Métodos Matemáticos I. Grupo 21

Curso 2003-04. Exámen Extraordinario. 14 Septiembre 2004

1. **Circuito eléctrico** RLC. (5 puntos)

   a) Demostrar usando las leyes de Kirchhoff que el circuito eléctrico de la figura

   satisface el sistema de ecuaciones diferenciales

$$L\,\frac{dI}{dt} = V + E(t)\,,$$

$$C\,\frac{dV}{dt} = -I - \frac{V}{R} - \frac{E(t)}{R}\,,$$

   donde I es la corriente que pasa por la bobina, V es la caida de potencial a través del condensador y $E(t)$ la fuerza electromotriz externa.

   b) Demostrar que los autovalores de la matriz de coeficientes son reales y diferentes si $L > 4CR^2$; y complejos conjugados si $L < 4CR^2$.

   c) Suponer que $R = 2.5\,\Omega$, $C = 0.2$ F y $L = 1$ H. Encontrar en este caso la solución general del sistema, así como la solución particular, en función de la matriz fundamental.

   d) Encontrar $I(t)$ y $V(t)$ en el caso $E_0 = 0$, para las condiciones iniciales $I(0) = 1$ A y $V(0) = 3$ V. Dibujar esquemáticamente la evolución del sistema en el plano (V, I).

   e) ¿Cuánto tardará el sistema en pasar por primera vez por $V(t_1) = 0$? ¿Y por $I(t_2) = 0$?

   f) Determinar los valores límite de $I(t)$ y $V(t)$ cuando $t \to \infty$. ¿Dependen estos valores de las condiciones iniciales?

   g) Suponer ahora que se acopla una fuente de alimentación como se indica en la figura, y que ésta suministra una fuerza electromotriz externa $E_{\rm ext}(t) = 2\,\exp(-t)$ V. Determinar la solución del sistema que satisface las condiciones iniciales $I(0) = V(0) = 0$. ¿Volverá a pasar la solución por el origen en un tiempo finito?

2. **Péndulo simple**. (5 puntos)

Consideremos una bola de masa m colgando de una barilla rígida y sin masa de longitud l. Sea $\omega^2 = g/l$.

a) Calcular las ecuaciones de movimiento de la bola para un ángulo con la vertical, θ, arbitrario. Determinar la energía cinética y potencial del péndulo.

b) Encontrar los puntos críticos del sistema y determinar su estabilidad a partir de los autovalores y autovectores del sistema linealizado.

c) Pintar el espacio de fases. ¿Para qué valores de la energía aparecen órbitas cerradas? ¿Cuál es la velocidad inicial máxima que se le puede dar a la bola desde $\theta = \theta_0$ y aún así mantener un movimiento periódico?

d) Calcular el período de un péndulo que parte del reposo desde un ángulo θ_0 arbitrario. Para un ángulo de 60°, ¿que diferencia porcentual existe con el período que se obtiene en el límite de ángulos pequeños (sistema linealizado)?

[Ayuda: La integral elíptica completa de primera especie se define como

$$K[m] = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\phi}}\,, \qquad \text{donde } m = k^2\,.$$

Sugerencia: Definir $k = \sin\frac{\theta_0}{2}$ y hacer el cambio de variables $\sin\frac{\theta}{2} = k\sin\phi$. Usar el valor numérico $K[1/4] = 1.6857$ en el apartado d).]