1(I, \phi)\right)$$

Es claro que $\bar{g} = 0$, ya que es la integral de una derivada total.

Por consiguiente, no existe evolución en un sistema hamiltoniano no degenerado.

References

[1] VI. Arnold, *Mathematical methods in classical mechanics (Springer); Méthodes mathématiques de la mécanique classique*
Equations differentielles ordinaires
Chapitres supplementaires de la théorie des equations differentielles ordinaires; (MIR,Moscou)

[2] V.I. Arnold, V.V. Kozlov, A.I. Neishtadt, *Mathematical aspects of classical and celestial mechanics* (Springer Verlag, 1991)

[3] PAM DIrac,*Lectures on quantum mechanics.* (Dover)

[4] F.R. Gantmajer, *Mecánica Analítica*, (URSS,Moscú)

[5] I.M. Gelfand and S.V. Fomin,*Calculus of variations* (Dover)

[6] H. Goldstein, *Mecánica clásica* (Reverté)

[7] A. Hanson, T. Regge and C. Teitelboim, *Constrained Hamiltonian systems*, (Accademia nazionale dei lincei, Roma 1976)

[8] L. Landau y E.M. Lifshitz, *Mecánica* (Tomo 1 del Curso de Física Teórica);

Teoría Clásica de los campos (Tomo 2 del Curso de Física Teórica) (Editorial Reverté)

[9] E. Whittaker, *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies* (Cambridge)