Ejercicios de Métodos Matemáticos I

Curso 2004-2005. Hoja 3

1. La solución de una ecuación de segundo orden, $y'' = f(x, y, y')$, suele comprender dos constantes arbitrarias. De forma inversa, es posible demostrar que una familia dada de funciones que contiene dos constantes arbitrarias es la solución de alguna ecuación diferencial de segundo orden.

   En cada uno de los problemas siguientes, eliminar las constantes c_1 y c_2 entre y, y' e y'', para encontrar la ecuación diferencial que satisface la familia dada de funciones.

   i) $y = c_1\, e^x + c_2\, e^{-x}$, ii) $y = c_1\, \cos x + c_2\, \sin x$,
   iii) $y = c_1\, x + c_2\, \sin x$, iv) $y = (c_1 + c_2\, x)\, e^{2x}$,
   v) $y = c_1\, x + c_2\, x^2$, vi) $y = c_1\, \sinh x + c_2\, x \sinh x$.

2. En cada uno de los problemas siguientes, verificar que las funciones y_1, y_2 son soluciones de la ecuación diferencial dada. ¿Constituyen un conjunto fundamental de soluciones?

   i) $y'' + 4y = 0$, $y_1(x) = \cos 2x$, $y_2(x) = \sin 2x$,
   ii) $y'' - 2y' + y = 0$, $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = x\, e^x$,
   iii) $x^2\, y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$, $x > 0$, $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x\, e^x$,
   iv) $(1 - x\, \cot x)y'' - x\, y' + y = 0$, $0 < x < \pi$, $y_1(x) = x$, $y_2(x) = \sin x$,
   v) $2\cos^2 x\, y'' + \sin 2x\, y' + 2y = 0$, $-\pi/2 < x < \pi/2$,
   $y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = \cos x\, \ln\left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right)$.

3. Encontrar el Wronskiano de dos soluciones independientes de las ecuaciones

   i) $x^2\, y'' - x(x+2)\, y' + (x+2)\, y = 0$,
   ii) $y''\, \cos x + y'\, \sin x + y\, \sec x = 0$,

   sin resolver la ecuación.

   Demostrar que una posible solución, $y_1(x)$, de dichas ecuaciones es x y $\cos x$, respectivamente. Usando el wronskiano, determinar la segunda solución linealmente independiente, $y_2(x)$, de la ecuación correspondiente.

4. Demostrar que si $p(x) > 0$ es diferenciable, entonces el Wronskiano $W(x)$ de dos soluciones de la ecuación $(p(x)\, y')' + q(x)\, y = 0$ es $W(x) = c/p(x)$, con c constante.

5. Si y_1 e y_2 son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación $x^2\, y'' - 2\, y' + (3 + x)\, y = 0$, y si $W(y_1,\ y_2)(2) = 3$, hallar el valor de $W(y_1,\ y_2)(4)$. ¿Para qué valor de x el wronskiano vale 1?

6. En cada uno de los apartados siguientes, suponer que p y q son contínuas sobre un intervalo abierto I, y que las funciones $y_1,\ y_2$ son soluciones de la ecuación diferencial $y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$.

   i) Demostrar que si $y_1,\ y_2$ son cero en el mismo punto $x_0 \in I$, entonces sobre ese intervalo no pueden ser un conjunto fundamental de soluciones.

   ii) Demostrar que si $y_1,\ y_2$ tienen máximos y mínimos en el mismo punto $x_0 \in I$, entonces sobre ese intervalo no pueden ser un conjunto fundamental de soluciones.

   iii) Demostrar que si $y_1,\ y_2$ tienen un punto de inflexión común $x_0 \in I$, entonces sobre ese intervalo no pueden ser un conjunto fundamental de soluciones.

   iv) Demostrar que x y x^2 son linealmente independientes (l.i.) sobre el intervalo abierto $I = (-1,\ 1)$; de hecho, demostrar que son l.i. sobre *todo* intervalo de la recta real.

   v) Demostrar que $W(x, x^2)$ se anula en $x = 0$. ¿Qué se puede concluir a partir de ésto acerca de la posibilidad de que x y x^2 sean solución de la ecuación $y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$?

   vi) Verificar que x y x^2 son soluciones de la ecuación $x^2\, y'' - 2x\, y' + 2\, y = 0$. ¿Contradice ésto la conclusión a la que se llegó en el apartado anterior? ¿El comportamiento del wronskiano de x y x^2 contradice el Teorema de Abel?

7. En cada uno de los problemas siguientes, resolver el problema con valor inicial dado. Trazar la gráfica de la solución y describir el comportamiento para x creciente.

i) $y'' + 4\,y = 0\,,$	$y(0) = 0\,,\ y'(0) = 1\,,$
ii) $y'' + 4\,y' + 5\,y = 0\,,$	$y(0) = 1\,,\ y'(0) = 0\,,$
iii) $y'' - 2\,y' + 5\,y = 0\,,$	$y(\pi/2) = 0\,,\ y'(\pi/2) = 2\,,$
iv) $y'' + y = 0\,,$	$y(\pi/3) = 2\,,\ y'(\pi/3) = -4\,,$
v) $y'' + y' + 1.25\,y = 0\,,$	$y(0) = 3\,,\ y'(0) = 1\,,$
vi) $y'' + 2\,y' + 2\,y = 0\,,$	$y(\pi/4) = 2\,,\ y'(\pi/4) = -2\,.$

8. En este problema se bosqueja una deducción de la fórmula de Euler.

   a) Demostrar que $y_1(x) = \cos\mu x$, $y_2(x) = \sin\mu x$ son un conjunto fundamental de soluciones de $y'' + \mu^2\,y = 0$; es decir, demostrar que son soluciones y luego probar que su wronskiano es distinto de cero.

   b) Demostrar (formalmente) que $y = e^{i\mu x}$ también es una solución de $y'' + \mu^2\,y = 0$. Por tanto,

$$e^{i\mu x} = c_1\,\cos\mu x + c_2\,\sin\mu x \tag{1}$$

   para algunas constantes c_1 y c_2. Explicar por qué.

   c) Hacer $x = 0$ en (1) para demostrar que $c_1 = 1$. Luego diferenciar la ecuación (1) y hacer $x = 0$ para concluir que $c_2 = i$. Sustituyendo los valores de c_1 y c_2, llegar a la fórmula de Euler.

9. Comprobar que $y_1(x) = x$ es una solución de la ecuación de Legendre de orden uno,

$$(1 - x^2)\,y'' - 2x\,y' + 2\,y = 0\,, \qquad -1 < x < 1\,,$$

   y encontrar una segunda solución linealmente independiente.

10. a) Considerar la ecuación $y'' + 2a\,y' + a^2\,y = 0$. Demostrar que las raíces de la ecuación característica son $r_1 = r_2 = -a$, de modo que una solución es e^{-ax}.

    b) Aplicar la fórmula de Abel para demostrar que el wronskiano de dos soluciones cualesquiera de la ecuación dada es

$$W(x) = y_1(x)\,y_2'(x) - y_1'(x)\,y_2(x) = c\,e^{-2ax}\,,$$

    con c constante.

c) Hacer $y_1(x) = e^{-ax}$ y aplicar el resultado del apartado b) para demostrar que una segunda solución es $y_2(x) = x\,e^{-ax}$.

11. Sean $r_1 \neq r_2$ las raíces de $a\,r^2 + b\,r + c = 0$. Entonces $e^{r_1 x}$ y $e^{r_2 x}$ son soluciones de la ecuación diferencial $a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0$. Demostrar que $\phi(x) = (e^{r_2 x} - e^{r_1 x})/(r_2 - r_1)$ también es solución de la ecuación. Entonces, Considerar r_1 fija y usar la regla de L'Hopital para evaluar el límite cuando $r_2 \to r_1$ de $\phi(x)$, obteniendo de este manera la segunda solución en el caso de raíces iguales.

12. a) Si $a\,r^2 + b\,r + c = 0$ tiene las raíces iguales $r_1 = r_2$, demostrar que

$$L[e^{rx}] = a\,(e^{rx})'' + b\,(e^{rx})' + c\,e^{rx} = a\,(r - r_1)^2\,e^{rx}\,. \tag{2}$$

Dado que el miembro de la derecha se anula cuando $r = r_1$, se concluye que $e^{r_1 x}$ es una solución de la ecuación $L[y] = a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0$.

b) Diferenciar (2) respecto a r e intercambiar la derivación con respecto a r y con respecto a x, demostrando por tanto que

$$\frac{\partial}{\partial r} L[e^{rx}] = L[\frac{\partial}{\partial r}\,e^{rx}] = L[x\,e^{rx}] = ax\,e^{rx}\,(r - r_1)^2 + 2a\,e^{rx}\,(r - r_1)\,.$$

Dado que el miembro de la derecha se anula cuando $r = r_1$, concluir que $x\,e^{rx}$ también es solución de $L[y] = 0$.

13. La ecuación diferencial

$$x\,y'' - (x + N)\,y' + N\,y = 0\,,$$

con $N \geq 0$ entero, tiene una solución exponencial y otra polinómica.

a) Verificar que una solución es $y_1(x) = e^x$.

b) Demostrar que la segunda solución es de la forma $y_2(x) = c\,e^x \int x^N e^{-x} dx$. Calcular $y_2(x)$ para $N = 1$ y $N = 2$; comprobar que con $c = -1/N!$,

$$y_2(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^N}{N!}\,.$$

Observar que $y_2(x)$ se corresponde exactamente con los N+1 primeros términos de la serie de Taylor de torno a $x = 0$ de la primera solución.