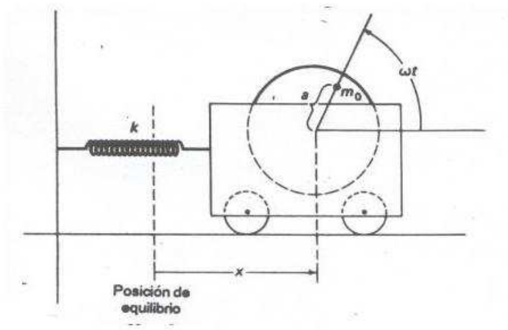
Problemas de Métodos Matemáticos I

Curso 2004-2005. Hoja 4

1. **Sistema vagón con volante**. Suponer que un vagón de masa $m - m_0$ lleva sujeto en su interior un volante de masa m_0, con el centro de gravedad descentrado una distancia a de su centro geométrico, y con velocidad angular ω radianes por segundo.



El vagón está sujeto a un muelle de constante k. El desplazamiento del centro de gravedad del vagón respecto de la posición de equilibrio se denota por $x(t)$.

a) Demostrar que el desplazamiento $y(t)$ del centro de gravedad de la carreta más el volante está dado por

$$y(t) = x(t) + \frac{m_0\, a}{m} \cos \omega t\,.$$

b) Ignorar el rozamiento y aplicar la segunda ley de Newton para obtener la ecuación diferencial que satisface $x(t)$,

$$m\, x'' + k\, x = m_0\, a\, \omega^2 \cos \omega t\,,$$

que es equivalente a la de una masa sujeta a un muelle bajo el efecto de una fuerza externa armónica simple con amplitud $F_0 = m_0\, a\, \omega^2$ y frecuencia ω. Tal sistema es un modelo razonable de una lavadora que se carga de frente y en el cual la ropa se descentra. Calcular la solución general en ausencia de rozamiento.

c) Suponer que el vagón se desplaza con una fuerza de rozamiento dada por $F_R = \gamma\, x'$, con γ constante. Calcular la solución periódica estacionaria resultante. ¿Cómo dependen la amplitud R y la fase δ de la frecuencia externa ω? Pintar la función $R(\omega)$.

d) ¿Para qué valor de ω la amplitud R es máxima? Calcular el factor de amplificación para dicha frecuencia y la anchura de la resonancia.

2. Una lavadora que se carga de frente está montada sobre un grueso cojinete de goma que actúa como muelle; el peso del tambor (25 kg) deprime el cojinete exactamente 2.5 cm. La lavadora se carga con 5 kg de ropa que quedan desplazados 20 cm del eje. Cuando el tambor gira a una velocidad de ν revoluciones por minuto (rpm) ejerce una fuerza vertical sobre la lavadora $F_0 \cos \omega t$, con $F_0 = m_0\, a\, \omega^2$ y $\omega = 2\pi\nu$. Si la constante de rozamiento del sistema es de $\gamma = 0.1$ N/(m/s), ¿A qué velocidad ν ocurrirán vibraciones resonantes? Comentar el reultado.

3. Un edificio tiene dos pisos. El primer piso está sujeto al suelo rígidamente y el segundo es una masa m de 16 toneladas de peso. La estructura elástico del edificio se comporta como un muelle, que resiste a los desplazamiento horizontales del segundo piso, y que requiere una fuerza horizontal de 5 toneladas para que el segundo piso se desplace 30 cm. Un temblor de tierra hace que el piso oscile horizontalmente una amplitud A_0 con una frecuencia angular ω, resultando una fuerza horizontal externa $F(t) = m\, A_0\, \omega^2 \sin \omega t$ sobre el segundo piso.

   a) ¿Cuál es la frecuencia natural (en Hz) de las oscilaciones del segundo piso?

   b) Si el suelo sufre una oscilación cada 2.25 s, con una amplitud de 5 cm, ¿Cuál es la amplitud de las oscilaciones forzadas resultantes del segundo piso?

4. Un circuito eléctrico LRC con resistencia $R = 60\,\Omega$, inductancia $L = 5H$ y capacitancia $C = 0.01F$, se acopla a una batería de fuerza electromotriz decreciente $E(t) = 100\, e^{-2t}$ V. Si inicialmente el circuito tenía carga y corriente nulas,

   a) Calcular $Q(t)$ y $I(t)$ en todo tiempo. Pintar las soluciones.

   b) ¿Cuál es la carga máxima del condensador para $t > 0$? ¿En qué instante se alcanza? ¿Cuánto vale la corriente en ese momento?

5. Al circuito LRC del problema anterior se conecta una red de corriente alterna de 220 V y 50 Hz. Calcular la solución periódica estacionaria resultante. Suponer que podemos variar la capacitancia del condensador variando el área de sus placas. ¿Cuánto debe valer la capacitancia para que el circuito entre en resonancia? ¿Qué corriente pasa por el circuito en ese momento?

6. **Un problema de persecución**. Suponer que un gato parte del origen y corre con velocidad v en línea recta y dirigido al norte hacia un árbol localizado en el punto $A(0, d)$ sobre el eje y. Al mismo tiempo un perro parte del punto $(c, 0)$ sobre el eje x, persiguiendo al gato. El perro corre, en cada instante, directamente hacia el gato. Determinar si el gato puede llegar al árbol antes de que el perro lo alcance. Sean $G(0, vt)$ y $P(x, y)$ las posiciones del gato y del perro, respectivamente, después de un tiempo t. El perro recorre una trayectoria curva $y = y(x)$, cuya tangente está dada por $dy/dx = -(vt - y)/x$, de modo que $x\, y' = y - vt$. Diferenciando respecto a x, se obtiene $x\, y'' = -v\, dt/dx$. Ahora, si s mide la longitud de arco a lo largo de la trayectoria del perro, desde $(c, 0)$ a (x, y), entonces $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = -\, dx\, \sqrt{1 + (y')^2}$ (el signo $-$ proviene del hecho de que s crece a medida que x decrece). La velocidad del perro es $ds/dt = u$ constante. Finalmente, la ecuación diferencial que satisface la trayectoria del perro está dada por

$$x\, y'' = r\, \sqrt{1 + (y')^2}\,,$$

   con $r = v/u$. Esta es una ecuación de segundo órden en la que falta la variable dependiente y. Es posible reducir el órden de la ecuación haciendo el cambio de variables $p = y'$ y por tanto $y'' = dp/dx$. Integrar la ecuación resultante con la condición inicial $p(x = c) = 0$. Integrar otra vez para encontrar la trayectoria $y(x) = \int p\, dx$, con condición inicial $y(x = c) = 0$. Sean las velocidades $v = 6$ m/s y $u = 9$ m/s, y supongamos que el perro se encuentra inicialmente a $c = 10$ m del gato y éste a $d = 10$ m del árbol, ¿Alcanzará el perro al gato? ¿Y si $c = 8$ m? ¿En qué tiempo lo hará?