# Lecciones sobre el campo electromagnético

**Enrique Alvarez**

# Índice general

# Capítulo 1

# Introducción: Las ecuaciones de Maxwell y su grupo de invariancia

Escribamos las ecuaciones de Maxwell en el sistema de Heaviside-Lorentz:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\vec{E} &= \rho \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla}\vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} &= \frac{1}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Introduzcamos ahora el potencial escalar, $\phi$, y el potencial vector, $\vec{A}$, mediante:

$$\begin{aligned} \vec{B} &\equiv \nabla\times\vec{A} \\ \vec{E} &\equiv -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \end{aligned} \tag{1.2}$$

La segunda y tercera ecuación del conjunto (8.1) se convierten en identidades tras este cambio: la tercera debido a que el gradiente de un rotacional es idénticamente nulo, y la segunda debido a que el rotacional del gradiente también se anula.

Naturalmente al escribir las ecuaciones (1.2) es preciso tener en cuenta que no todos los potenciales describen los mismos campos; por ejemplo $\phi$ es equivalente a $\phi'$ siempre que:

$$\phi' \equiv \phi + \frac{1}{c}\dot{\Lambda} \tag{1.3}$$

y $\vec{A}$ es equivalente a $\vec{A}'$ si

$$\vec{A}' = \vec{A}\nabla\Lambda \tag{1.4}$$

La primera ecuación de (8.1) se reduce a:

$$-\nabla^2\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\nabla\vec{A}}{\partial t} = \rho \tag{1.5}$$

en tanto que la cuarta ecuación se escribe

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \frac{1}{c}\vec{j} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c}\nabla\frac{\partial\phi}{\partial t} \tag{1.6}$$

Recordamos ahora la definición de producto vectorial

$$(\nabla \times \vec{A})^i \equiv \epsilon^{ijk}\partial_j A_k \tag{1.7}$$

donde $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}$ y el tensor de Levi-Civita se define mediante

$$\epsilon_{ijk} \equiv 6\delta^1_{[i}\delta^2_j\delta^3_{k]} \tag{1.8}$$

y donde los corchetes indican antisimetrización completa; es decir,

$$T_{[ij]} \equiv \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) \tag{1.9}$$

o bien

$$T_{[ijk]} \equiv \frac{1}{6}(T_{ijk} - T_{jik} + T_{jki} - T_{kji} + T_{kij} - T_{ikj}) \tag{1.10}$$

Es muy fácil deducir de aquí que

$$\epsilon_{ijk}\epsilon^{ijl} \equiv \sum_{ij}\epsilon_{ijk}\epsilon^{ijl} = 2\delta^l_k \tag{1.11}$$

(donde hemos introducido de paso el *convenio de sumación*, en el que índices repetidos se suman sobre su rango natural). Otra fórmula útil es:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon^{iml} \equiv \sum_i \epsilon_{ijk}\epsilon^{iml} = \delta^j_m\delta^k_l - \delta^j_l\delta^k_m \tag{1.12}$$

La ecuación se reduce finalmente a:

$$\partial_i \partial_j A^j - \nabla^2 A_i = \frac{1}{c} j_i - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_i}{\partial t^2} - \frac{1}{c} \partial_i \frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{1.13}$$

Hemos cambiado ocho ecuaciones diferenciales para las seis componentes de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en términos de los datos, $\vec{j}$ y $\rho$, por cuatro ecuaciones diferenciales para las cuatro funciones de las tres coordenadas espaciales y del tiempo, $\vec{A}$ y $\phi$. El hecho de que haya sido posible hacer esto demuestra que las ecuaciones de Maxwell son compatibles, lo cual no era evidente *a priori*.

Aunque no es obvio con el lenguaje utilizado hasta ahora, vamos a demostrar que las ecuaciones de Maxwell son invariantes bajo el grupo de Lorentz, $O(1,3)$. Algunas nociones elementales sobre el grupo de Lorentz están resumidas en un apéndice.

Definamos un cuadrivector que llamaremos *(cuadri)potencial*

$$\begin{aligned} A^0 &\equiv \phi \\ A^i &\equiv \vec{A}^i \end{aligned} \tag{1.14}$$

(de forma que automáticamente $A_0 = \phi$ pero $A_i = -A^i$). Reescrita en esta notación, la ecuación (1.5) reza:

$$-\delta^{ij} \partial_i \partial_j A^0 - \partial_i \partial_0 A^i = \rho \tag{1.15}$$

Aquí $\partial_0 \equiv \frac{\partial}{c \partial t}$, dado que hemos usado la coordenada Minkowskiana $x^0 \equiv ct$). Sumamos cero ahora en la forma

$$0 = ((\partial_0)^2 - (\partial_0)^2) A^0 \tag{1.16}$$

con lo cual la ecuación (1.15) se puede reescribir como:

$$\partial_\alpha \partial^\alpha A^0 - \partial^0 \partial_\mu A^\mu = j^0 \tag{1.17}$$

donde recordemos que $\partial_\alpha \partial^\alpha \equiv \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$. Hemos también introducido un nuevo cuadrivector *(cuadri)corriente*, mediante:

$$\begin{aligned} j^0 &\equiv c\rho \\ j^i &\equiv \vec{j}^i \end{aligned} \tag{1.18}$$

Por otra parte, la ecuación (1.6) se escribe en nuestra nueva notación:

$$\partial_\alpha \partial^\alpha (-A_i) + \partial_i (\partial_\mu A^\mu) = \frac{1}{c} j^i \tag{1.19}$$

Está ahora claro que estas dos ecuaciones (1.15)(1.19) se pueden agrupar en

$$\partial_\alpha \partial^\alpha A^\mu - \partial^\mu (\partial_\rho A^\rho) \equiv \partial_\alpha F^{\alpha\mu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu \tag{1.20}$$

Si introducimos el tensor campo, un tensor completamente antisimétrico de dos í indices, definido mediante

$$F_{\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha \tag{1.21}$$

las ecuaciones corresponden a

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{1}{c} j^\beta \tag{1.22}$$

Estas ecuaciones son manifiestamente covariantes bajo el grupo de Lorentz (ver apéndice), *siempre* que el cuadrivector $A^\mu$ sea efectivamente, un cuadrivector. En el próximo apartado veremos qué significa esto físicamente.

El resultado que acabamos de obtener constituye la base física de la relatividad especial (el título del artículo de Einstein del año 1905 era *Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento*). Parte de la dificultad, que hemos obviado con la elección del sistema de Gauss, estriba en cómo se transforman las permeabilidades al efectuar cambios de coordenadas. Nosotros demostrado que las ecuaciones son invariantes frente al grupo de Lorentz si $c$ (que es la única constante que aparece en el sistema de Heaviside-Lorentz) es tambien invariante.

A pesar de estas limitaciones, está claro que la relatividad especial está implícitamente contenida en las ecuaciones de Maxwell.

## 1.1. El significado físico del potencial:invariancia Lorentz e invariancia gauge

El hecho de que el cuadripotencial se transforme como un cuadrivector quiere decir, en primer lugar, que frente a una rotación de $SO(3)$ (en la que el tiempo no se transforma), el potencial escalar tampoco se transforma (de hecho, éste es el origen de la palabra escalar asociada a su nombre), en tanto que el potencial vector se transforma como un vetor euclídeo; y en segundo lugar que al efectuar una transformación de Lorentz pura (cf. apéndice),

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c^2}) \\ \vec{r}' &= \vec{r} + (\gamma - 1)(\vec{r}.\vec{v})\frac{\vec{v}}{v^2} - \gamma\vec{v}t \end{aligned} \tag{1.23}$$

El cuadrivector *en el punto transformado* está relacionado con el cuadrivector en el punto inicial de la misma manera que $x'^{\mu}$ está relacionado con $x^{\mu}$; es decir que si definimos el jacobiano de la transformación, $\Lambda^{\mu}{}_{\nu} \equiv \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$ o equivalentemente, dado que la transformación es lineal,

$$x'^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \tag{1.24}$$

entonces para el cuadripotencial se tendrá

$$A'^{\mu}(x'^{\alpha}) = L^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu}(x^{\alpha}) \tag{1.25}$$

Explícitamente,

$$\begin{aligned} \phi'(t', \vec{r}') &= \gamma(\phi(t, \vec{r}) - \frac{\vec{v}.\vec{A}(t, \vec{r})}{c}) \\ \vec{A}(t', \vec{r}') &= \vec{A}(t, \vec{r}) + (\gamma - 1)(\vec{A}(t, \vec{r}).\vec{v})\frac{\vec{v}}{v^2} - \gamma\vec{v}t \end{aligned} \tag{1.26}$$

Utilizando estas fórmulas es posible encontrar los campos eléctrico y magnético, $\vec{E}$ y $\vec{B}$, de nuevo, en el punto transformado, en términos de las correspondientes cantidades en el punto sin transformar (un buen ejercicio). Nosotros obtendremos este resultado de otra manera en un momento. Por otra parte, los cuadripotenciales no est án uí vocamente determinados por los campos eléctricos y magnéticos, sino que dos potenciales que difieren en una cuadridivergencia producen los mismos campos. Es decir, que los cuadripotenciales

$$A'_\alpha \equiv A_\alpha - \partial_\alpha \Lambda \tag{1.27}$$

donde $\Lambda$ es una función arbitraria de las cuatro coordenadas, son equivalentes. Esto quiere decir que todas nuestras ecuaciones han de ser invariantes frente a las transformaciones 1.27; esto es la invariancia gauge.

Frecuentemente es útil escoger la función arbitraria $\lambda$ de forma adecuada. Siempre es posible escoger

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{1.28}$$

que es el gauge armónico o de Lorentz, y en el cual las ecuaciones de Maxwell se simplifican y se reducen a la ecuación de ondas:

$$\partial_\mu \partial^\mu A_\alpha = \frac{j_\alpha}{c} \tag{1.29}$$

La libertad gauge residual es

$$\partial_\mu \partial^\mu \Lambda = 0 \tag{1.30}$$

y para soluciones de las ecuaciones de Maxwell, siempre es posible escoger la funcion residual de forma que además,

$$A_0 = 0 \tag{1.31}$$

# Capítulo 2

# La fuerza de Lorentz

Suponemos conocido de cursos elementales que la fuerza que actúa sobre una partí cula cargada debido a la presencia de un campo electromagnético dado es:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}) \tag{2.1}$$

Donde suponemos que la carga de la partí cula es lo suficientemente pequeña como para que se pueda despreciar la perturbación que se produce en el campo preexistente debido a la presencia de la propia partí cula.

No es en modo alguno evidente a primera vista que la fuerza de Lorentz es, en algún sentido, covariante Lorentz. Vamos a reescribirla en una notación adecuada que, aunque al principio puede parecer engorrosa, más adelante se revelará como muuy cómoda.

Construimos un tensor a partir del cuadripotencial

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{2.2}$$

de forma que

$$F_{0i} = \partial_o A_i - \partial_i A_0 = -\partial_o A^i - \partial_i A_0 = E_i \tag{2.3}$$

y por otra parte,

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i = -\partial_i A^j + \partial_j A^i = -\epsilon_{ijk} B^k \tag{2.4}$$

Las ecuaciones de Maxwell se escriben ahora

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c} j^\nu \tag{2.5}$$

Por el hecho de derivar un potential, el tensor campo electromagnético satisface las *identidades de Bianchi*[1]

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \tag{2.6}$$

Esto permite encontrar sin dificultad la transformación Lorentz de los campos eléctricos y magnéticos, utilizando la ley de transformación tensorial:

$$F_{\mu\nu}(x') = L_\mu{}^\rho L_\nu{}^\sigma F_{\rho\sigma}(x) \tag{2.7}$$

El resultado es:

$$\vec{E}(t', x') = \gamma \vec{E}(t, x) - (\gamma - 1)(\vec{E}.\vec{n})\vec{n} + \gamma \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}(t, x) \tag{2.8}$$

y

$$\vec{B}(t', x') = \gamma \vec{B}(t, x) - (\gamma - 1)(\vec{B}.\vec{n})\vec{n} - \gamma \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E}(t, x) \tag{2.9}$$

Campos eléctricos en movimiento se ven como campos magnéticos, y viceversa.

Cuando $\gamma > 1$ y el módulo de la velocidad no es constante hay que escribir la segunda ley de Newton como:

$$\frac{dp^i}{dt} = m \frac{d(\gamma v^i)}{dt} = F^i \tag{2.10}$$

Por consiguiente,

$$\frac{dp^i}{ds} = \frac{1}{c} \frac{dx^0}{ds} F^i = \frac{\gamma}{c} F^i \tag{2.11}$$

Por otra parte,

$$\dot{\gamma} = \frac{v_i \dot{v}^i}{c^2} \gamma^3 \tag{2.12}$$

[1]En términos de formas diferenciales, y definiendo la uno forma $A \equiv A_\alpha dx^\alpha$ , $F = dA$, y $dF = 0$

lo cual conduce inmediatamente a

$$F^i v_i = m\dot{\gamma} v^2 + m\gamma \dot{v}^i v_i = mc^2 \dot{\gamma} \tag{2.13}$$

de forma que

$$\frac{dp^0}{dt} = mc\dot{\gamma} = \frac{F^i v_i}{c} \tag{2.14}$$

y

$$\frac{dp^0}{ds} = \frac{\gamma}{c^2} \vec{F}\vec{v} \tag{2.15}$$

En el caso particular de la fuerza de Lorentz,

$$\frac{\gamma}{c^2} F^i v_i = \frac{q\gamma}{c^2} E^i v_i = \frac{q}{c^2} F_{0i} u^i \tag{2.16}$$

en tanto que

$$qF_{ij} u^j = -qc\gamma(E^i + (v/c \times B)^i) \tag{2.17}$$

La segunda ley de Newton es, pues, equivalente a

$$\frac{dp_\mu}{ds} = \frac{q}{c} F_{\mu\nu} u^\nu \tag{2.18}$$

Serí a interesante obtener una demostración de este resultado a partir de primeros principios. Partimos de postular la acción más sencilla posible para el acoplo de una carga a un potencial correspondiente a un campo electromagnético:

$$S = \int d\lambda \left[ -mc\sqrt{(x_0')^2 - (\vec{x}')^2} - \frac{q}{c} A_\mu u^\mu \right] \tag{2.19}$$

donde la trayectoria en el espacio-tiempo de la carga es

$$x^\mu = x^\mu(\lambda) \tag{2.20}$$

en términos de un parámetro arbitrario $\lambda$ [2] y donde $x' \equiv \frac{dx}{d\lambda}$. Incidentalmente, este lagrangiano ($\equiv$ aquella magnitud que, integrada, conduce a la acción) es invariante gauge, dado que una transformación gauge se traduce en una derivada total.

[2]Si quisiéramos parametrizar en términos del arco tendrí amos que resolver $ds = \sqrt{(x_0')^2 - (\vec{x}')^2} d\lambda$

En estas condiciones, y para variaciones que se anulen en los extremos del intervalo de integración,

$$\delta S = \int d\lambda \left[ -\frac{x'_\mu \delta x^{\mu\prime}}{\sqrt{(x'_\mu)^2}} - \frac{q}{c}(A_\alpha \delta x'^\alpha + \partial_\beta A_\alpha \delta x^\beta x'^\alpha) \right] \tag{2.21}$$

E integrando por partes,

$$\delta S = \int d\lambda \delta x^\mu \left[ m\frac{d}{d\lambda}\frac{x'_\mu}{\sqrt{(x'_\mu)^2}} - \frac{q}{c}(-\partial_\beta A_\mu x'^\beta + \partial_\mu A_\alpha x'^\alpha) \right] \tag{2.22}$$

lo cual conduce a la versión covariante de la fuerza de Lorentz,

$$m\ddot{x}^\mu = \frac{q}{c} F^\mu{}_\alpha \dot{x}^\alpha \tag{2.23}$$

Si elegimos parametrizar la trayectoria con el tiempo coordenado, entonces

$$H = q\Phi + \sqrt{(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A})^2 c^2 + m^2 c^4} \tag{2.24}$$

cuya interpretación fí sica es inmediata.

Veamos algunos ejemplos sencillos para desarrollar la intuición de cómo se mueven las partí culas cargadas en los campos electromagnéticos.

- **Ejercicios.** Imaginen que alguien les da los siguientes tensores campo.

  Qué comentarios tendrí an?

  $F_{\alpha\beta} = x_\alpha x_\beta$

  $F_{\alpha\beta} = u_\alpha x_\beta$

  $F_{\alpha\beta} = u_\alpha x_\beta - u_\beta x_\alpha$

  $F_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} x^\gamma x^\delta$

  (donde $u^\alpha \equiv \delta^\alpha_0$)

- Escriba el campo de Coulomb en el gauge $A_0 = 0$.

- Suponga que tenemos una configuración con los campos $E = (1, 0, 0)$ y $B = (0, 1, 1)$. Existe un sistema de refencia en el que esta configuración aparezca como puramente magnética? En caso de responder afirmativamente, escriba explicitamente las ecuaciones del cambio de coordenadas de un sistema a otro.

- Supóngase usted que postulamos el siguiente principio de acción para el movimiento de una partí cula en un campo externo: $S = -mc \int ds - \int F_{\mu\nu} x^{\mu} \dot{x}^{\nu}$

  Cree usted que

  Es trivialmente inconsistente? Es invariante Lorentz? Es invariante gauge?

  En el caso de que haya contestado negativamente a la primera pregunta, podrí a usted determinar las ecuaciones de movimiento que se deducen de este principio de acción? Coinciden con las de Lorentz? Por qué?

## 2.1. Movimiento de una partí cula cargada en un campo magnético constante

Si el campo eléctrico es nulo, entonces la ecuación (2.14) implica que

$$\dot{\gamma} = 0 \tag{2.25}$$

Por consiguiente $\frac{v^2}{c^2} \equiv a^2$ (constante). La segunda ley de Newton nos dice que:

$$m\dot{v}^i = \frac{q}{c}\sqrt{1-a^2}\epsilon_{ijk}v^j B^k \tag{2.26}$$

Fí jense que las ecuaciones implican algo que ya sabí amos:

$$B_i \dot{v}^i = 0 \tag{2.27}$$

Si efectuamos la descomposición

$$v^i = v_{||}B^i + v_\perp^i \tag{2.28}$$

donde $v_\perp^i \equiv (\delta_j^i - \frac{B^i B_j}{B^2})v_j$,entonces inmediatamente obtenemos que

$$\dot{v_{||}} = 0 \tag{2.29}$$

Mientras que las componentes de $v_\perp^i$ en el plano perpendicular al campo magnético obedecen:

$$\begin{aligned} m\dot{v_\perp^1} &= \frac{q}{c}\sqrt{1-a^2}Bv_\perp^2 \\ m\dot{v_\perp^2} &= -\frac{q}{c}\sqrt{1-a^2}Bv_\perp^1 \end{aligned} \tag{2.30}$$

cuya solución es inmediata en notación matricial:

$$v_\perp = e^{i\frac{q}{mc}Bt\sqrt{1-a^2}\sigma_2}v_\perp^{(0)} \tag{2.31}$$

o lo que es lo mismo, desarrollando la exponencial, y denotando por $\omega \equiv \frac{q}{mc}B\sqrt{1-a^2} = \frac{q}{mc\gamma}B$

$$\begin{aligned} v_\perp^1 &= v_{\perp(0)}^1 \cos\omega t + v_{\perp(0)}^2 \sin\omega t \\ v_\perp^2 &= -v_{\perp(0)}^1 \sin\omega t + v_{\perp(0)}^2 \cos\omega t \end{aligned} \tag{2.32}$$

Finalmente, las ecuaciones de la trayectoria son

$$\begin{aligned} x_{\perp}^{1} &= x_{\perp(0)}^{1} + \frac{v_{\perp(0)}^{1}}{\omega}\sin\omega t - \frac{v_{\perp(0)}^{2}}{\omega}(\cos\omega t - 1) \\ x_{\perp}^{2} &= x_{\perp(0)}^{2} + \frac{v_{\perp(0)}^{1}}{\omega}(\cos\omega t - 1) + \frac{v_{\perp(0)}^{2}}{\omega}\sin\omega t \end{aligned} \tag{2.33}$$

Se trata de un movimiento oscilatorio, con frecuencia $\omega$ y amplitud

$$A^2 \equiv \frac{\gamma^2}{\omega^2}((v_{\perp(0)}^{1})^2 + (v_{\perp(0)}^{2})^2) = \frac{\gamma^2}{\omega^2}(a^2 - v_{||}^2) \tag{2.34}$$

En la dirección del campo el movimiento es uniforme:

$$x_{||} = x_{||(0)} + v_{||}t \tag{2.35}$$

De forma que el la trayectoria en $\mathbb{R}^3$ es helicoidal.

## 2.2. Movimiento de una partí cula cargada en un campo eléctrico constante

Empezamos por darnos cuenta de que, si sólo hay campo eléctrico, y descomponemos

$$v = v_{||} + v_{\perp} \tag{2.36}$$

donde $v_{||}^{i} \equiv \frac{v.E}{E}v^{i}$ las ecuaciones de movimiento se reducen a

$$\begin{aligned} m\frac{d}{dt}\gamma v_{||} &= qE \\ m\frac{d}{dt}\gamma v_{\perp} &= 0 \end{aligned} \tag{2.37}$$

y, por consiguiente,

$$\begin{aligned} \gamma v_{||} &= \frac{q}{m}Et + \gamma_0 v_{||}^{(0)} \\ \gamma v_{\perp} &= \gamma_0 v_{\perp}^{(0)} \end{aligned} \tag{2.38}$$

Es curioso que (a diferencia de lo que ocurre en la aproximación no relativista, la velocidad transversal no es necesariamente nula).

Lo primero que hay que hacer es calcular el $\gamma$, a partir de

$$\gamma^2 v^2 = \gamma_0^2 v_{\perp(0)}^2 + (\gamma_0 v_{||}^0 + \frac{q}{m} E t)^2 \tag{2.39}$$

El resultado es:

$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{\gamma_0^2 v_{\perp(0)}^2 + (\gamma_0 v_{||}^0 + \frac{q}{m} E t)^2}{c^2}} \tag{2.40}$$

Las ecuaciones de la trayectoria se deducen a partir de

$$\begin{aligned} \frac{dx_{||}}{dt} &= \frac{\gamma_0 v_{||}^0 + \frac{q}{m} E t}{\sqrt{c^2 + \gamma_0^2 v_{\perp(0)}^2 + (\gamma_0 v_{||}^0 + \frac{q}{m} E t)^2}} c \\ \frac{dx_{\perp}}{dt} &= \frac{\gamma_0 v_{\perp}^0 c}{\sqrt{c^2 + \gamma_0^2 v_{\perp(0)}^2 + (\gamma_0 v_{||}^0 + \frac{q}{m} E t)^2}} \end{aligned} \tag{2.41}$$

Y el resultado de las cuadraturas elementales es:

$$\begin{aligned} x_{||} &= \frac{mc}{qE} \sqrt{c^2 + \gamma_0^2 v_{\perp(0)}^2 + (\gamma_0 v_{||}^0 + \frac{q}{m} E t)^2} + x_{||}^0 - \frac{m \gamma_0 c^2}{qE} \\ x_{\perp} &= x_{\perp}^{(0)} + \frac{mc\gamma_0 v_{\perp}^0}{qE} \left[ \sinh^{-1} \left( \frac{\gamma_0 v_{||}^0 + \frac{qEt}{m}}{\sqrt{c^2 + \gamma_0^2 (v_{\perp}^0)^2}} \right) - \sinh^{-1} \left( \frac{\gamma_0 v_{||}^0}{\sqrt{c^2 + \gamma_0^2 (v_{\perp}^0)^2}} \right) \right] \end{aligned} \tag{2.42}$$

- **Ejercicios.**

- Entiende usted el lí mite no relativista de las expresiones que se han obtenido para el movimiento de una partí cula cargada en un campo eléctrico constante?

- Sabrí a usted escribir el campo de Coulomb en el gauge $A.n = 0$ donde $n \equiv (1, 0, 0, 0)$?

- Podrí a usted escribir una onda electromagnética en el gauge $A^i = 0$?

- En el ejemplo anterior, existirí a algún gauge en el que se anule la energí a total del campo? Razone su respuesta.

# Capítulo 3

# El Tensor Energía-momento del campo de Maxwell

Lo primero que tenemos que encontrar es una acción de donde se deduzcan las ecuaciones de Maxwell mediante el principio variacional. Recordemos que en general, dado una densidad lagrangiana

$$S = \int d^4x L(\phi_i, \partial_\mu \phi_i, \partial_\mu \partial_\nu \phi_i \ldots) \tag{3.1}$$

el principio de acción exige que la acción sea estacionaria frente a variaciones de los campos que se anulen en la frontera del recinto de integración.

$$\delta S = \int d^4x \left( \frac{\partial L}{\partial \phi_i} \delta \phi_i + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \delta \partial_\mu \phi_i + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi_i)} \delta \partial_\mu \partial_\nu \phi_i + \ldots \right) \tag{3.2}$$

de forma que integrando por partes,

$$\begin{aligned} \delta S \equiv \int d^4x \frac{\delta S}{\delta \phi_i} \delta \phi_i = \int d^4x \delta \phi_i \\ \left( \frac{\partial L}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} + \partial_\mu \partial_\nu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi_i)} + \ldots \right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

de forma que las ecuaciones de movimiento se escriben de forma concisa como

$$\frac{\delta L}{\delta \phi_i} = 0 \tag{3.4}$$

Intentemos:

$$S = \int \left[ -\frac{1}{c^2} A_\alpha j^\alpha - \frac{1}{4c} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right] d^4x \tag{3.5}$$

donde la *fuente*, $j^\mu(x)$ ha de estar conservada (i.e., $\partial_\rho j^\rho = 0$) si queremos que la acción sea invariante gauge. En el caso de una partícula,[1]

$$j^\alpha(x) \equiv \int u^\alpha(\lambda) \delta^4(x^\rho - x^\rho(\lambda)) d\lambda \tag{3.6}$$

La variación de la acción al efectuar una variación de los campos será:

$$\delta S = \int d^4x \left[ -\frac{1}{c^2} \delta A_\alpha j^\alpha - \frac{1}{2c} F_{\alpha\beta} \delta F^{\alpha\beta} \right] \tag{3.7}$$

e integrando por partes el último término se obtiene el resultado deseado,

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{1}{c} j^\beta \tag{3.8}$$

## 3.1. Corrientes asociadas a la invariancia Poincaré

El teorema de Noether permite obtener una corriente conservada siempre que exista una simetría en la acción. Aunque nuestro interés en este curso se reduce a la invariancia bajo transformaciones de Poincaré, no cuesta ningún trabajo analizar una situación ligeramente más general. Consideraremos entonces un lagrangiano que depende de un conjunto de campos, denotados genéricamente por $\phi_i$ y de sus derivadas primeras, $L(\phi_i, \partial_\mu \phi_j)$.

El tipo de transformaciones que vamos a considerar es

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &\equiv \xi^\mu(x) \equiv a^\mu + \omega^\mu_\nu x^\nu \\ \delta \phi_i &\equiv \phi'(x) - \phi(x) = D_i^j(\xi) \phi_j + d_i^{j\mu}(\xi) \partial_\mu \phi_j + t_i \end{aligned} \tag{3.9}$$

En el caso particular de que $\xi = 0$, se dice que las transformaciones son *internas*. Diremos que las transformaciones (3.9) son una simetrí a, si $\delta S = 0$ sin utilizar las ecuaciones de

[1] Claramente $\partial_\alpha j^\alpha = \int u^\alpha(\lambda) \partial_\alpha \delta^4(x^\rho - x^\rho(\lambda)) = -\int \frac{d}{d\lambda} \delta^4(x^\rho - x^\rho(\lambda)) d\lambda = 0$, excepto cuando $x$ coincide con uno de los extremos de la lí nea de universo de la carga de prueba.

movimiento. Por ejemplo, el lagrangiano para $N$ campos escalares $\phi_i$,

$$S = \int d^4x \frac{1}{2}\delta_{ij}\partial_\alpha\phi^i\partial^\alpha\phi^j \tag{3.10}$$

es invariante frente a las $N(N-1)/2$ transformaciones con

$$\begin{aligned} \xi^\mu &= 0 \\ d_i^{j\mu} &= 0 \\ D_i^j(\xi) &= \omega_i^j \end{aligned} \tag{3.11}$$

siempre que $\omega_{(ij)} = 0$.(Estas transformaciones generan el grupo de rotaciones en $N$ dimensiones, llamado $SO(N)$).

### 3.1.1. Invariancia bajo trasformaciones internas

Para encontrar la corriente, efectuamos una variación de la acción correspondiente a una transformación de simetrí a, pero con el parámetro dependiente del punto. El integrando de la variación resulta ser entonces automáticamente proporcional a la derivada del parámetro con respecto a las coordenadas, siendo el coeficiente precisamente la corriente conservada.

$$\delta S = \int \frac{\partial L}{\partial\phi_i} D_i^j\phi_j + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}(\partial_\mu(D_i^j\phi_j) \equiv \int \partial_\mu(j^\mu)_j^i D_i^j \tag{3.12}$$

donde

$$(j^\mu)_j^i \equiv \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\phi_j \tag{3.13}$$

### 3.1.2. Invariancia bajo traslaciones espacio-temporales

Frente a las traslaciones, $\xi^\alpha = a^\alpha$, todos los campos se transforman de la misma manera,

$$\delta\phi_i = -a^\beta\partial_\beta\phi_i \tag{3.14}$$

es decir, que

$$\begin{aligned} &\xi^\mu = a^\mu \\ &D_i^{j\mu} = 0 \\ &d_i^{j\beta}(\xi) = -a^\beta \delta_i^j \end{aligned} \tag{3.15}$$

Incidentalmente, esto implica que, para teorí as invariantes bajo traslaciones, al considerar otras transformaciones, como las de Lorentz puras, no es preciso considerar el efecto de las matrices $d_i{}^j$, en la ecuación (3.9), ya que corresponden simplemente a una traslación del punto.

Por otra parte, la variación del lagrangiano se puede calcular de la siguiente manera:

$$-\delta L = \frac{\partial L}{\partial \phi_i}\delta\phi_i + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi_i)}\delta(\partial_\mu\phi_i) + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu\phi_i)}\delta(\partial_\mu\partial_\nu\phi_i) + \ldots \tag{3.16}$$

lo cual se puede escribir como (considerando que el parámetro de la traslación pueda depender del punto)

$$\begin{aligned} &-\delta L = a^\rho \left(\frac{\partial L}{\partial\phi_i}\partial_\rho\phi_i + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\partial_\mu\partial_\rho\phi_i + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu\phi_i)}\partial_\mu\partial_\nu\partial_\rho\phi_i\right) + \\ &\partial_\alpha a^\rho \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\phi_i)}\partial_\rho\phi_i + 2\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\partial_\mu\phi_i)}\partial_\rho\partial_\mu\phi_i\right) + \\ &+\partial_\alpha\partial_\beta a^\rho \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\partial_\beta\phi_i)}\partial_\rho\phi_i \end{aligned} \tag{3.17}$$

Una posible reescritura de esta variación es

$$-\delta L = -a^\rho \frac{\delta S}{\delta\phi_i}\partial_\rho\phi_i + \partial_\rho W^\rho \tag{3.18}$$

con

$$W^\rho = \partial_\beta a^\alpha \phi_\alpha \frac{\partial L}{\partial(\partial_\rho\partial_\beta\phi_i)} - a^\rho\partial_\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\partial_\beta\phi_i)}\partial_\beta\phi_i\right) + 2a^\beta\frac{\partial L}{\partial(\partial_\rho\partial_\mu\phi_i)}\partial_\mu\partial_\beta\phi_i \tag{3.19}$$

No nos interesa ahora esta forma, aunque conviene recordarla cuando estudiemos Diff., ya que entonces proporcionará identidades tipo Bianchi.

Cuando el parámetro es constante esta variación ha de ser cero por hipótesis; para verlo podemos reescribir la variación en la forma:

$$
\begin{aligned}
-\delta L = \partial_\alpha \left( a^\alpha L + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \partial \rho \phi_i)} \partial_\rho a^\sigma \partial_\sigma \phi_i \right) \\
-(\partial_\alpha a^\alpha) L + \left( \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \phi_i)} \partial_\rho \phi_i + 2 \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \partial_\mu \phi_i)} \partial_\rho \partial_\mu \phi_i - \right. \\
\left. \partial_\beta \left( \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \partial_\beta \phi_i)} \partial_\rho \phi_i \right) \right) \partial_\alpha a^\rho
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

Ahora bien, si escogemos variaciones dependientes del punto, podemos conseguir que se anulen en la frontera, por lo que el principio de mínima acción garantiza que la variación de la acción se anula independientemente de la existencia de una simetría. Esto conduce a

$$
0 = -\delta S = \int T^\alpha_\beta \partial_a a^\beta \tag{3.21}
$$

con

$$
T_{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu \phi_i)} \partial_\nu \phi_i + \frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu \partial^\alpha \phi_i)} \partial^\alpha \partial_\nu \phi_i - \partial^\beta \frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu \partial^\beta \phi_i)} \partial_\nu \phi_i - L \eta_{\mu\nu} \tag{3.22}
$$

### 3.1.3. Cargas a partir de corrientes

Es fácil convencerse de que la existencia de una corriente conservada, $\partial_\alpha j^\alpha = 0$, implica automáticamente que existe una *carga* asociada, independiente del tiempo, a saber,

$$
Q \equiv \int d^3 x j^0(t, \vec{x}) \tag{3.23}
$$

De hecho $\frac{dQ}{dt} = \int d^3 x \partial_0 j^0 = \int d^3 x \nabla \vec{j} = 0$ (siempre que los campos que constituyen la corriente se anulen suficientemente rápido en el infinito espacial.)

En el caso general, de que la corriente tenga más de un í ndice, la carga correspondiente tendrá todos los í ndices de la corriente, menos uno. Así por ejemplo, la carga asociada al tensor energí a-momento, normalmente conocida como *cuadrimomento*, será

$$
P^\mu \equiv \int d^3 x T^{\mu 0} \tag{3.24}
$$

(la componente temporal de este cuadrivector representa la energí a, y las componentes espaciales, el trimomento).

### 3.1.4. Invariancia bajo el grupo de Lorentz

Al efectuar una transformación de Lorentz resulta conveniente eliminar la traslación resultante del hecho de que en las trasformaciones tensoriales el campo transformado está evaluado siempre en el punto transformado (después de todo, sabemos que nuestra teorí a es invariante bajo traslaciones, y ya hemos extraí do las consecuencias de esta invariancia, a saber, la conservación del tensor energí a momento)

$$\delta\phi_i = \omega^{\alpha\beta}(D_{\alpha\beta})_i^j\phi_j \tag{3.25}$$

Precisamente al haber eliminado la traslación el lagrangiano es invariante ( y no sólo la acción). Explí citamente,y teniendo en cuenta que la derivada del campo se transforma como un tensor con un í ndice adicional,

$$\delta L = 0 = \frac{\partial L}{\partial\phi_i}(\omega.D)_i{}^j\phi_j + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\rho\phi_i)}((\omega.D)_i{}^j\partial_\rho\phi_j - \omega^\mu{}_\rho\partial_\mu\phi_i) \tag{3.26}$$

Y usando las ecuaciones de movimiento, esto es equivalente a:

$$\partial_\rho(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\rho\phi_i)}D_{\mu\nu}{}_i{}^j\phi_j) = T_{[\mu\nu]} \tag{3.27}$$

(nótese que la parte del tensor enegrgí a-momento proporcional al lagrangiano no contribuye a la parte antisiétrica).

A su vez esto sugiere refedinir el temsor energí a-momento de forma que sea simétrico en sus dos í ndices (Belinfante):

$$T^{bel}_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu} - \partial_\rho\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\rho\phi_i)}D_{\mu\nu}{}_i{}^j\phi_j - \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}D_{\rho\nu}{}_i{}^j\phi_j - \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu\phi_i)}D_{\rho\nu}{}_i{}^j\phi_j\right] \tag{3.28}$$

En términos del tensor de Belinfante, la densidad de momento angular será

$$M^{\lambda\mu\nu} \equiv x^\mu T^{\lambda\nu}_{bel} - x^\nu T^{\lambda\mu}_{bel} \tag{3.29}$$

cuya conservación es consecuencia de la simetrí a del tensor de Belinfante.

En el caso concreto del campo de Maxwell, el tensor canónico se escribe:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu} - F_{\rho\mu}\partial_\nu A^\rho) \tag{3.30}$$

que no es simétrico, ni invariante gauge.

El correspondiente tensor de Belinfante se escribe

$$T^{bel}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu} - F_{\rho\mu}F^\rho_\nu) \tag{3.31}$$

Un ejercicio sencillo nos permite escribir la densidad de energí a como

$$T_{00} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \tag{3.32}$$

así como la densidad de momento lineal (vector de Poynting):

$$T^{0i} = -\frac{1}{2}(\vec{E} \times \vec{B})^i \tag{3.33}$$

- Ejercicio. Calcular la corriente de Noether correspondiente a la invariancia de fase en el lagrangiano

$$L = \phi^* f(\ )\phi \tag{3.34}$$

- Solución Al efectuar una transformación $\delta\phi = i\alpha(x)\phi$ la accín se transforma como

$$\delta S = \int d^4x j^\mu \partial_\mu \alpha \tag{3.35}$$

Si liego esgogemos la función $\alpha(x)$ de tal forma que $\alpha|_{\partial D} = 0$, entonces la variación es un caso particular de las variaciones del principio de mí nima acción, por lo que la variación de la acción ha de anularse. Integrando por partes se obtiene

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{3.36}$$

## 3.2. Dificultades para la definición de los momentos canónicos

Una caracterí stica de la acción de Maxwell es que algunos de los momentos canónicamente conjugados a las variables campo se anulan.

$$\begin{aligned} \pi_i &\equiv \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 A^i)} = E_i \\ \pi_0 &\equiv \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 A^0)} = 0 \end{aligned} \tag{3.37}$$

debido a que $\partial_0 A^0$ no aparece en el lagrangiano. Esto constituye una *ligadura primaria* en el lenguaje de Dirac. Podemos invertir:

$$\dot{A}_i = 2\pi_i + \partial_i A_0 \tag{3.38}$$

El correspondiente hamiltoniano será:

$$H = \sum_i p_i \dot{q}^i - L = \int d^3x \pi_i(\pi_i + \partial_i A_0) + \frac{1}{2}(-\pi_i^2 + B_i^2) = \int d^3x \frac{1}{2}[\pi_i^2 + B_i^2] \tag{3.39}$$

Para poder construir un hamiltoniano consistente, tenemos que asegurar que las derivadas de las ligaduras primarias también se anulan; lo cual quiere decir fí sicamente que si inicialmente se constriñe el movimiento del sistema a la hipersuperficie del espacio de las fases definida por las ligaduras primarias, entonces la evolución dinámica del sistema, regida por los corchetes de Poisson, no va a sacar al sistema de la hipersuperficie en cuestión. Esto es

$$\dot{\pi}_0 = \{\pi_0, H\} = 0 \tag{3.40}$$

En algunos casos, eso conduce a la necesidad de imponer nuevas ligaduras. En el caso presente, lo que resulta es la ley de Gauss:

$$\partial_i \pi^i = \partial_i E^i \tag{3.41}$$

- **Ejercicio.** Es frecuente que la misma exigencia de consistencia con la evolución canónica aplicada a las ligaduras secundarias, resulte en todaví a más ligaduras. Verificar que éste no es nuestro caso, y que la ley de Gauss como tal es ya consistente con dicha evolución.

El término en el hamiltoniano canónico en el que aparec la componente temporal del potencial se puede integrar por partes:

$$\int d^3x\pi_i\partial^i A_0 = \int d^3x A_0\partial_i E^i = 0 \tag{3.42}$$

siempre que los momentos espaciales (es decir, el campo eléctrico) se anulen suficientemente rápido en el infinito espacial). El hamiltoniano resultante es

$$H = \int d^3x\frac{1}{2}[E^2 + B^2] \tag{3.43}$$

que coincide con la integral del $T_{00}$ de Belinfante.

# Capítulo 4

# Bosones cargados y acoplo mínimo. Fases y cargas.

Existen en la naturaleza campos (cuánticos) escalares, como los que describen partí culas elementales, como el todaví a no encontrado experimentalmente bosón de Higgs. Su acción se escribe como:

$$S = \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \partial_\alpha \phi^* \partial^\alpha \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi \phi^* \right] \tag{4.1}$$

de forma que la ecuación de movimiento correspondiente es:

$$( \quad + m^2)\phi = 0 \tag{4.2}$$

Si descomponemos el campo en su parte real e imaginaria,$\phi = \phi_1 + i\phi_2$ la misma acción se escribe como:

$$S = \int d^4x \sum_{j=1,2} \left[ \frac{1}{2} \partial_\alpha \phi_j \partial^\alpha \phi_j - \frac{1}{2} m^2 \phi_j \phi_j \right] \tag{4.3}$$

En su forma compleja, la acción es invariante frente a cambios de fase constantes

$$\phi' = \phi \, e^{iq\theta} \tag{4.4}$$

(donde $q \in \mathbb{R}$ es un número real arbitrario). Estas transformaciones de fase constituyen un grupo abeliano, que transforma un número complejo unimodular en otro número complejo unimodular, y que se suele denotar como el grupo $U(1)$. En la forma real todo esto se traduce en rotaciones de $\mathbb{R}^2$, que matemáticamente constituyen matrices bidimensionales ortogonales de determinante unidad, es decir, transformaciones de $SO(2)$

$$\phi'_i \equiv M_{ij}\phi_j \tag{4.5}$$

con

$$\delta^{ij} M_{il} M_{jk} = \delta_{lk} \tag{4.6}$$

La corriente de Noether asociada a esa ley de conservación será simplemente

$$j^\mu \equiv \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)}\delta\phi = iq(\partial^\mu \phi^* \phi - \partial^\mu \phi \phi^*) \tag{4.7}$$

donde el prefactor es convencional para que la corriente sea hermí tica.

$$(j^\mu)^+ = j^\mu \tag{4.8}$$

La correspondiente carga será:

$$Q \equiv iq \int d^3x (\dot{\phi}^* \phi - \dot{\phi}\phi^*) \tag{4.9}$$

Para verificar que esta carga corresponde realmente a la carga eléctrica del campo escalar, podemos acoplar es campo al electromagetismo, usando acoplo mí nimo, que en este caso es equivalente a substituir la derivada ordinaria por la derivada covariante el el lagrangiano:

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - iqA_m \tag{4.10}$$

(es éste el único sitio donde aparece el cuanto de carga del bosón representado por el campo $\phi$). Al efectuar un cambio de fase,

$$(D_\mu \phi)' = e^{iq\theta} D_\mu \phi \tag{4.11}$$

ya que el término proveniente de derivar la fase, $iq\partial_\mu\theta$, se cancela con el que proviene de efectuar una transformación gauge del potencial electromagnético, $-iq\partial_\mu\theta$. El lagrangiano completo

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2} D_\alpha \phi^* D^\alpha \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi\phi^* - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\right] \tag{4.12}$$

es invariante entonces frente a las mismas transformaciones de fase que tení amos en el caso libre, pero además con la posibilidad añadida de poder cambiar las fases de forma diferente en cada punto; esto es, que las fases satisfagan que $\partial_\mu \theta(x) \neq 0$.

# Capítulo 5

# Ondas Electromagnéticas

Las ondas electromagnéticas son soluciones no singulares de vací o, con energí a finita. Además de su interés intrí nsico, estas soluciones forman la base para la cuantización.

## 5.1. Ondas Planas

En el gauge armónico o de Lorentz

$$\partial_\alpha A^\alpha = 0 \tag{5.1}$$

las ecuaciones de Maxwell se reducen a la ecuación de ondas

$$\partial^2 A_\alpha = 0 \tag{5.2}$$

Esto quiere decir que una onda plana

$$A_\alpha(x) \equiv \epsilon_\alpha(k) e^{ikx} + \epsilon^*_\alpha(k) e^{-ikx} \tag{5.3}$$

será solución siempre que

$$\begin{aligned} k^0 &= \pm\omega \\ k^\mu \epsilon_\mu &= 0 \end{aligned} \tag{5.4}$$

El correspondiente campo electromagético será:

$$F_{\alpha\beta} = ik_\alpha(\epsilon_\beta(x)e^{ikx} - \epsilon^*_\alpha(k)e^{-ikx}) - ik_\beta(\epsilon_\alpha(x)e^{ikx} - \epsilon^*_\alpha(x)e^{-ikx}) \tag{5.5}$$

de donde deducimos el campo eléctrico

$$F_{oi} = i\omega(\epsilon_i(x)e^{ikx} - \epsilon^*_i(k)e^{-ikx}) - ik_i(\frac{\vec{k}.\vec{\epsilon}}{\omega}e^{ikx} - \frac{\vec{k}.\vec{\epsilon}^*}{\omega}e^{-ikx}) \tag{5.6}$$

Es fácil darse cuenta de que todas estas soluciones tienen energí a infinita. Con objeto de introducir soluciones con energí a finita (las únicas fí sicamente realizables, introduciremos paquetes de ondas en el próximo parágrafo.

## 5.2. Paquetes de Ondas

La solución general consistirá en una superposición de ondas planas con polarizaciones arbitrarias. Introduciendo la transformada de Fourier

$$A_\alpha(x) \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\bar{a}_\alpha(k)e^{ikx} \tag{5.7}$$

donde realidad implica que necesariamente $a(k) = a^*(-k)$. Las ecuaciones de Maxwell son entonces equivalentes a :

$$\begin{aligned} k^\alpha \bar{a}_\alpha &= 0 \\ \bar{a}_\alpha &= a_\alpha \delta(k^2) \end{aligned} \tag{5.8}$$

y usando la fórmula

$$\delta(k^2) = \frac{1}{2\omega}(\delta(k^0 - \omega) + \delta(k^0 + \omega) \tag{5.9}$$

donde $\omega^2 \equiv \vec{k}^2$, se reduce a

$$A_\alpha(x) \equiv \int \frac{d^3k}{2\omega(2\pi)^4}\left[a_\alpha(\omega,\vec{k})e^{i(\omega x^0 - \vec{k}\vec{x})} + a_\alpha(-\omega,\vec{k})e^{i(-\omega x^0 - \vec{k}\vec{x})}\right] \tag{5.10}$$

o lo que es lo mismo, teniendo en cuenta la condición de realidad arriba mencionada,

$$A_\alpha(x) \equiv \int \frac{d^3k}{2\omega(2\pi)^4}\left[v_\alpha(\omega,\vec{k})e^{i(\omega x^0-\vec{k}\vec{x})}+v^*_\alpha(\omega,\vec{k})e^{i(-\omega x^0+\vec{k}\vec{x})}\right] \tag{5.11}$$

(donde $v_0 = \frac{\vec{k}.\vec{v}}{\omega}$).

En términos de las polarizaciones reales,

$$v_\mu \equiv \omega(e^{(1)}{}_\mu + ie^{(2)}{}_\mu) \tag{5.12}$$

el potencial se escribe:

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^4}\left[(e^{(1)}{}_\mu(\vec{k})\cos k.x - e^{(2)}{}_\mu(\vec{k})\sin k.x\right] \tag{5.13}$$

con $k^0 \equiv \omega$, tanto en esta ecuación como en todas las subsiguientes.

El correspondiente tensor campo será:

$$F_{\mu\nu} = -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^4}\left[(k_\mu e^{(2)}{}_\nu(\vec{k}) - k_\nu e^{(2)}{}_\mu(\vec{k}))\cos k.x + (k_\mu e^{(1)}{}_\nu(\vec{k}) - k_\nu e^{(1)}{}_\mu(\vec{k}))\sin k.x\right] \tag{5.14}$$

por lo que los campos eléctrico y magnético vendrán dados por:

$$\vec{E} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^4}\omega(\vec{e^{(2)}}_\perp \cos k.x + \vec{e^{(1)}}_\perp \sin k.x) \tag{5.15}$$

y

$$\vec{B} = -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^4}(\vec{e^{(2)}} \times \vec{k}\cos k.x + \vec{e^{(1)}} \times \vec{k}\sin k.x) \tag{5.16}$$

si descomponemos la polarización en

$$\vec{e} \equiv \vec{e}_{||} + \vec{e}_\perp \tag{5.17}$$

es claro que sólo la parte transversa contribuye a las integrales anteriores.

En definitiva, la solución general que hemos obtenido depende de dos vectores transversos, $\vec{e}^1_\perp$ y $\vec{e}^2_\perp$, que suponen en total cuatro funciones independientes de tres variables (las tres componentes espaciales del momento, $\vec{k}$).

Todaví a tenemos que imponer la condición de que la solución tenga energí a finita.

Para calcular la energí a total del paquete es conveniente recordar las integrales

$$\begin{aligned}
\int d^3x \cos kx \cos px &= \frac{(2\pi)^3}{2}(\delta^3(\vec{p}-\vec{k}) + \delta^3(\vec{p}+\vec{k}) \cos 2\omega x^0) \\
\int d^3x \sin kx \sin px &= \frac{(2\pi)^3}{2}(\delta^3(\vec{p}-\vec{k}) - \delta^3(\vec{p}+\vec{k}) \cos 2\omega x^0) \\
\int d^3x \sin kx \cos px &= \frac{(2\pi)^3}{2}(\delta^3(\vec{p}+\vec{k}) \sin 2\omega x^0)
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Comenzamos por calcular

$$\frac{1}{2}\int d^3x \vec{E}^2 = \frac{1}{4}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^5}\omega^2[\vec{e}^{\,2}_\perp(\vec{k})\vec{e}^{\,2}_\perp(\vec{k}) + (\vec{e}^{\,2}_\perp(\vec{k})\vec{e}^{\,2}_\perp(-\vec{k}) + \vec{e}^{\,1}_\perp(\vec{k})\vec{e}^{\,1}_\perp(-\vec{k})) \cos 2\omega x_0 + 2\vec{e}^{\,2}_\perp(\vec{k})\vec{e}^{\,1}_\perp(-\vec{k}) \sin 2\omega x_0 \tag{5.19}$$

Y para hacer lo mismo con el campo magnético usamos

$$(\vec{e_k} \times \vec{k}).(\vec{e_p} \times \vec{p}) = (\vec{e_k}.\vec{e_p})(\vec{k}.\vec{p}) - (\vec{e}_k.\vec{p})(\vec{e}_p.\vec{k}) \tag{5.20}$$

de forma que

$$\frac{1}{2}\int d^3x \vec{B}^2 = \frac{1}{4}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^5}\omega^2[\vec{e}^{\,2}_\perp(\vec{k})\vec{e}^{\,2}_\perp(\vec{k}) - (\vec{e}^{\,2}_\perp(\vec{k})\vec{e}^{\,2}_\perp(-\vec{k}) + \vec{e}^{\,1}_\perp(\vec{k})\vec{e}^{\,1}_\perp(-\vec{k})) \cos 2\omega x_0 - 2\vec{e}^{\,2}_\perp(\vec{k})\vec{e}^{\,1}_\perp(-\vec{k}) \sin 2\omega x_0 \tag{5.21}$$

Obsérvese que el origen de los signos negativos en los términos dependientes del tiempo radica en el término $\vec{k}.\vec{p}$ en la ecuación (5.20). Estos signos hacen que la expreesión final para la energí a sea manifiestamente independiente del tiempo, como es natural.

El resultado es

$$W \equiv \frac{1}{2}\int d^3x(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) = \frac{1}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^5}\omega^2(e_{\vec{(1)}\perp}^{\,2} + e_{\vec{(2)}\perp}^{\,2}) \tag{5.22}$$

(los términos dependientes del tiempo se cancelan pues entre la contribución eléctrica y la contribución magnética).

La condición para que la energí a sea finita y consiguientemente el paquete represente una onda fí sica será que el módulo de la polarización satisfaga que

$$\omega|\vec{e}^{(i)}| \in L^2(\mathbb{R}^3) \tag{5.23}$$

# Capítulo 6

# Desarrollos multipolares

Las soluciones de energí a finita de las ecuaciones de Maxwell se pueden clasificar por la velocidad con la que se anulan en el infinito. Comenzaremos por escribir las ecuaciones de Maxwell en el gauge

$$A_0 = 0 \tag{6.1}$$

donde además impondremos

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = 0 \tag{6.2}$$

(que, recordémoslo, es conmpatible con la libertad gauge residual). La ecuación a resolver no es otra que la ecuación de ondas de dÁlembert:

$$\partial_\alpha \partial^\alpha \vec{A} = 0 \tag{6.3}$$

(la condición de transversalidad la impondremos más adelante). Efectuando una transformada de Fourier en la dirección temporal,

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \int d\omega \vec{A}(\omega, \vec{x}) e^{-i\omega t} \tag{6.4}$$

la ecuación de ondas se reduce a la ecuación, llamada de Helmholtz,

$$(\nabla^2 + \omega^2)\vec{A} = 0 \tag{6.5}$$

si eligimos coordenadas polares en $\mathbb{R}^3$

$$ds^2 \equiv g_{ij}dx^i dx^j = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \tag{6.6}$$

entonces el laplaciano reza

$$\nabla^2 f \equiv \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i(g^{ij}\sqrt{g}\partial_j f) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r^2 f) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} \tag{6.7}$$

(donde $g \equiv \det(g_{ij})$).

Intentamos ahora separación de variables, escribiendo

$$A(\vec{x}) = R(r)T(\theta)F(\phi) \tag{6.8}$$

(como el í ndice vectorial del potencial vector no juega ningún papel de momento, lo surimimos hasta nuevo aviso). La ecuación de Helmholtz se reduce entonces a :

$$\frac{1}{rR}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r^2 R) + \frac{1}{Tr^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}) + \frac{1}{Fr^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 F}{\partial\phi^2} = -\omega^2 \tag{6.9}$$

Multiplicando por $r^2\sin\theta$ se obtiene inmediatamente:

$$\frac{d^2F}{d\phi^2} + m^2 F = 0 \tag{6.10}$$

lo cual implica

$$F = e^{\pm im\phi} \tag{6.11}$$

El resto de la ecuación se reduce entonces a:

$$\frac{1}{rR}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r^2 R) + \frac{1}{Tr^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}) - \frac{m^2}{r^2\sin^2\theta} + \omega^2 = 0 \tag{6.12}$$

de forma que ha de satisfacerse:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr}) + (\omega^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}R = 0 \tag{6.13}$$

Volveremos en un momento sobre esta ecuación, llamada radial por razones obvias. La otra ecuación que tenemos que satisfacer es:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{dT}{d\theta}) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}T = -l(l+1)T \tag{6.14}$$

Si hacemos en ésta $\mu \equiv \cos\theta$, se convierte en la ecuación asociada de Legendre:

$$\frac{d}{d\mu}((1-\mu^2)\frac{dT}{d\mu}) = -2\mu\frac{dT}{d\mu} + (1-\mu^2)\frac{\partial^2 T}{\partial\mu^2} = [\frac{m^2}{1-\mu^2} - l(l+1)]T \tag{6.15}$$

cuya solución general viene dada en términos de las funciones asociadas de Legendre:

$$T = \sum_{lm}(a_{lm}P_l(\mu) + b_{lm}Q_l(\mu)) \tag{6.16}$$

Resulta útil combinar la dependencia en los dos ángulos mediante la introducción de los armónicos esféricos:

$$Y_{lm}(\theta,\phi) \equiv \eta\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)}{(l+|m|)}}e^{im\phi}P_l^m(\mu) \tag{6.17}$$

de forma que la parte angular del potencial reza:

$$\vec{A} = \sum_{lm}\vec{a}_{lm}Y_{lm} \tag{6.18}$$

Resultará útil más adelante recordar que los armónicos esféricos son autofunciones del momento angular total (operador de Casimir):

$$\vec{L}^2 Y_{lm} = l(l+1)Y_{lm} \tag{6.19}$$

donde

$$L_i \equiv -i\epsilon_{ijk}x^j\partial^k \tag{6.20}$$

En cuanto a la ecuación radial, si efectuamos el cambio de variable dependiente: $R \equiv r^{-1/2}u$, se reduce a la ecuación de Bessel, a saber:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} + (\omega^2 - \frac{(l+1/2)^2}{r^2})u = 0 \tag{6.21}$$

Las soluciones de esta ecuación son precisamente las funciones de Bessel:

$$R = \sum_l \left(c_l\frac{J_{l+1/2}(\omega r)}{r^{1/2}} + d_l\frac{Y_{l+1/2}}{r^{1/2}}\right) \tag{6.22}$$

Incidentalmente, si estuviéramos estudiando soluciones estáticas, entonces $\omega = 0$, lo cual quiere decir que estarí amos estudiando la ecuación de Laplace, con lo que la ecuación radial serí a más sencilla:

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\Phi}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2}\Phi = 0 \tag{6.23}$$

que admite soluciones tipo potencia $\Phi \sim r^p$ con $p = l$ o $p = -(l+1)$. La solución general de la ecuación de Laplace se puede entonces escribir como:

$$\Phi = \sum_{lm} (c_{lm} r^l + d_{lm} r^{-(l+1)}) Y_{lm}(\theta, \phi) \tag{6.24}$$

Los campos provenientes de fuentes compactas han de anularse en el infinito, por lo que sólo en segundo tipo de términos está presente: campos monopolares, que van como $(1/r)$, correspondiente a onda s, ( $l = 0$), campos dipolares, decreciendo como $1/r^2$, correspondiente a $l = 1$, etc.

Retomando el hilo de las soluciones generales dependientes del tiempo, resulta cómodo introducir las funciones de Bessel esféricas

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+1/2}(x) = (-x)^l (\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^l \frac{\sin x}{x} \tag{6.25}$$

$$n_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{l+1/2}(x) = -(-x)^l (\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^l \frac{\cos x}{x} \tag{6.26}$$

así como sus combinaciones lineales complejas, las funciones de Hankel esféricas,

$$h_j^{(1,2)} \equiv j_l \pm i n_l \tag{6.27}$$

Por ejemplo,

$$h_0^{(1)}(x) = \frac{e^{ix}}{ix} \tag{6.28}$$

$$h_1^{(1)}(x) = -\frac{e^{ix}}{x}(1 + \frac{i}{x}) \tag{6.29}$$

El comportamiento cerca del origen $(x \sim 0)$ es:

$$\begin{aligned} j_l &\sim \frac{x^l}{2l+1} \\ n_l &\sim -\frac{2l-1}{x^{l+1}} \end{aligned} \tag{6.30}$$

Y el comportamiento asintótico$(x \to \infty)$:

$$\begin{aligned} j_l &\sim \frac{1}{x} \sin (x - l\pi/2) \\ n_l &\sim -\frac{1}{x} \cos (x - l\pi/2) \end{aligned} \tag{6.31}$$

Una vez completamente resuelta la ecuación de ondas, es el momento de recordar que tenemos también que imponer la condición gauge

$$\vec{\nabla}\vec{A} = 0 \tag{6.32}$$

Dado que estamos usando los armónicos esféricos, es conveniende expresar todas las derivadas en términos del momento angular:

$$\partial_i = \frac{x^i}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r^2}\epsilon_{ijk}x^j L^k \tag{6.33}$$

de forma que:

$$r\partial_i A^i = x^i \frac{\partial A^i}{\partial r} + \frac{i}{r}\epsilon_{ijk}x^j L^k A^i \tag{6.34}$$

y la condición gauge es equivalente a:

$$\vec{r}.\left[\sum_l \frac{\partial h_l}{\partial r}\sum_m \vec{A}_{lm}Y_{lm} - i\frac{h_l}{r}\vec{L}\times\sum_m \vec{A}_{lm}Y_{lm}\right] = 0 \tag{6.35}$$

Debido a las fórmulas de recurrencia que obedecen las funciones de Bessel, los dos sumandos se han de anular separadamente, esto es:

$$\begin{aligned} &\vec{r}\sum_{lm}\vec{A}_{lm}Y_{lm} = 0 \\ &\vec{r}.(\vec{L}\times\sum_m \vec{A}_{lm}Y_{lm}) = 0 \end{aligned} \tag{6.36}$$

Ua solución obvia consiste en escribir:

$$\sum_{m'}\vec{A}_{lm'}Y_{lm'} = \sum_m a_{lm}\vec{L}Y_{lm} \tag{6.37}$$

y definir unos nuevos objetos, los armónicos esféricos vectoriales $X_{lm}$ a partir de la actuación del momento angular sobre los armónicos esféricos:

$$\vec{L}Y_{lm} \equiv \sqrt{l(l+1)}X_{lm} \tag{6.38}$$

Nótese que, en particular, cuando $l = 0$, entonces $X_{lm} = 0$, de forma que en onda $s$, y en ausencia de fuentes, las ecuaciones de Maxwell sólo admiten soluciones estáticas.

# Capítulo 7

# Potenciales de Lienard-Wiechert

El problema más sencillo posible, después del de las ondas (soluciones de vací o) es el de encontrar el potencial creado por una carga puntual con movimiento (prefijado) arbitrario.

Para solucionar las ecuaciones de Maxwell en presencia de fuentes (en el gauge de Lorentz), i.e.

$$\partial^2 A^\mu = \frac{1}{c} j^\mu \tag{7.1}$$

utilizaremos el método de las *funciones de Green*; es decir, buscaremos soluciones elementales a la ecuación con una fuente tipo delta:

$$\partial^2 G(x-y) = \delta^4(x-y) \tag{7.2}$$

(también conocidas como *propagadores*) de forma que la solución de las ecuaciones (7.1) será:

$$A^\mu(x) \equiv \int d^4y G(x-y) j^\mu(y) \tag{7.3}$$

Existen, como veremos enseguida, ciertas ambigüedades en la resolución de la ecuación (7.2), que nos inducirán a clasificar los propagadores en función de sus propiedades fí sicas.

## 7.1. Propagadores retardados

La ecuación (7.2) se puede solucionar en el espacio de momentos:

$$G(x-y) \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik.(x-y)} G(k) \tag{7.4}$$

es decir,

$$-k^2 G(k) = 1 \tag{7.5}$$

Esta ecuación tiene como solución

$$G(k) = -PP\frac{1}{k^2} + g(k)\delta(k^2) \tag{7.6}$$

pero la ambigüedad en la delta es equivalente a la ambigüedad en el circuito de integración sobre la variable compleja $k^0$ en la ecuación para la transformada de Fourier,

$$G(x-y) = -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^4} e^{-i\vec{k}.\vec{x-y}} \int dk^0 e^{ik^0 x^0} \frac{1}{(k^0)^2 - \omega^2} \tag{7.7}$$

Introduciendo coordenadas polares con respecto al vector $\vec{x} - \vec{y}$ y llamando $\mu \equiv \cos\theta$, y $r^2 \equiv (\vec{x} - \vec{y})^2$, el propagador se puede escribir como:

$$\begin{aligned} G(x-y) &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \omega^2 d\omega \int_1^{-1} d\mu e^{-i\omega\mu} g(x^0, \omega) \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \omega^2 d\omega \frac{2}{r} \sin\omega r g(x^0, \omega) \end{aligned} \tag{7.8}$$

donde

$$g(x^0, \omega) \equiv \int dk^0 e^{ik^0 x^0} \frac{1}{(k^0)^2 - \omega^2} \tag{7.9}$$

Considerada como una integral en el plano complejo, esta última expresión es ambigua, y se puede definir de cuatro maneras, denotadas por $g_{++}$, $g_{+-}$,$g_{-+}$,$g_{--}$, según el signo de la parte imaginaria infinitesimal con que se dote a los polos en $k^0 = -\omega$ y $k^0 = \omega$, respectivamente. Una vez definida de esta manera, un sencillo ejercicio en el teorena de Cauchy nos permite calcular las integrales. Por ejemplo

$$g_{++} = -\theta(x^0 - y^0)\frac{2\pi}{\omega} \sin\omega x^0 \tag{7.10}$$

lo cual conduce a

$$G_{++}(x-y) = \frac{1}{4\pi r}\delta(x^0 - r) \tag{7.11}$$

(La función de Kronecker es superflua). Debido a que este propagador solo tiene soporte en el futuro de la fuente se le llama *retardado*.

## 7.2. El potencial creado por una carga en movimiento

En general podemos escribir

$$A^\mu = \frac{4\pi}{c}\int d^4y G_{++}(x-y) j^\mu(y) = \int d^3y \frac{j^\mu(x^0 - y^0 - |\vec{x}-\vec{y}|, \vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|} \tag{7.12}$$

En el caso de que la fuente consista en una carga eléctrica con una trayectoria prefijada,

$$x^\mu \equiv z^\mu(s) \tag{7.13}$$

la fuente vendrá dada por:

$$j^\mu(x) \equiv ec\int ds \delta^{(4)}(x^\alpha - z^\alpha(s)) u^\mu(s) \tag{7.14}$$

de modo que

$$A^\mu(x) = e\int ds \frac{1}{|\vec{x}-\vec{z}(s)|}\delta(x^0 - z^0(s) - |\vec{x}-\vec{z}(s)|) u^\mu(s) \tag{7.15}$$

y resolviendo la delta de Dirac en función del tiempo propio,

$$A^\mu = e\frac{u^\mu(\bar{s})}{\dot{z}^0(\bar{s}|\vec{x}-\vec{z}(\bar{s})| - \dot{\vec{z}}(\vec{x}-\vec{z}(\bar{s}))} \tag{7.16}$$

donde el tiempo propio en el punto retardado viene dado por:

$$x^0 - z^0(\bar{s}) - |\vec{x}-\vec{z}(\bar{s})| = 0 \tag{7.17}$$

y el denominador se puede entonces expresar en la forma más elegante:

$$A^\mu = e\frac{u^\mu(\bar{s})}{(u(\bar{s}).(x - z(\bar{s}))} \tag{7.18}$$

Geométricamente, el punto $s = \bar{s}$ es la intersección del cono de luz pasado con vértice en el punto en el que se quiere calcular el campo, con la trayectoria de la fuente. Resulta natural identificar ese punto con el prefijo $(-)$, y escribir:

$$A^{\mu}_{ret} = e\frac{u^{\mu}}{u.(x - z_{-})} \tag{7.19}$$

Naturalmente, la otra rama del cono de luz, la diriguda hacia el futuro, también cortará a la trayectoria de la fuente en otro punto, llamado el punto avanzado, que resulta natural denotar con un $(+)$.

Aunque para muchas aplicaciones resulta suficiente considerar exclusivamente el potencial retardado, (que es el únici supuestamente fí sico), cundo se intanta estudiar la reacción de la radiación emitida por la fuente sobre la propia fuente que la emite, resulta conveniente descomponer el campo en

$$A^{\mu}_{ret} \equiv A^{\mu}_{coul} + A^{\mu}_{rr} \tag{7.20}$$

donde

$$A^{\mu}_{coul} \equiv \frac{A^{\mu}_{av} + A^{\mu}_{ret}}{2} \tag{7.21}$$

y

$$A^{\mu}_{ret} \equiv \frac{A^{\mu}_{av} - A^{\mu}_{ret}}{2} \tag{7.22}$$

Denotaremos por

$$r \equiv u.(x - z_{-}) \tag{7.23}$$

de forma que

$$k^{\alpha} \equiv \frac{x^{\alpha} - z^{\alpha}_{-}}{r} \tag{7.24}$$

es un vector isótropo ,$k^2 = 0$, (por definición del punto retardado), y además normalizado de manera que:

$$k.u = 1 \tag{7.25}$$

Es fácil demostrar que el vector $k$ representa la variación del tiempo propio correspondiente al punto retardado cuando se varí a el punto en el que se quiere calcular el campo (y que es donde está situado el vértice del cono de luz):

$$k_\alpha = \partial_\alpha s \tag{7.26}$$

A partir de aquí es sencillo demostrar que

$$\partial_\alpha r = u_\alpha + (r(\dot{u}.k) - 1)k_\alpha \tag{7.27}$$

Así como la expresión para la derivada del vector nulo:

$$\partial_\beta k_\alpha = \frac{1}{r}(\eta_{\alpha\beta} + k_\alpha k_\beta - k_\alpha u_\beta - k_\beta u_\alpha) - (k.\dot{u})k_\alpha k_\beta \tag{7.28}$$

de donde se comprueba sin dificultad el carácter geodésico del vector $k$:

$$k^\mu \partial_\mu k_\alpha = 0 \tag{7.29}$$

así como que

$$\partial_\rho k^\rho = \frac{2}{r} \tag{7.30}$$

El tensor campo electromagnético resulta ser

$$F_{\alpha\beta} = \frac{e}{r^2}(k_\alpha u_\beta - k_\beta u_\alpha) + \frac{e}{r}(k_\alpha \dot{u}_\beta - k_\beta \dot{u}_\alpha - (k.\dot{u})(k_\alpha u_\beta - k_\beta u_\alpha) \tag{7.31}$$

El primer término es el campo coulombiano, mientras que el término en $1/r$ (y dependiente de las aceleraciones) representa los campos de radiación, $F^{(1)}_{\alpha\beta}$.

Es un hecho curioso que la parte radiativa , por sí sola, admite un potencial; de hecho

$$F^{(1)}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A^{(1)}_\beta - \partial_\beta A^{(1)}_\alpha \tag{7.32}$$

con

$$A^{(1)}_\alpha \equiv \frac{n^\alpha}{r} \tag{7.33}$$

siendo $n^\alpha \equiv k^\alpha - u^\alpha$.

El cálculo del tensor energí a momento es un sencilo ejercicio, cuyo resultado es:

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu} &= -\frac{e^2}{8\pi r^4}\eta_{\mu\nu} + \frac{e^2}{4\pi r^4}(u_\mu k_\nu + u_\nu k_\mu - k_\mu k_\nu) \\
&+\frac{e^2}{4\pi r^3}(\dot{u}_\mu k_\nu + \dot{u}_\nu k_\mu + 2(\dot{u}.k)k_\mu k_\nu - (\dot{u}.k)(u_\mu k_\nu + u_\nu k_\mu)) \\
&+\frac{e^2}{4\pi r^2}(\dot{u}^2 + (k\dot{u})^2)k_\mu k_\nu
\end{aligned} \tag{7.34}$$

El último trozo, que va asintóticamente como $o(1/r^2)$ (y que se anula cuando la aceleración es cero) representa los campos radiativos, y está conservado por sí mismo: $\partial_\alpha T^{\alpha\beta}_{(2)} = 0$.

- **Ejercicios.**

- Verifique usted explí citamente que el propagador retardado efectivamente es solución de las ecuaciones de Maxwell con una fuente tipo delta:

- Calcule usted explí citamente los restantes tres propagadores. Compruebe que el $G_{--}(x-y)$ (llamado *avanzado*) es el transformado por inversión temporal del propagador retardado.

- Demostrar que el correspondiente campo avanzado viene dado por:

$$A^\mu_{avanz} = e\frac{u^\mu_+}{u_+.(z_+ - x)} \tag{7.35}$$

- Analice las siguientes ecuaciones, y razone cuáles de ellas son invariantes Lorentz, y cuáles invariantes gauge: $A_o = j_\mu A_\nu \eta^{\mu\nu}$

  $\nabla^2 A_\mu = j_\mu$

  $\partial_\mu F^{\mu\alpha} = j_\alpha$

- Calcule la integral $\int d^3x(tg^{-1}\sinh r)x^i$

- Es bien sabido que una carga acelerada emite radiación. Ahora bien, un campo gravitatorio constante (por ejemplo, el de la tierra en la extensión de un laboratorio) es equivalente a una aceleración constante. En base a estos dos principios, parece evidente que una carga en reposo en el campo gravitatorio de la tierra deberí a de emitir radiación. Es esto correcto? Y que pasarí a con una carga en caí da libre en el mismo campo gravitatorio?

- **Solución.** Los observadores acarrean tétradas, $e_a^\mu$ que consideraremos compuestas por un vector temporal, $e_0^\mu \partial_\mu$, y tres vectores espaciales, $e_i^\mu \partial_\mu$.

$$\eta^{ab} e_a^\mu e_b^\nu = g^{\mu\nu} \tag{7.36}$$

Naturalmente la métrica sólo define la tétrada salvo una transformación de Lorentz infinitesimal. Al evolucionar en el tiempo, la tétrada rota:

$$\frac{de_a^\mu}{ds} = \omega_a^b(s) e_b^\mu \tag{7.37}$$

(con $\omega_{ab} = -\omega_{ba}$). Es frecuentemente conveniente escoger el vector cero como la cuadrivelocidad

$$e_0^\mu = u^\mu \tag{7.38}$$

Naturalmente su derivada es la cuadriaceleración, $a \equiv \dot{u}$:

$$\frac{de_0}{ds} = \dot{u} = \sum_{a=1}^{3} (\dot{u} e_a) e^a = \sum_{a=1}^{3} a_a e^a \tag{7.39}$$

dado que $u\dot{u} = \dot{u} e_0 = 0$.

Es decir, que cuando la aceleración no es nula, no es posible escoger $\omega_{ab} = 0$. Se puede demostrar que la matriz

$$\omega_{ab} = \delta_{a0}\delta_{bi} a_i - \delta_{ai}\delta_{b0} a_i \tag{7.40}$$

es la mí nima rotación que puede efectuar una tétrada en su propagación. A las tétradas que se propagan de esta manera se las llama de Fermi-Walker, y corresponden fí sicamente al uso de giroscopios. Los vectores espaciales $e_A$ (A=1,2,3 ) de una tal tétrada satisfacen que:

$$\dot{e}_A = -(e_A\dot{u})e_0 \tag{7.41}$$

En el caso particular de que la aceleración sea constante,

$$\dot{u}^2 \equiv -g^2 \tag{7.42}$$

entonces,

$$\begin{aligned} \dot{u}\ddot{u} &= 0 \\ \ddot{u}u &= -\dot{u}^2 = -g^2 \end{aligned} \tag{7.43}$$

Si escogemos $e_3 = \dot{u}$, entonces, derivando la igualdad $\dot{u}e_A = 0$ (A=1,2) obtenemos:

$$\dot{u}\dot{e}_A + \ddot{u}e_A = \ddot{u}e_A = 0 \tag{7.44}$$

es decir que $\ddot{u} = \lambda u + \xi\dot{u}$. Pero de $\dot{u}\ddot{u} = 0$ deducimos inmediatamente que $\xi = 0$, lo cual es consistente con la propagación Fermi-Walker de la aceleración.

Explí citamente, los cuatro vectores en este caso son

$$\begin{aligned} e_0 &= ch\,(gs)\partial_0 + sh\,(gs)\partial_3 \\ e_1 &= \partial_1 \\ e_2 &= \partial_2 \\ e_3 &= sh\,(gs)\partial_0 + ch\,(gs)\partial_3 \end{aligned} \tag{7.45}$$

La trayectoria espaciotemporal de un tal observador será:

$$\begin{aligned} x^0 &= \frac{1}{g}\,sh\,(gs) \\ x^1 &= x^1_{(0)} \\ x^2 &= x^2_{(0)} \\ x^3 &= \frac{1}{g}\,ch\,(gs) \end{aligned} \tag{7.46}$$

Un observador en caí da libre corresponde a la trayectoria $z^0 = s$; un observador en reposo en un campo gravitatorio corresponde, por el principio de equivalencia, a una trayectoria hiperbólica¡del tipo arriba considerado. La densidad de energí a que corresponde a un observador dado viene dada por

$$T_{ab} \equiv T_{\mu\nu} e^{\mu}_{a} e^{\nu}_{b} \tag{7.47}$$

Usando estas ideas generales, así como la expresión explí cita del tensor energí a momento correspondiente al potencial de Lienard-Wiechert, no es difí cil realizar el ejercicio.

## 7.3. La ecuación de Lorentz-Dirac

Hemos visto que toda fuente acelerada emite radiación. Resulta obvio desde el punto de vista fí sico que la pérdida de energí a subsiguiente ha de afectar a la propia trayectoria de la fuente. La manera más sencilla de proceder serí a calcular el campo (retardado) sobre la propia fuente (esto es, en $r = 0$), y escribir la fuerza de Lorentz sobre la fuente. El problema es, naturalmente, que este campo es divergente debido al comportamiento en $o(1/r)$. Una manera de proceder, explicitada con detalle por Teitelboim et al. consiste en efectuar una renormalización clásica. Pero existe una manera más sencilla, debida en esencia al propio Dirac, que es la siguiente: Admitiendo que sobre la carga prueba puedan acuar también ondas *entrantes* escribiremos el potencial como

$$A^\mu = A^\mu_{ret} + A^\mu_{ent} \tag{7.48}$$

Ahora bien, debido a la invariancia por inversión temporal, este campo se podrá también escribir en términos del potencial avanzado como

$$A^\mu = A^\mu_{av} + A^\mu_{sal} \tag{7.49}$$

donde $A^\mu_{sal}$ representará las ondas *salientes.*

Esto sugiere claramente que la radiación producida por la fuente será

$$A^\mu_{sal} - A^\mu_{ent} = A^\mu_{ret} - A^\mu_{av} \tag{7.50}$$

y es claro que las partes divergentes de los dos potenciales se van a cancelar en la semidiferencia, por lo que este potencial será analí tico sobre la fuente.

Para puntos del espacio tiempo próximos a la fuente, las cantidades avanzadas se pueden expresar en serie de la diferencia de tiempos propios entre el punto avanzado y el punto retardado, $\Delta s \equiv s_+ - s_-$. Así por ejemplo,

$$z^\alpha_+ = z^\alpha_- + \sum_{n=1}^{3} \frac{1}{n!} \frac{d^{(n)} x^\alpha}{ds^n} (\Delta s)^n + o((\Delta s)^4) \tag{7.51}$$

A partir de la condición de que el punto avanzado esté realmente en el cono de luz, esto es, que,

$$(x^\alpha - z_+^\alpha)^2 = 0 \tag{7.52}$$

es decir ,y suprimiendo en lo sucesivo el subí ndice correspondiente al punto retardado,

$$-2r\Delta s + (1 - rk.\dot{u})(\Delta s)^2 - (\frac{1}{3}rk.\ddot{u} + \frac{1}{12}\dot{u}^2)(\Delta s)^3 = 0 \tag{7.53}$$

de donde se deduce sin dificultad que $\Delta s$ y $r$ son del mismo orden, y que además: [1]

$$\Delta s = 2r + 2k.\dot{u}r^2 + (2(k.\dot{u})^2 + \frac{4}{3}k.\ddot{u} + \frac{2}{3}\dot{u}^2)r^3 + o(r^4) \tag{7.54}$$

Esto permite inmediatamente escribir:

$$u_+^\mu = u^\mu + 2\dot{u}^\mu r + 2((k.\dot{u})\dot{u}^\mu + \ddot{u}^\mu)r^2 \tag{7.55}$$

(es suficiente para nuestros propósitos quedarnos a segundo orden en el cálculo de la velocidad); así como

$$(x-z_+)^\mu = (k^\mu - 2u^\mu)r - 2(k.\dot{u}u^\mu + \dot{u}^\mu)r^2 - 2([(k.\dot{u})^2 + \frac{2}{3}k.\ddot{u} + \frac{1}{3}\dot{u}^2]u^\mu + 2k.\dot{u}\dot{u}^\mu + \frac{2}{3}\ddot{u}^\mu)r^3 \tag{7.56}$$

Y por consiguiente

$$r_+ \equiv u_+.(z_+ - x) = r - \frac{2}{3}(\dot{u}^2 + k.\ddot{u})r^3 \tag{7.57}$$

de forma que el potencial avanzado

$$A_+^\mu \equiv e\frac{u_+^\mu}{r_+} \tag{7.58}$$

reza:

$$A_{av}^\mu = \frac{e}{r}(u^\mu + 2r\dot{u}^\mu + (\frac{2}{3}(\dot{u}^2 + k.\ddot{u})u^\mu + 2(\ddot{u}^\mu + k.\dot{u}\dot{u}^\mu))r^2 \tag{7.59}$$

de forma que el potencial de reacción de la radiación se escribe:

$$A_{rr}^\mu = -e\dot{u}^\mu - e(\frac{1}{3}(\dot{u}^2 + k.\ddot{u})u^\mu + \ddot{u}^\mu + k.\dot{u}\dot{u}^\mu)r \tag{7.60}$$

[1] Recordemos que si suponemos un desarrollo hasta tercer orden, $\Delta s \equiv \sum_{n=1}^{3} s_n r^n + o(r^4)$ entonces, consistentemente,$(\Delta s)^2 = s_1^2 r^2 + 2s_1 s_2 r^3$ y $(\Delta s)^3 = s_1^3 r^3$.

Esto es todo lo que se necesita para calcular el campo de reación de la radiación $F^{(rr)}_{\mu\nu}$ sobre la fuente $(r = 0)$.

$$\partial_\nu A^{(rr)}_\mu = \ddot{u}_\mu k_\nu + [\frac{1}{3}(\dot{u}^2 + k.\ddot{u})u_\mu + \ddot{u}_\mu + (k.\dot{u})\dot{u}_\mu][u_\nu - k_\nu] + [\eta_{\nu\sigma} + k_\nu k_\sigma - k_\nu u_\sigma - k_\sigma u_\nu][\frac{1}{3}\ddot{u}^\sigma u_\mu + \dot{u}^\sigma \dot{u}_\mu] \tag{7.61}$$

Y eliminando la parte simétrica se obtiene fácilmente el tensor campo:

$$F^{rr}_{\alpha\beta} = \frac{2}{3}e(\ddot{u}_\alpha u_\beta - u_\alpha \ddot{u}_\beta) \tag{7.62}$$

Y aplicando la fórmula de la fuerza de Lorentz, se obtiene una ecuación para el movimiento de la carga en el campo que ella misma crea.

$$m\dot{u}^\alpha = \frac{2}{3}e^2(\delta^\alpha_\beta + u^\alpha u_\beta)\ddot{u}^\beta \tag{7.63}$$

Esta es la ecuación de Lorentz-Dirac. Esta ecuación tiene una difí cil interpretación fí sica, ya que, por ejemplo, si se contraen los dos miembros de dicha ecuación con $\dot{u}$ se obtiene

$$\dot{u}^2 = \dot{u}_0^2 e^{\frac{3m}{e^2}s} \tag{7.64}$$

es decir, que el módulo de la aceleración crece sin lí mite: son las soluciones tipo fuga que demuestran las limitaciones de la teorí a clásica.

# Capítulo 8

# Más allá del marco clásico

## 8.1. Dualidad y la posible existencia de monopolos magnéticos

Es un hecho cierto que las ecuaciones de Maxwell en el vací o

$$\begin{aligned} \nabla\vec{E} &= \rho \\ \nabla\times\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\vec{B} &= 0 \\ \nabla\times\vec{B} &= \frac{1}{c}\vec{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \tag{8.1}$$

son invariantes frente a lo que llamaremos *transformación de dualidad* $\vec{B}\to\vec{E}$ y $\vec{E}\to-\vec{B}$. Esto puede parecer una trivialidad, ya que, de hecho las ondas electromagnéticas (soluciones de vací o con energí a no nula) presentan esta simetrí a de manera obvia.

Dirac, sin embargo se preguntó si habrí a alguna manera de generalizar esta simetrí a en presencia de fuentes. La tercera ecuación de Maxwell aparentemente impide la existencia del campo de Coulomb magnético (lo que se conoce con el nombre de *monopolo magnético*). Qué ocurre si postulamos directamente su existencia?

### 8.1.1. La cuerda de Dirac

Suponemos entonces que :

$$\vec{B}_m \equiv \frac{g}{4\pi r^2}\hat{r} \tag{8.2}$$

($\hat{r} \equiv \frac{\vec{r}}{r}$). Evidentemente vamos a tener dificultades para definir un potencial vector. Efectivamente, para que haya $\vec{A}$ tal que $\vec{B}_m = \vec{\nabla} \times \vec{A}_m$. es necesario que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_m = 0$, lo cual no es el caso, sino que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_m = g\delta^3(x)$.

La solución que propuso Dirac es el postular que existe un solenoide arbitrariamente fino que conecta el monopolo con el infinito. A ese solenoide se la da usualmente el nombre de cuerda de Dirac, que nosotros supondremos colocada sobre el eje z negativo (aunque, como veremos, su posición no es un concepto invariante gauge, de hecho vamos a argüir en un momento que esa cuerda es inobservable). El campo magnético de la cuerda será: $\vec{B}_s = g\theta(-z)\delta(x)\delta(y)\hat{z}$, y es tal que el campo magnetico total, $\vec{B}_m + \vec{B}_s$ no tiene divergencia.

### 8.1.2. La formulación de Wu-Yang

Calculemos el $\vec{A}_m$.Lo más fácil es usar el teorema de Gauss. El flujo sobre el casquete esférico $\theta' < \theta$, $S_{(+)}$ (y usando el ansatz, $\vec{A}_m = A(r,\theta)\,\partial_\phi$ ), viene dado por:

$$\Phi(S_{(+)}) = \int_{S_{(+)}} \vec{B_m}.d\vec{S} = \int_{C\equiv\partial S_{(+)}} \vec{A}_m.d\vec{l} = 2\pi A r^2 \sin^2\theta \ . \tag{8.3}$$

Por otra parte, el flujo total en la esfera es $4\pi g$, por lo que podemos reescribir $\Phi(S_{(+)})$ como el ángulo sólido subtendido por el casquete $S_{(+)}$,

$$\Phi(S_{(+)}) = \frac{g}{4\pi}\Omega(S_{(+)}) = \frac{g}{4\pi}\int_0^\theta d\theta' \sin\theta' d\phi' = \frac{g}{2}(1-\cos\theta) \ . \tag{8.4}$$

esto conduce a:

$$\vec{A}_m^{(+)} = \frac{g}{4\pi r^2 \sin^2\theta}(1-\cos\theta)\partial_\phi \ . \tag{8.5}$$

Existe una ambigüedad, ya que $\partial S_{(+)} = \partial S_{(-)}$, donde $S_{(-)}$ es el complemento del casquete en la esfera $\theta'' > \theta$. Usando Stokes en el complemento,

$$\Phi_{(-)}(C) = (1 - \frac{\Omega_{(+)}}{4\pi})g = \frac{g}{2}(1 + \cos\theta) = -\int_{\partial S_{(-)}} \vec{A_m} d\vec{l} \, , \tag{8.6}$$

conduciendo a

$$\vec{A}_m^{(-)} = -\frac{g}{4\pi r^2 \sin^2\theta}(1 + \cos\theta)\, \partial_\phi \; . \tag{8.7}$$

En ambos casos $\vec{\nabla} \times \vec{A}_m^{(+)} = \vec{\nabla} \times \vec{A}_m^{(-)} = \frac{g}{4\pi r^2}\hat{r}$. Las uno-formas (vectores covariantes) correspondientes son:

$$A_m^{(\pm)} = \frac{g}{4\pi}\frac{1}{2r}\frac{xdy - ydx}{z \pm r} = \frac{g}{4\pi}(\pm 1 - \cos\theta)d\phi \; . \tag{8.8}$$

Las dos determinaciones posibles no son idénticas, pero difieren sólo en una transformacion gauge

$$A^{(+)} - A^{(-)} = d\Lambda \equiv -\frac{g}{2\pi}d\phi \; . \tag{8.9}$$

La cuerda no modifica el $A^{(+)}$ pero $\vec{A}_{m-s}^{(-)} = \vec{A}_{m-s}^{(+)} = \vec{A}_m^{(+)}$,[1] La uno forma asociada a la cuerda es cerrada, pero no exacta: $A_s \equiv \frac{g}{2\pi}d\phi$.

Si pedimos que la transformación gauge sea univaluada al actuar sobre campos en la fundamental, $e^{ie\Lambda(\phi=0)} = e^{ie\Lambda(\phi=2\pi)}$ se obtiene la condicion de cuantizacion de Dirac,

$$\frac{eg}{2\pi} \in \mathbb{Z}\hbar \; . \tag{8.10}$$

## 8.2. Apéndice: reformulación en términos de formas diferenciales

Todo esto se puede ver como lo que en geometrí a se conoce como *dualidad de Hodge* El potencial eléctrico de Coulomb se escribe como

$$A_e = \frac{e_1}{4\pi r}dt \; , \tag{8.11}$$

[1]Todo esto falla en el origen

de forma que el correspondiente campo electromagnético viene dado por la diferencial exterior,

$$F_e \equiv dA = \frac{e_1}{4\pi r^3} \sum_i x^i dt \wedge dx^i \ . \tag{8.12}$$

Naturalmente

$$dF_e = 0 \tag{8.13}$$

como consecuencia de la nilpotencia de la diferenciación exterior,$d^2 = 0$.

El campo del monopolo magnético vendrá dado por el dual de Hodge:

$$F_m \equiv *F_e = \frac{e_1}{4\pi r^3} \sum_{i,j,k} x^i \epsilon_{ijk} dx^j \wedge dx^k \ , \tag{8.14}$$

Evidentemente esta 2-forma no es exacta (ni siquiera es cerrada), dado que

$$dF_m = d * F_e = e_1 \delta^{(3)}(x) d(vol) \ , \tag{8.15}$$

Precisamente la ecuación de Gauss escrita en términos de formas diferenciales reza

$$d(*F)_2 = *J^{(e)} \tag{8.16}$$

donde la forma asociada a la fuente será

$$J^{(e)} = e_1 \delta^{(3)}(x) dt \ . \tag{8.17}$$

La dos-forma asociada al campo electromagnético de la cuerda reza

$$F_{cuerda} = \frac{g}{2} \theta(-x_3) \delta(x_1) \delta(x_2) dx^1 \wedge dx^2 \tag{8.18}$$

## 8.3. Características generales de las correcciones cuánticas

El modelo clásico del electrón: uno de los pocos problemas que, en cierto sentido, es más sencillo desde el punto de vista cuántico.

Cuánticamente, lo que ocurre es que la carga ( y la masa) que aparecen en el lagrangiano no son directamente observables, sino que sufren un apantallamiento (que resulta ser infinito). Sólo la suma de la carga *desnuda* (esto es, la que aparece en el lagrangiano), $e_B$, y el apantallamiento, $\delta e_B$ es observable, y fijado por el experimento. Para que este proceso se pueda efectuar de manera precisa, es necesario *regularizar*; esto es, considerar una familia de teorí as sin divergencias, que tienen como lí mite la teorí a deseada. Cuando se efectúa esto, es necesario introducir una escala, digamos $\mu$, y la carga renormalizada depende de la escala: $\alpha(\mu)$.

Lo que ecurre en la electrodinámica cuántica (QED) es que la dependencia de la carga con la escala es tal que $\alpha$ diverge cuando $\mu \to \mu_L$. Este fenómeno (que ocurre en el ultavioleta lejano) y que es llamado *polo de Landau*, impide explorar distancias arbitrariamente cortas (para lo cual, según el principio de incertidumbre, serí a necesario considerar energí as también arbitrariamente grandes).

Existe una sospecha muy extendida en la comunidad cientí fica de que estos polos hacen que la teorí a sea inconsistente, por lo que serí a necesario embeberla en otra teorí a donde la dependencia de la constante de acoplo con la escala fuese exactamente la opuesta. A este tipo de teorí as, cuyo paradigma es la cromodinámica cuántica (QCD), la teorí a de las interacciones fuertes entre quarks y campos gauge no abelianos llamados gluones, se las llama asintóticamente libres, y también presentan un polo en la dependencia de la constante de acoplo con la escala, sólo que esta vez en el infrarrojo, en vez de en el ultravioleta. Este polo está relacionado con el confinamiento de los estados no singletes caracterí stico de las teorí as gauge no abelianas.

# Capítulo 9

# Apéndice: El grupo de Lorentz

El grupo de Lorentz está compuesto por trasformaciones de las cuatro coordenadas espaciotemporales que dejan invariante el cono de luz. Explí citamente,

$$x'^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \tag{9.1}$$

con la condición

$$\eta_{\mu\nu} L^{\mu}{}_{\alpha} L^{\nu}{}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta} \tag{9.2}$$

Se pueden interpretar como las coordenadas de un mismo suceso visto desde dos sistemas de referencia diferentes. A esta interpretación se la suele llamar *pasiva*. Serí a también posible (aunque no abogaremos por ello en este curso) adoptar una interpretación *activa*, donde la transformación de Lorentz cambia de un punto a otro punto diferente en el mismo sistema de referencia. Una consecuencia inmediata de esta definición es que la transformación inversa viene dada por:

$$x^{\mu} = x'^{\nu} L_{\nu}{}^{\mu} \tag{9.3}$$

- **Ejercicio.** Demostrarlo.

Ejemplos importantes son:

- La identidad y las inversiones

- Las rotaciones ordinarias de $SO(3)$
- Las transformaciones de Lorentz puras

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c^2}) \\ \vec{r}' &= \vec{r} + (\gamma - 1)(\vec{r}.\vec{v})\frac{\vec{v}}{v^2} - \gamma\vec{v}t \end{aligned} \tag{9.4}$$

Si escribimos una transformación próxima a la identidad como

$$L^{\mu}{}_{\alpha} \equiv \delta^{\mu}{}_{\alpha} + \omega^{\mu}{}_{\alpha} \tag{9.5}$$

entonces

$$\omega_{\mu\,\alpha} = \omega_{\alpha\mu} \tag{9.6}$$

es decir, que la componente conexa con la identidad está caracterizada por una matriz antisimétrica de cuatro filas y cuatro columnas; un total de 6 parámetros. Tres que se pueden interpretar como ángulos de Euler de una rotación arbitraria, y otros tres que indican la velocidad de una transformación de Lorentz pura. Este conjunto de transformaciones, con la ley de composición ordinaria, constituye el grupo $SO(1,3)$, una de las formas reales del álgebra de Lie $D_2$ el la notación de Cartan.

Es frecuente denotar como grupo de Poincaré el producto del grupo de Lorentz con las traslaciones espaciotemporales. Este grupo tiene cuatro parámetros más; es decir, un total de 10 parámetros, se denota a veces como $ISO(1,3)$, donde la letra $I$ indica *inhomogéneas*.

## 9.1. La descomposición de Wigner

Existe una descomposición canónica debida a Wigner: toda transformación $L \in SO(3,1)$ se puede escribir como $L = R_L B_{\vec{n}} R_R$, donde $R_L$ y $R_R$ son dos rotaciones ordinarias de $SO(3)$, y $B_{\vec{n}}$ es una transformación de Lorentz pura en la dirección del eje $\vec{n}$.

Una consecuancia sencilla, que demostraremos explí citamente, es que todos las transformaciones de Lorentz puras son conjugadas, y se pueden escribir como:

$$B_{\vec{n}'} = RB_{\vec{n}}R^{-1} \tag{9.7}$$

donde $R \in SO(3)$ define la dirección $\vec{n}'$ a partir de $\vec{n}$: $n'^i = R^i{}_j n^j$. Esto implica que todas las transformaciones de Lorentz puras se pueden definir a partir de una fija (que se puede escoger como $B_x$) y de una rotación.

Efectivamente, partimos de la rotación $R$

$$x'^i = R^{(-1)i}{}_j x^j = R_{ji}x^j \tag{9.8}$$

de forma que $B_{\vec{n}}R^{-1}$ se escribirá:

$$\begin{aligned} \vec{r}'' &= \vec{r}' + (\gamma - 1)(\vec{r}'.\vec{n})\vec{n} + \gamma v t \vec{n} \\ t'' &= \gamma(t + \frac{v}{c^2}(\vec{n}.\vec{r}')) \end{aligned} \tag{9.9}$$

y $RBR^{-1}$,

$$\begin{aligned} \vec{r}''' &= R.\vec{r}' + (\gamma - 1)(\vec{r}'.\vec{n})R\vec{n} + \gamma v t R\vec{n} \\ t''' &= \gamma(t + \frac{v}{c^2}(\vec{n}.\vec{r}')) \end{aligned} \tag{9.10}$$

Y el resultado se sigue del hecho de que

$$\vec{n}.\vec{r}' = \vec{n}'.\vec{r} = n^i R_{ji} x^j \tag{9.11}$$

así como de que

$$(\vec{r}'.\vec{n})R\vec{n} = R_{jk}x^j n^k n^l R_{il} = (\vec{r}.\vec{n}')\vec{n}' \tag{9.12}$$

## 9.2. Qué significa decir que algo es invariante frente al grupo de Lorentz, y por qué es esto importante?

Dado un vector arbitrario en $\mathbb{R}^3$, $\vec{V}$, es evidente que la ecuación

$$V_3 = 0 \tag{9.13}$$

no es invariante bajo rotaciones. Qué quiere decir esto? Pues que si la tercera componente de $\vec{V}$ es nula en un cierto sistema de coordenadas, no tiene porqué serlo en otro definido por una rotación respecto del primero.

Los tensores son cantidades que se definen precisamente por la condición de que se transformen de forma lineal y homogénea con respecto al grupo (en este caso $SO(3)$). La condición de que *todas* las componentes de un tensor se anulen, esa sí que es una condición invariante bajo rotaciones. Y ésto independientemente de la cantidad de índices libres que existan; simplemente, la ecuación ha se ser *homogénea*; esto es, que todos sus términos han de tener los mismos índices libres. Por ejemplo, son ecuaciones tensoriales:

$$V_i = 0 \tag{9.14}$$

o bien

$$\partial_i V^i = 0 \tag{9.15}$$

o incluso

$$\partial_i V_j - \partial_j V_i = 0 \tag{9.16}$$

Pero no lo es

$$V_i + \partial_k V^k = 0 \tag{9.17}$$

ya que sus dos términos se transforman de manera diferente al efectuar una rotación.

Cuando una ecuación es invariante, se escribe de la misma manera en todos los sistemas de coordenadas, porque dado que el jacobiano de la transformación es no singular,no afecta a la condición de anulación. Por ejemplo $V_i = 0$ se escribiría $R^j{}_i V'_j = 0$, pero esto es equivalente a $V'_j = 0$.

# Bibliografía


[1] P.A.M. Dirac,*The Theory of Magnetic Poles*, Phys. Rev. 74 (1948),817.

[2] A. Kovetz and G.E. Tauber, *Radiation from an Accelerated Charge and the Principle of Equivalence*, Am J. Phys.,37 (1969),382.

[3] L. Landau, E.M. Lifshitz, *Teoría Clásica de los campos* (Reverté).

[4] J. Mathews and R.L. Walker, *Mathematical Methods of Phisics* ( W.A. Benjamin, Menlo Park, 1973)

[5] E. Poisson, *An Introduction to the Lorentz-Dirac equation*, gr-qc/9912045.

[6] C. Teitelboim D. Villarroel and C. van Weert, *Classical Electrodynamics of Retarded Fields and Point Particles*, Rivista del Nuovo Cimento,Vol.3,N.9 (1980),1.

[7] E. Wigner,*On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group*, Ann. Math,40 (1939),39.

[8] T.T. Wu and C.N. Yang, *Concept of Non-Integrable Phase Factor and Global Formulation of Gauge Fields*, Phys. Rev. D12 (1975) 3845.