Métodos Matemáticos I. Grupos 21 y 26

Curso 2002-03. Exámen Cuatrimestral. 27 Enero 2003

1. **Péndulos acoplados**. (6 puntos)

   Sean dos péndulos simples de longitud L y masa m, acoplados mediante un muelle intermedio, de constante de recuperación k, como en la figura.

   a) **Oscilaciones libres**.
   i) Suponer que las amplitudes de oscilación alrededor de sus posiciones de equilibrio son pequeñas, y obtener las siguientes ecuaciones dinámicas:

$$m\,\frac{d^2x_A}{dt^2} + \frac{m\,g}{L}x_A + k(x_A - x_B) = 0\,,$$

$$m\,\frac{d^2x_B}{dt^2} + \frac{m\,g}{L}x_B - k(x_A - x_B) = 0\,.$$

   ii) Usando las definiciones $\omega_0^2 = g/L$ y $\omega_c^2 = k/m$, reescribir las ecuaciones de la forma $\mathbf{x}'' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, con $\mathbf{A}$ una matriz 2x2 constante.
   iii) Calcular los modos normales de oscilación e interpretarlos. Encontrar las coordenadas normales (aquellas en las cuales la matriz de interacción $\mathbf{A}$ es diagonal) para el sistema acoplado.
   iv) Supongamos las siguientes condiciones iniciales: la masa A se desplaza una cantidad a_0 de su posición de equilibrio y se suelta, mientras que la masa B permanece en reposo en su posición de equilibrio. Calcular la evolución del sistema para todo t. Demostrar que se produce el fenómeno de las pulsaciones.
   v) Demostrar que el movimiento de los dos péndulos acoplados conserva la energía total (cinética más potencial) [Ayuda: Usar las coordenadas normales.]

   b) **Oscilaciones forzadas**.
   Suponer ahora que sobre la masa A actua una fuerza externa periódica $F_{\text{ext}}(t) = F_0 \cos\omega t$. Encontrar la solución particular del sistema no homogéneo $\mathbf{x}'' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$. ¿Cómo dependen las amplitudes de oscilación de cada masa de la frecuencia externa? ¿Y los defasajes? Interpretar los resultados.

c) **Oscilaciones amortiguadas**.
Suponer que los péndulos oscilan sujetos a una fuerza de rozamiento con el aire que es proporcional a la velocidad, $\mathbf{F} = -\gamma\,\dot{\mathbf{x}}$, con γ un coeficiente constante para ambas masas. Encontrar la solución general del sistema de ecuaciones correspondiente. ¿Cambian en algo las frecuencias normales de oscilación? Interpretar los resultados.

2. **Circuito RLC en paralelo**. (4 puntos)

Sea el circuito eléctrico de la figura.

a) Usar las leyes de Kirchhoff para deducir el sistema de ecuaciones

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix},$$

donde I es la corriente que pasa por la bobina y V es la caída de potencial a través del condensador.

b) Encontrar la ecuación de segundo órden que satisface la intensidad de corriente I. ¿Qué valor debería tomar la resistencia para que el sistema estuviera críticamente amortiguado?

c) Suponer que acoplamos en paralelo una fuente de alimentación que suministra una corriente externa $I_{\text{ext}} = I_0 \cos\omega t$. Calcular la intensidad de corriente de la solución periódica estacionaria. ¿Para qué valor de la frecuencia externa entrará el sistema en resonancia? ¿Cuánto valdrá la intensidad de corriente en ese caso? Dibujar la amplitud de la intensidad de corriente como función de la frecuencia externa.

d) Sean $R = 1\,\Omega$, $L = 1\,\text{H}$ y $C = 0.5\,\text{F}$ en el circuito del apartado a). Determinar la corriente y el potencial para todo tiempo, sabiendo que las condiciones iniciales son $I(0) = 1\,\text{A}$ y $V(0) = 1\,\text{V}$. ¿Qué tipo de estabilidad presenta el punto crítico del sistema? Dibujar en el plano $(I,\,V)$ la evolución temporal del sistema. ¿Cuánto tardarán la corriente y el potencial en caer a cero por primera vez? ¿Qué valen el potencial y la corriente en cada caso?