

Física del siglo XX

Enrique Álvarez

Instituto de Física Teórica UAM/CSIC y Departamento de Física Teórica, UAM

ABSTRACT: Se presenta una introducción elemental a la relatividad especial y a la mecánica cuántica adaptada al primer curso del grado.

Contents

| | |
|--|-----------|
| 1. Esquinas de la Física | 3 |
| 1.1 Mecánica clásica no relativista | 3 |
| 1.2 Mecánica clásica relativista. | 3 |
| 1.3 Mecánica cuántica no relativista. | 4 |
| 1.4 Mecánica cuántica relativista (es decir, teoría cuántica de campos y partículas elementales). | 4 |
| 1.5 Gravedad cuántica | 4 |
| 1.6 <i>Problemas</i> | 5 |
| 2. Mecánica clásica relativista. | 6 |
| 2.1 Principio de relatividad de Galileo | 6 |
| 2.2 El principio de relatividad de Einstein. | 6 |
| 2.3 Simultaneidad | 9 |
| 2.4 Medida de longitudes. | 9 |
| 2.5 Dilatación de tiempos y contracción de longitudes | 10 |
| 2.6 Efecto Doppler | 12 |
| 2.7 Adición relativista de velocidades | 14 |
| 2.8 Transformaciones de Lorentz | 15 |
| 2.9 Tiempo propio | 19 |
| 2.10 Energía y momento relativistas | 19 |
| 2.11 El sistema de centro de momento (CDM) | 25 |
| 3. Tema avanzado: transformaciones de Lorentz | 27 |
| 4. Qué significa decir que algo es invariante frente al grupo de Lorentz, y por qué es esto importante? | 28 |
| 5. Relatividad General | 30 |
| 5.1 El principio de equivalencia | 30 |
| 5.2 De $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ al espacio de Minkowski | 33 |
| 5.3 Espacios planos y espacios curvos | 33 |
| 5.4 Las ecuaciones de Einstein | 35 |
| 6. Mecánica cuántica no relativista. | 36 |
| 6.1 La naturaleza corpuscular de la radiación | 36 |
| 6.2 La naturaleza tipo onda de la materia | 37 |
| 6.3 Niveles discretos de energía | 38 |
| 6.4 Operadores | 39 |

| | | |
|------------|--|-----------|
| 6.5 | Los postulados de la MC | 40 |
| 6.6 | La ecuación de Schrödinger. | 43 |
| 6.7 | La integral de solapamiento | 45 |
| 6.8 | El principio de incertidumbre | 48 |
| 6.9 | El efecto túnel | 50 |
| 6.10 | Estados ligados | 53 |
| 6.11 | El oscilador armónico | 55 |
| 6.12 | <i>Problemas.</i> | 57 |
| 7. | Estructura de la materia. | 58 |
| 7.1 | Física atómica | 58 |
| 7.1.1 | Momento angular | 58 |
| 7.1.2 | El átomo de hidrógeno | 62 |
| 7.2 | Spin y estadística | 66 |
| 7.3 | <i>Problemas</i> | 70 |
| 8. | Tema avanzado: Límites sobre una posible no linealidad cuántica | 71 |
| 9. | Tema avanzado: no separabilidad (<i>entanglement</i>) | 72 |
| 10. | Física (sub)nuclear | 74 |
| 10.1 | Física nuclear: Colisiones de Rutherford y desintegración α | 74 |
| 10.2 | Partículas elementales | 77 |
| 10.3 | Oscilaciones de neutrinos | 81 |
| 10.4 | <i>Problemas</i> | 83 |
| 11. | Cosmología | 84 |
| 11.1 | Paradoja de Olbers | 85 |
| 11.2 | Cosmología relativista (=Relatividad General) | 85 |
| 11.3 | Historia térmica del universo | 89 |
| 11.4 | La radiación de fondo de microondas | 90 |
| 12. | Tema avanzado: Cosmología newtoniana | 92 |

1. Esquinas de la Física

Tal como la entendemos en los principios del siglo XXI, existen tres constantes dimensionales que determinan diferentes límites en los cuales existe una descripción de la naturaleza razonablemente precisa. Esas constantes son, la velocidad de la luz en el vacío, c ; la constante de Planck racionalizada, \hbar , y la constante de gravitación de Newton, G

$$\begin{aligned}c &= 3 \times 10^8 m/s \\ \hbar &\equiv \frac{h}{2\pi} \equiv 1.05 \times 10^{-34} J.s \\ G &\equiv 6.67 \times 10^{-11} m^3/kg.s^2\end{aligned}\tag{1.1}$$

1.1 Mecánica clásica no relativista

Son fenómenos que ocurren a velocidades mucho más pequeñas que la velocidad de la luz, involucrando acciones mucho más grandes que la constante de Planck, y que tienen lugar en una escala de distancias mucho mayor que la longitud de Planck:

$$\begin{aligned}\frac{v}{c} &\ll 1 \\ E.T &\gg \hbar \\ L &\gg L_p \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1.6 \times 10^{-35} m\end{aligned}$$

Esta es la física que corresponde a las leyes de Newton. Toda nuestra intuición, por pobre que ella sea, corresponde a experiencias en esta esquina.

1.2 Mecánica clásica relativista.

Son fenómenos que ocurren a velocidades no despreciables frente a la velocidad de la luz, involucrando acciones mucho más grandes que la constante de Planck, y que tienen lugar en una escala de distancias mucho mayor que la longitud de Planck:

$$\begin{aligned}\frac{v}{c} &\sim 1 \\ E.T &\ll \hbar \\ L &\gg L_p\end{aligned}$$

Los campos electromagnéticos entran en este apartado. La trayectorias de las partículas en los grandes aceleradores obedecen estas leyes con muy buena aproximación.

La *gravitación relativista* también entraría en este apartado. La teoría que mejor concuerda con los datos experimentales es la *relatividad general* de Einstein, que es la base del *modelo standard* de Cosmología.

1.3 Mecánica cuántica no relativista.

Son fenómenos que ocurren a velocidades mucho más pequeñas que la velocidad de la luz, involucrando acciones que ya no son mucho más grandes que la constante de Planck, y que tienen lugar en una escala de distancias mucho mayor que la longitud de Planck:

$$\frac{v}{c} \ll 1$$

$$E.T \sim \hbar$$

$$L \gg L_p$$

Toda la física atómica y nuclear, así como la física de la materia condensada entra en este apartado.

1.4 Mecánica cuántica relativista (es decir, teoría cuántica de campos y partículas elementales).

$$\frac{v}{c} \sim 1$$

$$E.T \sim \hbar$$

$$L \gg L_p$$

Este es el reino de la física de partículas elementales en aceleradores, o en cualesquiera situaciones en las que los campos gravitatorios no son muy intensos.

1.5 Gravedad cuántica

$$\frac{v}{c} \sim 1$$

$$E.T \sim \hbar$$

$$L \sim L_p$$

Este es el reino de la física de partículas elementales en presencia de campos gravitatorios intensos, tal y como se cree que existen en los agujeros negros o en la singularidad cosmológica inicial (el *big bang*). No existe una descripción satisfactoria de esta esquina. Quizás las cuerdas?

El objeto de este curso es introducir todo este panorama, que corresponde a física del siglo XX, en términos cuantitativos no triviales, aunque elementales. Las matemáticas se mantendrán en un mínimo compatible con el primer curso del grado.

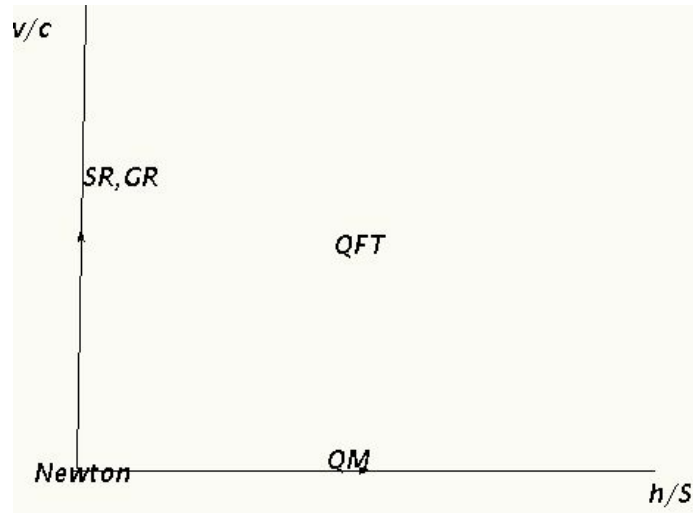


Figure 1: Esquinas de la Física.

1.6 Problemas

- Sabiendo que una bacteria tiene una longitud aproximada de una micra ($10^{-4}cm$), estimar si los efectos cuánticos serán o no importantes en su estudio. Y los efectos relativistas?
- La misma pregunta para un virus, donde la escala correspondiente es de 10 nano m $\sim 10^{-6}cm$.
- La misma pregunta en el caso del átomo de hidrógeno, sabiendo que la masa es aproximadamente $m_p \sim 10^{-24}g$ y $m_e \sim 10^{-27}g$, y que el radio de Bohr es del orden de $a_0 \sim 10^{-8}cm$.
- La misma pregunta para un núcleo, sabiendo que la escala de distancias es ahora un fermi=1 femto m= $10^{-13}cm$
- Y para un electrón que se mueve en el acelerador LEP del CERN a una velocidad de $2.9 \times 10^{10}cm/s$?

2. Mecánica clásica relativista.

2.1 Principio de relatividad de Galileo

Las leyes de Newton son invariantes en forma en todos los sistemas de referencia inerciales (SRI). Estos sistemas se transforman unos en otros mediante rotaciones constantes, traslaciones también constantes y transformaciones de Galileo puras, esto es, movimiento uniforme de uno respecto de otro. En ecuaciones, las coordenadas en el SRI S' respecto de las coordenadas en el SRI S , serán

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= (R\vec{r}) + \vec{v}t + \vec{a} \\ t' &= t \end{aligned} \quad (2.1)$$

siendo R una matriz de rotación. Explícitamente,

$$(x')^i = \sum_j R^i_j x^j + v^i t + a^i$$

y la matriz R^i_j es tal que $\sum_{ij} \delta_{ij} R^i_k R^j_l = \delta_{kl}$.

Invariancia Galileo quiere decir que

$$\ddot{x}^i = 0 \Rightarrow (\ddot{x}')^i = 0$$

El experimento de Michelson-Morley proporciona una evidencia de que la ley newtoniana de adición de velocidades no se aplica a la velocidad de la luz.

2.2 El principio de relatividad de Einstein.

Mucho más influyente que el experimento fue para Einstein (así como para Lorentz y Poincaré) el hecho de que las ecuaciones de Maxwell son incompatibles con la relatividad galileana. Partimos de la ley de la inducción de Faraday

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.2)$$

y usamos la ley de Ampère en ausencia de corriente

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.3)$$

Teniendo en cuenta que en el vacío la ley de Gauss implica que $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$, así como $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ se obtiene sin dificultad que

$$\left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right) \vec{E} = 0 \quad (2.4)$$

Es decir, que en el vacío el campo eléctrico satisface la ecuación de ondas de d'Alambert correspondiendo a una velocidad

$$c \equiv \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}.$$

Efectivamente, tomando el rotacional de Faraday,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Siendo muy explícitos,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= \\ &= \left(\partial_2(\vec{\nabla} \times \vec{E})_3 - \partial_3(\vec{\nabla} \times \vec{E})_2, \partial_3(\vec{\nabla} \times \vec{E})_1 - \partial_1(\vec{\nabla} \times \vec{E})_3, \partial_1(\vec{\nabla} \times \vec{E})_2 - \partial_2(\vec{\nabla} \times \vec{E})_1\right) = \\ &= (\partial_2(\partial_1 E_2 - \partial_2 E_1) - \partial_3(\partial_3 E_1 - \partial_1 E_3), \\ &\quad \partial_3(\partial_2 E_3 - \partial_3 E_2) - \partial_1(\partial_1 E_2 - \partial_2 E_1), \\ &\quad \partial_1(\partial_3 E_1 - \partial_1 E_3) - \partial_2(\partial_2 E_3 - \partial_3 E_2)) \end{aligned} \quad (2.5)$$

La ecuación de Gauss permite substituir

$$\partial_2 E_2 + \partial_3 E_3 = -\partial_1 E_1$$

etc, lo que conduce sin dificultad a la fórmula citada.

Manipulaciones análogas demuestran que el campo magnético satisface la *misma* ecuación. Evidentemente no es el momento de ponerse a analizar la ecuación de ondas. Pero es fácil verificar que el *ansatz* de ondas sinusoidales, esto es

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

(donde \vec{E}_0 y \vec{B}_0 son dos vectores constantes) es una solución de la ecuación de ondas siempre que $\omega^2 = c^2 k^2$ (lo cual implica que su velocidad es precisamente igual a la constante c que aparece en las ecuaciones de Maxwell). Las ecuaciones $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ y $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ implican que

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = \vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0 \quad (2.7)$$

(es decir, que estos dos vectores constantes son *transversos* a la onda). Las otras ecuaciones se traducen en

$$\begin{aligned} \vec{k} \times \vec{E}_0 &= -\omega \vec{B}_0 \\ c^2 \vec{k} \times \vec{B}_0 &= \omega \vec{E}_0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

explicitando que los campos eléctrico y magnético son mutuamente ortogonales.

Claramente en otro sistema inercial, en el que

$$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{v}t \quad (2.9)$$

Nuestra solución sinusoidal se transforma en¹

$$\cos\left(\left(\omega + \vec{k}\vec{v}\right)t - \vec{k}\vec{x}'\right)$$

y

$$\omega = kc \Rightarrow \omega + \vec{k}\vec{v} \neq kc$$

LAS ECUACIONES DE MAXWELL NO SON INVARIANTES GALILEO

Einstein postula en 1905 que los sistemas de referencia inerciales (SRI) son completamente equivalentes desde el punto de vista físico, incluyendo el electromagnetismo de Maxwell. Esto implica que la velocidad de la luz es la misma en todos los SRI, y por consiguiente la regla newtoniana de adición de velocidades no se aplica. Llamaremos *relatividad galileana* al postulado de equivalencia de las leyes de Newton en todos los SR. Esta física es la física galileana o newtoniana.

Las transformaciones de coordenadas de un SRI a otro no pueden ser las galileanas. En todos los ejemplos que vamos a estudiar a continuación consideraremos dos SRI, uno que llamaremos S , y otro que se desplaza con velocidad constante respecto del primero, y que llamaremos S' . Esta relación es recíproca, en el sentido de que el SRI S se desplaza respecto al SRI S' con velocidad $-v^2$; **pero la mayoría de las observaciones no lo son**. En el estudio de la relatividad especial es esencial el pensar cuidadosamente cómo están formuladas las preguntas que se le hacen al observador, fundamentalmente qué variables están fijas en qué SRI.

¹Dada una función arbitraria,

$$f'(t, x'_i) \equiv f(t, x_i - v_i t)$$

$$\partial'_i f' = \partial_i f$$

$$\partial_t f' = \partial_t f - \sum_{i=1}^3 v^i \partial_i f$$

$$\partial_t^2 f' = \left(\partial_t - \sum_{i=1}^3 v^i \partial_i\right)^2 f = \partial_t^2 f - 2 \sum_{i=1}^3 v^i \partial_i \partial_t f + \sum_{i=1}^3 v^i \partial_i \sum_{j=1}^3 v^j \partial_j f$$

de forma que la nueva ecuación de onda se escribe

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta - 2 \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} \vec{\nabla} + (\vec{v} \vec{\nabla})(\vec{v} \vec{\nabla})\right) f = 0$$

²Siempre podemos escoger el eje OX en la dirección de esa velocidad

Un frente de ondas

$$\vec{x}^2 = c^2 t^2$$

no es invariante frente al cambio

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{u}t$$

Obsérvese que implícitamente hemos supuesto que

$$t' = t$$

La manera más fácil de ver esto es escoger

$$\vec{u} = u\vec{e}_1$$

2.3 Simultaneidad

Estudiemos el concepto de *simultaneidad*. Llamaremos *reloj* a todo sistema periódico. Podemos suponer un retículo tridimensional dotado de espejos. Comenzando por un punto arbitrario, definimos distancia a lo largo de los ejes que pasan por el punto O como

$$d = \frac{1}{2}c\Delta t$$

siendo Δt el tiempo empleado por la luz en llegar de nuevo a O después de ser reflejada por el espejo situado en el punto en cuestión. Si ponemos un reloj en O en la hora

$$t = 0$$

podemos asociar al punto d un tiempo d/c . De esta forma hemos sincronizado todos los relojes asociados a los puntos del retículo, y podemos asociar cuatro coordenadas a cada *suceso*:

$$(ct, x, y, z) \tag{2.10}$$

2.4 Medida de longitudes.

Medidas de longitudes han de ser simultáneas.

En el sistema en el que el cuerpo a medir está en reposo, se puede medir la longitud a partir del tiempo que tarda en llegar una señal luminosa desde el punto medio, $t = t_A = t_B$, y diremos que

$$L = 2ct$$

Pero en sistema S' , en el que el objeto se está moviendo con velocidad v , el extremo b se acerca a la luz, mientras que el extremo a se aleja:

$$L/2 - vt'_b = ct'_b$$

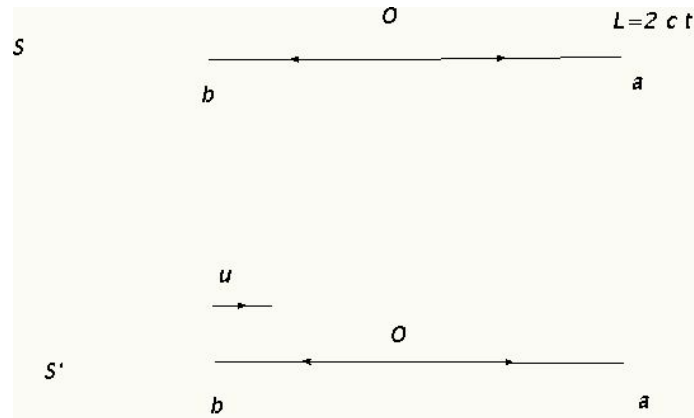


Figure 2: Medida de longitud.

y

$$L/2 + vt'_a = ct'_a$$

esto es,

$$t'_a \neq t'_b$$

Dos sucesos que son simultáneos en el SR S no lo son en el SR S' .

La diferencia

$$t'_a - t'_b = L \frac{v}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

es proporcional a la velocidad en unidades de c .

DISCUSIÓN

La clave de todo está en la hipótesis de que la velocidad de la luz es la misma en todos los SR. El mismo cálculo usando la ley galileana de adición de velocidades sería:

$$L/2 - vt'_b = (c - v) t'_b$$

y

$$L/2 + vt'_a = (c + v) t'_a$$

es decir que, en la física galileana

$$t'_b = t'_a = t$$

2.5 Dilatación de tiempos y contracción de longitudes

Supongamos un reloj en el SRI S que cuenta las veces que un fotón se refleja entre

dos espejos. El tiempo que tarda entre dos señales de ida y vuelta es

$$T = \frac{2L}{c}$$

Este mismo reloj es observado ahora desde el SRI S' . Todo sucede como si el reloj se estuviera moviendo con respecto al segundo observador con velocidad opuesta. El camino que tiene que recorrer ahora el fotón es mayor:

$$\frac{cT'}{2} = \sqrt{L^2 + \left(v\frac{T'}{2}\right)^2}$$

Esto conduce a

$$T' = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > T$$

Este tipo de relojes es *universal* en el sentido de que se puede sincronizar con cualquier otro. En los laboratorios de física de partículas, como el CERN, se consiguen velocidades tales que el factor

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \sim 10^6$$

Esto tiene un efecto observable en la vida media de los μ , que en el SRI propio del muón es del orden de

$$\tau(\mu) \sim 2.197 \times 10^{-6} s \quad (2.11)$$

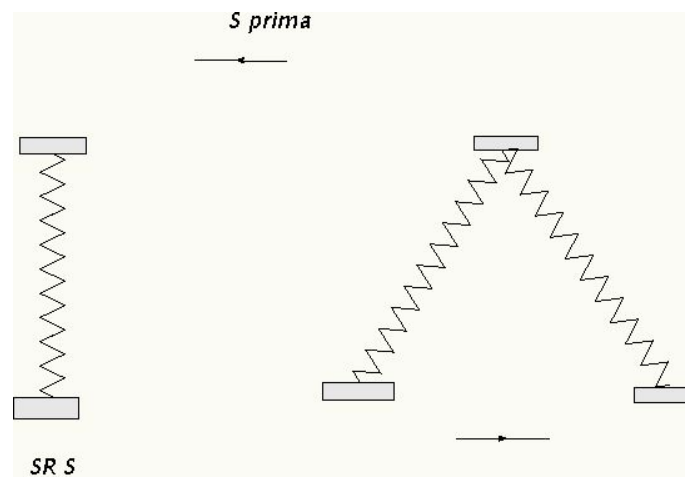


Figure 3: Fotones reflejados.

Contracción de longitudes

El tiempo de llegada para el fotón transverso (respecto de la velocidad relativa de los dos SRI) será, de acuerdo con nuestro análisis anterior,

$$T' \equiv \frac{2L}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

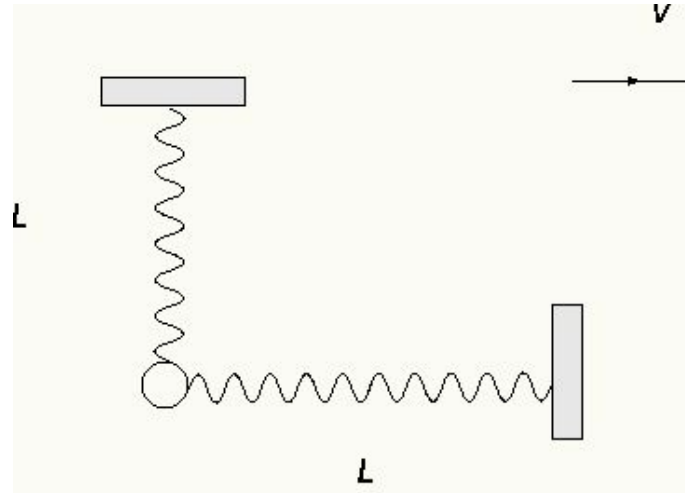


Figure 4: Medida de longitudes.

En cuanto al fotón longitudinal (respecto de la velocidad relativa de los dos SRI)

$$ct'_R = L' + vt'_R$$

y

$$ct'_L = L' - vt'_L$$

de donde se sigue

$$t'_L + t'_R = \frac{2L'}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Este tiempo *ha de ser igual a T'* . En caso contrario existiría una ambigüedad inaceptable. En todo caso, este es nuestro criterio de medida de longitudes.

Ergo

$$L' = L \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < L$$

2.6 Efecto Doppler

Veamos primero el tratamiento no relativista (galileano).

Las ondas unidimensionales que se propagan con velocidad v_s , son soluciones de la ecuación de ondas (la misma que ya nos hemos encontrado como consecuencia de

las ecuaciones de Maxwell en el vacío)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \psi(t, x) = 0$$

La *frecuencia angular* está definida en términos del período, T

$$\omega \equiv 2\pi\nu \equiv 2\pi \frac{v_s}{\lambda} \equiv \frac{2\pi}{T}$$

y el llamado *número de ondas* a partir de la *longitud de onda*

$$k \equiv \frac{2\pi}{\lambda}$$

En principio en una onda complicada (*paquete de ondas*) hat que distinguir entre dos velocidades, la llamada *velocidad de fase*

$$v_p \equiv \frac{\omega}{k}$$

y la *velocidad de grupo*

$$v_g \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

Consideremos una onda plana (cuyas parte real e imaginaria con senos y cosenos)

$$\psi = e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \equiv \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) + i \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t)$$

En otro SRI galileano asociado a un observador que se mueve con una cierta velocidad (que no tiene nada que ver con la velocidad de la onda)

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t$$

se escribirá

$$\psi = e^{i(\vec{k}\vec{x}' - (\omega - \vec{v}\vec{k})t)}$$

Ergo

$$\omega' = \omega - \vec{v}\vec{k}$$

La frecuencia disminuye al alejarnos de la fuente.

Cuáles serán las correcciones relativistas?

Hay dos efectos: el primero, que el período propio aumenta debido a la dilatación de tiempos:

$$\frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Pero es que además la distancia que ha de recorrer cada *pulso* disminuye en un factor

$$v \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

El intervalo entre pulsos que verá el observador será

$$\tau \equiv \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v}{c} \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \tau_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}$$

Las frecuencias $\nu \equiv \frac{1}{\tau}$ obedecerán la ley inversa. Las longitudes de onda $\lambda \equiv \frac{c}{\nu} \equiv c\tau$ la misma ley:

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}$$

Claramente $\lambda < \lambda_0$ si $v > 0$ (es decir, si el emisor se está acercando al observador). Esto provoca entonces un corrimiento hacia el azul.

El caso contrario es cuando $v < 0$, cuando el emisor se está alejando del observador, en cuyo caso $\lambda > \lambda_0$ y se produce un corrimiento hacia el rojo.

En su momento (cuando estudiemos Astrofísica y Cosmología) veremos que este efecto es el que permite establecer la escala cósmica de distancias.

2.7 Adición relativista de velocidades

Según la lógica del apartado anterior en el caso de que haya dos observadores,

$$\nu_1 = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{v_{10}}{c}}{1 + \frac{v_{10}}{c}}}$$

y además

$$\nu_2 = \nu_1 \sqrt{\frac{1 - \frac{v_{21}}{c}}{1 + \frac{v_{21}}{c}}}$$

La *definición* más natural de v_{20} en este contexto es:

$$\nu_2 = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{v_{20}}{c}}{1 + \frac{v_{20}}{c}}} = \left(\nu_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{v_{10}}{c}}{1 + \frac{v_{10}}{c}}} \right) \sqrt{\frac{1 - \frac{v_{21}}{c}}{1 + \frac{v_{21}}{c}}}$$

lo cual conduce a

$$v_{20} = \frac{v_{10} + v_{21}}{1 + \frac{v_{10} v_{21}}{c^2}}$$

Cuando las dos velocidades son mucho más pequeñas que la velocidad de la luz,

$$v_{20} |_{Gal} = v_{10} + v_{21}$$

Asimismo, cuando una de las dos velocidades es la velocidad de la luz, por ejemplo, $v_{10} = c$

$$v_{20} = \frac{c + v_{21}}{1 + \frac{v_{21}}{c}} = c$$

de forma que recuperamos el *postulado* de que la velocidad de la luz es la velocidad máxima de propagación de las interacciones. Naturalmente esto no demuestra nada, pero al menos es consistente.

2.8 Transformaciones de Lorentz

Claramente los postulados de Einstein implican que el intervalo ha de ser constante. Si admitimos que las coordenadas transversas a la dirección del movimiento son inertes, entonces ha de ser algo del estilo

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

con

$$\begin{aligned} y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

y tal que

$$c^2 (t')^2 - (x')^2 = c^2 t^2 - x^2$$

La solución más general es

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \chi & \sinh \chi \\ \sinh \chi & \cosh \chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

Esto se parece mucho a una rotación ordinaria, que sería

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \tau & \sin \tau \\ \sin \tau & \cos \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

y satisfaría

$$c^2 (t')^2 + (x')^2 = c^2 t^2 + x^2$$

Por eso a la de Lorentz *pura* (*boost* en la literatura anglosajona) se la llama *rotación hiperbólica*.

No hay ninguna manera de satisfacer el principio de relatividad de Einstein manteniendo el *tiempo universal*, $t' = t$.

Esto es claro, ya que si $\cosh \chi = 1$ entonces $\sinh \chi = 0$.

³Excepción hecha de las rotaciones, que pertenecían al grupo de Galileo, y también al grupo de Lorentz. Están caracterizadas por

$$\begin{aligned} t' &= t \\ (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

Y cuál es el significado físico del parámetro χ ?

Consideremos el punto

$$x' = y' = z' = 0$$

Esto corresponde a

$$\tanh \chi = -\beta \equiv -\frac{v}{c} \equiv -\frac{x}{ct}$$

Y dada la identidad $\cosh^2 \chi - \sinh^2 \chi = 1$,

$$\cosh \chi = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \chi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \equiv \gamma$$

así como

$$\sinh \chi = \frac{-\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \equiv -\beta\gamma$$

y las transformaciones de Lorentz se escriben

$$ct' = \gamma(ct - \beta x)$$

$$x' = \gamma(-\beta ct + x)$$

El origen de coordenadas S' se está moviendo hacia la porción positiva del eje OX cuando $\beta > 0$.

Naturalmente, las transformaciones con β y $-\beta$ son inversas la una de la otra, ya que

$$\begin{pmatrix} \cosh \chi & \sinh \chi \\ \sinh \chi & \cosh \chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \chi & -\sinh \chi \\ -\sinh \chi & \cosh \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En términos de la notación $\gamma - \beta$

$$ct = \gamma(ct' + \beta x')$$

$$x = \gamma(x' + \beta ct')$$

Efectivamente,

$$ct = \gamma(\gamma(ct' - \beta x') + \beta\gamma(-\beta ct' + x')) = ct\gamma^2(1 - \beta^2) = ct$$

$$x = \gamma\left(\gamma(-\beta ct' + x') + \beta c\gamma\left(t' - \frac{\beta}{c}x'\right)\right) = x\gamma^2(1 - \beta^2) = x$$

Es conveniente reflexionar sobre los siguientes hechos de la vida:

- Si $\Delta x = 0$; esto es, estamos considerando el mismo punto en el SRI S (que no en el S') entonces

$$\Delta t' = \gamma\Delta t$$

Esta es la dilatación de tiempos.

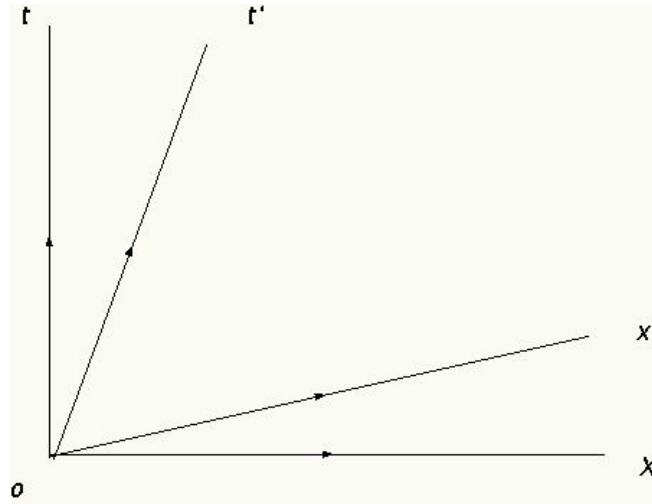


Figure 5: Diagramas espaciotemporales.

- Si $\Delta t' = 0$; esto es, estamos considerando el mismo instante en el SRI S' (que no en el S) entonces

$$c\Delta t = -\beta\Delta x$$

\therefore

$$\Delta x' = \gamma (1 - \beta^2) \Delta x = \frac{\Delta x}{\gamma}$$

Esta es la contracción de longitudes.

- Veamos ahora cómo se transforman las velocidades $u_x \equiv \frac{dx}{dt}$ etc.

$$\begin{aligned} u'_x &\equiv \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - vdt)}{\gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \\ u'_y &\equiv \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)} = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)} \\ u'_z &\equiv \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)} = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Obsérvese que **NO ES CIERTO** que las velocidades transversas en los sistemas SRI y SRI' sean iguales.

- Reobtengamos ahora la ley de adición de velocidades.

$$\begin{aligned} t_1 &= \gamma_1\left(t - \frac{v_1}{c^2}x\right) \\ x_1 &= \gamma_1(x - v_1t) \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} t_2 &= \gamma_2\left(t_1 - \frac{v_2}{c^2}x_1\right) = \gamma_2\left(\gamma_1\left(t - \frac{v_1}{c^2}x\right) - \frac{v_2}{c^2}\gamma_1(x - v_1t)\right) = \\ &= \gamma_1\gamma_2\left(t\left(1 + \frac{v_1v_2}{c^2}\right) - x\left(\frac{v_1 + v_2}{c^2}\right)\right) \\ x_2 &= \gamma_2(x_1 - v_2t_1) = \gamma_2\left(\gamma_1(x - v_1t) - v_2\gamma_1\left(t - \frac{v_1}{c^2}x\right)\right) = \\ &= \gamma_1\gamma_2\left(x\left(1 + \frac{v_1v_2}{c^2}\right) - (v_1 + v_2)t\right) \end{aligned}$$

De forma que para interpretar la composición de dos boosts colineales como otro boost es necesario que

$$\begin{aligned} \gamma_{12}v_{12} &\equiv \gamma_1\gamma_2(v_1 + v_2) \\ \gamma_{12} &= \gamma_1\gamma_2\left(1 + \frac{v_1v_2}{c^2}\right) \end{aligned}$$

Esto implica

$$v_{12} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1v_2}{c^2}} \equiv v_1 \text{⊕} v_2$$

(ya que entonces $\frac{1}{\gamma_{12}^2} = \frac{1}{\gamma_1^2} \frac{1}{\gamma_2^2} \frac{1}{(1 + \frac{v_1v_2}{c^2})^2}$).

Es un hecho de la vida que

$$v_2 = v_{12} \text{⊕} -v_1$$

Efectivamente

$$\frac{v_{12} - v_1}{1 - \frac{v_{12}v_1}{c^2}} = \frac{\frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1v_2}{c^2}} - v_1}{1 - \frac{v_1}{c^2} \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1v_2}{c^2}}} = \frac{c^2v_2(1 - \frac{v_1^2}{c^2})}{c^2(1 - \frac{v_1^2}{c^2})} = v_2$$

2.9 Tiempo propio

Dado como hemos construido las transformaciones de Lorentz, la cantidad

$$(\Delta\tau)^2 \equiv (\Delta t)^2 - \sum \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}{c^2}$$

es invariante, es decir, toma el mismo valor en todos los SRI.

Hay varias observaciones que se pueden hacer en este momento.

- El *tiempo propio* es el que mide un observador que se mantiene en el mismo punto del espacio, dado que entonces

$$\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$$

y entonces

$$\Delta\tau = \Delta t$$

- Hay sucesos tales que el cuadrado del tiempo propio es negativo, como por ejemplo los que tienen lugar en el mismo instante (por lo que $\Delta t = 0$) en diferentes puntos del espacio. Diremos que esos sucesos están separados *espacialmente*. Por el contrario, cuando el cuadrado del tiempo propio es positivo, diremos que los sucesos están separados *temporalmente*.
- Cuando $\Delta\tau = 0$ los sucesos están *sobre el cono de luz*

2.10 Energía y momento relativistas

Queremos definir un momento que sea conservado, en particular en una colisión. Pero la fórmula **no** puede ser simplemente $\vec{p} = m\vec{v}$, por que eso lleva a la adición galileana de velocidades, que sabemos que es falsa. Vamos a hacer el *ansatz*

$$\vec{p} = mf(v)\vec{v}$$

Es hasta cierto punto una cuestión de lenguaje⁴

⁴Para determinar la función $f(v)$ también se puede utilizar un argumento ingenioso que se puede encontrar en el curso de Feynman. Consideremos una colisión entre partículas idénticas, que se mueven la una hacia la otra con la misma velocidad, de forma que el momento total se anula

$$\vec{p} = \vec{0}$$

En un SRI adecuado (después de efectuar una cierta rotación), la colisión será entonces tal y como se indica en la figura.

Ahora estudiamos la colisión en otro SRI en el cual la primera componente de la velocidad de la partícula 1 se anula. Esto corresponde a la segunda figura, donde se ha representado por u la componente horizontal de la partícula 2, y por w la componente vertical de la partícula 1.

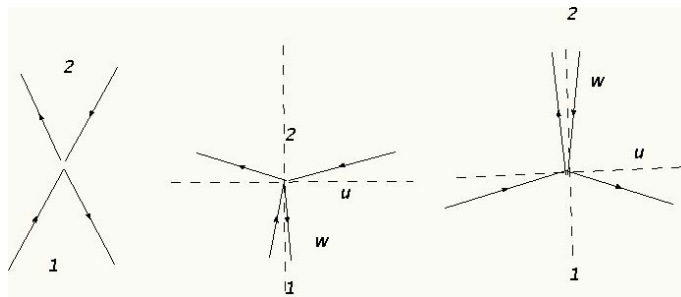


Figure 6: Análisis de una colisión.

el llamar a $m f(v)$ masa, o bien reservar ese nombre para m . En el primer caso, la masa depende de la velocidad.⁵ Es deseable además que al cambiar de SRI el momento se transforme de la misma manera que las coordenadas. Ello es automático

Tendremos

$$\begin{aligned} v_h &\equiv u = v \cos \alpha \\ v_v &= v \sin \alpha = u \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{v^2 - u^2} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Si supiéramos lo que vale v_v podríamos aplicar conservación de la segunda componente del momento.

Si ahora miramos esta misma colisión desde un tercer SRI que se mueve hacia los ejes OX negativos con velocidad u , obtendremos la tercera figura. Pero hemos ya visto que en una circunstancia similar

$$v_v = u \operatorname{tg} \alpha = \frac{w}{\gamma(u)}$$

Igualando la variación de la segunda componente del momento para las dos partículas,

$$2m f(w) w = 2m f(v) \frac{w}{\gamma(u)}$$

Es decir, que

$$\gamma(u) f(w) = f(v)$$

Por otra parte

$$\sqrt{v^2 - u^2} = \frac{w}{\gamma(u)}$$

esto es

$$v^2 = u^2 + w^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = u^2 + w^2 - \frac{u^2 w^2}{c^2}$$

Es facil ver que la ecuacion anterior se satisface con

$$f(v) = \gamma(v)$$

Es decir, que para mantener la conservación del momento lineal, hemos de suponer que

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

que es lo mismo que habíamos obtenido anteriormente.

⁵Para determinar $f(v)$ existe un argumento sencillo debido a Rindler. Supongamos una colisión muy suave (al final haremos tender la velocidad a cero) de dos partículas, P_1 y P_2 . Llamaremos S_1

si definimos

$$\vec{p} \equiv m \frac{d\vec{x}}{d\tau}$$

Es obvio que

$$\vec{p} \equiv m \frac{d\vec{x}}{dt} \frac{dt}{d\tau}$$

pero

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\frac{d\tau}{dt}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv \gamma$$

de forma que

$$\vec{p} \equiv m\gamma\vec{v}$$

es muy importante NO confundir \vec{p} con $m\vec{v}$

siendo

$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{x}}{dt}$$

Si efectuamos una transformación de Lorentz en la que

$$\begin{aligned} t' &= \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \\ x' &= \gamma (x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \tag{2.15}$$

y S_2 a los SRI en que están en reposo antes de la colisión. Si definimos el eje x como el de colisión, es evidente que por simetría, la velocidad transversa de ambas *en sus respectivos SRI* ha de ser la misma, u_T . Es decir, que después del choque, la velocidad de P_1 en S_1 será (u_x^1, u_T) , y la velocidad de P_2 en S_2 será (u_x^2, u_T) , con la misma u_T .

Ahora bien, la velocidad de P_2 respecto de S_1 será

$$\frac{u_T}{\gamma(v) \left(1 + \frac{u_x^2 v}{c^2} \right)}$$

La conservación del momento transverso en el sistema S_1 nos dice que

$$0 = p_{P_1}^T + p_{P_2}^T = m(0)u_T - m(v) \frac{u_T}{\gamma(v) \left(1 + \frac{u_x^2 v}{c^2} \right)}$$

donde la masa de P_1 es la masa en reposo, mientras que la masa de P_2 corresponde a la masa en movimiento. Si ahora hacemos

$$\lim_{u_x^2 \rightarrow 0}$$

se obtiene que

$$m_{P_2} = \gamma(v)m$$

entonces, multiplicando por m y derivando con respecto al tiempo propio,

$$\begin{aligned} E' &= \gamma(E - vp_x) \\ p'_x &= \gamma\left(p_x - v\frac{E}{c^2}\right) \\ p'_y &= p_y \\ p'_z &= p_z \end{aligned} \tag{2.16}$$

ya que vamos a ver en un momento que

$$E \equiv mc^2 \frac{dt}{d\tau} = mc^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{c^2}}}$$

representa la energía cinética total de la partícula.

Es importante darse cuenta de que hay DOS velocidades distintas involucradas: la asociada al momento \vec{p} y la de la TLP, v . Aunque en este ejemplo sencillo las dos velocidades son colineales a lo largo del eje OX , conceptualmente NO TIENEN NADA QUE VER

Una de las consecuencias más importantes de la RE es que, a diferencia de la mecánica galileana, permite describir sin dificultad partículas de masa nula, como el fotón. Veamos cómo es ello posible.

Recordemos que en mecánica newtoniana, donde

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

el trabajo realizado será

$$dW \equiv d\vec{r}\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v}dt = d\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2\right) \equiv \frac{d}{dt}Tdt$$

Cuando la fuerza externa deriva de un potencial

$$\vec{F} \equiv -\vec{\nabla}V$$

$$dW = -\vec{\nabla}V.d\vec{r} \equiv -\frac{d}{dt}Vdt$$

de forma que

$$\frac{d}{dt}(E \equiv T + V) = 0$$

En el caso relativista escribiremos:

$$d\vec{r}\frac{d}{dt}\vec{p} = dt\vec{v}\frac{d}{dt}\vec{p} = dt\vec{v}\frac{d}{dt}(m\gamma\vec{v}) = dt\vec{v}\dot{\vec{v}}\gamma^3 = dt\frac{d}{dt}(mc^2\gamma)$$

De forma que la *energía cinética relativista* será

$$E = mc^2\gamma \sim mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) + \dots = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots \quad (2.17)$$

Claramente, para un objeto relativista,

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{E}c^2$$

Otro hecho fácil de verificar es que

$$E \equiv mc^2\gamma = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

ya que

$$c^2m^2(\gamma^2v^2 + c^2) = m^2c^2\left(c^2 + \frac{v^2}{1-\beta^2}\right) = m^2c^2\frac{c^2}{1-\beta^2} = m^2c^4\gamma^2$$

Las **partículas de masa nula** están entonces definidas por la relación

$$E = pc$$

donde el momento no está relacionado con la velocidad, que es siempre igual a c , sino que se obtiene, como veremos, de los postulados de la mecánica cuántica

$$p = \frac{\hbar\omega}{c}$$

En resumen, para partículas masivas

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$$

Para partículas de masa nula

$$E^2 - p^2c^2 = 0$$

Si existiesen, a las partículas con

$$E^2 - p^2c^2 = -m^2c^4$$

se las llamaría taquiones, y tendrían velocidad superior a la de la luz. Hay argumentos muy convincentes en contra de su existencia⁶.

⁶Consideremos otro experimento ideal muy interesante.

Si emitimos en un vagón de tren de masa M un fotón con energía E en A , que será luego absorbido en B . El fotón tendrá un momento $p = \frac{E}{c}$, y por conservación del momento, el tren se moverá una distancia D tal que

$$Mv = \frac{E}{c}$$

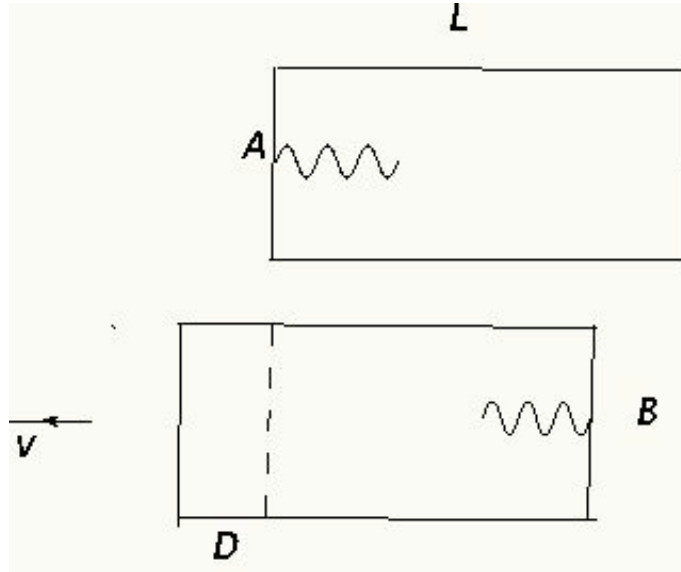


Figure 7: Equivalencia masa/energía.

Siendo T el tiempo que tarda el fotón en ir del punto A al punto B ,

$$cT = L - vT \quad \therefore T = \frac{L}{c + v} = \frac{L}{c + \frac{E}{Mc}}$$

Y durante ese tiempo el vagón ha viajado una distancia

$$D = vT = \frac{E}{Mc} \frac{L}{c + \frac{E}{Mc}} = \frac{EL}{E + Mc^2}$$

Ahora bien, el centro de masas ha de permanecer constante. La única manera en la que esto puede suceder es que la energía del fotón sea equivalente a una cierta masa, que llamaremos μ . Inicialmente está en

(tomando el origen en el punto A)

$$X = \frac{\mu \cdot 0 + M \cdot \frac{L}{2}}{\mu + M} = \frac{L}{2} \frac{M}{\mu + M}$$

Y cuando el fotón llega al punto B ,

$$X = \frac{\mu(L - D) + M \left(\frac{L}{2} - D\right)}{\mu + M}$$

Igualando, se obtiene

$$\frac{L}{2} \frac{M}{\mu + M} = \mu(L - D) + M \frac{L - 2D}{2}$$

de donde

$$\mu = \frac{MD}{L - D} = \frac{MEL}{E + Mc^2} \frac{L}{L - \frac{EL}{E + Mc^2}} = \frac{MEL}{E + Mc^2} \frac{E + Mc^2}{EL + Mc^2L - EL} = \frac{E}{c^2}$$

2.11 El sistema de centro de momento (CDM)

Veamos cómo definir el SRI *centro de masas* (CDM) en casos sencillos. Por ejemplo, supongamos una colisión de dos partículas de masa m , una de las cuales está en reposo. A esta configuración se la llama SRI *laboratorio* (SL). Si hacemos un boost en la dirección del momento de la partícula incidente, los nuevos momentos serán

$$\begin{aligned} E'_1 &= \gamma(E_1 - vp_x) \\ p'_x &= \gamma\left(p_x - \frac{\beta}{c}E_1\right) \\ p'_y &= p_y = 0 \\ p'_z &= p_z = 0 \end{aligned} \tag{2.18}$$

y los de la segunda partícula, la que estaba en reposo,

$$\begin{aligned} E'_2 &= \gamma mc^2 \\ k'_x &= -\gamma \frac{\beta}{c} mc^2 \\ k'_y &= k_y = 0 \\ k'_z &= k_z = 0 \end{aligned} \tag{2.19}$$

El momento final total en la dirección OX será

$$p_x^T \equiv \gamma\left(p_x - \frac{\beta}{c}E_1\right) - \frac{\beta}{c}mc^2$$

que se anula si

$$\beta = \frac{p_x c}{E_1 + mc^2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + 1} \beta_1$$

En un caso un poco más general, supongamos dos partículas con momentos relativistas \vec{p}_1 y \vec{p}_2 . Su momento inicial total es

$$\vec{p}_{in} \equiv \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \equiv \vec{p} + \vec{k}$$

Existirá un SRI tal que en él el momento inicial total sea nulo? A ese sistema le llamamos CDM. Vamos a empezar por el caso sencillo en el que los dos momentos iniciales son paralelos. Frente a una transformación de Lorentz en la dirección de los momentos (que llamaremos eje OX)

$$\begin{aligned} p'_x &= \gamma\left(p_x - \frac{v}{c^2}E_1\right) & k'_x &= \gamma\left(k_x - \frac{v}{c^2}E_2\right) \\ p'_y &= p_y = 0 & k'_x &= k_x = 0 \\ p'_z &= p_z = 0 & k'_z &= k_z = 0 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Es claro que si queremos que

$$p'_x + k'_x = 0$$

es necesario que

$$v = \frac{p_x + k_x}{E_1 + E_2}$$

El caso general es un buen ejercicio para entretenerse utilizando los datos del tema avanzado.

3. Tema avanzado: transformaciones de Lorentz

Las transformaciones de Lorentz puras se pueden escribir como

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{c^2}) \\ \vec{r}' &= \vec{r} + (\gamma - 1)(\vec{r} \cdot \vec{v}) \frac{\vec{v}}{v^2} - \gamma \vec{v} t \end{aligned} \quad (3.1)$$

Existe una descomposición canónica debida a Wigner: toda transformación $L \in SO(3, 1)$ se puede escribir como $L = R_L B_{\vec{n}} R_R$, donde R_L y R_R son dos rotaciones ordinarias de $SO(3)$, y $B_{\vec{n}}$ es una transformación de Lorentz pura en la dirección del eje \vec{n} .

Una consecuencia sencilla, que demostraremos explícitamente, es que todas las transformaciones de Lorentz puras son conjugadas, y se pueden escribir como:

$$B_{\vec{n}'} = R B_{\vec{n}} R^{-1} \quad (3.2)$$

donde $R \in SO(3)$ define la dirección \vec{n}' a partir de \vec{n} : $n'^i = \sum_j R^i_j n^j$. Esto implica que todas las transformaciones de Lorentz puras se pueden definir a partir de una fija (que se puede escoger como B_x) y de una rotación.

Efectivamente, partimos de la rotación R

$$x'^i = \sum_j R^{(-1)i}_j x^j = \sum_j R_{ji} x^j \quad (3.3)$$

de forma que $B_{\vec{n}} R^{-1}$ se escribirá:

$$\begin{aligned} \vec{r}'' &= \vec{r}' + (\gamma - 1)(\vec{r}' \cdot \vec{n}) \vec{n} + \gamma v t \vec{n} \\ t'' &= \gamma(t + \frac{v}{c^2}(\vec{n} \cdot \vec{r}')) \end{aligned} \quad (3.4)$$

y $R B R^{-1}$,

$$\begin{aligned} \vec{r}''' &= R \cdot \vec{r}'' + (\gamma - 1)(\vec{r}'' \cdot \vec{n}) R \vec{n} + \gamma v t R \vec{n} \\ t''' &= \gamma(t + \frac{v}{c^2}(\vec{n} \cdot \vec{r}')) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Y el resultado se sigue del hecho de que

$$\vec{n} \cdot \vec{r}'' = \vec{n}' \cdot \vec{r}' = \sum_{ij} n^i R_{ji} x^j \quad (3.6)$$

así como de que

$$(\vec{r}'' \cdot \vec{n}) R \vec{n} = \sum_{jkl} R_{jk} x^j n^k n^l R_{il} = (\vec{r}' \cdot \vec{n}') \vec{n}' \quad (3.7)$$

4. Qué significa decir que algo es invariante frente al grupo de Lorentz, y por qué es esto importante?

Sabemos que frente a una rotación de los ejes coordenados en el plano, un vector bidimensional se transforma según

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Es claro que la condición

$$v_2 = 0$$

NO implica la condición

$$v'_2 = 0$$

Decimos que la condición $v_2 = 0$ no es invariante bajo rotaciones bidimensionales

Análogamente, dado un vector arbitrario en \mathbb{R}^3 , \vec{V} , es evidente que la ecuación

$$V_3 = 0 \quad (4.2)$$

no es invariante bajo rotaciones. Qué quiere decir esto? Pues que si la tercera componente de \vec{V} es nula en un cierto sistema de coordenadas, no tiene porqué serlo en otro definido por una rotación respecto del primero.

Los tensores son cantidades que se definen precisamente por la condición de que se transformen de forma lineal y homogénea con respecto al grupo (en este caso $SO(3)$).

La condición de que *todas* las componentes de un tensor se anulen, esa sí que es una condición invariante bajo rotaciones, ya que las componentes en otro sistema de referencia son combinaciones lineales de las componentes en el sistema de referencia inicial. Y ésto independientemente de la cantidad de índices libres que existan; simplemente, la ecuación ha de ser *homogénea*; esto es, que todos sus términos han de tener los mismos índices libres.

Por ejemplo, son ecuaciones tensoriales:

$$V_i = 0 \quad (4.3)$$

o bien

$$\sum_i \partial_i V^i = 0 \quad (4.4)$$

o incluso

$$\partial_i V_j - \partial_j V_i = 0 \quad (4.5)$$

Pero no lo es

$$V_i + \sum_k \partial_k V^k = 0 \quad (4.6)$$

ya que sus dos términos se transforman de manera diferente al efectuar una rotación.

Cuando una ecuación es invariante, se escribe de la misma manera en todos los sistemas de coordenadas, porque dado que el jacobiano de la transformación es no singular, no afecta a la condición de anulación.

Por ejemplo $V_i = 0$ se escribiría $\sum_j R^j{}_i V'_j = 0$, pero esto es equivalente a $V'_j = 0$, ya que el determinante

$$\det R^i{}_j \neq 0.$$

5. Relatividad General

5.1 El principio de equivalencia

La masa que aparece en la segunda ley de Newton es la *masa inerte*. Su definición tiene que ver con la capacidad de una misma fuerza para producir aceleración en distintos cuerpos.

Pensemos ahora en la ley de la gravitación universal, comparándola con la ley de Coulomb. La fuerza que se ejerce sobre la partícula P debido a la presencia de la P' será:

$$F_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad \leftrightarrow \quad F_G = G \frac{mm'}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} (\vec{r}' - \vec{r})$$

Vemos claramente que el papel de las masas en esta ecuación es análogo a la de las cargas, y lógicamente se deberían de llamar *cargas gravitatorias*. Nosotros les llamaremos *masas gravitatorias*, y las denotaremos por m_g . Realmente y al igual que en el caso de Coulomb, deberíamos de distinguir entre *masa gravitatoria activa*, m_g^a y *masa gravitatoria pasiva* m_g^p . Pero estas dos han de ser iguales en virtud de la tercera ley de Newton (*principio de igualdad entre acción y reacción*), que nosotros expresamos en lenguaje moderno como *conservación del momento lineal total*.

Pero lo que es innegable es que conceptualmente, la masa inerte, que denotaremos a partir de ahora como m_i y la masa gravitatoria, m_g no tienen nada que ver. La segunda ley de Newton en presencia de un campo gravitatorio se escribe

$$m_i \ddot{x}^i = G \frac{m_g m'_g}{|\sum_i (x_i - x'_i)^2|^{3/2}} (x'_i - x_i)$$

Sin embargo **EXPERIMENTALMENTE** es posible escoger unidades de forma que coincidan numéricamente

$$m_i = m_g$$

Ello permite simplificar la ecuación anterior eliminando la masa de la partícula cuya aceleración estamos estudiando.

$$\ddot{x}^i = G \frac{m'_g}{|\sum_i (x_i - x'_i)^2|^{3/2}}$$

la aceleración de un móvil en un campo gravitatorio no depende de su masa. Esto es el *principio de equivalencia*, verificado con una precisión de

$$\eta(\text{Earth, Be} - \text{Ti}) = (0.8 \pm 1.3) \times 10^{-13}$$

para el llamado parámetro de Eötvös,

$$\eta(A, B) \equiv 2 \frac{\left(\frac{m_g}{m_i}\right)_A - \left(\frac{m_g}{m_i}\right)_B}{\left(\frac{m_g}{m_i}\right)_A + \left(\frac{m_g}{m_i}\right)_B}$$

Se trata de uno de los experimentos más importantes de la historia de la ciencia. Dado que la aceleración es la misma para todos los cuerpos, digamos \vec{g} esto quiere decir que en un sistema de referencia acelerado (y por consiguiente, *no inercial*) con exactamente \vec{g} (lo que llamamos sistema en caída libre, como por ejemplo en la Estación Espacial ISS) se anulan los efectos de la gravitación. Hoy en día esto es parte de la experiencia cotidiana, y no hay más que conectarse a internet para contemplar cómo se desenvuelven los astronautas en un medio de gravedad nula. Naturalmente este sistema no es el mismo en todos los puntos; depende del valor de $\vec{g}(\vec{x})$. Einstein postula que *toda* la física en estos sistemas de referencia coincide exactamente con la física de la relatividad especial, por lo que les llamaremos *sistemas localmente inerciales (SLI)*. A esto se le suele llamar el *principio de equivalencia fuerte*.

Para estudiar la gravitación lo que hay que hacer es ver cómo se conectan e interrelacionan estos sistemas de referencia unos con otros.

La intuición genial, adquirida penosamente con la ayuda de su amigo matemático Grossmann, es que la relación entre estos SLI era análoga a la relación entre diferentes planos tangentes en una esfera. Localmente una esfera se parece a \mathbb{R}_2 (Plano tangente), pero la curvatura de la esfera está encapsulada en la forma en la que estos planos tangentes están relacionados unos con otros.

Toda la teoría de la Relatividad General de Einstein se desprende del postulado de que la física en los SCL es *exactamente* la misma que la física en los SRI.

El PE implica que los fotones se desvían de su trayectoria bajo la influencia de un campo gravitatorio. Es éste localmente equivalente a una aceleración hacia arriba, por lo cual el fotón se habrá desviado una distancia

$$\frac{1}{2}g \left(\frac{L}{c} \right)^2$$

Este efecto ha sido verificado experimentalmente sobre estrellas muy próximas a la posición del Sol en el momento de un eclipse. También se han observado las *lentes gravitacionales*.

También es una consecuencia sencilla del PE el corrimiento hacia el rojo de un fotón cuando sale de un campo gravitatorio (y hacia el azul cuando entra en él). La fórmula de Doppler predice

$$\frac{\nu'}{\nu} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \sim 1 + \frac{v}{c} = 1 + \frac{gz}{c^2} = 1 + \frac{V_{grav}}{c^2}$$

ya que el tiempo transcurrido es

$$t = \frac{z}{c}$$

y la velocidad alcanzada gt . Por otra parte el potencial gravitatorio está definido por

$$mV_{grav} = mgz$$

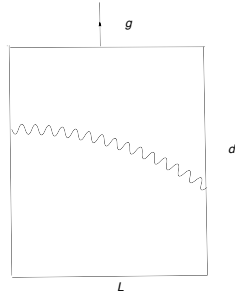


Figure 8: Desviación de los rayos de luz en un campo gravitatorio.

Claramente

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{V_{grav}}{c^2}$$

En la superficie del Sol,

$$1 + z = -\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{GM}{Rc^2} \sim 10^{-6}$$

Pound y Rebka hicieron el experimento en un laboratorio, para lo que se necesita una precisión del orden de 10^{-15} .

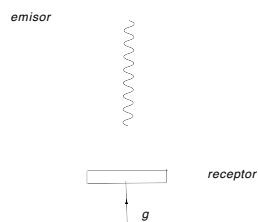


Figure 9: el experimento de Pound-Rebka.

Ya hemos comentado que Einstein desarrolló su teoría de la relatividad general postulando que la física en un SCL era *exactamente* la física de la relatividad especial, e invocando luego consideraciones geométricas sobre el espacio-tiempo para calcular lo que ocurre en un SR arbitrario. Estas consideraciones geométricas forman una parte esencial de la teoría.

Las *ecuaciones de Einstein* son ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden donde el contenido material del universo determina sus propiedades geométricas.

5.2 De $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ al espacio de Minkowski

La física galileana está formulada en $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, en el sentido de que los sucesos están caracterizados por un punto $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ y un instante $t \in \mathbb{R}$. Las leyes de Newton son tales que son invariantes frente a las isometrías de ese espacio, además de frente a las TGP.

Ahora bien, recordemos que el *tiempo propio* fue construido precisamente de forma que fuese invariante frente a las transformaciones de Lorentz. Si definimos entonces una métrica pseudoriemanniana en \mathbb{R}^4 ,

$$ds^2 \equiv c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

entonces las *isometrías* de dicha métrica son precisamente las transformaciones de Lorentz. A \mathbb{R}^4 dotado de esta métrica se le llama espacio de Minkowski. Los sucesos

$$x^\mu \equiv (x^0 \equiv ct, x, y, z)$$

se transforman como vectores frente a las transformaciones de Lorentz, dado que éstas actúan linealmente sobre el espacio de Minkowski.

5.3 Espacios planos y espacios curvos

La métrica euclídea de \mathbb{R}^2 es

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

En cambio la esfera S^2 de radio l tiene la métrica

$$ds^2 = l^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

o bien en las llamadas *coordenadas estereográficas* como

$$ds^2 = \frac{1}{\left(1 + \frac{X^2 + Y^2}{4l^2}\right)^2} (dX^2 + dY^2),$$

El plano tangente en el punto $(\bar{\theta}, \bar{\phi})$ viene caracterizado por las ecuaciones

$$\vec{n}_0 \cdot \vec{x} \equiv (x - \bar{x}) \sin \bar{\theta} \cos \bar{\phi} + (y - \bar{y}) \sin \bar{\theta} \sin \bar{\phi} + (z - \bar{z}) \cos \bar{\theta} = 0$$

donde el punto de tangencia entre la esfera y el plano es precisamente

$$\begin{aligned}\bar{x} &\equiv \sin \bar{\theta} \cos \bar{\phi} \\ \bar{y} &\equiv \sin \bar{\theta} \sin \bar{\phi} \\ \bar{z} &\equiv \cos \bar{\theta}\end{aligned}\tag{5.1}$$

Como vemos el planp tangente varía al variar el punto de tangencia. Cada uno de estos planos es un espacio de Minkowski en Relatividad General.

Calculemos el área y el perímetro de un círculo de radio r dibujado sobre la superficie de una esfera bidimensional de radio l .

En el triángulo de la figura,

$$x = l \sin \theta = r \cos \frac{\theta}{2}$$

lo cual implica

$$2l \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = r \cos \frac{\theta}{2}$$

y

$$x = r \sqrt{1 - \frac{r^2}{4l^2}} \sim r - \frac{r^3}{8l^2} + \dots$$

Ahora bien,

$$ds = x d\phi$$

por lo que la longitud del círculo será

$$s = \int x d\phi = 2\pi r - \frac{\pi r^3}{4l^2} + \dots$$

Análogamente el área

$$dA = x dr d\phi$$

de forma que el área del círculo sobre la esfera

$$A = \int dA = \pi r^2 - \frac{\pi r^4}{16l^2} + \dots$$

La curvatura gaussiana se puede definir como

$$K = \frac{16}{\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\pi r^2 - A}{r^4} \equiv \frac{1}{l^2}$$

La idea de la relatividad general (RG) de Einstein es que la gravitación está representada por la curvatura del espacio, manifestada a través de una métrica no trivial, cuyos coeficientes son funciones del punto, determinadas por el contenido material a través de las ecuaciones de Einstein. Para campos débiles,

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2V}{c^2}\right) c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

siendo V el potencial gravitatorio por unidad de masa, es decir,

$$V = -\frac{GM}{r}$$

en la aproximación newtoniana.

Diremos que un campo gravitatorio es *estático* si existe un sistema de coordenadas en el que

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^0} = 0$$

siendo además

$$g_{0i} = 0$$

Al tiempo x^0 le llamaremos *tiempo universal*.

En esas condiciones, el tiempo propio será

$$\tau = \sqrt{g_{00}} \frac{x^0}{c} = \frac{x^0}{c} \left(1 + \frac{V}{c^2}\right) \frac{x^0}{c} \left(1 - \frac{|V|}{c^2}\right) \leq \frac{x^0}{c}$$

Es decir, que el campo gravitatorio hace que los relojes atrasen.

Si recordamos la ecuación de ondas, la frecuencia de un fotón medida en unidades de tiempo universal era

$$\omega_0 \equiv -c \frac{\partial \psi}{\partial x^0}$$

En cambio la frecuencia medida en unidades del tiempo propio será

$$\omega \equiv \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \frac{\partial \psi}{\partial x^0} \frac{\partial x^0}{\partial \tau} = \frac{\omega_0}{\sqrt{g_{00}}} \geq \omega_0$$

Comparando la frecuencia en dos posiciones diferentes,

$$\Delta\omega \equiv \omega_2 - \omega_1 = \omega_0 \frac{V_1 - V_2}{c^2} = \omega_0 \frac{|V_2| - |V_1|}{c^2}$$

La frecuencia de luz experimenta un corrimiento hacia el rojo (*redshift*) al alejarse de una fuente gravitatoria. Este fenómeno admite una interpretación muy natural a la luz de la mecánica cuántica, ya que quiere decir que al fotón le cuesta energía abandonar el campo gravitatorio producido por la fuente.

5.4 Las ecuaciones de Einstein

Son 10 ecuaciones (tensoriales) en derivadas parciales. Las incógnitas son las 10 componentes de la métrica, y los datos son las componentes del tensor energía-momento, que contiene información sobre la densidad de energía de la materia. Las escribimos simplemente para admirarlas.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(R + 2\lambda)g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

la constante

$$\lambda \equiv -\frac{8\pi G}{c^4}\rho_{vac}$$

representa la *densidad de energía de vacío cuántico*, la llamada *energía oscura*.

6. Mecánica cuántica no relativista.

6.1 La naturaleza corpuscular de la radiación

Einstein postuló que la radiación consiste en *fotones*

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}$$

La longitud de onda se obtiene mediante

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{E} = \frac{h}{p}$$

De Broglie postula que esta relación es válida para todas las formas de materia.

Este punto de vista permite explicar el efecto fotoeléctrico.

Si se bombardea un metal con luz monocromática, a veces se emiten electrones. Si la frecuencia es inferior a un cierto umbral (que depende del tipo de metal), no se emiten electrones aunque se aumente mucho la intensidad. Cuando se supera ese umbral, se emiten electrones con una energía cinética T que satisface

$$\hbar\omega = W + T$$

La cantidad W es el trabajo necesario para extraer el electrón del potencial atractivo del metal.

La colisión de rayos X por electrones (efecto Compton) también tiene una interpretación sencilla.

Conservación de momento

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}_e$$

lo cual implica que

$$p_e^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2\cos\theta$$

Conservación de la energía:

$$p_1c + mc^2 = p_2c + \sqrt{p_e^2c^2 + m^2c^4}$$

de donde

$$p_e^2 = -m^2c^2 + ((p_1 - p_2) + mc)^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2 + 2mc(p_1 - p_2)$$

e igualando las dos expresiones para p_e^2 :

$$-2p_1p_2 + 2mc(p_1 - p_2) = -2p_1p_2\cos\theta$$

esto es

$$mc(p_1 - p_2) = 2p_1p_2(1 - \cos\theta) = 2p_1p_2\sin^2\theta/2$$

o lo que es lo mismo,

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{p_2} - \frac{h}{p_1} = 2\frac{h}{mc} \sin^2 \theta/2 = 2\lambda_e \sin^2 \theta/2 \quad (6.1)$$

que es precisamente lo que se observa: el salto en longitud de onda sólo depende del ángulo de colisión, y no de la frecuencia

6.2 La naturaleza tipo onda de la materia

Davisson y Germer hicieron reflejar un haz de electrones de la superficie de un cristal de níquel. Descubrieron que se forman franjas de difracción completamente análogas a las que aparecen en la difracción de la luz. El fenómeno persiste cuando la intensidad es tan baja que pasa un solo electrón de cada vez.

Esto quiere decir que un electrón está asociado de una manera todavía no bien definida con una onda ⁷ de de Broglie

$$e^{-i\left(\frac{Et - \vec{p} \cdot \vec{x}}{\hbar}\right)}$$

Este postulado reproduce correctamente la relación entre la anchura de las bandas de difracción y la energía de los electrones.

De hecho, la longitud de onda correspondiente a una energía cinética $T \equiv \frac{p^2}{2m}$

$$k = \frac{p}{\hbar} = \frac{\sqrt{2mT}}{\hbar} \equiv \frac{2\pi}{\lambda}$$

Recordando la fórmula de interferencia correspondiente a una rejilla con espaciado d y ángulo de incidencia θ

$$n\lambda = d \sin \theta$$

⁷Las ondas planas son soluciones particulares de la ecuación de ondas unidimensional

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) y(t, x) = 0$$

$$y_1 \equiv \sin(\omega t - kx)$$

$$y_2 \equiv \cos(\omega t - kx)$$

siempre que

$$\omega = ck$$

Es útil la representación compleja

$$y \equiv e^{-i(\omega t - kx)} = y_2 - iy_1$$

Es evidente que toda combinación lineal de senos y cosenos también se puede poner como combinación lineal de y y de y^* .

Para

$$\begin{aligned}n &= 1 \\ \theta &\sim 0 \\ d &\sim a_0\end{aligned}\tag{6.2}$$

(que corresponden a $T \sim 50eV$).

Esto es

$$\lambda \sim a_0$$

Igualando las dos expresiones para la longitud de onda, obtenemos una expresión para \hbar

$$h = a_0 \sqrt{2mT}$$

$$a_0 = .53 \times 10^{-8} \text{ cm}$$

$$m_e = .9 \times 10^{-27} \text{ g}$$

$$T = 50 \text{ eV} = 50 \times 1.6 \times 10^{-12} \text{ erg}\tag{6.3}$$

resultando

$$h \sim 2.01 \times 10^{-27} \text{ erg. s}$$

suficientemente próximo al valor obtenido por Planck como para reforzar la consistencia de todo el esquema.

6.3 Niveles discretos de energía

La teoría atómica de Rutherford tenía dos problemas:

- Los átomos deberían de ser muy inestables
- Deberían de radiar energía con un espectro continuo de frecuencias.

Experimentalmente se observaban sólo líneas discretas, que en el caso del H se acercaban a la fórmula de Balmer

$$\omega = N \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

Además Bohr propuso una serie de reglas:

- El momento angular del electrón está cuantizado

$$L = n\hbar$$

(Esto implica, como veremos, cuantización de la energía).

- La frecuencia de la radiación emitida corresponde a cambios en los niveles de energía de los electrones en los átomos. Por ejemplo, si un electrón se mueve del nivel E_n al nivel E_m se emite (o absorbe) una energía igual a:

$$\hbar\omega_{nm} = |E_n - E_m|$$

Explícitamente,

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} = ma\omega^2$$

Y si suponemos, siguiendo a Bohr, órbitas circulares

$$ma^2\omega = n\hbar \quad \therefore \quad \omega = \frac{n\hbar}{ma^2}$$

de forma que la primera ecuación se reduce a

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = ma^3 \frac{n^2\hbar^2}{m^2 a^4}$$

con lo que los únicos radios permitidos serán:

$$a_n = \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{me^2} n^2 \equiv a_0 n^2$$

La velocidad angular es

$$\omega = \frac{me^4}{n^3 \hbar^3 (4\pi\epsilon_0)^2}$$

Y la energía será

$$E_n = \frac{1}{2} m a_n^2 \omega^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_n} = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0} \frac{1}{n^2}$$

Las frecuencias de radiación son

$$\omega_{nm} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 2\hbar a_0} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

Y el átomo de hidrógeno es estable simplemente porque no puede emitir radiación una vez que el electrón se encuentra en su nivel de energía más bajo $n = 1$.

Claramente este tipo de reglas son *ad hoc*, y lo que hay que intentar es entender cuáles son los grandes principios (el análogo de las *leyes de Newton* que subyacen detrás de ellas. A esto nos vamos a dedicar.

6.4 Operadores

Los operadores son aplicaciones de un cierto espacio de funciones, como $L^2(\mathbb{R})$ en sí mismo:

$$\hat{O} : f(x) \rightarrow (\hat{O}f)(x)$$

Hasta cierto punto, se pueden ver como generalizaciones de las matrices ordinarias. Ejemplos útiles en MC:

$$\begin{aligned}\hat{O} &\equiv x \\ \hat{O} &\equiv \frac{\partial}{\partial x} \\ (\hat{O}f)(x) &\equiv \frac{\partial}{\partial x}(xf(x))\end{aligned}\tag{6.4}$$

A todo operador (al igual que a toda matriz cuadrada) le asociamos un cierto espectro de autovalores, definido como:

$$\hat{O}y_n(x) = \lambda_n y_n(x)$$

Por ejemplo

$$\begin{aligned}-i\frac{\partial}{\partial x}y_n(x) &= \lambda_n y_n(x) \\ y_n(x) &= e^{i\lambda_n x}\end{aligned}$$

Si exigimos condiciones de contorno periódicas en $0 \leq x \leq L$, entonces los autovalores forman un conjunto discreto

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{L}n$$

donde $n \in \mathbb{Z}$.

Dados dos operadores diferentes, en general el conmutador no se anula (de nuevo, como en el caso de las matrices):

$$[\hat{O}_1, \hat{O}_2] \neq 0$$

Por ejemplo,

$$\left[x, \frac{\partial}{\partial x}\right] = -1$$

6.5 Los postulados de la MC

Lo primero que hay que implementar es el principio de indeterminación, cuyo origen radica en que para medir la posición de un objeto cuántico con una precisión Δx es necesario utilizar fotones con $\lambda \leq \Delta x$, lo cual quiere decir que el momento de estos fotones es del orden $p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \geq \frac{2\pi\hbar}{\Delta x}$ una energía $E \geq \frac{2\pi\hbar c}{\Delta x}$. Cuanto más queramos reducir el error en la medida de la posición, más energéticos serán los fotones que tendremos que emplear, y dado que estos fotones chocan con las partículas cuánticas desviándolas tanto más cuanto mayor es su energía, tanto mayor será la perturbación que produzcamos en el objeto cuántico.

Está claro que las observaciones van a jugar un papel esencial en la formulación de la MC.

A cada observación (tal como medir la energía, o la posición, o el momento, etc) le corresponde un conjunto de números, que son los posibles resultados de la observación. Este conjunto puede ser finito, discreto, o continuo. Hay que insistir en que no hay manera de observar sin perturbar el sistema. Estas perturbaciones, despreciables para sistemas macroscópicos, son esenciales en el caso de los sistemas cuánticos. Esto se traduce en que dadas dos observaciones, \mathcal{O}_1 y \mathcal{O}_2 , sus *conmutador*

$$[\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2] \neq 0$$

en general.



Postulados de interpretación.

A cada observación \mathcal{O}_1 le corresponde un operador \hat{O}_1 . Las funciones sobre las que actúan los operadores representan los *estados* del sistema cuántico. Cuando sea una autofunción del operador, diremos que es un *autoestado*. A estas funciones las llamaremos *función de onda*.

- Los posibles resultados de la observación son los autovalores del operador correspondiente.
- La observación \hat{A} en un sistema cuya función de onda es un autoestado $u_n(x)$, tal que

$$\hat{A}u_n = a_n u_n$$

conduce al resultado a_n con certeza.

- Si la función de onda es $\psi(x)$, entonces sólo se puede predecir el *promedio* de muchas observaciones repetidas del observable \hat{A} . Es promedio está dado por:

$$\bar{a}_\psi \equiv \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \hat{A}(x, \frac{\partial}{\partial x}) \psi(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \psi(x) dx}$$

Naturalmente el tercer postulado es consistente con el segundo: siempre que $\psi(x) = u_n(x)$

$$\begin{aligned} \bar{a}_\psi &\equiv \frac{\int_{-\infty}^{\infty} u_n^*(x) \hat{A}(x, \frac{\partial}{\partial x}) u_n dx}{1} = \\ &= a_n \frac{1}{1} = a_n \end{aligned} \tag{6.5}$$



Veamos ahora los

Postulados físicos:

☞ EL PRINCIPIO DE CORRESPONDENCIA. Postulamos que las relaciones entre variables físicas de la mecánica clásica, *en tanto en cuanto no involucren derivadas* siguen siendo válidas para los operadores cuánticos correspondientes. Por ejemplo, la tercera componente del momento angular

$$\hat{L}_z \equiv \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$$

Al operador cuyos autovalores determinan la energía la llamaremos *hamiltoniano*

$$\hat{H} \equiv \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$$

Por ejemplo, para un oscilador armónico,

$$\hat{H} \equiv \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m}{2}\hat{x}^2$$

☞ EL PRINCIPIO DE COMPLEMENTARIEDAD.

De acuerdo con nuestra discusión general sobre la incertidumbre, vamos a postular

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \alpha\hbar$$

Vamos además a postular la representación más simple posible del operador posición, a saber, multiplicación por la función x :

$$\hat{x}f(x) \equiv xf(x)$$

Pero ya hemos visto que

$$[x, -\alpha\hbar\frac{\partial}{\partial x}] = \alpha\hbar$$

Esto sugiere inmediatamente una posible representación del momento:

$$\hat{p}f(x) \equiv -\alpha\hbar\frac{\partial}{\partial x}f(x)$$

Las autofunciones del operador momento representan funciones de momento bien definido:

$$\hat{p}u_p(x) = -\alpha\hbar\frac{\partial}{\partial x}u_p(x) = pu_p(x)$$

esto es

$$u_p(x) = e^{-\frac{px}{\alpha\hbar}}$$

de forma que si tomamos

$$\alpha = i$$

entonces la función de ondas de momento definido es precisamente una onda de de Broglie. Postulamos entonces

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

lo cual, como hemos visto, conduce a la representación de estos operadores

$$\begin{aligned}\hat{x} &\rightarrow x. \\ \hat{p} &\rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\end{aligned}\tag{6.6}$$

6.6 La ecuación de Schrödinger.

Sabemos que la conservación de la energía es consecuencia del hecho de que el potencial no dependa explícitamente del tiempo, es decir, que sea invariante bajo traslaciones temporales

$$V(\vec{x}, t) = V(\vec{x}, t + a) = V(\vec{x}, t) + a \frac{\partial}{\partial t} V(\vec{x}, t) + O(a^2)$$

Esto motiva el postulado de que la función de ondas satisface la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = \hat{H} \left(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(\vec{x}, t)$$

Cuando la dependencia con el tiempo sea del tipo

$$\psi(x, t) = e^{-i \frac{Et}{\hbar}} u_E(x)$$

diremos que el sistema se encuentra en un *estado estacionario*.

De acuerdo con todos los postulados anteriores, los posibles valores de la energía de un sistema vendrán determinados por la ecuación

$$\hat{H} \left(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) u_E(x) = E u_E(x)$$

La solución de esta ecuación proporciona al mismo tiempo, los posibles valores de la energía, E , así como las funciones de onda de energía definida. A esa ecuación, cuya importancia es similar a la de la segunda ley de Newton, se le llama *ecuación de Schrödinger*.

en el caso particular de una partícula que se mueve en un potencial, la ecuación se escribe

$$\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \right) u_E(x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(\hat{x}) \right) u_E(x) = E u_E(x)$$

Nos gustaría resolver la ES inmediatamente para un caso físicamente interesante, como el de los posibles niveles de energía de un electrón en un átomo de hidrógeno. La ecuación se escribiría

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \right) u_E(r, \theta, \phi) = E u_E(r, \theta, \phi)$$

Esta ecuación conduce a los niveles de energía experimentalmente observados. Pero su resolución matemática es demasiado complicada para nuestras posibilidades de primero de Bolonia.

Es por ello por lo que resolveremos algunos ejemplos sencillos para desarrollar una intuición sobre la ES. Imaginemos que el electrón tiene una energía definida, digamos E_0 . Es claro que clásicamente el electrón sólo puede moverse en regiones donde esta energía es mayor que el potencial (ya que la energía cinética es semidefinida positiva). Esto no impone ninguna restricción si $E_0 \geq 0$. Pero en cambio, si $E_0 < 0$, el electrón está en un *estado ligado*, lo cual quiere decir que sólo puede moverse en un intervalo de la variable posición. Para intentar mimetizar esta situación en contextos más sencillos, comenzaremos por el estudio de un pozo cuadrado infinitamente profundo. Lo que se quiere decir es

$$\begin{aligned} V(x) &= 0, & |x| \leq a \\ V(x) &= \infty, & |x| > a \end{aligned} \tag{6.7}$$

La ES se escribirá para $|x| \leq a$,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_n(x) = E_n u_n(x)$$

Como $V = \infty$ para $|x| > a$, la única manera en la que la ES se pueda satisfacer en esa región es que la función de onda se anule

$$|x| > a \Rightarrow u_n(x) = 0$$

Si definimos

$$k_n^2 \equiv \frac{2mE_n}{\hbar^2}$$

la ES reza

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_n = -k_n^2 u_n$$

esto es

$$u_n = A \cos k_n x + B \sin k_n x$$

Por continuidad, hemos de pedir que

$$u_n(\pm a) = 0$$

$$A \cos k_n a + B \sin k_n a = A \cos k_n a - B \sin k_n a = 0$$

de forma que, o bien $A = 0$, o bien $B = 0$. Examinemos primero las soluciones en coseno. Necesitamos que

$$k_n a = (2\mathbb{Z} + 1) \frac{\pi}{2}$$

Para las soluciones en seno, es necesario que

$$k_n a = 2\mathbb{Z} \frac{\pi}{2}$$

Claramente ello implica que las posibles soluciones son

$$k_n = n \frac{\pi}{2a}$$

$$A \cos k_{2n+1}x$$

y

$$B \sin k_{2n}x$$

Una consecuencia de todo esto es que la energía está cuantizada, ya que

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} k_n^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{4a^2} n^2$$

6.7 La integral de solapamiento

Normalizaremos la función de onda mediante la condición, cuyo significado físico veremos en un momento

$$\int dx \psi^*(x) \psi(x) = 1$$

La función de ondas correspondiente a un estado de momento definido es

$$u_p(x) = C e^{\frac{ipx}{\hbar}}$$

Si suponemos que la partícula está confinada a una región finita

$$0 \leq x \leq L$$

entonces

$$|C|^2 = \frac{1}{L}$$

o sea que

$$u_p = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{\frac{ipx}{\hbar}}$$

Para tomar directamente el límite cuando $L \rightarrow \infty$ hay que usar distribuciones, lo cual excede a nuestras capacidades en primer año de Bolonia.

Verifiquemos a qué es igual el valor esperado del momento en un autoestado:

$$\bar{p}_{u_p} = \int dx \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-\frac{ipx}{\hbar}} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{1}{\sqrt{L}} e^{\frac{ipx}{\hbar}} = p$$

lo cual es satisfactorio.

Por otra parte, el valor esperado de la posición será

$$\bar{x}_\psi \equiv \int dx \psi^*(x) x \psi(x) = \int dx x |\psi(x)|^2$$

Esto es, que el módulo al cuadrado de la función de onda representa la densidad de probabilidad de la partícula en el espacio. Si aplicamos esto al autoestado del momento, obtenemos

$$\bar{x}_{u_p} = \int_0^L dx x \frac{1}{L} = \frac{L}{2}$$

es decir, que la posición de la partícula tiene una distribución uniforme en todo el intervalo $(0, L)$.

Recordemos que los autovectores de una matriz hermítica forman una base del espacio lineal sobre el que actúan las matrices. Utilizaremos la notación

$$\sum_j M_{ij} e_j^{(n)} = \lambda_{(n)} e_i^{(n)}$$

donde $e_i^{(n)}$, $n = 1 \dots N$ representa el conjunto de los N autovectores correspondientes a los autovalores $\lambda_{(n)}$ que suponemos no degenerados, de la matriz hermítica M , de dimension N . de forma que los autovectores están normalizados de acuerdo con el producto escalar

$$\langle e^{(n)} | e^{(m)} \rangle \equiv \sum_i \left(e_i^{(n)} \right)^* e_i^{(m)} = \delta_{nm}$$

donde la *delta de Kronecker* está definida como

$$\begin{aligned} \delta_{nm} &= 1 \text{ si } m = n \\ \delta_{mn} &= 0 \text{ si } m \neq n \end{aligned} \tag{6.8}$$

Es un hecho que todo vector del espacio lineal sobre el que actúan las matrices se puede escribir como una combinación lineal de los autovectores, y eso para *cualquier* matriz hermítica

$$\forall v, \exists v_n, v = \sum_{n=1}^{n=N} v_n e^{(n)}$$

Claramente

$$v_n = \langle e^{(n)} | v \rangle$$

Lo mismo es cierto *mutatis mutandis* para los operadores diferenciales. Las funciones de onda forman un espacio lineal, aunque de dimensión infinita. Esto no quiere decir más que que la suma de dos funciones de onda es otra función de onda, y que la multiplicación por una constante también es otra función de onda. La diferencia principal es que a veces estamos interesados en operadores con espectro continuo, como el operador momento.

Parece obvio que entonces habrá que substituir las sumas por integrales

$$\sum_n \longrightarrow \int dp$$

Resulta cómodo, sin embargo, en muchas ocasiones, seguir usando la notación de suma discreta

$$\psi(x) = \sum_n c_n \phi_n(x)$$

donde

$$c_n \equiv \langle \phi_n | \psi \rangle \equiv \int dx \phi_n^*(x) \psi(x)$$

donde hemos definido el producto escalar sobre funciones de onda como

$$\langle \phi | \psi \rangle \equiv \int dx \phi^*(x) \psi(x)$$

Es fácil comprobar que esta definición cumple todos los criterios que debe de satisfacer un producto escalar.

De forma que el valor esperado del operador \hat{A} del cual

$$\phi_n(x)$$

son los autovectores (n puede recorrer un espectro discreto o continuo) será

$$\begin{aligned} \bar{a} \equiv \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle &= \int dx \psi^*(x) \hat{A} \psi(x) = \sum_{m,n} c_n^* c_m \int dx \phi_n^*(x) \hat{A} \phi_m(x) = \\ &= \sum_{m,n} c_n^* c_m \int dx \phi_n^*(x) \lambda_m \phi_m(x) = \sum_{m,n} c_n^* c_m \lambda_m \delta_{mn} = \sum_n \lambda_n |c_n|^2 \end{aligned} \quad (6.9)$$

Ahora bien,

$$c_n \equiv \langle \psi | n \rangle = \int dx \psi^*(x) \phi_n(x)$$

Esto implica que

$$\psi(x) = \sum_n \langle \phi_n | \psi \rangle \phi_n$$

Es un hecho de la vida que de todo lo que llevamos expuesto se deduce que la probabilidad de que al medir un cierto observable \hat{A} en un sistema descrito por una función de ondas ψ obtengamos el resultado a_n será el módulo al cuadrado de la *integral de solapamiento*

$$\mathcal{P}_\psi(a_n) = \left| \int dx \phi_n^*(x) \psi(x) dx \right|^2$$

En el caso particular de que estemos desarrollando con respecto a los autoestados del operador momento, esto es, con respecto a las ondas planas,

$$\psi(x) = \int dp \tilde{\psi}(p) e^{ip\frac{x}{\hbar}}$$

Es decir, que

$$\psi(p) \leftrightarrow c_n$$

lo que ocurre es que el *índice* p es un índice continuo.

6.8 El principio de incertidumbre

Consideremos un sistema localizado en el origen con una incertidumbre Δx . Su función de ondas (la normalización no es importante en este argumento)

$$\psi(x) = N e^{-\frac{x^2}{2\Delta x^2}}$$

de forma que la densidad de probabilidad es una gaussiana centrada en el origen con anchura Δx ,⁸ Para calcular la probabilidad de que la medida del momento propor-

⁸Una *densidad de probabilidad* es por definición, una función tal que

$$P(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx = 1$$

La probabilidad de un cierto intervalo de la recta real será

$$\int_a^b P(x) dx$$

La definición matemática de *valor esperado* correspondiente a la densidad de probabilidad $P(x)$ es por definición

$$\mu \equiv E(X) \equiv \int x P(x) dx$$

La *varianza* se define como

$$Var(X) \equiv E((x - \mu)^2) = E(x^2) - E(x)^2$$

La distribución *normal* o *gaussiana* viene definida por

$$P(x) \equiv \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

La media es

$$\mu = \bar{x}$$

y la varianza

$$Var(X) = \sigma^2$$

La probabilidad de que la variable esté a menos de

- $1\sigma \rightarrow .683$
- $2\sigma \rightarrow .956$
- $3\sigma \rightarrow .997$

Físicamente, no tiene sentido decir que una variable tiene un valor, digamos x , a no ser que la varianza sea *menor* que x :

$$\Delta x \leq x$$

Naturalmente, lo mismo ocurre con el momento o con la energía.

cione un resultado p , calculamos el solapamiento con la autofunción del momento:

$$\phi(p) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx u_p^*(x) \psi(x) = N \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{ipx}{\hbar}} \psi(x)$$

Claramente

$$\mathcal{P}(p) = |\phi(p)|^2$$

Para efectuar este cálculo, vamos a recordar el cálculo de Gauss de lo que se llama en su honor integral gaussiana.

$$I \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\lambda x^2}$$

Gauss escribe

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy e^{-\lambda x^2} e^{-\lambda y^2} = \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\theta e^{-\lambda r^2} = 2\pi \int_0^{\infty} -\frac{1}{2\lambda} d(e^{-\lambda r^2}) = -\frac{\pi}{\lambda} e^{-\lambda r^2} \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{\lambda}$$

Por consiguiente

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\lambda x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$

Una variante sencilla es

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\lambda x^2 - bx} = e^{\frac{b^2}{4\lambda^2}} \int dt e^{-\lambda t^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{\frac{b^2}{4\lambda}}$$

donde hemos hecho

$$t \equiv x + \frac{b}{2\lambda}$$

La integral de solapamiento es un caso particular donde

$$\begin{aligned} \lambda &\equiv \frac{1}{2\Delta x^2} \\ b &= i\frac{p}{\hbar} \end{aligned} \tag{6.10}$$

esto conduce a

$$\phi(p) = N \left(\sqrt{2\pi} \Delta x \right) e^{-\frac{p^2 \Delta x}{\hbar^2}} = N' e^{-\frac{p^2 \Delta x}{\hbar^2}}$$

Esto representa otra gaussiana centrada en el origen, con una anchura

$$\Delta p = \frac{\hbar}{\Delta x}$$

Esto no es más que el *principio de incertidumbre* de Heisenberg en acción.

Si se reflexiona ligeramente sobre lo que acabamos de hacer, se verá que no hemos hecho más que calcular las componentes de la gaussiana en la base de ondas planas. A esta sencilla operación los matemáticos denotan como *transformada de Fourier*. A este tipo de funciones de onda, como la gaussiana, que son normalizables en el continuo, se les llama *paquetes de ondas*.

6.9 El efecto túnel

Queremos estudiar el movimiento de una partícula en un potencial tipo escalón como el representado en la figura. Hay varios casos a considerar. Veamos primero lo que ocurre clásicamente.

- $E_0 \geq V$. Una partícula que venga desde la izquierda con $E = E_0$ tiene una energía cinética y un momento dados por

$$T_0 = E_0 = \frac{p_0^2}{2m}$$

Al llegar al origen se frenan debido a la barrera de potencial. Poseen suficiente energía para penetrarla y existe *transmisión total*.

$$T_1 = \frac{p_1^2}{2m} = E_0 - V = \frac{p_0^2}{2m} - V$$

esto es

$$p_1 = \sqrt{p_0^2 - 2mV}$$

- $E_0 \leq V$. En este caso al llegar al origen la partícula no puede penetrar, ya que en la zona del potencial la energía cinética tendría que ser negativa. Decimos que existe *reflexión total*.

Calculemos ahora lo que ocurre de acuerdo con las reglas de la MC. La ES reza

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_E &= E_0 \psi_E & x \leq 0 \\ \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V \right) \psi_E &= E_0 \psi_E & x \geq 0 \end{aligned} \quad (6.11)$$

Como el salto en el origen es finito, la ES nos dice que la segunda derivada de la función de onda ha de ser finita, lo cual implica que tanto la función como su primera derivada son continuas en el origen.

- $E_0 \geq V$. Definamos las variables útiles

$$\begin{aligned} k_0^2 &\equiv \frac{2mE_0}{\hbar^2} \\ k_1^2 &\equiv \frac{2m(E_0 - V)}{\hbar^2} \end{aligned} \quad (6.12)$$

La ES se escribe

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_0^2 \right) \psi_L &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_1^2 \right) \psi_R &= 0 \end{aligned} \quad (6.13)$$

las soluciones son ondas planas $e^{\pm ik_0x}$ y $e^{\pm ik_1x}$.

Supongamos que queremos saber qué ocurre cuando una partícula se aproxima por la izquierda (esto es el análogo de las *condiciones iniciales clásicas*). En principio parece lógico intentar

$$\psi_L(x) = e^{ik_0x}$$

$$\psi_R(x) = Be^{ik_1x}$$

donde la actuación del operador momento nos dice que ψ_L es una onda que se mueva hacia la derecha, mientras que ψ_R es una onda que también se mueve hacia la derecha. Si hacemos eso, e imponemos continuidad, necesariamente $B = 1$. Pero esto contradice continuidad de la derivada primera, ya que

$$k_0 \neq k_1$$

Por todo ello necesitamos admitir la posibilidad de que la onda incidente pueda no sólo ser transmitida sino también reflejada. Escribamos la solución particular

$$\psi_L(x) = e^{ik_0x} + Ae^{-ik_0x}$$

En la segunda zona suponemos que sólo existe onda transmitida.

$$\psi_R(x) = Be^{ik_1x}$$

Vamos ahora a imponer continuidad de la función de onda y de su primera derivada.

$$\begin{aligned} 1 + A &= B \\ k_0(1 - A) &= k_1B \end{aligned} \tag{6.14}$$

La solución es única:

$$\begin{aligned} A &= \frac{k_0 - k_1}{k_0 + k_1} \\ B &= \frac{2k_0}{k_0 + k_1} \end{aligned} \tag{6.15}$$

La probabilidad de encontrar la partícula en el punto $x < 0$ será

$$P(x) \sim |e^{ik_0x} + Ae^{-ik_0x}|^2 = (e^{ik_0x} + Ae^{-ik_0x})(e^{-ik_0x} + Ae^{ik_0x}) = 1 + A^2 + 2A \cos 2k_0x$$

Lo que hay de nuevo en MC es que como

$$A \neq 0$$

existe un haz reflejado no nulo. El límite clásico corresponde a acciones mucho mayores que \hbar . Pero la acción típica es del orden de $p.L$, o sea que el régimen clásico corresponde a momentos muy grandes. Esto sucede cuando

$$E_0 \gg V$$

lo cual implica que $k_0 \sim k_1$, esto es

$$\begin{aligned} A &\sim 0 \\ B &\sim 1 \end{aligned} \tag{6.16}$$

El otro caso extremo es cuando $E_0 \ll |V|$. Vamos a suponer que $V = -|V|$, y muy grande en valor absoluto. Clásicamente, en esta situación las partículas se aceleran mucho. Ahora bien, en esta situación

$$k_0 \ll k_1$$

lo que conlleva

$$\begin{aligned} A &\sim -1 \\ B &\sim 0 \end{aligned} \tag{6.17}$$

es decir, que existe *reflexión total*; justo lo opuesto de la predicción clásica. Este efecto se observa experimentalmente en física nuclear, al bombardear núcleos con piones de baja energía.

- $E_0 \leq V$. La ES para la parte de la izquierda no cambia. Para la derecha, definimos

$$K^2 \equiv \frac{2m}{\hbar^2}(V - E_0)$$

de forma que la ecuación reza

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - K^2\right)\psi_R = 0$$

Si estudiamos un estado correspondiente a un haz incidente desde la izquierda, buscamos una solución de la forma

$$\begin{aligned} \psi_L &= e^{ik_0x} + A e^{-ik_0x} \\ \psi_R(x) &= C e^{-Kx} + D e^{Kx} \end{aligned} \tag{6.18}$$

Claramente $D = 0$ si queremos que sea normalizable. Continuidad en el origen impone

$$\begin{aligned} 1 + A &= C \\ ik_0(1 - A) &= -KC \end{aligned} \quad (6.19)$$

lo cual implica

$$\begin{aligned} A &= \frac{k_0 - iK}{k_0 + iK} \\ C &= \frac{2k_0}{k_0 + iK} \end{aligned} \quad (6.20)$$

Por otra parte, A es ahora un número complejo de módulo unidad. El fenómeno novedoso es que la probabilidad de encontrar la partícula en la zona clásicamente prohibida, $x \geq 0$ es proporcional a

$$P_+ = |C e^{-Kx}|^2 = \frac{4k_0^2}{k_0^2 + K^2} e^{-2Kx}$$

La probabilidad de encontrar una partícula que atravesase una barrera de anchura b en el punto $x = b$, dividida por la de encontrarla en $x = 0$ es

$$T = e^{-2Kb} = e^{-2b \frac{\sqrt{2m(V-E_0)}}{\hbar}}$$

Este es el fundamento cuántico de la radiación β de los núcleos, así como del microscopio de efecto túnel.

6.10 Estados ligados

Consideremos el siguiente potencial:

$$\begin{aligned} V(x) &= 0 \quad |x| < a \\ V(x) &= V \quad |x| \geq a \end{aligned} \quad (6.21)$$

Supongamos además que $E_0 < V$, de forma que clásicamente el sistema está confinado al pozo

La ES se escribe, para $|x| < a$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_0^2 \right) \psi = 0$$

y para $|x| \geq a$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - K^2 \right) \psi = 0$$

En el pozo tendremos

$$\psi_i(x) = A \cos k_0 x + B \sin k_0 x$$

y en la región exterior derecha,

$$\psi_R(x) = C e^{-Kx}$$

Por simetría respecto del origen (*paridad*), la solución exterior izquierda será

$$\psi_L = \pm C e^{-K|x|}$$

Habrán entonces una solución simétrica respecto del origen (diremos que tiene paridad positiva)

$$\begin{aligned} \psi_i(x) &= \cos k_0 x \\ \psi_R(x) &= C e^{-Kx} \\ \psi_L(x) &= C e^{-K|x|} \end{aligned} \quad (6.22)$$

y otra solución antisimétrica (paridad negativa)

$$\begin{aligned} \psi_i(x) &= \sin k_0 x \\ \psi_R(x) &= C' e^{-Kx} \\ \psi_L(x) &= -C' e^{-K|x|} \end{aligned} \quad (6.23)$$

Hemos multiplicado la función de onda por una constante de forma que el coeficiente en el pozo sea la unidad.

Las condiciones de empalme son, en el caso par,

$$\begin{aligned} \cos k_0 a &= C e^{-Ka} \\ k_0 \sin k_0 a &= KC e^{-Ka} \end{aligned} \quad (6.24)$$

Como tenemos dos ecuaciones, sólo existe solución para un conjunto discreto de valores de la energía, a saber, los que satisfagan que

$$k_0 \operatorname{tg} k_0 a = K$$

La correspondiente ecuación en el caso impar es

$$\begin{aligned} \sin k_0 a &= C' e^{-Ka} \\ k_0 \cos k_0 a &= -KC' e^{-Ka} \end{aligned} \quad (6.25)$$

Ergo

$$k_0 \operatorname{cotg} k_0 a = -K$$

Es decir, que en el rango de energías en el que clásicamente existen estados ligados, encontramos en QM un espectro *discreto*.

6.11 El oscilador armónico

La ecuación de Schrödinger es

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + m\frac{\omega^2}{2}x^2\right)\psi_n = E_n\psi_n$$

donde hemos adelantado que el espectro de energías va a ser discreto. Si definimos

$$\begin{aligned} y &\equiv \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x \\ \epsilon_n &\equiv \frac{E_n}{\hbar\omega} \end{aligned} \tag{6.26}$$

la ES se escribe

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - y^2\right)\psi_n(y) = -2\epsilon_n\psi_n(y)$$

Para resolverla, definimos dos operadores

$$\begin{aligned} a &\equiv \frac{\partial}{\partial y} + y \\ a^+ &\equiv -\frac{\partial}{\partial y} + y \end{aligned}$$

Claramente

$$-aa^+ = \frac{\partial^2}{\partial y^2} - y^2 - 1$$

lo cual permite reescribir la ES como

$$-aa^+\psi_n = (-2\epsilon_n - 1)\psi_n$$

Es también un hecho que

$$-a^+a = \frac{\partial^2}{\partial y^2} - y^2 + 1$$

de modo que

$$-a^+a\psi_n = (-2\epsilon_n + 1)\psi_n$$

Multiplicando por el operador a a la izquierda,

$$-aa^+a\psi_n = (-2\epsilon_n + 1)a\psi_n = (-2(\epsilon_n - 1) - 1)a\psi_n$$

Esto quiere decir que si ψ_n es una autofunción con autovalor ϵ_n , entonces

$$a\psi_n$$

es otra autofunción con autovalor

$$\epsilon_n - 1$$

análogamente

$$-a^+ a a^+ \psi_n = (-2(\epsilon_n + 1) + 1) a^+ \psi_n$$

implica que si ψ_n es una autofunción con autovalor ϵ_n , entonces

$$a^+ \psi_n$$

es otra autofunción con autovalor

$$\epsilon_n + 1$$

Claramente el proceso descendente se acabará en el momento en que se llegue a una función tal que

$$a \psi_0 = 0$$

Es fácil ver que

$$\psi_0 = e^{-\frac{y^2}{2}}$$

y corresponde a

$$(-2\epsilon_0 + 1)\psi_0 = 0$$

lo cual implica que

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega$$

La función de ondas es

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} H_n\left(x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right)$$

donde $H_n(z)$ es un polinomio de Hermite.

6.12 Problemas.

- Demostrar que

$$y(x) \equiv e^{-\frac{x^2}{2}}$$

es una autofunción del operador

$$\hat{O} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} - x^2$$

y calcular el autovalor correspondiente.

- Una partícula confinada en un pozo cuadrado infinito posee una incertidumbre en la posición

$$\Delta x \equiv 2a$$

Ahora bien, la magnitud del momento ha de ser al menos tan grande como su incertidumbre. Deducir de este hecho que la energía del estado fundamental es, aproximadamente,

$$E_1 \sim \frac{\hbar^2}{8ma^2}$$

- Demostrar que

$$[\hat{p}, V(\hat{x})] = -i\hbar \frac{\partial V(x)}{\partial x}$$

- Demostrar que las autofunciones correspondientes al pozo infinito son necesariamente simétricas o antisimétricas. Demostrar además que el nivel n-ésimo tiene paridad $(-1)^n$ y n nodos. (nodo \equiv puntos en los que se anula).

7. Estructura de la materia.

7.1 Física atómica

7.1.1 Momento angular

Los operadores correspondientes al momento angular se deducen sin dificultad del principio de correspondencia.

$$\begin{aligned}\hat{L}_x &= \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x} \right) \\ \hat{L}_y &= \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z = -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ \hat{L}_z &= \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)\end{aligned}\quad (7.1)$$

Evaluemos estas expresiones en coordenadas polares

$$\begin{aligned}x &\equiv r \sin \theta \cos \phi \\ y &\equiv r \sin \theta \sin \phi \\ z &\equiv r \cos \theta\end{aligned}\quad (7.2)$$

Para ello calculamos

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

Para proseguir, necesitamos las derivadas de las coordenadas polares con respecto a las cartesianas, el llamado *jacobiano*. Escribimos la transformación inversa

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \operatorname{tg} \phi &= \frac{y}{x} \\ \cos \theta &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\end{aligned}\quad (7.3)$$

De donde el jacobiano

$$J \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} & \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} & \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} & \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{zx}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{zy}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{\partial \theta}{\partial z} = -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2} \end{pmatrix}$$

de esta forma obtenemos los operadores momento angular en coordenadas polares:

$$\begin{aligned}\hat{L}_x &= -i\hbar \left(-\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ \hat{L}_y &= -i\hbar \left(\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ \hat{L}_z &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}\end{aligned}\quad (7.4)$$

Las autofunciones de \hat{L}_z serán:

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}u_m(\phi) = \hbar mu_m(\phi)$$

esto es

$$u_m(\phi) = e^{im\phi}$$

donde $m \in \mathbb{Z}$ si queremos que

$$\phi = \phi + 2\pi$$

Es un hecho de la vida que las componentes del momento angular no conmutan entre sí. Esto quiere decir que no podemos medirlas simultáneamente. Sin embargo, existe un ⁹ operador

$$\hat{L}^2 \equiv \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 = -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right)$$

que es tal que

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0$$

Esto quiere decir que existen autofunciones simultáneas de los dos operadores, que llamaremos $Y_{lm}(\theta, \phi)$

$$\begin{aligned} \hat{L}_z Y_{lm}(\theta, \phi) &= \hbar m Y_{lm}(\theta, \phi) \\ \hat{L}^2 Y_{lm}(\theta, \phi) &= \hbar^2 \beta Y_{lm}(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (7.6)$$

Para calcular el valor de β tenemos que trabajar un poquito. Postulamos separación de variables en la forma

$$Y_{lm}(\theta, \phi) \equiv P_{lm}(\theta) e^{im\phi}$$

Substituyendo, obtenemos

$$\left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right) P_{lm}(\theta) = -\beta P_{lm}(\theta)$$

Tenemos que resolver esta ecuación con la condición de que la función de onda se mantenga finita en $0 \leq \theta \leq \pi$. Si hacemos un cambio de variable

$$w \equiv \cos\theta$$

⁹De hecho

$$\begin{aligned} \hat{L}_x^2 &= -\hbar^2 \left(\sin^2\phi \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta \cos^2\phi \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} - \frac{\sin\phi \cos\phi(1+\cos^2\theta)}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} + \cot\theta \cos^2\phi \frac{\partial}{\partial\theta} \right) \\ \hat{L}_y^2 &= -\hbar^2 \left(\cos^2\phi \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta \sin^2\phi \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\sin\phi \cos\phi(1+\cos^2\theta)}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} + \cot\theta \sin^2\phi \frac{\partial}{\partial\theta} \right) \\ \hat{L}_z^2 &= -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \end{aligned} \quad (7.5)$$

la ecuación anterior se reduce a

$$\frac{d}{dw}(1-w^2)\frac{dP}{dw} + \left(\beta - \frac{m^2}{1-w^2}\right)P = 0$$

Esta ecuación se puede reescribir como

$$\frac{d^2P}{dw^2} - \frac{2w}{1-w^2}\frac{dP}{dw} + \left(\frac{\beta}{1-w^2} - \frac{m^2}{(1-w^2)^2}\right)P = 0$$

Las singularidades de esta ecuación están precisamente en los puntos $w = \pm 1$.

- Examinemos en primer lugar la ecuación en un entorno del punto $w = +1$. Si escribimos $w = 1 + \epsilon$ claramente

$$\begin{aligned} \frac{2w}{1-w^2} &= -\frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{1-w} \\ \frac{1}{(1-w^2)^2} &= \frac{1}{4\epsilon^2} = \frac{1}{4(1-w)^2} \end{aligned} \quad (7.7)$$

esto implica que el término en β es despreciable frente al término en m^2

La ecuación se reduce en ese entorno a

$$\frac{d^2P}{dw^2} - \frac{1}{1-w}\frac{dP}{dw} - \frac{m^2}{4(1-w)^2}P = 0$$

Buscamos ahora soluciones de la forma una potencia veces una función analítica

$$P = (1-w)^\alpha (a_0 + a_1(1-w) + a_2(1-w)^2 + \dots)$$

Substituyendo, el coeficiente de la potencia más baja $(1-w)^{\alpha-2}$ proporciona la *ecuación indicial*

$$a_0 \left(\alpha(\alpha-1) + \alpha - \frac{m^2}{4} \right) = 0$$

Esto quiere obviamente decir que

$$\alpha = \pm \frac{|m|}{2}$$

lo cual implica la existencia de dos soluciones independientes,

$$\begin{aligned} P_0^1 &= (1-w)^{\frac{|m|}{2}} (\dots) \\ P_\infty^1 &= (1-w)^{-\frac{|m|}{2}} (\dots) \end{aligned} \quad (7.8)$$

El mismo razonamiento puede ser aplicado al otro punto singular, $w = -1$. También en un entorno de este punto existen dos soluciones, del tipo

$$\begin{aligned}
P_0^{-1} &= (1+w)^{\frac{|m|}{2}} (\dots) \\
P_\infty^{-1} &= (1+w)^{-\frac{|m|}{2}} (\dots)
\end{aligned} \tag{7.9}$$

En general, si partimos por ejemplo, de la solución P_0^{-1} , ésta será una combinación lineal de las dos soluciones posibles en el otro punto singular, $w = 1$

$$P_0^{-1} = aP_0^1 + bP_\infty^1$$

Los posibles valores de β serán precisamente aquellos, y sólo aquellos, para que las dos soluciones no singulares se empalmen de forma armoniosa. De hecho, si escribimos un *ansatz* que engloba los dos comportamientos deseados en los dos puntos singulares,

$$P_{lm}(w) \equiv (1-w^2)^{\frac{|m|}{2}} p(w)$$

la ecuación ¹⁰
se reduce a

$$(1-w^2) \frac{d^2 p}{dw^2} - 2(|m|+1)w \frac{dp}{dw} + (\beta - |m|(|m|+1)) p = 0$$

Si postulamos analiticidad, con objeto de excluir singularidades,

$$p(w) \equiv \sum_0^\infty a_k w^k$$

obtenemos in dificultad

$$\begin{aligned}
(k+2)(k+1)a_{k+2} &= (k(k-1) + 2k(|m|+1) + |m|(|m|+1) - \beta) a_k = \\
&= ((k+|m|)(k+|m|+1) - \beta) a_k
\end{aligned} \tag{7.10}$$

Si la serie no termina, entonces asintóticamente

$$a_{k+2} \sim a_k$$

lo que implica que

$$p \sim \frac{1}{1-w}$$

¹⁰De hecho

$$\begin{aligned}
P' &= -|m|w(1-w^2)^{\frac{|m|}{2}-1} p + (1-w^2)^{\frac{|m|}{2}} p' \\
P'' &= (1-w^2)^{\frac{|m|}{2}} p'' - 2|m|w(1-w^2)^{\frac{|m|}{2}-1} p' - |m|(1-w^2)^{\frac{|m|}{2}-1} p + \frac{|m|}{2} \left(\frac{|m|}{2} - 1 \right) (1-w^2)^{\frac{|m|}{2}-2} 4w^2 p
\end{aligned}$$

Si la serie termina, quiere decirse que se trata de un polinomio (de Legendre) de forma que

$$\beta = l(l+1)$$

siendo $l \equiv k + |m|$ (es decir, que $l \geq |m|$). Dándole la vuelta, para cada valor de $l = 0, 1, 2 \dots$ los $2l + 1$ posibles valores de m van desde $-l, -l + 1, \dots, l - 1, +l$.

Las autofunciones del momento angular orbital, los *armónicos esféricos*, están normalizados de forma que

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{l'm'}(\theta, \phi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

La fórmula es

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = (-1)^l \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} e^{im\phi} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{(1-w^2)^{-m/2}}{2^l l!} \left(\frac{d}{dw}\right)^{l-m} (1-w^2)^l$$

Algunos ejemplos:

$$\begin{aligned} Y_{00}(\theta, \phi) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\ Y_{10}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \\ Y_{1-1}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi} \\ Y_{11}(\theta, \phi) &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi} \end{aligned} \quad (7.11)$$

7.1.2 El átomo de hidrógeno

El potencial de Coulomb es un caso particular de *potencial central* (esto es, que sólo depende del módulo de la distancia). Vemos para empezar algunas propiedades generales de la ES en este tipo de potenciales:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r)\right) \psi(r, \theta, \phi) = E\psi(r, \theta, \phi)$$

Es un hecho de la vida que el operador laplaciano

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Es muy conveniente expresar este operador en coordenadas polares.¹¹

¹¹El cálculo es sencillo si se tiene en cuenta que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \sin \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\cos \theta \cos \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\cos \theta \sin \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (7.12)$$

El resultado es.

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) + V(r) \right] \psi(r, \theta, \phi) = E\psi(r, \theta, \phi)$$

Es curioso observar, que el primer miembro es muy parecido al operador momento angular total:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{\hbar^2 r^2} \hat{L}^2 \right) + V(r) \right] \psi(r, \theta, \phi) = E\psi(r, \theta, \phi)$$

Es evidente que

$$[\hat{H}, \hat{L}^2] = [\hat{H}, \hat{L}_3] = 0$$

Esto quiere decir físicamente que es posible conocer (medir) simultáneamente la energía, el momento angular total, y su tercera componente. Es decir, el *ansatz*

$$\psi(r, \theta, \phi) = u_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \phi)$$

Calculemos lentamente

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \left(\sin \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\cos \theta \cos \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\sin \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\cos \theta \cos \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) = \\ &\sin^2 \theta \cos^2 \phi \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \phi \cos \phi}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{\sin \theta \cos \theta \cos^2 \phi}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \\ &\frac{\sin^2 \phi}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\sin^2 \phi}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin \phi \cos \phi}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\sin^2 \phi \cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \\ &\frac{\cos^2 \theta \cos^2 \phi}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos^2 \theta \cos^2 \phi}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin \phi \cos \phi \cos^2 \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{\sin \theta \cos \theta \cos^2 \phi}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \\ &\frac{\sin \theta \cos \theta \cos^2 \phi}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} - \frac{\sin \phi \cos \phi}{r} \frac{\partial^2}{\partial \phi \partial r} - \frac{\sin \phi \cos \phi \cos \theta}{r \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \phi} \end{aligned} \quad (7.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \left(\sin \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\cos \theta \sin \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\sin \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\cos \theta \sin \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) = \\ &\sin^2 \theta \sin^2 \phi \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\sin \phi \cos \phi}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{\sin \theta \cos \theta \sin^2 \phi}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \\ &\frac{\cos^2 \phi}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\cos^2 \phi}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \phi \cos \phi}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\cos^2 \phi \cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \\ &\frac{\cos^2 \theta \sin^2 \phi}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos^2 \theta \sin^2 \phi}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\cos^2 \theta \sin \phi \cos \phi}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{\sin \theta \cos \theta \sin^2 \phi}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \\ &\frac{\sin \theta \cos \theta \sin^2 \phi}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} + \frac{\sin \phi \cos \phi}{r} \frac{\partial^2}{\partial \phi \partial r} + \frac{\sin \phi \cos \phi \cos \theta}{r \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \phi} \end{aligned} \quad (7.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} &= \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) = \cos^2 \theta \frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \\ &+ \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \\ &2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} \end{aligned} \quad (7.15)$$

separa completamente las variables. La parte radial de la ES, que es la única que nos queda por resolver, reza

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) + V(r) \right] u_{nl}(r) = E u_{nl}(r)$$

Existe un cambio astuto, a saber,

$$u_{nl} \equiv \frac{\chi_{nl}}{r}$$

con el cual la ecuación se simplifica bastante

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} + V(r) \right] \chi_{nl}(r) = E \chi_{nl}(r)$$



En el caso particular del átomo Z ,

$$V(r) = -\frac{Z e_M^2}{r}$$

con

$$e_M^2 \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$$

Nuestro propósito es encontrar estados ligados, o sea que supondremos

$$E_n = -|E|_n$$

Definiendo

$$\begin{aligned} \alpha_n^2 &\equiv \frac{8m|E_n|}{\hbar^2} \\ \rho &\equiv \alpha_n r \\ \lambda_n &\equiv Z e_M^2 \hbar \sqrt{\frac{m}{2|E_n|}} \end{aligned} \tag{7.16}$$

la ecuación se escribe como

$$\left(\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{d}{d\rho} \right) + \frac{\lambda_n}{\rho} - \frac{1}{4} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right) u_{nl}(\rho) = 0$$

Esta es una ecuación diferencial con dos singularidades, en $\rho = 0$ y $\rho = \infty$. Queremos encontrar una solución regular. En el límite $\rho \rightarrow \infty$ la ecuación se reduce a

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{1}{4} \right) u(\rho) = 0$$

que admite dos soluciones independientes, que escogeremos como

$$u(\rho) \sim \rho^s e^{\pm \frac{\rho}{2}}$$

La exponencial creciente no es normalizable. Veamos ahora qué ocurre cerca del origen. Buscamos soluciones de la forma

$$u(\rho) = \rho^s e^{-\frac{\rho}{2}} L_{nl}(\rho)$$

Substituyendo en la ecuación radial, se obtiene sin dificultad

$$\left[\rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2} + (2(s+1) - \rho) \rho \frac{d}{d\rho} + (\lambda_n - s - 1) \rho + s(s+1) - l(l+1) \right] L(\rho) = 0$$

Haciendo $\rho = 0$, vemos que necesariamente

$$s(s+1) = l(l+1)$$

es decir, que o bien

$$s = l$$

o bien

$$s = -(l+1)$$

siendo esta última solución no normalizable. La situación es similar a la que ya hemos encontrado al discutir el momento angular. Sólo en casos excepcionales se van a poder empalmar las dos soluciones normalizables en los dos puntos singulares, y nosotros estamos precisamente interesados en estos casos. La ES, tomando $s = l$, se escribe,

$$\left[\rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2} + (2(l+1) - \rho) \rho \frac{d}{d\rho} + (\lambda_n - l - 1) \rho \right] L(\rho) = 0$$

Veamos en qué condiciones existe una solución analítica

$$L(\rho) \sim \sum_k a_k \rho^k$$

Genéricamente

$$(k+1)(k+2(l+1))a_{k+1} = (k+l+1-\lambda_n)a_k$$

Si la serie no es un polinomio, entonces asintóticamente

$$a_{k+1} \sim \frac{a_k}{k}$$

lo cual quiere decir que

$$L(\rho) \sim e^\rho$$

que no es normalizable. Esto implica que la serie ha de ser realmente un polinomio. Esto ocurre siempre que el parámetro λ_n sea un entero

$$\lambda_n = n > l$$

Esta es la raíz del espectro discreto de energías desde este punto de vista.

$$E_n = -mZ^2 e_M^4 2\hbar^2 \frac{1}{n^2} = -\frac{1}{2} \frac{Z^2 e_M^2}{a_0} \frac{1}{n^2}$$

El átomo de hidrógeno corresponde a $Z = 1$, y esta fórmula reproduce correctamente los niveles de energía de Bohr.



La energía de los diferentes niveles del átomo de hidrógeno está determinada por el *número cuántico principal*, $n \in \mathbb{N}$. Dado el valor de n , el momento angular viene caracterizado por el *número cuántico orbital*,

$$l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$$

siendo el autovalor de \hat{L}^2

$$\hbar^2 l(l + 1)$$

Existe además el *número cuántico magnético*,

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$$

que determina el valor de la tercera componente del momento angular (que se puede medir si se enchufa un campo magnético externo, de ahí su nombre)

$$J_3 = m\hbar$$

Es de resaltar que la exponencial decreciente implica que la probabilidad de encontrar al electrón decrece exponencialmente conforme nos alejamos del núcleo.

7.2 Spin y estadística

En presencia de un campo magnético externo, hay una contribución a la energía igual a

$$H_I \equiv \frac{e}{2m} \vec{B} \vec{L}$$

Es decir, que, dados unos valores para los números cuánticos n y l , los $2l + 1$ estados con diferente número cuántico magnético, que antes estaban degenerados en energía, se separan ahora

$$\Delta E = \frac{e}{2m} B \hbar$$

Este efecto ha sido experimentalmente observado (Zeeman). Sin embargo, hay algo más. Según todo lo que hemos visto hasta ahora, no debería de haber división para el estado fundamental, que corresponde a

$$n = 1, \quad l = 0, \quad m = 0$$

mientras que en realidad se divide en dos. Si interpretamos esto como un momento angular, correspondería a un momento angular semientero

$$2j + 1 = 2 \quad \therefore \quad j = 1/2$$

A ese momento angular, que no tiene análogo clásico, ya que persiste incluso cuando $l = 0$, se le llama *spin*. Para representarlo, no hay más remedio que extender las funciones de onda a vectores de dos componentes, cada una de las cuales es una función de las coordenadas espaciales. Es costumbre denotar, siguiendo a Dirac, a los elementos del espacio vectorial de los estados (que en el caso general tiene dimension infinita) como *kets*

$$\vec{v} \leftrightarrow |v\rangle$$

En el caso de que la dimensión del espacio sea igual a dos

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow |1\rangle \\ \vec{e}_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow |2\rangle \end{aligned} \quad (7.17)$$

A los elementos del espacio dual los llamaremos *bras*

$$\begin{aligned} \vec{e}_1^* &= (1 \ 0) \leftrightarrow \langle 1| \\ \vec{e}_2^* &= (0 \ 1) \leftrightarrow \langle 2| \end{aligned} \quad (7.18)$$

El producto escalar

$$\vec{e}^* *_i \vec{e}_j = \delta_{ij} \leftrightarrow \langle i|j\rangle$$

La *relación de cierre*, o *descomposición de la unidad* (que es simplemente una manera de expresar que el conjunto de los vectores \vec{e}_i son una base) nos dice que

$$\sum_i \vec{e}_i \vec{e}_i^* = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (0 \ 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \sum_i |i\rangle \langle i| = |1\rangle \langle 1| + |2\rangle \langle 2| = 1$$

Las matrices las podemos representar entonces como

$$A_{ij} \equiv \vec{e}^* *_i A \vec{e}_j \leftrightarrow \langle i|A|j\rangle$$

Es *vector estado* será un ket

$$|\psi\rangle$$

cuyas componentes serán

$$\langle i|\psi\rangle \equiv \langle\psi|i\rangle^*$$

Pues bien, es un hecho de la vida que existen tres matrices, llamadas las *matrices de spin de Pauli*, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ que son tales que los operadores

$$\hat{s}_x \equiv \frac{\hbar}{2}\sigma_x \quad \hat{s}_y \equiv \frac{\hbar}{2}\sigma_y \quad \hat{s}_z \equiv \frac{\hbar}{2}\sigma_z$$

satisfacen las relaciones de conmutación del momento angular

$$[\hat{s}_x, \hat{s}_y] = i\hbar\hat{s}_z$$

y sus permutaciones cíclicas. Estas matrices son

$$\sigma_x \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Es fácil ver que

$$\hat{s}^2 \equiv \hat{s}_x^2 + \hat{s}_y^2 + \hat{s}_z^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right)\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es claro que los autovalores de la tercera componente del spin son

$$s_z = \pm \frac{1}{2}$$

y los autovectores son

$$|1/2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |-1/2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para caracterizar el estado cuántico de un electrón necesitamos, además de la función de ondas $\psi(x, y, z)$ un vector de dos componentes

$$|\psi\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

que especifica el spin. La probabilidad de que la tercera componente del spin sea $+1/2$ será

$$\mathcal{P}_\psi(1/2) = |\langle 1/2|\psi\rangle|^2 = |a|^2$$

Análogamente

$$\mathcal{P}_\psi(-1/2) = |\langle -1/2|\psi\rangle|^2 = |b|^2$$

La tercera componente del momento angular total será entonces

$$\hat{J}_z = \hat{L}_z + \hat{s}_z$$

Esto quiere decir que hay ahora dos estados diferentes correspondientes al valor fundamental de la energía del átomo de hidrógeno

$$u_{100}(r)|1/2\rangle \quad u_{100}(r)|-1/2\rangle$$



Clásicamente siempre es posible poner *etiquetas* de forma que dos bolas se puedan distinguir; se le puede seguir la pista a la bola número uno, y a la bola número dos, digamos. En mecánica cuántica, sólo podemos hablar de lo que podemos medir, y dos electrones, por ejemplo, son *idénticos*; es decir, que no existe ninguna medida que los pueda distinguir. Esto quiere decir que si $x_{1,2}$ representan las coordenadas de las dos partículas (incluyendo el spin en su caso)

$$|\psi(x_1, x_2)|^2 = |\psi(x_2, x_1)|^2$$

lo cual quiere decir que

$$\psi(x_1, x_2) = \pm\psi(x_2, x_1)$$

Es un hecho de la vida que el signo depende del tipo de partícula. Las que tienen spin semientero, como el electrón, escogen el signo menos, y se dice que son *fermiones*, mientras que las que tienen spin entero, como el fotón, escogen el signo más, y se dice que son *bosones*. En el caso de que los electrones puedan estar en dos estados, a y b ,

$$\psi(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_a(x_1)\psi_b(x_2) - \psi_a(x_2)\psi_b(x_1))$$

Esto implica en particular que no es posible que dos fermiones estén en el mismo estado cuántico. Esto es el *principio de exclusión de Pauli*, que tiene importantes consecuencias en física estadística. Por ejemplo, en el caso de dos cuerpos, el número total de estados es

- Clásicamente

$$\begin{aligned} &\psi_a(1)\psi_a(2) \\ &\psi_a(1)\psi_b(2) \\ &\psi_b(1)\psi_a(2) \\ &\psi_b(1)\psi_b(2) \end{aligned} \tag{7.19}$$

- Si son fermiones

$$\psi_a(1)\psi_b(2) - \psi_a(2)\psi_b(1)$$

- Si son bosones

$$\begin{aligned}
& \psi_a(1)\psi_a(2) \\
& \psi_a(1)\psi_b(2) + \psi_a(2)\psi_b(1) \\
& \psi_b(1)\psi_b(2)
\end{aligned} \tag{7.20}$$

Armónicos esféricos

$$\begin{aligned}
Y_0^0(\theta, \varphi) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\pi}} \\
p_x &= \sqrt{\frac{1}{2}} (Y_1^{-1} - Y_1^1) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot \frac{x}{r} \\
p_y &= i\sqrt{\frac{1}{2}} (Y_1^{-1} + Y_1^1) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot \frac{y}{r} \\
p_z &= Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot \frac{z}{r}
\end{aligned} \tag{7.21}$$

$$\begin{aligned}
Y_2^{-2}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \cdot e^{-2i\varphi} \cdot \sin^2 \theta = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \cdot \frac{(x - iy)^2}{r^2} \\
Y_2^{-1}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \cdot e^{-i\varphi} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \cdot \frac{(x - iy)z}{r^2} \\
Y_2^0(\theta, \varphi) &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \cdot (3 \cos^2 \theta - 1) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \cdot \frac{(-x^2 - y^2 + 2z^2)}{r^2} \\
Y_2^1(\theta, \varphi) &= \frac{-1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \cdot e^{i\varphi} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta = \frac{-1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \cdot \frac{(x + iy)z}{r^2} \\
Y_2^2(\theta, \varphi) &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \cdot e^{2i\varphi} \cdot \sin^2 \theta = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \cdot \frac{(x + iy)^2}{r^2}
\end{aligned} \tag{7.22}$$

7.3 Problemas

- Cuál es la longitud de onda que ha de tener la radiación para ionizar el hidrógeno?
- Calcular la masa reducida del sistema electrón-protón, y del sistema electrón-muón. ($\frac{1}{\mu} \equiv \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$).
- Demostrar que

$$\begin{aligned}
[\hat{L}_x, \hat{L}_y] &= i\hbar \hat{L}_z \\
[\hat{L}_y, \hat{L}_z] &= i\hbar \hat{L}_x \\
[\hat{L}_z, \hat{L}_x] &= i\hbar \hat{L}_y
\end{aligned} \tag{7.23}$$

- Usando los resultados del problema anterior, demostrar que

$$[\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2, \hat{L}_x] = [\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2, \hat{L}_y] = [\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2, \hat{L}_z] = 0$$

8. Tema avanzado: Límites sobre una posible no linealidad cuántica

Steven Weinberg, “Testing Quantum Mechanics,” *Annals Phys.* **194**, 336 (1989).

“Precision Tests Of Quantum Mechanics,” *Phys. Rev. Lett.* **62**, 485 (1989).

9. Tema avanzado: no separabilidad (*entanglement*)

Feynman en el tercer volumen de su célebre curso de Cal Tech insiste en que si se modifica el experimento de la doble rendija de Young de forma que se conozca por cuál de las rendijas pasa el fotón (*which path*), deben de desaparecer las franjas de interferencia. La razón es que la óptica nos dice que para que exista interferencia ha de satisfacerse que

$$n\lambda = \frac{d_{AB}}{L}x$$

donde d_{AB} es el espaciado entre las rendijas, L es la distancia entre la pantalla y el plano que contiene las rendijas, y x es la distancia entre franjas. Pero para poder conocer λ (sea, el momento) del fotón con esa precisión, es preciso admitir una indeterminación en la posición del orden

$$\Delta x \sim \frac{\hbar}{\frac{\hbar}{\lambda}} = \frac{\lambda}{2\pi} \sim \frac{d_{AB}}{L}x \sim d_{AB}$$

De esta forma la MC *predice* que la aparición de franjas de interferencia depende de si se tiene o no la información de por cual de las dos rendijas ha pasado el fotón. En principio este experimento se puede hacer también con electrones.

La realización experimental más sofisticada, debida a Scully y colaboradores [?] del experimento de Young pone de manifiesto aspectos sutiles del principio de Heisenberg.

El esquema experimental es el siguiente. Un átomo etiquetado como A o B se excita mediante un pulso débil de laser, lo que origina la emisión de un par de fotones entrelazados, llamados *fotón 1* y *fotón 2* por desintegración atómica en cascada.

El fotón 1, que se propaga hacia la derecha, es detectado por D_0 , que lleva acoplado un motor para poder moverse en la dirección x y detectar franjas de interferencia. El fotón número 2, que se propaga hacia la izquierda, avanza hacia un divisor de haces (*beam splitter*, BS).

Si el par de fotones se ha engendrado en el átomo A, el fotón número 2 sigue el camino A, y se encuentra en BSA con una probabilidad 1/2 de ser reflejado o de ser transmitido. Si el par se genera en el átomo B, el fotón número 2 sigue el camino B, y se encuentra en BSB con un 1/2 de probabilidad de ser reflejado o de ser transmitido. El el caso de que el fotón haya sido transmitido en BSB o en BSA, será detectado en D_4 o en D_3 , respectivamente. Esto nos da una información (*which path*) sobre el camino seguido por el fotón 2, lo cual a su vez determina la misma información para el fotón número 1 debido a carácter entrelazado del estado de dos fotones.

En el caso de que el fotón haya sido reflejado en BSA o en BSB, se encuentra con otro BS (con 1/2 de probabilidad de reflejar o de transmitir) y es detectado bien en

D_1 o en D_2 . La detección por D_1 o por D_2 borra pues la información sobre el camino seguido por el fotón. El experimento se diseña de forma que la distancia óptica

$$L_0 \ll (L_A, L_B)$$

de forma que se detecta el fotón 1 en D_0 *mientras el fotón 2 está aún en vuelo*. La MC predice que $R_{01} \equiv D_0.D_1$ y $R_{02} \equiv D_0.D_2$ muestran franjas de interferencia en función de la distancia a lo largo del eje x . Y esto es lo que se observa.

Hay muchos aspectos interesantes del experimento que merecen la atención del estudiante, que es animado a consultar las referencias originales.

En general, dado un sistema cuántico compuesto de dos subsistemas A y B , todo estado se podrá escribir como

$$|\psi\rangle = \sum_{ij} C_{ij} |i\rangle_A \otimes |j\rangle_B$$

Pero no se puede escribir como un producto directo de un estado de A por un estado de B excepto en el caso particular de que

$$C_{ij} = C_i^A C_j^B$$

Se dice entonces que el estado está entrelazado (*entangled*).

Por ejemplo, en el caso de subsistemas con dos estados, un tal estado sería

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A \otimes |1\rangle_B - |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B)$$

Estos estados se preparan experimentalmente sin dificultad, y son muy útiles en óptica cuántica y física atómica (*computación cuántica*).

10. Física (sub)nuclear

10.1 Física nuclear: Colisiones de Rutherford y desintegración α

La escala nuclear es mucho más pequeña que la escala atómica. Este tamaño fue determinado por Rutherford en una serie de experimentos en los que bombardeaba láminas de oro ($Z=79$) con partículas α ($Z=2$).

Veamos la idea del experimento. Aproximamos la repulsión coulombiana por una fuerza

$$F = \frac{Z_\alpha Z e_M^2}{b^2}$$

que suponemos que actúa perpendicularmente a la dirección original sobre una distancia b . Si la partícula α tiene una velocidad v , esa fuerza suponemos que actúa durante un tiempo $\frac{b}{v}$. La segunda ley de Newton implica entonces que la fuerza produce un momento transverso

$$\Delta p = F \Delta t = \frac{Z_\alpha Z e_M^2 b}{b^2} \frac{b}{v}$$

lo cual produce una desviación

$$\theta \sim \text{tg } \theta \sim \frac{\Delta p}{p} = \frac{Z_\alpha Z e_M^2 b}{b^2} \frac{1}{v m v}$$

Las máximas desviaciones se producirán cuando el parámetro de impacto sea del orden del radio del núcleo. Ya que cuanto más nos acerquemos al núcleo, más sentiremos la repulsión; excepto que si nos metemos dentro de él, parte de la carga actúa en el mal sentido. Experimentalmente, $\theta \sim 1$, y como decimos $b \sim R$ implican

$$R \sim \frac{Z_\alpha Z e_M^2}{m v^2}$$

Y tomando

$$m = 6 \times 10^{-27} \text{kg}$$

y

$$v \sim 10^7 \text{m/s}$$

resulta

$$R = 10^{-14} \text{m}$$

unas 10^4 veces más pequeño que el radio de Bohr.

Es evidente que para mantener los protones unidos en el núcleo es necesario un pegamento que venza a la repulsión coulombiana entre los protones. La gravitación no ayuda mucho, ya que

$$\frac{F_g}{F_e} \sim \frac{G m_p^2}{e_M^2} \sim 10^{-36}$$

$$\begin{aligned}
G &= 6.6 \times 10^{-11} \text{m}^3/\text{kg}\text{s}^2 \\
e_M^2 &= 2.3 \times 10^{-28} \text{kg}\text{m}^3/\text{s}^2 \\
m_p &= 1.6 \times 10^{-27} \text{kg} \sim 1836 m_e \sim 938 \text{MeV}/c^2
\end{aligned}
\tag{10.1}$$

En el núcleo también se encuentran los neutrones

$$m_n \sim 939 \text{MeV}/c^2$$

que junto con los protones constituyen los *nucleones*. Esta fuerza, que en un alarde de imaginación llamaremos *fuerza fuerte*, debe de tener un alcance limitado al núcleo; esto es, debe de ser de *corto alcance*. Esto contrasta con la gravitación y el electromagnetismo, que son de *largo alcance*.



Veamos cómo puede tener lugar la desintegración α someramente.

$$A \rightarrow \alpha + D$$

A grandes distancias (comparadas con la escala nuclear, R), dominará la repulsión coulombiana entre la partícula α (que es un núcleo de He, con dos protones y dos neutrones)

$$V(r) = \frac{Z_\alpha Z e_M^2}{r}$$

Sin embargo, a distancias del orden de R , tiene forzosamente que dominar la atracción debida a la fuerza fuerte. El potencial debe entonces de parecerse al de la figura.

Clásicamente, una partícula con energía E_0 tal que

$$0 \geq E_0 \geq V(R)$$

está confinada en el núcleo, y no tiene posibilidad alguna de escapar. Experimentalmente se observa que un núcleo radiactivo tiene una probabilidad de desintegración por unidad de tiempo que se mantiene constante. Esto quiere decir que si $N(t)$ es el número de núcleos presenta en el instante t , entonces

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\frac{N(t)}{\tau}$$

de forma que

$$N(t) = N(0)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

La constante τ es la llamada *vida media* del núcleo radiactivo. La escala de tiempo característica de un núcleo, simplemente por argumentos dimensionales, será

$$\tau_n \equiv \frac{m_p R^2}{\hbar} \sim 10^{-21} \text{s}$$

Las vidas medias varían entre $10^{-7}s$ hasta $10^{10}y$, lo cual quiere decir que son muy grandes en relación con la escala τ_n ; la desintegración nuclear es un proceso muy lento. Ahora entendemos por qué; se trata de un efecto túnel.

La ES se escribirá

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + V(r) - E_0\right)\chi(r) = 0$$

Experimentalmente sabemos que

$$E_0 \sim m_A c^2 - (m_D + m_\alpha) c^2$$

Si definimos una nueva función

$$K^2(r) \equiv \frac{2\mu}{\hbar^2}(V(r) - E_0)$$

la ES queda

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - K^2(r)\right)\chi(r) = 0$$

Podemos suponer que

$$\chi(r) = a e^{-f(r)}$$

y hacer la aproximación de que

$$\frac{d^2}{dr^2}f \sim 0$$

llamada WKB, debido a los nombres de Wentzel, Kramers y Brillouin, que la propusieron en 1926. Esta aproximación es esencialmente la que conduce a la óptica geométrica a partir de las ecuaciones de Maxwell. Se sigue que

$$\left(\frac{df}{dr}\right)^2 = K^2$$

que conlleva

$$f(r) = \int^r K(x)dx$$

La partícula α emerge en el punto $r = r_0$, tal que

$$\frac{Z_\alpha Z e^2}{r_0} = E_0$$

El amortiguamiento de la función de onda al atravesar la barrera es

$$\frac{\chi(r_0)}{\chi(R)} = e^{-\int_{r_0}^R K(r)dr}$$

el cuadrado de esta expresión es el coeficiente de transmisión, T

$$T = e^{-2\int_{r_0}^R dr \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}(V(r)-E_0)}} \sim e^{-2(r_0-R)\sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{V_R-E_0}{2}}}$$

Claramente la relación entre el coeficiente de transmisión y la semivida media viene dada por la frecuencia natural de la partícula α en el potencial:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{T}{\tau_n}$$

Eliminando r_0 , y teniendo en cuenta que $\mu \sim m_\alpha = 4m_p$,

$$T = e^{-4m_p^{1/2} R \frac{(V_R - E_0)^{3/2}}{E_0 \hbar}}$$

Esto depende mucho del valor de E_0 . Por ejemplo, para

$$\begin{aligned} E_0 = 4MeV & \quad \tau = 3 \times 10^{12}y \\ E_0 = 8MeV & \quad \tau \sim 10^{-8}s \end{aligned} \tag{10.2}$$

que están razonablemente de acuerdo con el experimento.

10.2 Partículas elementales

Aquí no estamos lejos de las fronteras del conocimiento, y nuestra descripción ha de ser necesariamente más cualitativa.

La diferencia esencial entre la MC relativista y la MC no relativista es la siguiente. La función de ondas en MC no relativista están normalizada a la unidad; esto refleja el hecho de que la probabilidad de encontrar la partícula en algún sitio es la unidad. La partícula no puede desaparecer; el número y tipo de las partículas presentes es constante y no puede cambiar. En MC relativista, en cambio, ni el número ni el tipo de partículas se mantiene, y hay reacciones del tipo

$$n \rightarrow p e \nu_e$$

(que es responsable de la desintegración β de los núcleos) o la aniquilación de un par electrón-positrón en un par de fotones

$$e^+ e^- \rightarrow \gamma \gamma$$

Claramente para que este tipo de reacciones, que escribiremos genéricamente como

$$a + b \rightarrow c + d$$

sean posibles, es necesario que la energía del primer miembro sea igual a la energía del segundo miembro. Pero esta energía es al menos igual a la energía en reposo de las dos partículas. Es decir,

$$E_a + E_b \geq m_c c^2 + m_d c^2$$

La MC no relativista es una aproximación de baja energía. Es por ello que no existe la MC relativista. La teoría que describe estos procesos se llama teoría cuántica de

campos (QFT por sus iniciales en inglés). Son posibles todas las reacciones que, estando cinemáticamente permitidas, conserven unos pocos números cuánticos (en todo análogos a la carga eléctrica), como la carga eléctrica, o la diferencia entre el número bariónico B y número leptónico L (a definir).

La otra característica es que dada una partícula, existe una antipartícula, con la misma masa, pero con todas las cargas de signo opuesto. Por ejemplo, la antipartícula del electrón e^- es el positrón, e^+ ; en el caso de fotón, y como es neutro, es idéntico a su antipartícula.

Hay cuatro, y sólo cuatro interacciones fundamentales. Hoy en día se describen mediante el paradigma de Yukawa, distinguiendo entre los bosones intermediarios cuyo intercambio produce la interacción, y los llamados quarks y leptones, que son fermiones de spin $1/2$, y que constituyen lo que podemos llamar materia.

☞ **Interacción gravitatoria.** La más débil de todas, caracterizada por la constante de Newton, G . Aunque es una de las dos (junto con la electromagnética) que tiene límite clásico (esto es, que pervive a grandes distancias y para sistemas macroscópicos), sus efectos cuánticos son un misterio, probablemente uno de los más profundos de la física. Se postula que es debida al intercambio de una partícula de spin 2, todavía no descubierta, a la que se le llama **gravitón**.

☞ **Interacción electromagnética.** Caracterizada por la constante de estructura fina, $\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \sim \frac{1}{137}$. Se interpreta cuánticamente como producida por el intercambio de *fotones*.

☞ **Interacción nuclear fuerte.** Es la responsable de que los protones y neutrones se mantengan ligados en los núcleos a pesar de la repulsión electromagnética entre cargas del mismo signo. Su constante de acoplo es $g \sim 1$. En la *cromodinámica cuántica*, QCD por sus siglas en inglés, se interpreta como debida al intercambio de un octete de bosones vectoriales llamados *gluones*. A la carga que es fuente de esta interacción se la llama *color*.

☞ **Interacción nuclear débil.** Es la responsable de la desintegración de los núcleos atómicos, y, como su nombre indica, es la menos intensa. Hoy en día poseemos una descripción unificada, llamada teoría electrodébil, asociada a los nombres de Glashow, Weinberg y Salam, en la que es debida al intercambio de unos bosones vectoriales masivos llamados W^\pm y Z^0 .

Las diferentes partículas se clasifican según el tipo de interacciones que sufren. Todas poseen la interacción gravitatoria. La interacción electromagnética la sufren todas las partículas cargadas. Las que sufren la interacción fuerte se las llama *hadrones*, y están compuestas por estados ligados de *quarks*. A las que no sufren la interacción fuerte se las llama *leptones*.

La vida media de las partículas elementales es tanto más pequeña cuanto más fuerte es la interacción responsable del modo principal de desintegración. Antes de nada, para poder predicar si es grande o pequeña, tenemos que tener una idea de cuál es la vida media *natural* para una PE. Podemos decir que lo natural es la escala de tiempos asociada a la longitud de onda Compton de la PE:

$$\tau_{natural} \equiv \frac{\lambda_{Compton}}{c} = \frac{\hbar}{mc^2}$$

Para un nucleón, esto es muy pequeño, del orden de

$$\tau \sim 6.6 \times 10^{-25} \text{ sec.}$$

Por ejemplo, en el caso del neutrón, que se desintegra débilmente, su vida media es gigantesca,

$$\tau_n \sim 917 \text{ s}$$

En el caso de los piones que se desintegran electromagnéticamente

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$$

$$\tau_{\pi^\pm} \sim 10^{-16} \text{ s} \tag{10.3}$$

y en el caso de partículas que se desintegran fuertemente,

$$\tau \sim 10^{-23} \text{ s}$$

A estas PE se les suele llamar *resonancias*.

Además, la estructura se repite de forma más o menos similar en tres grupos llamados *familias*. La **primera familia** está compuesta por los quarks *u* y *d* y los leptones *e* y ν_e :

| partícula | spin | carga | color | B | L |
|-----------|------|-------|-------|-----|---|
| u | 1/2 | + 2/3 | 3 | 1/3 | 0 |
| d | 1/2 | -1/3 | 3 | 1/3 | 0 |
| ν_e | 1/2 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| e | 1/2 | -1 | 0 | 0 | 1 |

A estas hay que añadirles las correspondientes antipartículas

Hasta hace poco se creía que los neutrinos eran fermiones de masa nula. Hoy en día se sabe que son masivos, aunque con masas muy pequeñas. Incidentalmente los neutrinos fueron postulados por Pauli, en una situación en la que había una gran perplejidad en la comunidad, ya que se observaron unas reacciones que aparentemente

violaban la conservación de la energía . Mucha gente (incluído Bohr) estaba dispuesta a aceptar la violación de este principio, pero Pauli prefirió mantener la conservación de la energía, y postular una partícula débilmente interactuante, que se dio en llamar neutrino. Este Pauli es el mismo que según la leyenda urbana solía decir: *Das ist nicht nur nicht richtig, es ist nicht einmal falsch!* (No solamente no es cierto, es que ni siquiera es falso!)

| partícula | spin | carga | color | B | L |
|---------------|------|-------|-----------|-------|----|
| \bar{u} | 1/2 | - 2/3 | $\bar{3}$ | - 1/3 | 0 |
| \bar{d} | 1/2 | +1/3 | $\bar{3}$ | - 1/3 | 0 |
| $\bar{\nu}_e$ | 1/2 | 0 | 0 | 0 | -1 |
| \bar{e}^+ | 1/2 | +1 | 0 | 0 | -1 |

así como los bosones responsables de la interacción:

| partícula | spin | carga | color | B | L |
|-----------|------|-------|-------|---|---|
| γ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| W^+ | 1 | +1 | 0 | 0 | 0 |
| W^- | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| Z^0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| g | 1 | 0 | 8 | 0 | 0 |
| G | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Todos los hadrones, y en particular los protones y neutrones son estados ligados de quarks. Las masas las expresamos, como es habitual, en $\frac{MeV}{c^2}$

| partícula | spin | masa | quarks | B | L |
|-----------|-----------|------|----------------------------------|---|---|
| p | $(1/2)^+$ | 938 | uud | 1 | 0 |
| n | $(1/2)^+$ | 940 | ddu | 1 | 0 |
| π^+ | 0^- | 140 | $u\bar{d}$ | 0 | 0 |
| π^0 | 0^- | 135 | $(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$ | 0 | 0 |

Existen al menos otras dos *generaciones* de partículas elementales. Son como réplicas más pesadas de las que ya hemos estudiado. Su existencia está relacionada con la violación de simetrías discretas. Estas partículas no forman parte fundamental de la naturaleza ordinaria; sólo se producen en aceleradores, y en procesos astrofísicos muy energéticos, notablemente en el *big bang*. Por ejemplo, en la segunda generación

aparece una especie de electrón pesado, llamado el muón, que pesa unos

$$m_\mu \sim 106 \frac{MeV}{c^2}$$

El muón se desintegra en

$$\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu} \nu$$

con una vida media de

$$\tau \sim 10^{-6} s.$$

El físico de Galicia (Ucrania) I.I. Rabi en una ocasión preguntó: "Who ordered that?", es decir, quién ha encargado eso? expresando su perplejidad por la existencia de esa partícula. Pues bien, hoy en día se sabe que el muón forma parte de una segunda generación compuesta por los quarks c(harm) y s(trange), el μ^- y el ν_μ . Es más, existe al menos una tercera generación, compuesta por los quarks t(op) y b(ottom), el ν_τ y el τ , que es todavía más pesado que el μ .

10.3 Oscilaciones de neutrinos

Los ν_e y ν_μ no son necesariamente autoestados del hamiltoniano, sino que

$$\nu_e = \alpha \nu_1 + \beta \nu_2$$

$$\nu_\mu = \gamma \nu_1 + \delta \nu_2$$

donde

$$H \nu_{1,2} = E_{1,2} \nu_{1,2}$$

Claramente

$$\nu_{1,2}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}(E_{1,2}t - \vec{p}_{1,2}\vec{x})} \nu_{1,2}$$

(los estados están normalizados en el continuo mediante deltas de Dirac) de forma que

$$\langle \nu_e(t) | \nu_\mu(t) \rangle = (\alpha^* e^{\frac{i}{\hbar}(E_1 t - \vec{p}_1 \vec{x})} \nu_1^* + \beta^* e^{\frac{i}{\hbar}(E_2 t - \vec{p}_2 \vec{x})} \nu_2^*) (\gamma e^{-\frac{i}{\hbar}(E_1 t - \vec{p}_1 \vec{x})} \nu_1 + \delta e^{-\frac{i}{\hbar}(E_2 t - \vec{p}_2 \vec{x})} \nu_2) = |\alpha|^2 |\nu_1|^2 + |\beta|^2 |\nu_2|^2 + \alpha^* \delta e^{-\frac{i}{\hbar}((E_2 - E_1)t - (\vec{p}_2 - \vec{p}_1)\vec{x})} \nu_1^* \nu_2 + \beta^* \gamma e^{\frac{i}{\hbar}((E_2 - E_1)t - (\vec{p}_2 - \vec{p}_1)\vec{x})} \nu_1^* \nu_2 \quad (10.4)$$

Supondremos que las energías son ultrarelativistas, de modo que

$$E \equiv \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \sim pc \left(1 + \frac{m^2 c^4}{2p^2 c^2}\right) \sim pc + \frac{m^2 c^3}{p}$$

Además, si estamos interesados en oscilaciones en una distancia L,

$$t \sim \frac{L}{c}$$

y podemos escribir

$$\begin{aligned} \langle \nu_e(t) | \nu_\mu(t) \rangle = & |\alpha|^2 |\nu_1|^2 + |\beta|^2 |\nu_2|^2 + \alpha^* \delta e^{-\frac{i}{\hbar} \left(p_2 - p_1 + \left(\frac{m_2^2}{p_2} - \frac{m_1^2}{p_1} \right) c^2 \right) L} \nu_1^* \nu_2 + \\ & \beta^* \gamma e^{\frac{i}{\hbar} \left(p_2 - p_1 + \left(\frac{m_2^2}{p_2} - \frac{m_1^2}{p_1} \right) c^2 \right) L} \nu_1 \nu_2^* \end{aligned} \quad (10.5)$$

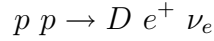
En la práctica,

$$p_1 \sim p_2$$

de forma que, denotando por $\Delta m^2 \equiv m_2^2 - m_1^2$,

$$e^{-\frac{i}{\hbar} \left(p_2 - p_1 + \left(\frac{m_2^2}{p_2} - \frac{m_1^2}{p_1} \right) c^2 \right) L} \sim \cos \left(\frac{\Delta m^2 c^2}{\hbar p} L \right) - i \operatorname{sen} \left(\frac{\Delta m^2 c^2}{\hbar p} L \right)$$

Es decir, que dependiendo de la distancia recorrida por el haz, L , el contenido en ν_e y ν_μ va variando periódicamente, incluso aunque inicialmente estuviera compuesto completamente por ν_e . Esto ocurre de hecho con los neutrinos solares, producidos en el Sol mediante la reacción



que desaparecen parcialmente en vuelo desde el Sol hasta la Tierra, lo que explica que el flujo detectado en la Tierra de neutrinos electrónicos provenientes del Sol sea sólo una pequeña fracción de la predicción teórica.

10.4 *Problemas*

- Estudiar las cargas conservadas en la desintegración β y en la aniquilación de pares.
- La partícula W^- tiene una masa de $80\text{GeV}/c^2$. Para que sea posible producirlo en la reacción

$$p + \bar{p} \rightarrow W^+ + \pi^-$$

cuál es la energía mínima que han de tener el protón y el antiprotón en el acelerador? Y cuál sería la energía mínima del antiprotón si el protón estuviese estacionario?

- Demostrar que

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z$$

11. Cosmología

En la mayor parte de esta disciplina, es como si $\hbar = 0$. Efectivamente, en el estudio del universo como un todo, sólo las interacciones de largo alcance son importantes, y de ellas, el electromagnetismo, debido a la existencia de cargas positivas y negativas, se *apantalla* macroscópicamente: los cuerpos extensos tienden a ser eléctricamente neutros. Sin embargo, en un estudio más profundo del *big bang*, todas las constantes son finitas, e incluso sería preciso tener en cuenta la gravedad cuántica, cosa que no se sabe hacer.

La única interacción de largo alcance que no se puede apantallar, debido a que sus cargas son siempre positivas (las cargas gravitatorias son simplemente las masas), es la interacción gravitatoria. La cosmología es, pues, regida en gran medida por la interacción gravitatoria.

La teoría de la gravitación universal de Newton es una teoría de acción a distancia; no es compatible con el principio de relatividad de Einstein. La teoría relativista de la gravitación fue también edificada por el propio Einstein, y se llama relatividad general.

Los primeros modelos cosmológicos fueron construídos sobre la base de las ecuaciones de Einstein por Friedmann y Lemaître. Veamos en qué consiste todo ello.

Veamos órdenes de magnitud de la **escala cósmica de distancias**.

La masa del Sol es aproximadamente

$$M_{\odot} \sim 10^{30} \text{ Kg} \sim 10^6 M_E$$

La *unidad astronómica* (AU) es el diámetro de la órbita terrestre alrededor del sol:

$$UA \sim 1.5 \times 10^8 \text{ Km}$$

El *parsec* y el *año luz* son

$$pc \sim 3 ly \sim 3 \times 10^{18} \text{ cm} \sim 2 \times 10^5 UA$$

La distancia a la estrella más cercana (α -Centauri) es

$$d \sim 4 ly$$

El diámetro de la Vía Láctea (nuestra galaxia) es

$$L_{MW} \sim 30 \text{ Kpc} \sim 10^5 ly$$

y una masa

$$M_{MW} \sim 10^{11} M_{\odot}$$

La distancia entre la Vía láctea y Andrómeda (la galaxia más cercana) es

$$D \sim 2 \times 10^6 ly$$

El radio del *cúmulo local* de galaxias es del orden de

$$R_{cluster} \sim 100 Mpc \sim 10^8 ly$$

y su masa

$$M_{cluster} \sim 10^{14} M_{\odot}$$

La densidad media en el universo es del orden de

$$\rho \sim 10^{-26} Kg m^{-3} \sim 10 m_p / m^3$$

11.1 Paradoja de Olbers

Reflexionemos un momento en el porqué de lo oscuro de la noche. Supongamos que tanto la densidad de estrellas por unidad de volumen (N) como la luminosidad (energía por unidad de tiempo) de cada estrella (L) fuesen constantes.

La energía por unidad de tiempo recibida en el punto de observación, O debido al volumen entre la esfera de radio r y la esfera de radio $r + dr$ será

$$4\pi r^2 dr NL$$

La intensidad (energía por unidad de área) debido a ese volumen reza

$$NLdr$$

que es independiente de r . Al integrar sobre todos los valores posibles, evidentemente este resultado diverge. Esta es la paradoja de Olbers.

Claramente indica que alguna de sus hipótesis es falsa.

Por ejemplo, si L es una función del tiempo, $L(t)$, entonces mirar lejos (en el espacio) es lo mismo que mirar hacia el pasado (lejos en el tiempo), y si $L(t)$ es lo suficientemente pequeña en el pasado lejano, se soluciona la paradoja. Ya veremos que algo de este estilo es lo que ocurre en el modelo standard de cosmología (MSC).

11.2 Cosmología relativista (=Relatividad General)

Los modelos más sencillos de universo tienen la siguiente estructura. La métrica del espacio-tiempo es

$$ds_4^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2 ds_3^2$$

donde ds_3^2 es la métrica correspondiente a un espacio de curvatura constante, que puede ser positiva (la esfera, S_3), negativa o nula. Para nuestras consideraciones será suficiente considerar el caso en el que la curvatura del espacio se anula (lo que es compatible con las observaciones), esto es

$$ds_4^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

El factor $R(t)$ se llama *factor de escala*.

La constatación de la recesión de las galaxias lejanas por Hubble¹², mediante la medida del correspondiente corrimiento hacia el rojo de las rayas espectrales, fue precisamente lo que convenció a la comunidad científica de que el universo estaba en expansión. Sin embargo, es notable que las soluciones de la GR que representan un Universo en expansión fueron encontradas por el físico ruso Alexander Friedman tres años antes, en 1922, y redescubiertas por Lemaître en 1925.

En realidad el corrimiento hacia el rojo de los fotones emitidos en R_E al ser observados en R_O es

$$1 + z = \frac{R_O}{R_E}$$

que efectivamente implica un corrimiento hacia el rojo en un universo en expansión. Podemos deducir esto de la siguiente manera. La trayectoria de un fotón radial será

$$ds^2 = 0$$

lo que implica

$$dt = R(t)dr$$

esto es

$$\frac{\Delta t_E}{\Delta t_O} = \frac{\omega_O}{\omega_E} = \frac{\lambda_E}{\lambda_O} = \frac{R(t_E)}{R(t_O)}$$

Si $z \ll 1$, se suele expresar en términos de la llamada constante de Hubble, $H(t) \equiv \frac{\dot{R}}{R}$

$$\frac{\lambda_O}{\lambda_E} \equiv 1 + z = \frac{R_O}{R_E} \sim \frac{R_E + \dot{R}_E(t_O - t_E)}{R_E} \sim 1 + H_E \frac{d}{c}$$

donde hemos aproximado

$$t_O = t_E + \frac{d}{c}$$

lo cual en el fondo no es más que una definición adecuada de distancia, que coincide con la euclídea en el caso de que los tiempos de emisión y de observación sean suficientemente próximos. De ahí se deduce que

$$z = H_E \frac{d}{c}$$

es decir, que existe una relación lineal entre en redshift y la distancia. Los objetos más alejados se observan corridos hacia el rojo: es como si se estuvieran alejando de nosotros con una velocidad

$$v_E = dH_E$$

¹²Y de hecho el descubrimiento mismo de que son objetos extragalácticos mediante medidas de corrimiento hacia el rojo de las rayas espectrales tomadas en el observatorio de Mount Wilson en California en 1925

El valor corriente de la *constante de Hubble* es

$$H_0 = 70.0 \pm 4.0 \text{ Km/s.Mpc}$$

El contenido material del universo puede ser aproximado por un fluido (adoptando promedios sobre volúmenes suficientemente grandes) con densidad de energía $\rho(t)$ y presión que obedece una *ecuación de estado*. Hay una cierta conservación de la densidad de energía material en el sentido de que

$$\rho R(t)^3 = C$$

Esta ecuación implica que si existe (como veremos que necesariamente sucede) en el universo un instante en el que

$$R(t) = 0$$

entonces en este instante

$$\rho = \infty$$

la densidad de energía diverge. La curvatura escalar también lo hace, ya que viene dada por

$$6 \frac{\dot{R}^2 + R\ddot{R}}{R^2}$$

Esta *singularidad inicial* es el famoso *big bang*. Naturalmente las singularidades aparecen en las ecuaciones; no en la naturaleza. Lo que nos está diciendo esto es que la relatividad general no es una teoría válida cerca de la singularidad. No resulta demasiado difícil escribir las ecuaciones de Einstein en este caso. El resultado es, definiendo la función de Hubble

$$H(t) \equiv \frac{\dot{R}}{R}$$

$$\left(\dot{H} + H^2\right) = -G \frac{4\pi}{3} \frac{\rho_0}{R^3}$$

o lo que es lo mismo,

$$\ddot{R}R^2 = -G \frac{4\pi}{3} \rho_0$$

Esto implica en particular que un universo estático sólo puede existir en ausencia de materia. Si tenemos en cuenta los efectos cuánticos, sabemos que existe en general una energía del vacío no nula, que es constante e independiente del tiempo. Esto nos obliga a modificar la ecuación anterior

$$\ddot{R}R^2 = -G \frac{4\pi}{3} \rho_0 - G \frac{4\pi}{3} \rho_{vac} R^3$$

Einstein llamaba *constante cosmológica* a la cantidad

$$\Lambda \equiv -4\pi G \rho_{vac}$$

$\lambda \equiv \frac{\Lambda}{c^4}$ tiene dimensiones de L^{-2} .

Reescribamos la ecuación anterior como

$$\ddot{R}\dot{R} = -G\frac{4\pi}{3}\rho_0\frac{\dot{R}}{R^2} + \frac{\Lambda}{3}\dot{R}R$$

Siempre que $\dot{R} \neq 0$, podemos deducir que

$$\ddot{R} = \frac{-G\frac{4\pi}{3}\rho_0 + \frac{\Lambda}{3}R^3}{R^2}$$

es decir, que si $\dot{R} > 0$ (expansión) entonces si $\Lambda > 0$ siempre se convertirá en acelerada a partir de un cierto valor de R . Por el contrario, si $\dot{R} < 0$, la expansión se decelerará a partir de un determinado valor de R .

Por otra parte, es claro que esta ecuación se puede integrar con el resultado

$$\frac{\dot{R}^2}{2} - \frac{C}{R} - \frac{\Lambda}{6}R^2 = k$$

Podemos adquirir intuición sobre los modelos de universo asimilándolos al movimiento unidimensional de una partícula de masa unidad con energía $E = k$ en un potencial

$$V(R) \equiv -\frac{C}{R} - \frac{\Lambda}{6}R^2$$

Está claro que con estas condiciones, es inevitable que se alcance el *origen*

$$R = 0$$

en un tiempo finito (anterior o posterior) para *condiciones iniciales* arbitrarias.

Estas ecuaciones, obtenidas en relatividad general con la hipótesis de homogeneidad e isotropía, tal y como hicieron Friedmann y Lemaître, son idénticas a las que se obtienen en cosmología newtoniana, aunque con una interpretación física ligeramente distinta. La constante k en particular, indica, como hemos visto, la curvatura de las secciones de tres-espacio $t = \text{constante}$, y se puede normalizar a los valores $\pm 1, 0$. La métrica que hemos escrito explícitamente corresponde a $\kappa = 0$.

Todos los modelos cosmológicos homogéneos e isótropos se obtienen sin dificultad de las ecuaciones anteriores.

Quizás es interesante estudiar el caso en que la densidad de materia $\rho_0 = C = 0$ se anula. (El caso general se puede estudiar con técnicas análogas).

Para empezar, si $k = 0$, entonces necesariamente $\Lambda \geq 0$, y la ecuación reza

$$\frac{dR}{R} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} dt$$

lo cual implica una expansión exponencial

$$R = R_0 e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}(t-t_0)}$$

que corresponde a la llamada fase de de Sitter.

11.3 Historia térmica del universo

Recordemos que la escala absoluta de temperaturas es tal que

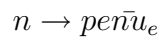
$$10^{10} K \sim 1 MeV$$

Las ecuaciones osn tales, que, cerca del big bang, las temperaturas crecen. Si seguimos la evolución desde la singularidad inicial, podemos descubrir varias etapas interesantes, conforme va bajando la temperatura:

- $10^{-43} s \leq t \leq 10^{-14} s$ $10 TeV \leq kT \leq 10^{19} GeV$. No se espera que gravedad cuántica sea importante hasta que la enegía sea del orden de la de Planck,

$$E_P = m_p c^2 \sim 10^{19} GeV$$

- $10^{-14} s \leq t \leq 10^{-10} s$ $100 GeV \leq kT \leq 10 TeV$. Los bosones gauge W^\pm y Z^0 tienen masa nula, y las interacciones electromagnéticas y débiles tienen la misma intensidad.
- $t \sim 10^{-5} s$ $kT \sim 200 MeV$ Los quarks y gluones, que hasta ahora estaban desconfiados en un plasma relativista, se confinan en hadrones.
- $t \sim 0.2 s$ $kT \sim 1 MeV$ Desacoplo de los neutrinos. El cociente $\frac{n_n}{n_p}$ se congela, ya que las interacciones débiles (que son las que producen la desintegración beta



dejan de estar en equilibrio.

- $t \sim 1 s$ $kT \sim 0.5 MeV$ Los pares $e^+ e^-$ se aniquilan fundamentalmente en fotones.
- $t \sim 250 s$ $kT \sim 0.05 MeV$ Protones y neutrones se empiezan a combinar en núcleos de He, etc (*nucleosíntesis primordial*). Dado que hay elementos como el He_4 que no se pueden formar en las estrellas, el hecho de que la abundancia relativa de esos elemntos coincida con la predicha en la nucleosíntesis primordial es un argumento en favor del modelo.
- $t \sim 10^{13} s$ Todos los electrones y protones se recombinan en átomos de H; el universo se hace transparente a la radiación de fondo. (*last scattering surface*).
- $t \sim 10^{17} s$ Formación de estructura (cúmulos de galaxias, etc).

11.4 La radiación de fondo de microondas

Esta radiación, descubierta en 1964 por Penzias y Wilson, corresponde a un cuerpo negro de temperatura

$$T = 2.7 \text{ K}.$$

Es isótropa con una precisión de 10^{-5} , una vez substraída la anisotropía dipolar causada por el movimiento peculiar de la Tierra hacia Virgo, que es de unos 600 km/s . Gracias a los satélites COBE y WMAP, se ha conseguido detectar la estructura de sus anisotropías con mucha precisión, lo que ha revolucionado la cosmología observacional.

Podemos reescribir la ecuación básica de la siguiente manera. Definamos la *densidad crítica*

$$\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}$$

(verificar dimensiones, por favor) y multipliquemos por $\frac{3}{4\pi GR^2}$, obteniendo

$$\rho_c - \frac{\rho_0}{R^3} - \frac{\Lambda}{8\pi G} - \frac{3k}{4\pi GR^2} = 0$$

que se suele escribir como una regla de suma

$$\Omega_m + \Omega_\lambda + \Omega_k = 1$$

siendo

$$\begin{aligned}\Omega_m &\equiv \frac{\rho}{\rho_c} \\ \Omega_\lambda &\equiv \frac{\Lambda}{8\pi G} \\ \Omega_k &\equiv \frac{3k}{4\pi GR^2}\end{aligned}$$

Estudios de las curvas de velocidad de las galaxias, y otros, han llevado a la conclusión inexorable de que sólo el 20% de la materia gravitacionalmente activa es visible. El resto (o sea, el 80%) es lo que se llama *materia oscura*, cuya naturaleza es completamente desconocida, aunque se sabe que su ecuación de estado es normal, en el sentido de que

$$p = \xi\rho$$

con

$$0 \leq \xi \leq 1$$

El descubrimiento de su naturaleza es uno de los problemas abiertos más interesantes en el campo de las astropartículas.

Por otra parte, uno de los resultados observacionales más excitantes de los últimos tiempos es la de que el universo se encuentra actualmente en expansión exponencial; a la causa de esta expansión se la llama *energía oscura*. De momento

los datos son compatibles con que esa energía sea simplemente una constante cosmológica. La energía oscura es con mucha diferencia la componente más importante de la energía del universo (72%), en tanto que la materia oscura representa el 23% y la materia visible el 5%.

Es decir, que

$$\Omega_\Lambda \sim 0.7$$

y

$$\Omega_m \equiv \Omega_v + \Omega_{dm}$$

con $\Omega_m \sim 0.3$ pero $\Omega_v \sim 0.05$.

La ecuación de estado de la energía oscura es muy próxima a la correspondiente a la energía del vacío

$$p = -\rho$$

Además se cree que el universo muy primitivo ha pasado por una fase de expansión exponencial muy rápida, llamada *inflación*.

12. Tema avanzado: Cosmología newtoniana

El propio Newton ya intentó una descripción del Universo usando la ley de la gravitación universal. La única razón por la que no tuvo éxito, ni él ni ninguno de sus epígonos es debido la hipótesis de que el universo era estático, hipótesis que la observación reveló falsa (Hubble). La cosmología newtoniana tal y como la formularon Milne y MacCrea en 1934 se rige por unas ecuaciones que son idénticas a las de la cosmología relativista de Friedmann, pero mucho más sencillas de interpretar. Naturalmente sabemos que la cosmología newtoniana no es correcta (no es capaz de incorporar los fenómenos electromagnéticos); para nosotros es simplemente un atajo para deducir unas ecuaciones que se pueden deducir rigurosamente en el marco de la relatividad general.

Aproximaremos todo el contenido material del universo por un fluido (esto también se hace en relatividad general).

Postularemos además que para todos los observadores comóviles el modelo presenta el mismo aspecto, siempre que efectúen sus observaciones al mismo tiempo. A este postulado le llamaremos *principio cosmológico*. Ello no es más que el llevar al extremo la postura de que la Tierra no ocupa una posición privilegiada en el Universo; simplemente postulamos que no hay puntos privilegiados en absoluto. Ya veremos que este principio es muy predictivo.

Fijémonos en uno concreto, O_1 , que observa un cierto punto P del substrato, situado a una distancia \vec{r}_1 , y que se mueve con una cierta velocidad \vec{v}_1 respecto de O . Supondremos que puede resumir todas sus observaciones en las funciones $\vec{v}_1(\vec{r}_1, t)$, así como $\rho_1(\vec{r}_1, t)$ y $p(\vec{r}_1, t)$.

Supongamos ahora un segundo observador O_2 , que está situado a una distancia \vec{r}_2 con respecto al primer observador, O . Este segundo observador determinará las características del mismo punto P : $\vec{v}_2(\vec{r}_2, t)$, $\rho_2(\vec{r}_2, t)$ y $p_2(\vec{r}_2, t)$ (en realidad debemos de escribir $\rho_1 = \rho_2 \equiv \rho$ y $p_1 = p_2 \equiv p$, porque la densidad y la presión están definidas independientemente del observador).

Ahora bien, para que los dos observadores, O_1 y O_2 tengan la misma imagen del universo, es necesario que \vec{v}_2, ρ y p sean las mismas funciones de \vec{r}_2 y de t que \vec{v}_1, ρ y p lo son de \vec{r}_1 y de t .

La velocidad del segundo observador respecto del primero es $\vec{v}(\vec{r}_2)$, ya que por hipótesis es un observador comóvil. La velocidad del punto P respecto de este segundo observador está entonces determinada por la (muy desprestigiada) ley newtoniana de adición de velocidades

$$\vec{v}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, t) = \vec{v}(\vec{r}_1, t) - \vec{v}(\vec{r}_2, t)$$

y además

$$\rho(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, t) = \rho(\vec{r}_1, t)$$

$$p(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, t) = p(\vec{r}_1, t)$$

Esto implica que la velocidad depende linealmente de la distancia:

$$\vec{v}(\vec{r}) = H(t)\vec{r}$$

donde V ha de ser un escalar (en vez de una matriz) si suponemos isotropía. Asimismo

$$\begin{aligned} p &= p(t) \\ \rho &= \rho(t) \end{aligned} \tag{12.1}$$

La ecuación para la velocidad se integra inmediatamente

$$\dot{\vec{r}} = R(t)\vec{r}$$

con la condición inicial

$$R(t_0) = 1$$

de forma que

$$H(t) = \frac{\dot{R}}{R}$$

ya que

$$\vec{v} = \dot{R}\vec{r}_0 = \frac{\dot{R}}{R}\vec{r}$$

La constatación de la recesión de las galaxias lejanas por Hubble¹³, mediante la medida del correspondiente corrimiento hacia el rojo de las rayas espectrales, fue precisamente lo que convenció a la comunidad científica de que el universo estaba en expansión. Sin embargo, es notable que las soluciones de la GR que representan un Universo en expansión fueron encontradas por el físico ruso Alexander Friedman tres años antes, en 1922, y redescubiertas por Lemaître en 1925.

En realidad el corrimiento hacia el rojo de los fotones emitidos en R_1 al ser observados en R_0 es

$$1 + z = \frac{R_0}{R_1}$$

que efectivamente implica un corrimiento hacia el rojo en un universo en expansión.

la RG implica que el corrimiento hacia el rojo de los fotones emitidos en R_E al ser observados en R_O es

$$\frac{\lambda_O}{\lambda_E} \equiv 1 + z = \frac{R_O}{R_E} \sim \frac{R_E + \dot{R}_E(t_O - t_E)}{R_E} \sim 1 + H_E \frac{d}{c}$$

El valor corriente de la constante de Hubble es

$$H_0 = 70.0 \pm 4.0 \text{ Km/s.Mpc}$$

¹³Y de hecho el descubrimiento mismo de que son objetos extragalácticos mediante medidas de corrimiento hacia el rojo de las rayas espectrales tomadas en el observatorio de Mount Wilson en California en 1925

La prueba que se considera definitiva de la existencia del *big bang* es la observación de la radiación fósil de $T \sim 3$ grados Kelvin (microondas) debida a Penzias y Wilson. Esta radiación es el residuo del gas de partículas, antipartículas, fotones, etc en equilibrio en el universo primordial. Como la temperatura del universo va bajando, llega un momento en el que la radiación se desacopla, y entonces su temperatura simplemente va disminuyendo debido a la expansión, manteniendo su carácter de cuerpo negro.

Por otra parte, la ecuación de continuidad para la corriente de materia, $\vec{j} \equiv \rho \vec{v}$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

Pero

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 3H(t)\rho$$

de forma que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3\frac{\dot{R}}{R}\rho(t) = 0$$

que implica

$$\rho = \frac{\rho_0}{R(t)^3}$$

siendo ρ_0 el valor de la densidad cuando $R(t) = R_0 = 1$.

Esta ecuación es de una importancia trascendental. Efectivamente, conlleva que si existe un instante en el que

$$R(t_*) = 0$$

que *no* quiere decir en absoluto que el volumen del universo sea cero ni nada por el estilo; entonces la densidad de materia también satisface que

$$\rho(t_*) = \infty$$

Ésta, junto con otras propiedades similares, nos motiva a caracterizar el instante $t = t_*$ como una singularidad. Claramente la física sólo es capaz de predecir de un lado de la singularidad; por ello se le suele denotar por el nombre de *big bang* (gran explosión) un nombre debido al astrofísico inglés Fred Hoyle. Naturalmente las singularidades radican en las ecuaciones matemáticas, no en la naturaleza; es imposible medir algo divergente. Lo que indica siempre la aparición de una singularidad en nuestras ecuaciones es que el nivel de descripción de la realidad que se está empleando no es el adecuado, y hay que sustituirlo por otro más profundo. En el caso que nos ocupa, este nivel sería el de la gravedad cuántica, nivel del que todavía no poseemos suficiente control como para efectuar predicciones fiables.

Como veremos, todos los modelos que nosotros estudiamos poseen esta propiedad de que existe un cierto instante t_* tal que $R_* = 0$, es decir que son soluciones con un big bang. Estudios más profundos efectuados en el marco de la relatividad general

(los llamados teoremas de Penrose y Hawking) demuestran que esta es una propiedad de una gran clase de soluciones cosmológicas.

El que podíamos considerar *estado inicial predictivo* de la cosmología corresponde pues a un tiempo ligeramente superior a t_* , pero en el que la temperatura es mucho más elevada que la masa de todas las partículas elementales, de forma que el universo primitivo se postula descrito por un sistema en equilibrio termodinámico compuesto por todas las partículas elementales conocidas. Debido al redshift cosmológico, la temperatura en los instantes posteriores escala como

$$T = T_* \frac{R}{R_*}$$

de tal forma que disminuye a medida que el universo se expande. De esta forma aparecen primero los hadrones a partir de los quarks, los átomos a partir de protones neutrones y electrones (a este proceso se le llama *nucleosíntesis*), las moléculas más complicadas, y finalmente, por un mecanismo de condensación gravitacional, las estructuras que darán lugar a los cúmulos de galaxias, y a las galaxias ellas mismas. Es la *formación de estructura en el Universo*, aún no completamente entendido.

La segunda ley de Newton (que se llama ecuación de Euler en el caso fluido) se escribe

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} + \vec{\nabla} p = \vec{\mathcal{F}}_g$$

donde la *densidad de fuerza gravitatoria* se infiere de la fuerza total que actúa sobre un punto \vec{r} debido a toda la masa contenida en una esfera de radio r

Efectivamente, recordemos que Newton demostró que

- Toda distribución de masa esféricamente simétrica afecta gravitacionalmente a los objetos de prueba como si toda la masa estuviese concentrada en el centro de la esfera.
- En el interior de una cáscara esférica (hueca) un objeto prueba no experimenta fuerza gravitatoria alguna.

Estos teoremas se demuestran sin dificultad usando la formulación gaussiana de la ley de Newton

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi\rho$$

lo cual implica que

$$\int_{\partial V} \vec{g} \cdot \vec{n} dS = -4\pi GM$$

y por consiguiente,

$$\vec{\mathcal{F}}_g \equiv -G \left(\frac{4\pi}{3} r^3 \rho(t) \right) \rho(t) \frac{\vec{r}}{r^3} = -G \frac{4\pi}{3} \rho(t)^2 \vec{r}$$

Ahora bien,

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \dot{H}\vec{r} + H\vec{r} \cdot H = (\dot{H} + H^2) \vec{r}$$

De forma que la ecuación de Euler se escribe

$$(\dot{H} + H^2) \vec{r} = -G \frac{4\pi}{3} \rho(t) \vec{r}$$

lo que implica

$$(\dot{H} + H^2) = -G \frac{4\pi}{3} \frac{\rho_0}{R^3}$$

o lo que es lo mismo,

$$\ddot{R}R^2 = -G \frac{4\pi}{3} \rho_0$$

Esto implica en particular que un universo estático sólo puede existir en ausencia de materia. Si tenemos en cuenta los efectos cuánticos, sabemos que existe en general una energía del vacío no nula, que es constante e independiente del tiempo. Esto nos obliga a modificar la ecuación anterior

$$\ddot{R}R^2 = -G \frac{4\pi}{3} \rho_0 - G \frac{4\pi}{3} \rho_{vac} R^3$$

Einstein llamaba *constante cosmológica* a la cantidad

$$\Lambda \equiv -4\pi G \rho_{vac}$$

$\lambda \equiv \frac{\Lambda}{c^4}$ tiene dimensiones de L^{-2} .

Reescribamos la ecuación anterior como

$$\ddot{R}\dot{R} = -G \frac{4\pi}{3} \rho_0 \frac{\dot{R}}{R^2} + \frac{\Lambda}{3} \dot{R}R$$

Es claro que esta ecuación se puede integrar con el resultado

$$\frac{\dot{R}^2}{2} - \frac{C}{R} - \frac{\Lambda}{6} R^2 = k$$

Podemos adquirir intuición sobre los modelos de universo asimilándolos al movimiento unidimensional de una partícula de masa unidad en un potencial

$$V(R) \equiv -\frac{C}{R} - \frac{\Lambda}{6} R^2$$

Estas ecuaciones son *exactamente* las mismas que se obtienen en relatividad general con la hipótesis de homogeneidad e isotropía, tal y como hicieron Friedmann y Lemaître, aunque con una interpretación física ligeramente distinta. La constante

k en particular, indica la curvatura de las secciones de tres-espacio $t = \text{constante}$, y se puede normalizar a los valores $\pm 1, 0$.

Todos los modelos cosmológicos homogéneos e isótropos se obtienen sin dificultad de las ecuaciones anteriores.

Quizás es interesante estudiar el caso en que la densidad de materia $\rho_0 = C = 0$ se anula. (El caso general se puede estudiar con técnicas análogas).

Para empezar, si $k = 0$, entonces necesariamente $\Lambda \geq 0$, y la ecuación reza

$$\frac{dR}{R} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} dt$$

lo cual implica una expansión exponencial

$$R = R_0 e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}(t-t_0)}$$

que corresponde a la llamada fase de de Sitter.

Podemos reescribir la ecuación básica de la siguiente manera. Definamos la *densidad crítica*

$$\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}$$

(verificar dimensiones, por favor) y multipliquemos por $\frac{3}{4\pi GR^2}$, obteniendo

$$\rho_c - \frac{\rho_0}{R^3} - \frac{\Lambda}{8\pi G} - \frac{3k}{4\pi GR^2} = 0$$

que se suele escribir como una regla de suma

$$\Omega_m + \Omega_\lambda + \Omega_k = 1$$

siendo

$$\Omega_m \equiv \frac{\rho}{\rho_c}$$

$$\Omega_\lambda \equiv \frac{\Lambda}{8\pi G}$$

$$\Omega_k \equiv \frac{3k}{4\pi GR^2}$$

Estudios de las curvas de velocidad de las galaxias, y otros, han llevado a la conclusión inexorable de que sólo el 20% de la materia gravitacionalmente activa es visible. El resto (o sea, el 80%) es lo que se llama *materia oscura*, cuya naturaleza es completamente desconocida, aunque se sabe que su ecuación de estado es normal, en el sentido de que

$$p = \xi \rho$$

con

$$0 \leq \xi \leq 1$$

El descubrimiento de su naturaleza es uno de los problemas abiertos más interesantes en el campo de las astropartículas.

Por otra parte, uno de los resultados observacionales más excitantes de los últimos tiempos es la de que el universo se encuentra actualmente en expansión exponencial; a la causa de esta expansión se la llama *energía oscura*. De momento los datos son compatibles con que esa energía sea simplemente una constante cosmológica. La energía oscura es con mucha diferencia la componente más importante de la energía del universo (72%), en tanto que la materia oscura representa el 23% y la materia visible el 5%.

Es decir, que

$$\Omega_\Lambda \sim 0.7$$

y

$$\Omega_m \equiv \Omega_v + \Omega_{dm}$$

con $\Omega_m \sim 0.3$ pero $\Omega_v \sim 0.05$.

La ecuación de estado de la energía oscura es muy próxima a la correspondiente a la energía del vacío

$$p = -\rho$$

Además se cree que el universo muy primitivo ha pasado por una fase de expansión exponencial muy rápida, llamada *inflación*.

References

- [1] P.T. Matthews, *Introduction to quantum mechanics*, (Mc Graw Hill, London 1974)
- [2] Wolfgang Rindler, *Introduction to Special Relativity* (Clarendon Press; Oxford, UK. 2 edition, 1991)
- [3] P. Landshoff, A. Metherell, G. Rees, *Essential quantum physics* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2001)
- [4] E.F. Taylor and J.A. Wheeler, *Spacetime physics* (WH Freeman and Co, San Francisco, 1992)

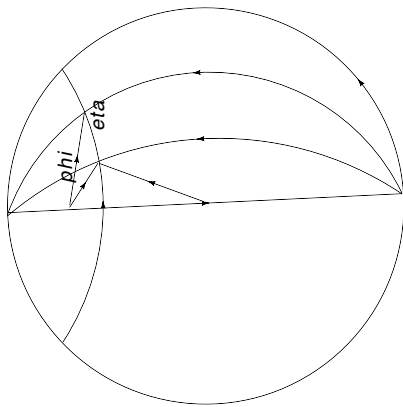


Figure 10: Area en la esfera.

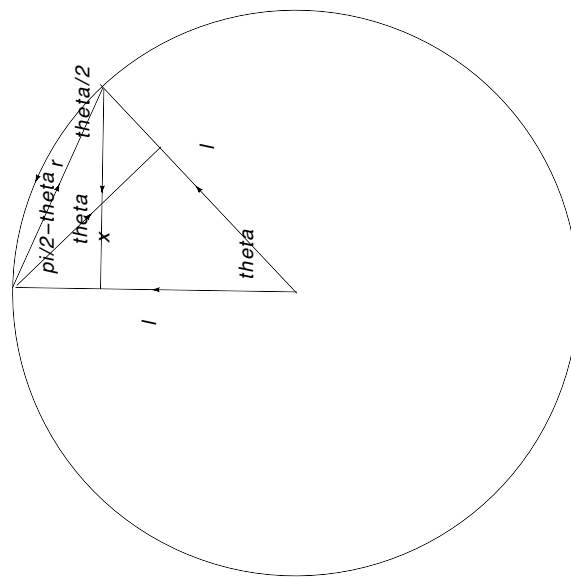


Figure 11: Déficit de área.

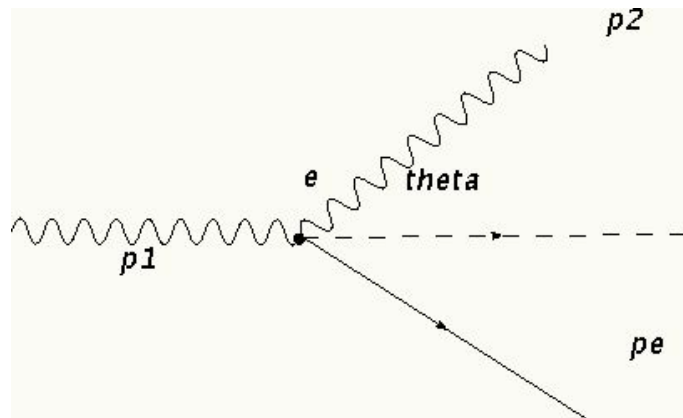


Figure 12: efecto Compton.

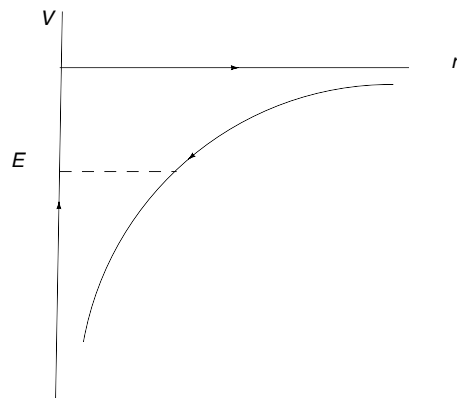


Figure 13: Potencial de Coulomb.

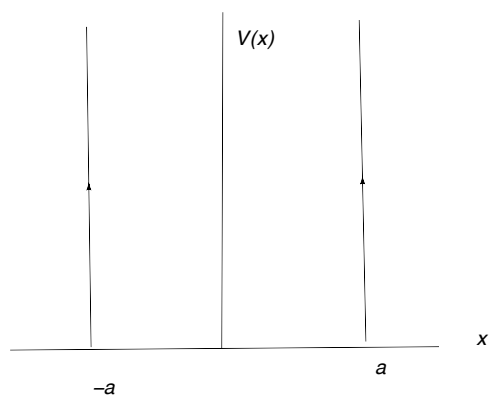


Figure 14: Pozo cuadrado infinito.

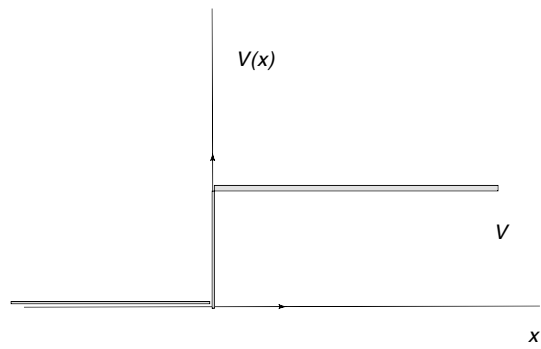
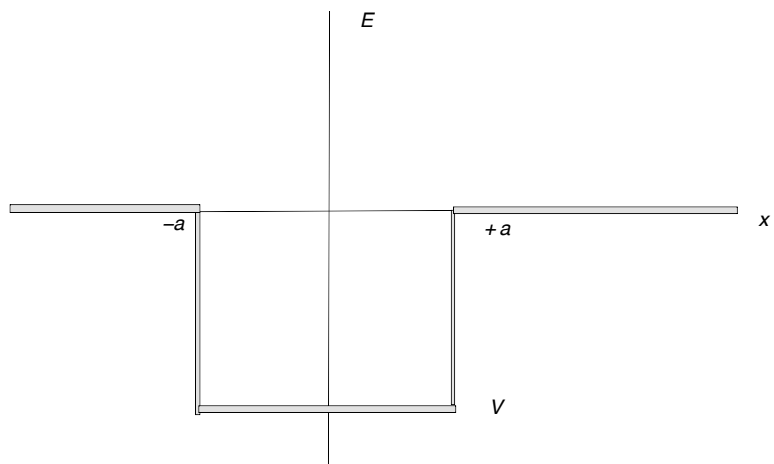


Figure 15: Potencial escalón.



pozo

Figure 16: Pozo cuadrado.

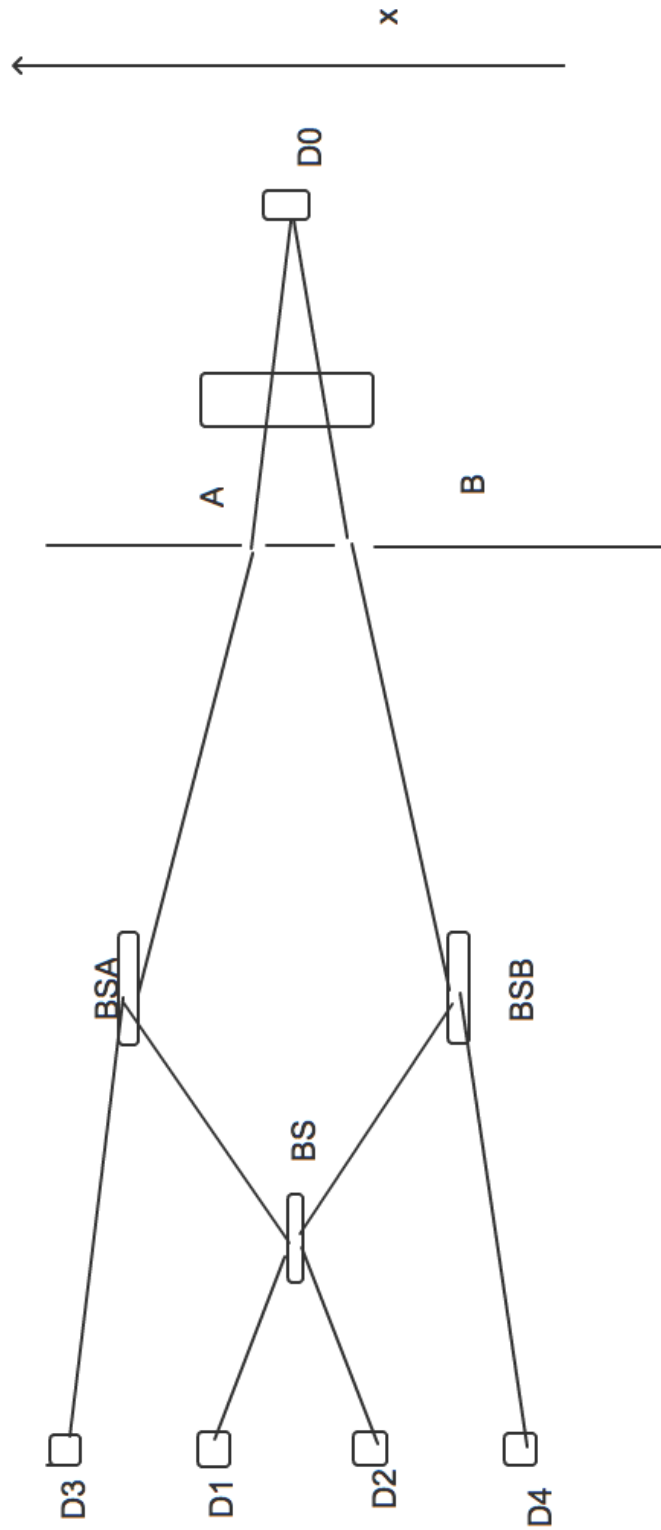


Figure 17: Doble rendija con marcadores y borradores cuánticos.

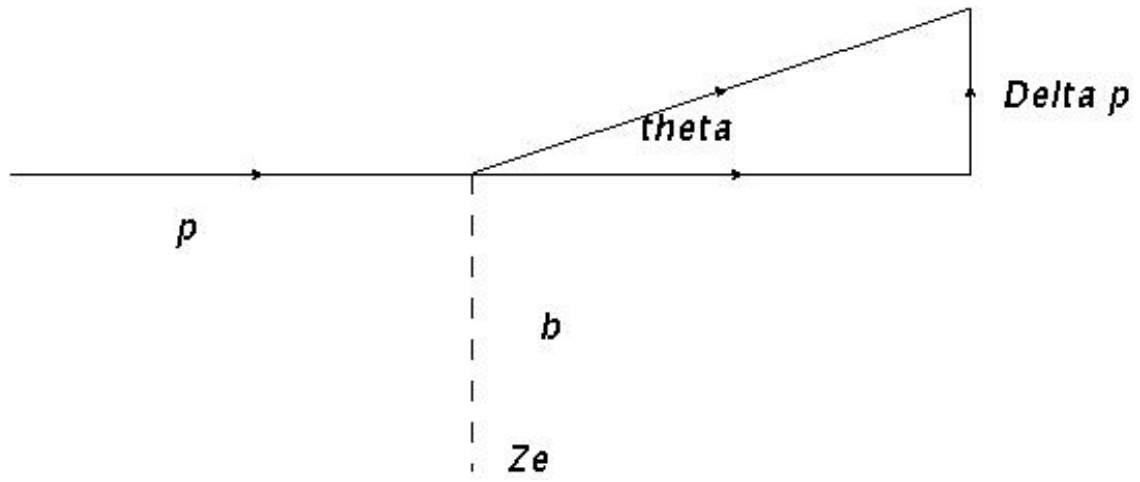


Figure 18: Transferencia de momento.

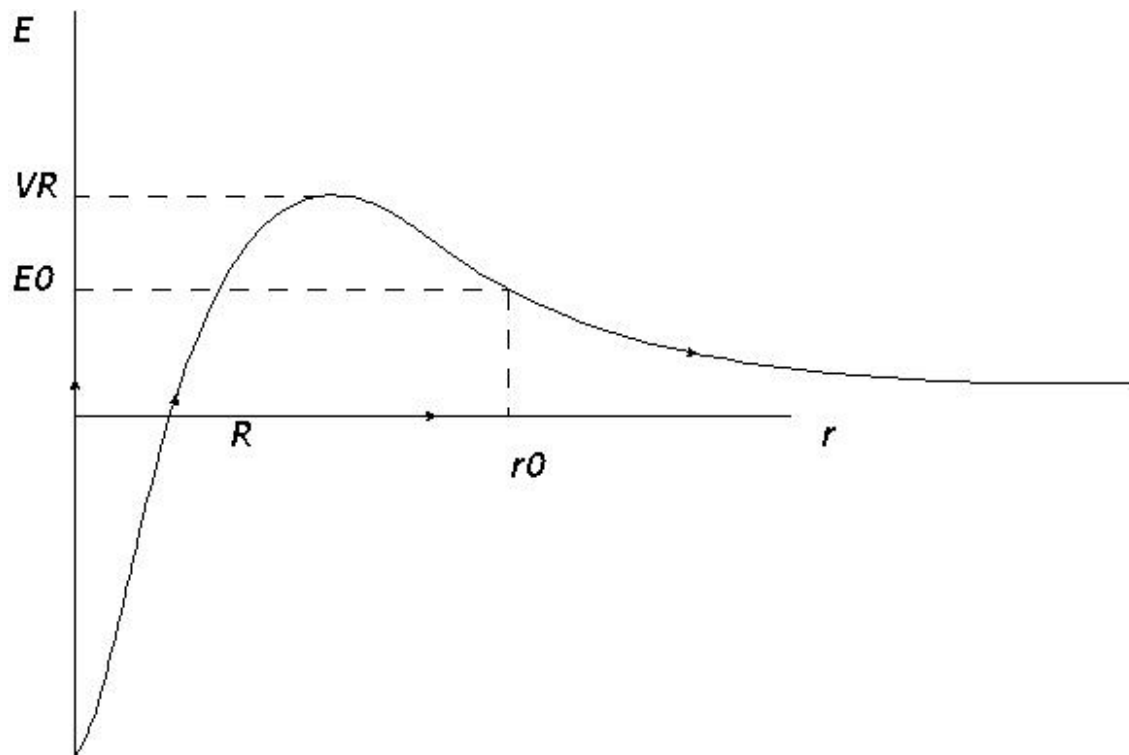


Figure 19: Potencial nuclear.

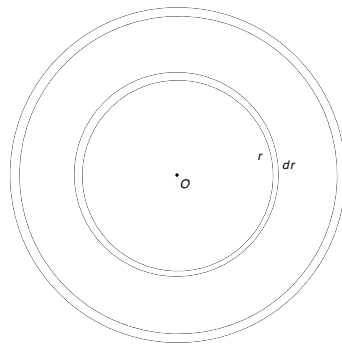


Figure 20: Paradoja de Olbers.

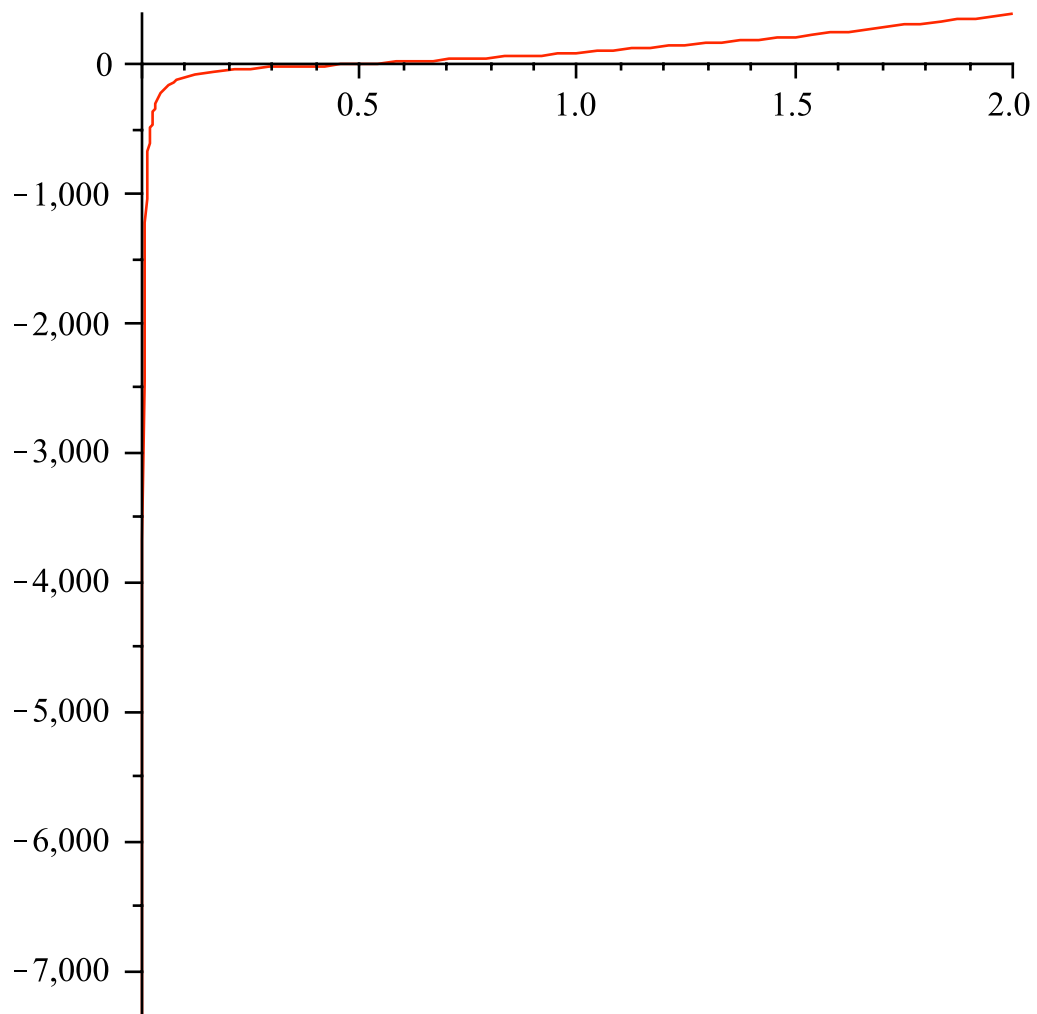


Figure 21: Potencial cosmológico para constante cosmológica negativa.

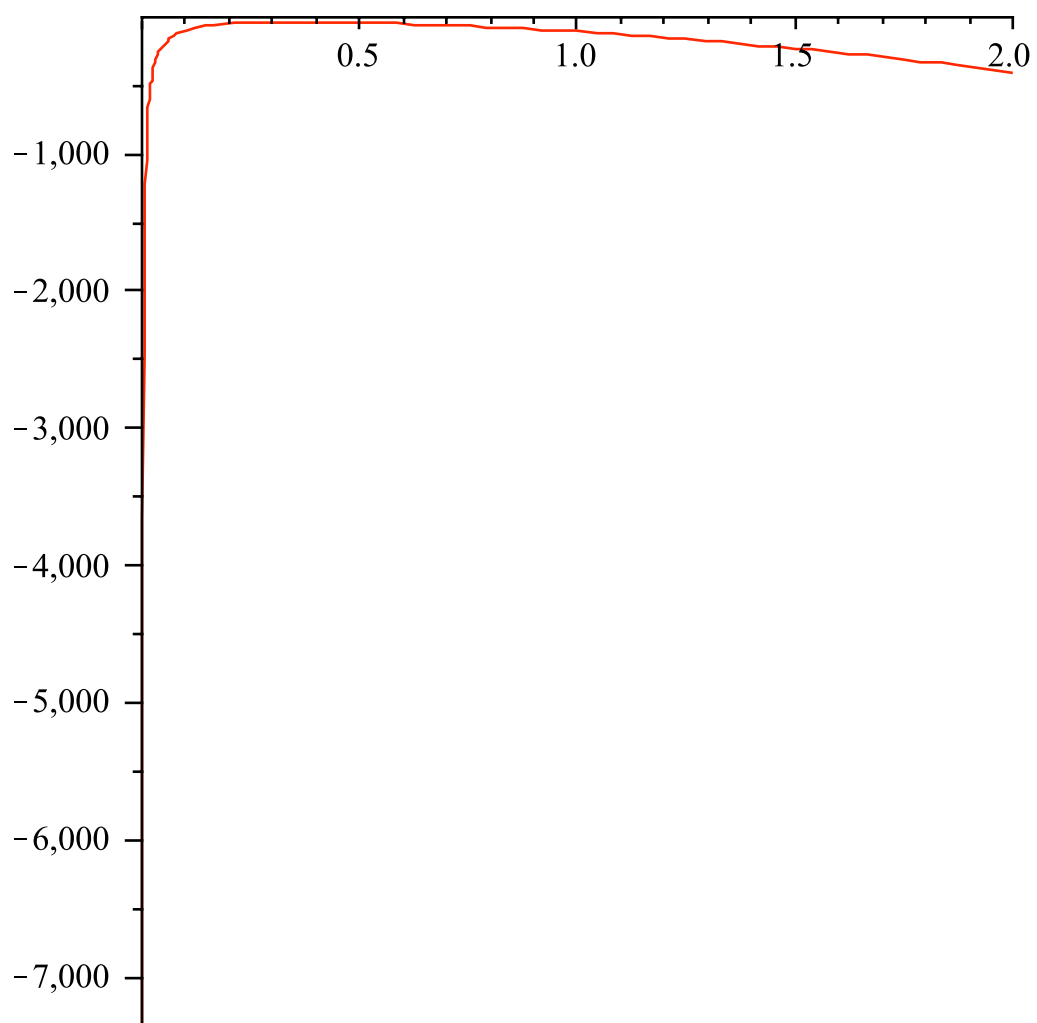


Figure 22: Potencial cosmológico para constante cosmológica positiva.

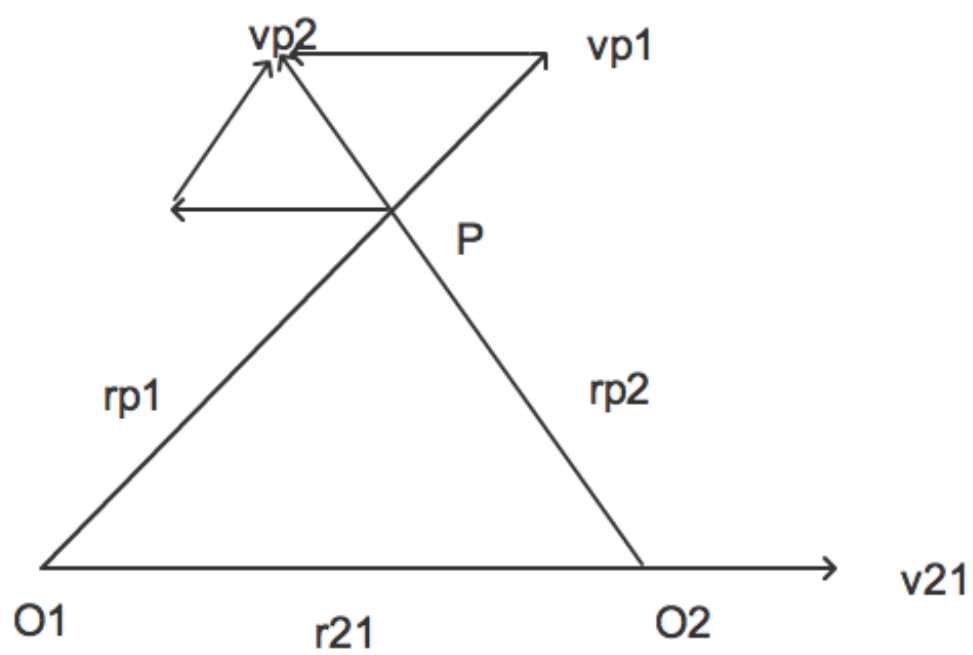


Figure 23: Campo cósmico de velocidades.

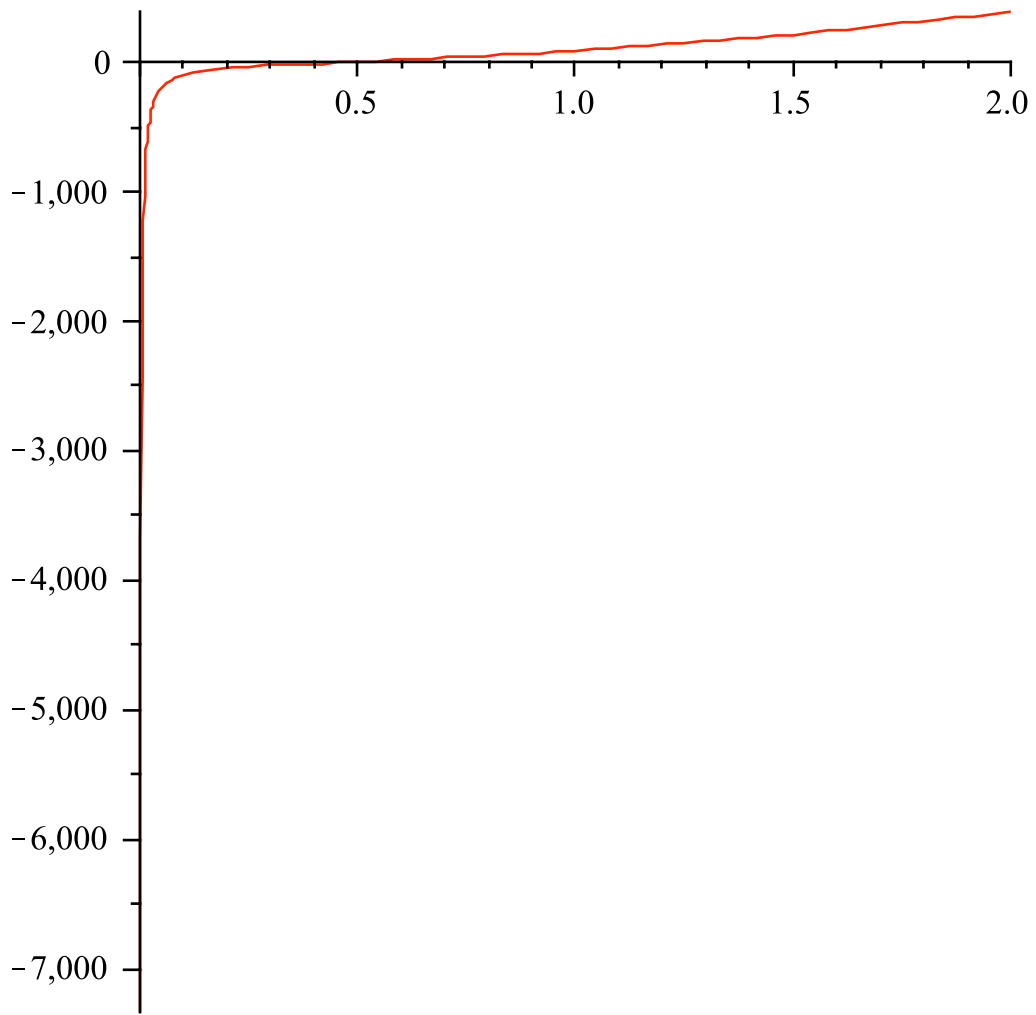


Figure 24: Potencial cosmológico para constante cosmológica negativa.

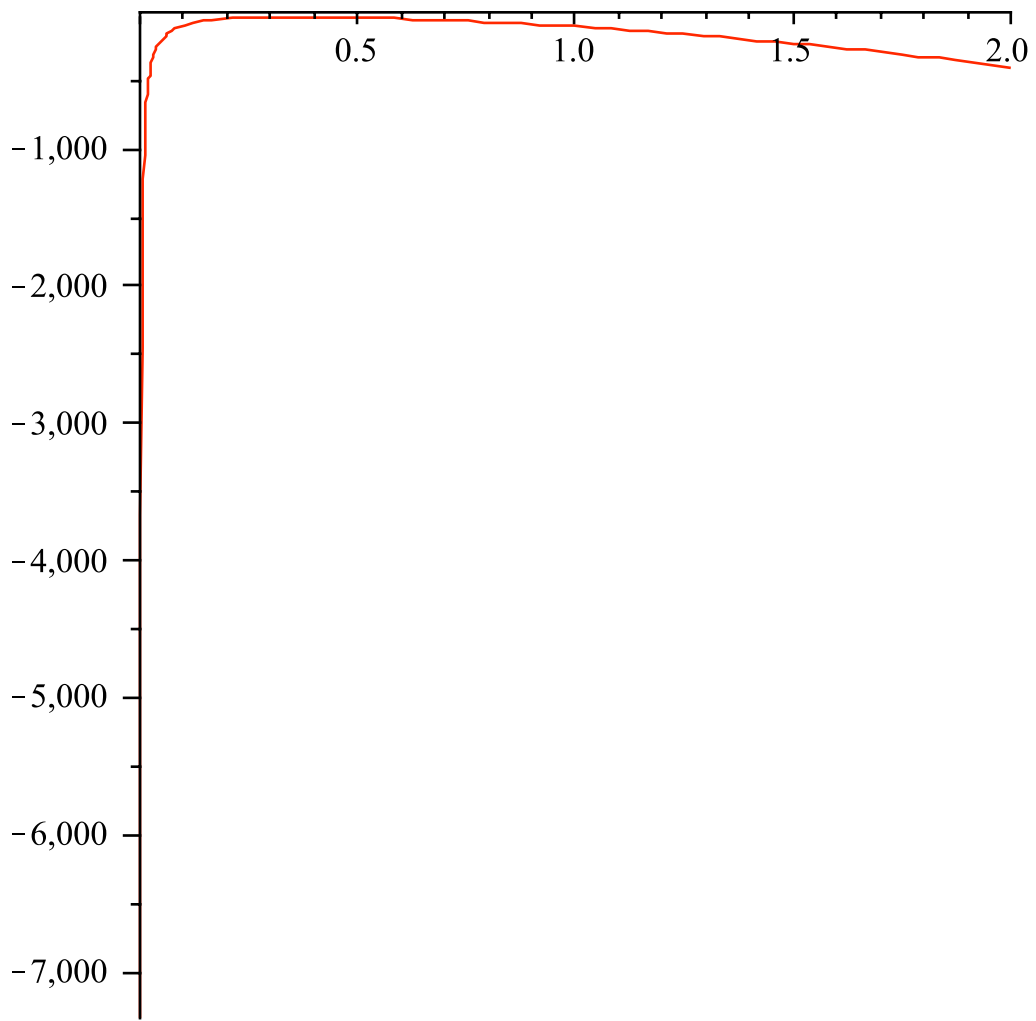


Figure 25: Potencial cosmológico para constante cosmológica positiva.