

Métodos Matemáticos I. Grupo 21

Curso 2004-05. Exámen Cuatrimestral. 26 Enero 2005

1. Soluciones regulares. (3 puntos)

Sea la ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$x y'(x) + n y(x) = f(x),$$

donde n es un número entero positivo y $f(x)$ es una función continua y diferenciable en toda la recta real, que satisface $f(0) = 0$.

Demostrar que existe una única solución que es regular en el origen. ¿Cuánto vale en ese caso la constante de integración? ¿Por qué no viola el teorema de existencia y unicidad de soluciones de EDO lineales de primer orden?

Resolver la ecuación en el caso $n = 2$ y $f(x) = 4x^2$. Dibujar la familia uniparamétrica de soluciones, incluida aquella que es regular en el origen.

[Ayuda: Hacer el desarrollo de Taylor de $f(x)$ alrededor del origen.]

2. Partícula moviéndose en un potencial. (3 puntos)

Una partícula de masa unidad $m = 1$ se mueve en un potencial

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4.$$

- Determinar los puntos críticos de la dinámica de la partícula.
- Dibujar el retrato del espacio de fases. ¿Se trata de un sistema conservativo?
- Encontrar la ecuación de la separatriz.
- Buscar la correspondencia de las trayectorias con la forma del potencial.
- Calcular el periodo de las oscilaciones alrededor del punto de equilibrio de partículas que parten del reposo de $x = x_0 < 1$. Demostrar que en el límite $x_0 \rightarrow 0$ recuperamos $T = 2\pi$.

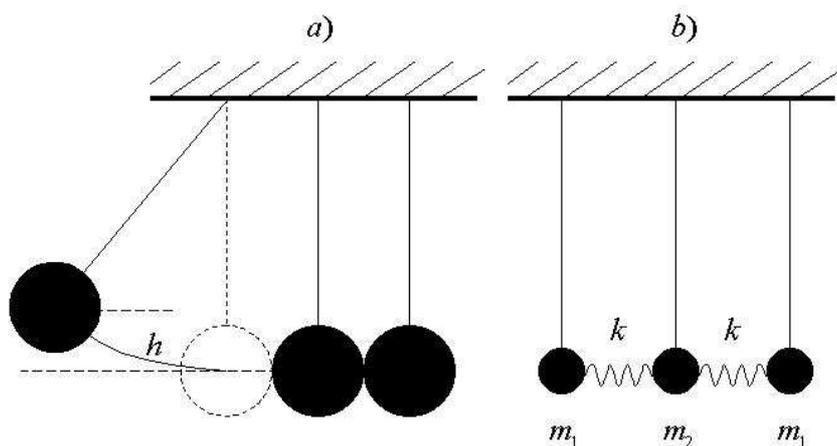
[Ayuda: La integral elíptica completa de primera especie se define como

$$K[m] = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - m \sin^2 \phi}}.$$

Sugerencia: Hacer el cambio de variables $x = x_0 \sin \phi$.]

3. **Esferas de Newton.** (4 puntos)

Tres esferas elásticas de Newton cuelgan de sus respectivos hilos. Se eleva la de la izquierda una altura h , como muestra la figura a) y se suelta. Calcular la altura que alcanzará la esfera de la derecha y el tiempo que tardará en alcanzarlo. Suponed que no hay rozamiento. Nótese que el sistema es equivalente a tres péndulos unidos por dos muelles que actúan bajo compresión pero que al estirarse se sueltan, como en la figura b).



Encontrar los modos normales e interpretarlos. Tomad como datos las masas, $m_1 = 120$ g, $m_2 = 80$ g, la constante de recuperación elástica, $k = 48$ N/m, la altura $h = 1$ mm, y la aceleración de la gravedad $g = 10$ m/s². Suponed que el hilo del que cuelgan las esferas tiene una longitud $l = 40$ cm.

[Ayuda: Estudiar el movimiento unidimensional a lo largo del eje x para las tres esferas elásticas resolviendo el sistema escrito de la forma $\mathbf{x}'' = A\mathbf{x}$. Tomad como instante inicial el del choque de la primera esfera con las otras dos.]