Métodos Matemáticos I. Grupos 21 y 26

Curso 2002-03. Exámen Final. 6 Septiembre 2003

1. **Partícula cargada**. (6 puntos)

   Una partícula de masa m y carga eléctrica q se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ en el plano $(x,\, y)$, bajo la influencia de un campo magnético uniforme paralelo al eje z, $\mathbf{B} = B\,\mathbf{e_z}$.

   a) Demostrar que el movimiento de la partícula se puede describir por un sistema de ecuaciones
$$m\,\mathbf{x}'' = A\,\mathbf{x}', \qquad \text{con} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & qB \\ -qB & 0 \end{pmatrix}$$

   b) Demostrar que la partícula sigue un movimiento circular en el plano $(x,\, y)$, con frecuencia angular $\omega = qB/m$.

   c)* Demostrar que la energía de la partícula se conserva, a pesar de que la fuerza es proporcional a la velocidad.

   d) Suponiendo que la partícula parte del punto $\mathbf{x} = (r_0,\, 0)$, con velocidad $\mathbf{x}' = (0,\, -\omega\, r_0)$, demostrar que la trayectoria de la partícula es una circunferencia de radio r_0 centrada en el origen.

   e) Si además del campo magnético, la partícula cargada se mueve bajo la influencia de un campo eléctrico uniforme en la dirección del eje x, $\mathbf{E} = E\,\mathbf{e_x}$, determinar las ecuaciones del movimiento de la partícula.

   f) Suponer en este caso que la partícula parte en reposo del origen. Demostrar que la trayectoria de la partícula es una cicloide escrita en forma paramétrica
$$x = a(1 - \cos\omega t)\,,$$
$$y = a(\sin\omega t - \omega t)\,,$$
   donde $a = E/\omega B$ y $\omega = qB/m$.

   g)* Demostrar que también aquí la energía de la partícula se conserva.

   [Ayuda: La fuerza de Lorentz que actúa sobre una partícula cargada está dada por $\mathbf{F} = q\,(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$.]

   [Nota: los apartados con asterisco son opcionales y sirven para subir nota.]

2. **Oscilaciones anarmónicas**. (4 puntos)

Una partícula de masa unidad $m = 1$ se mueve en un potencial

$$V(x) = 3\,x^2 - x^3\,.$$

a) Escribir la ecuación del movimiento de la partícula como un sistema de dos ecuaciones de primer orden.

b) Determinar los puntos críticos de la dinámica de la partícula.

c) Linealizar el sistema alrededor de dichos puntos criticos y determinar su caracter.

d) Dibujar el espacio de fases de la partícula y obtener la ecuación de la separatriz.

e) Buscar la correspondencia de las trayectorias en el espacio de fases con la forma del potencial.

f) Calcular el periodo del movimiento de la partícula que parte de la posición $x = 1$ con velocidad $\dot{x} = 2$.

[Ayuda: Usar la conservación de la energía y hacer el cambio de variables $u = \sqrt{1 + x}$.]