Ejercicios de Métodos Matemáticos I

Curso 2004-2005. Hoja 6

1. Calcular los puntos críticos del sistema
$$\frac{dx}{dt} = 3\,x - x^2 - x\,y\,,$$
$$\frac{dy}{dt} = y + y^2 - 3x\,y\,.$$
Estudiar su estabilidad y dibujar un retrato del espacio de fases.

2. Considerar el sistema casi lineal
$$\frac{dx}{dt} = y + h\,x\,(x^2 + y^2)\,,$$
$$\frac{dy}{dt} = -x + h\,y\,(x^2 + y^2)\,.$$
a) Demostrar que el origen es un punto centro del sistema lineal correspondiente ($h = 0$).

   b) Suponer que $h \neq 0$. Reescribir el sistema de ecuaciones diferenciales en coordenadas polares.

   c) Suponer que $h = 1$. Integrar la ecuación diferencial radial y estudiar el comportamiento de r cuando $t \to +\infty$. ¿Qué se puede decir del carácter del punto crítico $(0,\,0)$?

   d) Suponer que $h = -1$. Hacer lo mismo que en el apartado anterior.

3. En el caso de un sistema de dos dimensiones que *no* es lineal, las trayectorias cerca de un punto crítico aislado pueden presentar una estructura considerablemente más complicada que cerca de nodos, centros, puntos silla y espiral. Por ejemplo, considerar el sistema
$$\frac{dx}{dt} = x\,(x^3 - 2y^3)\,,$$
$$\frac{dy}{dt} = y\,(2x^3 - y^3)\,.$$
Este sistema no es casi lineal ya que el origen no es un punto crítico *aislado* del sistema lineal trivial asociado ($x' = 0,\ y' = 0$). Resolver la ecuación homogénea de primer orden
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\,(2x^3 - y^3)}{x\,(x^3 - 2y^3)}$$
y demostrar que las trayectorias del sistema son *Hojas de Descartes* de la forma
$$x^3 + y^3 = 3c\,x\,y\,,$$
donde c es una constante arbitraria. Dibujar un retrato del espacio de fases.

4. **Especies en competencia. Supervivencia de una sola especie**. Considerar dos especies cuyas poblaciones son $x(t)$, $y(t)$, en el instante t, y que compiten por los mismos alimentos en un nicho ecológico común. La dinámica de estas dos poblaciones viene caracterizada por el sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = 60\,x - 4\,x^2 - 3\,x\,y\,,$$
$$\frac{dy}{dt} = 42\,y - 2\,y^2 - 3x\,y\,.$$

Calcular los puntos críticos, estudiar su estabilidad y dibujar un retrato del espacio de fases. Mostrar que existe una linea *separatriz* en el espacio de fases que separa dos regiones en las que sólo una de las dos especies sobrevive finalmente.

5. **Especies en competencia. Coexistencia pacífica**. Dos especies cuyas poblaciones son $x(t)$, $y(t)$, en el instante t, compiten por los mismos alimentos en un nicho ecológico común. La dinámica de estas dos poblaciones viene caracterizada por el sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = 60\,x - 3\,x^2 - 4\,x\,y\,,$$
$$\frac{dy}{dt} = 42\,y - 3\,y^2 - 2x\,y\,.$$

Calcular los puntos críticos, estudiar su estabilidad y dibujar un retrato del espacio de fases. Demostrar que, a diferencia del problema anterior, es posible la coexistencia pacífica de las dos especies.

6. **Sistemas depredador-presa. Equilibrio estable**. Una especie de depredadores $y(t)$ se alimenta de otra, la presa $x(t)$, que a su vez se nutre de un tercer alimento ampliamente disponible en el sistema. La dinámica de estas dos poblaciones viene caracterizada por el sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = 5\,x - x^2 - \,x\,y\,,$$
$$\frac{dy}{dt} = -2\,y + x\,y\,.$$

Calcular los puntos críticos, estudiar su estabilidad y dibujar un retrato del espacio de fases. Demostrar que es posible que las presas y los depredadores coexistan con poblaciones en equilibrio estable.

7. **Sistemas depredador-presa. Equilibrio inestable**. Una especie de depredadores $y(t)$ se alimenta de otra, la presa $x(t)$, que a su vez se nutre de un tercer alimento ampliamente disponible en el sistema. La dinámica de estas dos poblaciones viene caracterizada por el

sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - 2\,x - \,x\,y\,,$$

$$\frac{dy}{dt} = y^2 - 4\,y + x\,y\,.$$

Calcular los puntos críticos, estudiar su estabilidad y dibujar un retrato del espacio de fases. Demostrar que para cada una de estas especies no hay más alternativa que crecer sin cota alguna o la extinción.

8. **Vibraciones no lineales amortiguadas**. En ocasiones es posible estimar las correcciones no lineales a la ley de Hooke para la fuerza que ejerce un muelle sobre un objeto de masa m, $F = -k\,x - \beta\,x^3$, sometido a una fuerza de rozamiento $F_{\mathrm{R}} = -\gamma\,x'$. Considerar el caso $m = 1$ kg, $k = 5$ N/m, $\beta = 5/4$ N/m^3, $\gamma = 2$ N.s/m.

   a) Escribir las ecuaciones del movimiento en forma de un sistema de dos ecuaciones de primer órden.

   b) Estudiar los puntos críticos del sistema en ausencia de rozamiento, $\gamma = 0$, así como su estabilidad. Dibujar un retrato del espacio de fases y determinar las separatrices.

   c) Hacer lo mismo que en el apartado anterior pero en presencia de rozamiento. ¿Cómo se modifican las separatrices?

9. Una partícula de masa unidad $m = 1$ se mueve en un potencial

$$V(x) = 2\,x^2 - \frac{1}{3}x^3\,.$$

   Determinar los puntos críticos de la dinámica de la partícula, el retrato del espacio de fases, y buscar la correspondencia de las trayectorias con la forma del potencial.

10. Una partícula de masa unidad $m = 1$ se mueve en un pozo doble de potencial

$$V(x) = \frac{1}{4}\,(x^2 - 1)^2\,.$$

   Determinar los puntos críticos de la dinámica de la partícula, el retrato del espacio de fases, y buscar la correspondencia de las trayectorias con la forma del potencial. ¿Cuál es el período de una partícula que empieza en reposo en $x = \sqrt{2}$?