

Problemas de Métodos Matemáticos I

Curso 2004-2005. Hoja 6

1. Calcular los puntos críticos del sistema

$$\frac{dx}{dt} = 3x - x^2 - xy,$$
$$\frac{dy}{dt} = y + y^2 - 3xy.$$

Estudiar su estabilidad y dibujar un retrato del espacio de fases.

2. Considerar el sistema casi lineal

$$\frac{dx}{dt} = y + hx(x^2 + y^2),$$
$$\frac{dy}{dt} = -x + hy(x^2 + y^2).$$

- a) Demostrar que el origen es un punto centro del sistema lineal correspondiente ($h = 0$).
- b) Suponer que $h \neq 0$. Reescribir el sistema de ecuaciones diferenciales en coordenadas polares.
- c) Suponer que $h = 1$. Integrar la ecuación diferencial radial y estudiar el comportamiento de r cuando $t \rightarrow +\infty$. ¿Qué se puede decir del carácter del punto crítico $(0, 0)$?
- d) Suponer que $h = -1$. Hacer lo mismo que en el apartado anterior.
3. En el caso de un sistema de dos dimensiones que *no* es lineal, las trayectorias cerca de un punto crítico aislado pueden presentar una estructura considerablemente más complicada que cerca de nodos, centros, puntos silla y espiral. Por ejemplo, considerar el sistema

$$\frac{dx}{dt} = x(x^3 - 2y^3),$$
$$\frac{dy}{dt} = y(2x^3 - y^3).$$

Este sistema no es casi lineal ya que el origen no es un punto crítico *aislado* del sistema lineal trivial asociado ($x' = 0$, $y' = 0$). Resolver la ecuación homogénea de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(2x^3 - y^3)}{x(x^3 - 2y^3)}$$

y demostrar que las trayectorias del sistema son *Hojas de Descartes* de la forma

$$x^3 + y^3 = 3cxy,$$

donde c es una constante arbitraria. Dibujar un retrato del espacio de fases.

4. **Especies en competencia. Supervivencia de una sola especie.** Considerar dos especies cuyas poblaciones son $x(t)$, $y(t)$, en el instante t , y que compiten por los mismos alimentos en un nicho ecológico común. La dinámica de estas dos poblaciones viene caracterizada por el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 60x - 4x^2 - 3xy, \\ \frac{dy}{dt} &= 42y - 2y^2 - 3xy.\end{aligned}$$

Calcular los puntos críticos, estudiar su estabilidad y dibujar un retrato del espacio de fases. Mostrar que existe una línea *separatriz* en el espacio de fases que separa dos regiones en las que sólo una de las dos especies sobrevive finalmente.

5. **Especies en competencia. Coexistencia pacífica.** Dos especies cuyas poblaciones son $x(t)$, $y(t)$, en el instante t , compiten por los mismos alimentos en un nicho ecológico común. La dinámica de estas dos poblaciones viene caracterizada por el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 60x - 3x^2 - 4xy, \\ \frac{dy}{dt} &= 42y - 3y^2 - 2xy.\end{aligned}$$

Calcular los puntos críticos, estudiar su estabilidad y dibujar un retrato del espacio de fases. Demostrar que, a diferencia del problema anterior, es posible la coexistencia pacífica de las dos especies.

6. **Sistemas depredador-presa. Equilibrio estable.** Una especie de depredadores $y(t)$ se alimenta de otra, la presa $x(t)$, que a su vez se nutre de un tercer alimento ampliamente disponible en el sistema. La dinámica de estas dos poblaciones viene caracterizada por el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 5x - x^2 - xy, \\ \frac{dy}{dt} &= -2y + xy.\end{aligned}$$

Calcular los puntos críticos, estudiar su estabilidad y dibujar un retrato del espacio de fases. Demostrar que es posible que las presas y los depredadores coexistan con poblaciones en equilibrio estable.

7. **Sistemas depredador-presa. Equilibrio inestable.** Una especie de depredadores $y(t)$ se alimenta de otra, la presa $x(t)$, que a su vez se nutre de un tercer alimento ampliamente disponible en el sistema. La dinámica de estas dos poblaciones viene caracterizada por el

sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - 2x - xy,$$
$$\frac{dy}{dt} = y^2 - 4y + xy.$$

Calcular los puntos críticos, estudiar su estabilidad y dibujar un retrato del espacio de fases. Demostrar que para cada una de estas especies no hay más alternativa que crecer sin cota alguna o la extinción.

8. **Vibraciones no lineales amortiguadas.** En ocasiones es posible estimar las correcciones no lineales a la ley de Hooke para la fuerza que ejerce un muelle sobre un objeto de masa m , $F = -kx - \beta x^3$, sometido a una fuerza de rozamiento $F_R = -\gamma x'$. Considerar el caso $m = 1$ kg, $k = 5$ N/m, $\beta = 5/4$ N/m³, $\gamma = 2$ N.s/m.
- Escribir las ecuaciones del movimiento en forma de un sistema de dos ecuaciones de primer orden.
 - Estudiar los puntos críticos del sistema en ausencia de rozamiento, $\gamma = 0$, así como su estabilidad. Dibujar un retrato del espacio de fases y determinar las separatrices.
 - Hacer lo mismo que en el apartado anterior pero en presencia de rozamiento. ¿Cómo se modifican las separatrices?

9. Una partícula de masa unidad $m = 1$ se mueve en un potencial

$$V(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3.$$

Determinar los puntos críticos de la dinámica de la partícula, el retrato del espacio de fases, y buscar la correspondencia de las trayectorias con la forma del potencial.

10. Una partícula de masa unidad $m = 1$ se mueve en un pozo doble de potencial

$$V(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 1)^2.$$

Determinar los puntos críticos de la dinámica de la partícula, el retrato del espacio de fases, y buscar la correspondencia de las trayectorias con la forma del potencial. ¿Cuál es el período de una partícula que empieza en reposo en $x = \sqrt{2}$?