Problemas de Métodos Matemáticos I

Curso 2004-2005. Hoja 2

1. **Coeficientes discontínuos**. Algunas veces se presentan ecuaciones diferenciales lineales en las que una o las dos funciones $p(x)$ y $q(x)$ tienen discontinuidades de salto. Si x_0 es uno de esos puntos de discontinuidad, entonces es necesario resolver la ecuación por separado para $x < x_0$ y $x > x_0$. Después, las dos soluciones se acoplan de modo que y sea contínua en x_0; lo cual se logra al hacer una elección adecuada de las constantes de integración. Esto se ilustra en los siguientes ejemplos. Observar en cada caso que también es posible hacer contínua y' en x_0.

   a) Resolver el problema con valor inicial

$$y' + 2y = q(x)\,, \qquad y(0) = 0\,,$$

   donde

$$q(x) = \begin{cases} 1\,, & 0 \geq x \geq 1\,, \\ 0\,, & x > 1\,. \end{cases}$$

   b) Resolver el problema con valor inicial

$$y' + p(x)\,y = 0\,, \qquad y(0) = 1\,,$$

   donde

$$p(x) = \begin{cases} 2\,, & 0 \geq x \geq 1\,, \\ 1\,, & x > 1\,. \end{cases}$$

2. **Ecuación de Clairaut**. Una ecuación diferencial de la forma

$$y = x\,y' + f(y')$$

   se llama una ecuación de Clairaut.

   a) Demostrar que la familia paramétrica de lineas rectas descritas por

$$y = C\,x + f(C)$$

   es solución general de la ecuación.

   b) Sea la ecuación de Clairaut

$$y = x\,y' - \frac{1}{4}(y')^2\,.$$

   Demostrar que la línea recta

$$y = C\,x - \frac{1}{4}C^2$$

   es tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto $(C/2, C^2/4)$. Explicar por qué esto significa que $y = x^2$ es una solución singular de la ecuación de Clairaut dada. Dibujar la solución singular y varios elementos de la familia paramétrica de rectas solución de la ecuación.

3. Un paracaidista salta desde un avión a 3000 m del suelo. Suponer que la fuerza de rozamiento es proporcional al cuadrado de la velocidad, y que el paracaidista

   a) abre inmediatamente su paracaídas, con coeficiente de arrastre $\rho = 0.075$, ¿Cuál será su velocidad terminal? ¿Cuándo se alcanza dicha velocidad (con un error del 1%)?

   b) ¿Cuánto tardará en llegar al suelo el paracaidista?

   c) Si éste desciende en caída libre durante 30 s, con $\rho = 0.00075$, antes de abrir su paracaídas, ¿Cuándo llegará al suelo? ¿Qué velocidad tendrá entonces?

4. Una cuerda de $L = 1.5$ m de largo se encuentra enrollada en el borde de una mesa, con $x = 0.5$ m colgando fuera de la mesa y en reposo. En el instante $t = 0$ la cuerda empieza a desenrollarse y caer gradualmente por la fuerza de la gravedad que tira de la parte colgante.

   a) Suponiendo que la fuerza de rozamiento es despreciable, ¿Cuánto tardará la cuerda en caer completamente de la mesa?

   [*Ayuda*: La cuerda tiene un densidad lineal de masa w g/m. Sustituir $dv/dt = v(dv/dx)$ y resolver la ecuación correspondiente para $v(x)$. Luego integrar $v = dx/dt = v(x)$. Para ello hacer uso de la integral

$$\int_1^3 \frac{u\,du}{\sqrt{u^3 - 1}} = 1.9574\ldots \qquad]$$

   b) Considerar ahora que la cuerda, en lugar de estar apilada, se extiende sobre la mesa perpendicularmente al borde, con 0.5 m colgando fuera de la mesa y en reposo. En el instante $t = 0$ la cuerda empieza a deslizarse fuera de ésta, sin rozamiento.

   i) Deducir la ecuación diferencial que satisface el extremo de la cuerda,

$$L\,x'' = g\,x\,.$$

   ii) Notese que la variable independiente t ha desaparecido de la ecuación diferencial y que las condiciones iniciales son $x(0) = 1$ y $x'(0) = 0$. Encontrar la solución.
   iii) ¿Cuánto tiempo tardara el último trozo de la cuerda en caer de la mesa?

   [*Ayuda*: Sustituir $x' = v$, $x'' = dv/dt = v(dv/dx)$ y resolver la ecuación. Luego integrar $v = dx/dt = v(x)$. Para ello hacer uso de la integral

$$\int_1^3 \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \ln(3 + 2\sqrt{2}) \qquad]$$

   c) Considerar ahora que la mesa ejerce sobre la cuerda extendida del apartado anterior una fuerza de rozamiento que es proporcional a la velocidad de la cuerda, $F_R = -w\,v^2$. ¿Qué tiempo tardara en caer la cuerda? Comparar con el resultado del apartado anterior.

   [*Ayuda*: Para ello hacer uso de la integral

$$\int_1^3 \frac{u^2\,du}{\sqrt{u^5 - 1}} = 1.7555\ldots \qquad]$$

5. Un modelo de crecimiento que describe correctamente la dinámica de algunas poblaciones está dado por la ecuación de Gompertz:

$$\frac{dN}{dt} = rN \ln \frac{K}{N},$$

donde r y K son dos constantes positivas.

a) Trazar la gráfica de dN/dt contra N, encontrar los puntos críticos y determinar si son estables o inestables.

b) Para $0 \leq N \leq K$, determinar dónde la gráfica de $N(t)$ es cóncava y dónde convexa.

c) Para cada N en el intervalo $0 < N \leq K$, demostrar que dN/dt, según la ecuación de Gompertz, nunca es menor que dN/dt según la ecuación logística.

d) Resolver la ecuación de Gompertz, sujeta a la condición inicial $N(0) = N_0$.

[Ayuda: Se sugiere hacer el cambio de variables $u = \ln(N/K)$.]

e) Para una población con ritmo de crecimiento $r = 0.71$ por año, $K = 80.5$ millones, y $N_0 = 0.25\,K$, aplicar el modelo de Gompertz para encontrar la población al cabo de dos años.

f) Para los mismos datos del apartado e), encontrar el tiempo τ en el que $N(\tau) = 0.75\,K$.

6. **Epidemias**. El empleo de métodos matemáticos para el estudio de la propagación de enfermedades contagiosas se remonta al menos a los trabajos de Daniel Bernoulli sobre la viruela, en 1760.

a) Suponer que una población puede dividirse en dos partes: aquellos que tienen una enfermedad dada y pueden contagiarla a los demás, y aquellos que no la tienen pero son susceptibles de adquirirla. Sea x la proporción de individuos susceptibles, e y la proporción de individuos infectados; entonces $x + y = 1$. Suponer que la enfermedad se propaga por contacto entre los miembros enfermos y los sanos de la población. Además, suponer que los miembros de los dos grupos se desplazan libremente entre sí, de modo que el número de contactos es proporcional al producto xy. De aquí obtener el problema con valor inicial

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \alpha\, y\,(1-y)\,, \\ y(0) &= y_0\,, \end{aligned}$$

donde α es un factor constante positivo e y_0 es la proporción inicial de individuos infectados.

b) Encontrar los puntos de equilibrio de la población y determinar si son estables o inestables.

c) Resolver el problema con valor inicial del primer apartado y verificar que las conclusiones a las que se llegó en b) son correctas. Demostrar que $y(t) \to 1$ cuando $t \to \infty$. ¿Qué conclusión se puede sacar de este resultado?

7. Algunas enfermedades, como la fiebre tifoidea, son propagadas en gran medida por *portadores*, individuos que pueden transmitir la enfermedad aunque no presentan síntomas evidentes. Sean x e y, respectivamente, la proporción de individuos susceptibles y portadores en la población. Suponer que se identifican los portadores y se retiran de la población a una razón β, de modo que

$$\frac{dy}{dt} = \beta\, y\,.$$

Suponer también que la enfermedad se propaga a una razón proporcional al producto de x e y; entonces

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha\, x\, y\,.$$

a) Determinar y en cualquier instante t al resolver la primera ecuación, sujeta a la condición inicial $y(0) = y_0$.

b) Aplicar el resultado anterior para hallar x en cualquier instante t al resolver la segunda ecuación, sujeta a la condición inicial $x(0) = x_0$.

c) Encontrar la proporción de la población que escapa de la epidemia, al hallar el valor límite de x cuando $t \to \infty$.

8. **Reacciones químicas**. Una reacción química de segundo orden comprende la interacción (colisión) de una molécula de una sustancia P con una molécula de otra sustancia Q para producir una molécula de una nueva sustancia X; esto se denota por $P+Q \to X$. Suponer que p y q, con $p \neq q$, son las concentraciones iniciales de P y Q, respectivamente, y sea $x(t)$ la concentración de X en el instante t. Entonces, $p-x(t)$ y $q-x(t)$ son las concentraciones de P y Q en el instante t, y la rapidez a la que ocurre la reacción se expresa mediante la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = \alpha\,(p-x)(q-x)\,,$$

donde α es una constante positiva.

a) Si $x(0) = 0$, determinar el valor límite de $x(t)$ cuanto $t \to \infty$, sin resolver la ecuación diferencial. Luego, resolver el problema con valor inicial y encontrar $x(t)$ para todo t.

b) Si las sustancias P y Q son las mismas, entonces $p = q$ y la ecuación de evolución se sustituye por

$$\frac{dx}{dt} = \alpha\,(p-x)^2\,.$$

Si $x(0) = 0$, determinar el valor límite de $x(t)$ cuanto $t \to \infty$, sin resolver la ecuación diferencial. Luego, resolver el problema con valor inicial y encontrar $x(t)$ para todo t.