

Métodos Matemáticos I. Grupo 21

Curso 2003-04. Exámen Cuatrimestral. 10 Febrero 2004

1. **Circuito eléctrico RLC.** (4 puntos)

a) Demostrar usando las leyes de Kirchoff que el circuito eléctrico de la figura

satisface el sistema de ecuaciones diferenciales

$$L \frac{dI}{dt} = -R_1 I + V,$$
$$C \frac{dV}{dt} = -I - \frac{V}{R_2} + \frac{E(t)}{R_2},$$

donde I es la corriente que pasa por la bobina y V es la caída de potencial a través del condensador. La fuerza electromotriz alterna es $E(t) = E_0 \sin \omega t$.

b) Hallar la condición sobre R_1 , R_2 , L y C tal que los autovalores de la matriz del sistema homogéneo sean reales y diferentes. Demostrar que en ese caso $I(t) \rightarrow 0$ y $V(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, independientemente de las condiciones iniciales. ¿Ocurrirá lo mismo en el sistema forzado?

c) Encontrar la ecuación de segundo orden que satisface la intensidad de corriente I . ¿Qué relación debe existir entre las constantes R_1 , R_2 , L y C para que el sistema este críticamente amortiguado?

d) ¿Para qué frecuencia ω entra el sistema en resonancia?

e) Sea el circuito de la figura, con $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $L = 1$ H, $C = 0.25$ F, $E_0 = 1$ V y $\omega = 1$ Hz. Encontrar la corriente y el potencial para todo tiempo, sabiendo que en el instante inicial $I(0) = 1$ A y $V(0) = 2$ V. Hallar la expresión de la corriente periódica estacionaria para $t \rightarrow \infty$.

f) Dibujar en el plano (I, V) la evolución temporal del sistema.

2. **Péndulo doble.** (3 puntos)

Sean dos péndulos simples de longitud L y masas m_1 y m_2 , que cuelga uno de otro, y hacen con la vertical un ángulo θ_1 y θ_2 respectivamente. Escribir el Lagrangiano y deducir las ecuaciones de evolución para ángulos arbitrarios.

a) **Oscilaciones libres.**

i) Suponer que las amplitudes de oscilación alrededor de sus posiciones de equilibrio estable son pequeñas, y obtener las siguientes ecuaciones dinámicas: $\mathbf{x}'' = \mathbf{A} \mathbf{x}$, con

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & \alpha^2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

donde $\alpha^2 = (m_2/m_1)/(1 + m_2/m_1)$ es la masa reducida y hemos redefinido el tiempo de forma adecuada.

ii) Calcular los modos normales de oscilación e interpretarlos. Encontrar las coordenadas normales, es decir, aquellas en las cuales \mathbf{A} es diagonal.

iii) Supongamos las siguientes condiciones iniciales: las dos masas se desplazan un ángulo θ_0 de su posición de equilibrio y se sueltan. Calcular la evolución del sistema para todo tiempo, en el caso $m_1 = 3 m_2$.

b) **Oscilaciones forzadas.**

i) Suponer ahora que sobre la masa m_2 actúa una fuerza externa periódica $F_{\text{ext}}(t) = F_0 \cos \omega t$. Encontrar la solución particular del sistema no homogéneo $\mathbf{x}'' = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$.

ii) ¿Cómo dependen las amplitudes de oscilación de cada péndulo de la frecuencia externa? ¿Cuándo entrarán en resonancia? ¿Lo harán los dos a la vez?

3. **Órbitas planetarias.** (3 puntos)

Un planeta solar de masa m se mueve en el plano de la eclíptica bajo el potencial central Newtoniano $V(r) = -GMm/r$, donde M es la masa del sol.

a) Dar las expresiones de las cantidades conservadas por el movimiento, la energía E y el momento angular L por unidad de masa m .

b) Deducir las ecuaciones del movimiento y dibujar el diagrama de fases (r, \dot{r}) . ¿Cuál es la ecuación de la separatriz? Determinar el carácter de los puntos críticos.

c) Eliminando la variable tiempo, encontrar las soluciones $r(\theta)$. Demostrar que son cónicas con excentricidad e y semieje mayor a .

[Ayuda: Usar la variable $u = L^2/(GMr)$]

d) Encontrar las expresiones de E y L en función de e y a . Determinar el periodo de las trayectorias cerradas.

e)* La relatividad general corrige el potencial efectivo Newtoniano añadiéndole un nuevo término $-GML^2/r^3$. Demostrar que las soluciones perturbadas $u = u_0 + u_1$, donde u_0 es la solución Newtoniana, presentan una resonancia. ¿Qué efecto tiene esta perturbación secular sobre las órbitas planetarias?

[Nota: Este apartado es opcional y sirve para subir a matrícula. El parámetro $\alpha \equiv GM/L \ll 1$ para planetas solares.]