Ejercicios de Métodos Matemáticos I

Curso 2004-2005. Hoja 4

1. Una masa de 100 g alarga 5 cm un muelle. Si la masa se pone en movimiento desde su posición de equilibrio con una velocidad hacia abajo de 10 cm/s, y la resistencia del aire es de 0.001 N·s/m,

   a) Determinar la posición de la masa en cualquier instante t.

   b) ¿Cuando regresará la masa a su posición de equilibrio?

   c) Determinar la cuasifrecuencia y el cuasiperiodo, así como la razón del cuasiperiodo al periodo del movimiento no amortiguado correspondiente.

   d) Determinar la amplitud del desplazamiento y la fase en $t = 5$ s.

2. Un circuito en serie tiene un condensador de $C = 0.25\,\mu$F y un inductor de $L = 1$ H. Si la carga inicial del condensador es de $1\,\mu$C y no hay corriente inicial, encontrar la carga en el condensador para cualquier instante t.

3. Una masa que pesa 4 N alarga un muelle 8 cm de su posición de equilibrio. La masa está sujeta a un amortiguador con coeficiente γ.

   a) Determinar el valor de γ (con sus unidades) para el cual el sistema está críticamente amortiguado.

   b) Demostrar que, en caso de que el sistema esté críticamente amortiguado o sobreamortiguado, la masa puede pasar por la posición de equilibrio como mucho una vez, independientemente de las condiciones iniciales.

4. Un circuito en serie tiene un condensador de $C = 10\,\mu$F, una resistencia $R = 300\,\Omega$ y un inductor de $L = 0.2$ H. Si la carga inicial del condensador es de $10\,\mu$C y no hay corriente inicial, encontrar la corriente que atraviesa el circuito para cualquier instante t. Sustituyendo la resistencia por un reóstato variable, encontrar la resistencia R de modo que el circuito esté críticamente amortiguado.

5. Una masa de 5 kg estira 10 cm un muelle. Sobre la masa actúa una fuerza externa de 10 $\sin(t/2)$ N y se mueve en un medio que imparte una fuerza viscosa de 2 N, cuando su velocidad es de 4 cm/s. Si la masa se pone en movimiento a partir de su posición de equilibrio con una velocidad inicial de 2 cm/s hacia abajo, formular el problema con valor inicial que describe el movimiento de esa masa. Encontrar la solución periódica estacionaria. Si la fuerza externa se sustituye por una fuerza $F(t) = 2\cos\omega t$ de frecuencia ω, hallar el valor de ω para el que la amplitud de la respuesta forzada es máxima. Determinar la anchura de la resonancia en ese caso.

6. Un muelle tiene una constante de recuperación $k = 3$ N/m. Al muelle se sujeta una masa de 3 kg y el movimiento ocurre en un medio viscoso que ofrece una resistencia igual a la magnitud de la velocidad instantánea. Si forzamos el sistema con una fuerza externa $F(t) = 3\cos 3t - 2\sin 3t$ N, determinar la respuesta forzada del sistema en la forma $R\cos(\omega t - \delta)$.

7. Un circuito en serie tiene una condensador de $C = 0.25\,\mu$F, una resistencia $R = 3000\,\Omega$ y una bobina de $L = 0.1$ H. La carga inicial en el condensador es cero. Si se conecta una batería de 12 V al circuito y éste se cierra a $t = 0$ en ausencia de corriente, determinar la carga en el condensador a $t = 0.001$ s, $t = 0.01$ s y en cualquier instante t. Determinar también la carga límite cuanto $t \to \infty$. ¿Cuál es la corriente máxima que pasa por el circuito?

8. Sea el problema con valor inicial

$$u'' + 0.125\,u' + u = F(t) = 3\cos\omega t\,, \qquad u(0) = 2\,, \qquad u'(0) = 0\,,$$

donde $\omega = 1/3$, $\omega = 1$ ó $\omega = 3$. En cada caso, trazar en los mismos ejes la respuesta del sistema junto con la fuerza aplicada, como función del tiempo. Usar un intervalo de tiempo suficientemente largo como para que la solución transitoria haya desaparecido prácticamente. Observar la relación entre la amplitud y la fase de la respuesta respecto de las de la fuerza externa.