Problemas de Métodos Matemáticos I

Curso 2004-2005. Hoja 1

1. **Ecuación de Bernoulli**. A menudo es posible resolver una ecuación diferencial no lineal al realizar un cambio de variable que la convierta en una ecuación lineal. Una clase muy importante de ecuaciones tienen la forma

$$y' + p(x)\, y = q(x)\, y^n$$

y se conocen como ecuaciones de Bernoulli.

a) Demostrar que si $n \neq 0,\ n \neq 1$, entonces la substitución $v = y^{1-n}$ reduce la ecuación de Bernoulli a una ecuación lineal.
b) Resolver las siguientes ecuaciones aplicando la substitución del apartado a):

i) $x^2\, y' + 2x\, y - y^3 = 0, \qquad x > 0$

ii) $y' = ry - ky^2,\quad r > 0,\ k > 0$. Esta ecuación aparece en la dinámica de poblaciones.

iii) $y' = \alpha y - \sigma y^3,\quad \alpha > 0,\ \sigma > 0$. Esta ecuación aparece en el estudio de la estabilidad del flujo de fluidos.

2. **Ecuación de Riccatti**. La ecuación diferencial ordinaria no lineal de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = a(x) + b(x)\, y + c(x)\, y^2$$

se conoce como ecuación de Riccatti. Conocida una solución particular $y_1(x)$ de esta ecuación, mediante la substitución

$$y = y_1(x) + \frac{1}{v(x)}\ ,$$

es posible obtener una solución general que contenga una constante arbitraria.

a) Demostrar que $v(x)$ satisface la ecuación *lineal* de primer orden

$$\frac{dv}{dx} = -[b(x) + 2c(x)\, y_1(x)]\, v - c(x)$$

Mostrar que $v(x)$ tiene una sola constante arbitraria.

b) Resolver las siguientes ecuaciones aplicando el método del apartado a):

i) $y' = 1 + x^2 - 2x\, y + y^2; \qquad y_1(x) = x$

ii) $y' = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{y}{x} + y^2; \qquad y_1(x) = \dfrac{1}{x}$

iii) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\cos^2 x - \sin^2 x + y^2}{2\cos x}; \qquad y_1(x) = \sin x$

3. Encontrar la solución de la ecuación no lineal

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{y}{x} - x\,y^2; \qquad y(0) = 1$$

por dos métodos independientes:

a) Mediante el método de la ecuación de Riccatti. ¿Qué valor debe tomar la constante de integración para satisfacer la condición inicial?

[*Ayuda*: Una solución particular es la función $y_1(x) = \frac{1}{x}$.]

b) Mediante el método de cambio de variables. ¿Qué valor debe tomar la constante de integración para satisfacer la condición inicial?

[*Ayuda*: Considerar el cambio de variables $u = x\,y$.]

c) Comentar los dos métodos. ¿Qué rango de aplicación tiene la solución del problema?

4. a) Demostrar que una ecuación de la forma $y = F(p)$, donde $p = dy/dx$, puede resolverse de la siguiente manera:
i) Derivar la ecuación respecto a x.
ii) Integrar la ecuación obtenida en i) para obtener x como función de p, esto es $x = G(p)$.
De esta manera, ambas ecuaciones $y = F(p)$ y $x = G(p)$ forman una representación paramétrica de la solución.

b) Resolver la ecuación diferencial

$$y + \ln p = 0\,,$$

donde $p = dy/dx$, con el método del apartado a).

c) Resolver la ecuación directamente y comparar las soluciones.

5. La propagación de una simple acción en una población grande (p.ej., los conductores que encienden los faros de su automóvil al atardecer) a menudo depende parcialmente de circunstancias externas (que oscurezca) y parcialmente de una tendencia a imitar a los demás que ya han realizado la acción en cuestión. En este caso, la proporción $y(t)$ de personas que ya han realizado la acción puede describirse por la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = (1 - y)[x(t) + by]\,,$$

donde $x(t)$ mide el estímulo externo y b es un coeficiente de imitación.

a) Observar que esta ecuación es de Riccatti. Aplicar la transformación sugerida en el problema 2. y hallar la ecuación lineal que satisface $v(t)$.

[*Ayuda*: Notar que $y_1(t) = 1$ es una solución particular.]

b) Calcular $v(t)$ en el caso de que $x(t) = at$, con a constante. Expresar la solución en términos de la función error.

6. **Trayectorias ortogonales**. Un problema geométrico bastante común es hallar la familia de curvas que se intersectan ortogonalmente en cada punto con una familia dada de curvas. Se dice que cada una de estas familias de curvas constituyen las trayectorias ortogonales de la otra.

   a) Considerar la familia de parábolas $y = kx^2$, donde k es una constante. Trazar la gráfica de dicha ecuación para varios valores de k. Encontrar una expresión para la pendiente de la parábola que pasa por un punto dado, de modo que esa expresión contenga las coordenadas $(x,\ y)$ del punto, pero no el parámetro k.

   [*Ayuda*: Derivar la ecuación y eliminar k.]

   b) Escribir la ecuación diferencial que satisfacen las trayectorias ortogonales a $y = kx^2$.

   [*Ayuda*: Las pendientes de curvas ortogonales son recíprocas negativas.]

   c) Resolver la ecuación obtenida en b) y determinar las trayectorias ortogonales. Trazar varios elementos de esta familia de curvas.

7. Determinar la ecuación diferencial de las siguientes familias de curvas:

   a) circunferencias: $(x-a)^2 + y^2 = a^2$

   b) elipses: $x^2 - xy + y^2 = a^2$

   c) hipérbolas: $xy = a$

   d) parábolas: $2ay + x^2 = a^2$

8. En cada uno de los casos a) - d) del problema 7 aplicar el método del problema 6 para encontrar la familia de trayectorias ortogonales a la familia de curvas dada. En cada caso trazar la gráfica de la familia y la de sus trayectorias ortogonales.

9. Se lanza un objeto de masa m verticalmente hacia arriba con velocidad inicial v_0. Si el cuerpo se ve sometido a la acción de la gravedad y a una fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad $(-\alpha v)$, determinar la altura máxima alcanzada y el tiempo que tarda en alcanzarla.

10. Dada la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay + bx + e}{cy + dx + f}$$

   Demostrar que:

   a) Si $ad - bc \neq 0$, entonces puede reducirse a una ecuación homogénea mediante el cambio de variables: $v = y - k;\ u = x - h,$ con h y k adecuados.

   b) Si $ad - bc = 0$, entonces puede reducirse a una ecuación de variables separadas mediante el cambio de variables: $v = cy + dx$.

11. **La braquistócrona**. Uno de los problemas más famosos de la historia de las matemáticas es el de la braquistócrona: la curva a lo largo de la cual una partícula se deslizará sin rozamiento en un tiempo mínimo, de un punto P a otro Q, donde éste último se encuentra más bajo que el primero, pero no directamente debajo.

   Al resolver este problem es conveniente tomar el origen como el punto superior P y orientar los ejes de forma que el eje y sea vertical hacia abajo. El punto inferior tiene las coordenadas $(x_0,\ y_0)$. Entonces, es posible demostrar que la curva de tiempo mínimo queda definida por una función $y = \phi(x)$ que satisface la ecuación diferencial

   $$(1 + y'^2)\, y = k^2\,,$$

   donde k^2 es cierta constante positiva a determinar.

   a) Despejar y' de la ecuación. ¿Por qué es necesario elegir la raiz cuadrada positiva?

   b) Hacer el siguiente cambio de variables $y = k^2 \sin^2 t$, y demostrar que la ecuación obtenida en el apartado a) toma entonces la forma

   $$2k^2 \sin^2 t\, dt = dx\,.$$

   c) Si se toma $\theta = 2t$, demostrar que la solución de la ecuación anterior que pasa por el origen se puede expresar por

   $$x = k^2(\theta - \sin\theta)/2, \qquad y = k^2(1 - \cos\theta)/2.$$

   Estas ecuaciones son ecuaciones paramétricas de la solución de la primera ecuación, que pasa por $(0,\ 0)$. La gráfica de dichas ecuaciones se llama cicloide. Es posible eliminar θ y obtener la solución en la forma $y = \phi(x)$; sin embargo, resulta más facil usar las ecuaciones paramétricas. Si se hace una elección adecuada de la constante k, entonces la cicloide también pasa por el punto $(x_0,\ y_0)$ y es la solución del problema de la braquistócrona. Hallar la constante k para el caso concreto $(x_0,\ y_0) = (\pi,\ 2)$.

12. En un acelerador de partículas lineal, un electrón que parte con velocidad inicial v_0 es acelerado por un campo eléctrico constante de magnitud E. Determinar la velocidad final

   a) al cabo de t segundos.

   b) cuando ha recorrido x metros.

   [*Ayuda*: Hay que tener en cuenta el efecto relativista que hace que la masa del electrón varíe con su velocidad de acuerdo con la expresión

   $$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,,$$

   donde m_0 es la masa en reposo del electrón. Considerar la segunda ley de Newton en la forma

   $$\frac{d}{dt}(mv) = F \quad \text{en a)} \qquad y \qquad v\,\frac{d}{dx}(mv) = F \quad \text{en b)}$$

   donde $F = eE$ es la fuerza aplicada al electrón debido al campo eléctrico.