Ejercicios de Métodos Matemáticos I

Curso 2004-2005. Hoja 2

1. En cada uno de los problemas siguientes, determinar la solución del problema con valor inicial dado. Encontrar el intervalo en el que la solución es válida.

   i) $x\,y' + 2y = x^2 - x + 1\,,\qquad y(1) = 1/2$

   ii) $x\,y' + y = e^x\,,\qquad y(1) = 1$

   iii) $y' + (\cot x)\,y = 2\,\mathrm{cosec}\,x\,,\qquad y(\pi/2) = 1$

   iv) $x\,y' + 2y = \sin x\,,\qquad y(\pi) = 1/\pi$

   v) $y' - (\tan x)y = 4\sin x\,,\qquad y(\pi) = 1$

   vi) $x(2+x)\,y' + 2(1+x)\,y = 1 + 3x^2\,,\qquad y(-1) = 1$

   vii) $y' + y = 1/(1+x^2)\,,\qquad y(0) = 0$

   viii) $(1-x^2)\,y' - x\,y = x(1-x^2)\,,\qquad y(0) = 2$

2. a) Verificar que $y_1(x) = 1 - x$ y $y_2(x) = -x^2/4$ son dos soluciones independientes del problema con valor inicial

   $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\big(- x + (x^2 + 4y)^{1/2}\big)\,, \quad y(2) = -1\,.$$

   ¿En qué región del plano xy son válidas estas soluciones?

   b) Dar una explicación de por qué la existencia de dos soluciones del problema dado no contradice la parte de unicidad del Teorema de existencia y unicidad.

   c) Demostrar que $y = cx + c^2$, con c una constante arbitraria, satisface la ecuación diferencial del apartado a) para $x \geq -2c$. Ver que si $c = -1$, también se satisface la condición inicial y se obtiene la solución $y = y_1(x)$. Demostrar que no existe c que dé la segunda solución $y = y_2(x)$.

3. Demostrar que la ecuación

   $$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 4x}{x - y}$$

   no es separable, pero sí homogénea. Usar un cambio de variable adecuado para encontrar la solución de la ecuación.

4. En cada uno de los problemas siguientes, resolver la ecuación diferencial dada y determinar el intervalo en el que la solución es válida.

i) $y' = x^2/y$,	ii) $y' = x/y(1+x^2)$,
iii) $y' + y^2 \sin x = 0$,	iv) $y' = 1 + x + y^2 + x\,y^2$,
v) $y' = \cos^2 x\, \cos^2 2y$,	vi) $x\,y' = (1-y^2)^{1/2}$,
vii) $y' = (x - e^{-x})/(y + e^y)$,	viii) $y' = x^2/(1+y^2)$,

5. En cada uno de los problemas siguientes, resolver el problema con valor inicial dado y determinar de qué manera el intervalo en el que la solución existe depende del valor inicial y_0.

i) $y' = -4x/y$,	$y(0) = y_0$
ii) $y' = 2x\,y^2$,	$y(0) = y_0$
iii) $y' + y^3 = 0$,	$y(0) = y_0$
iv) $y' = x^2/y(1+x^3)$,	$y(0) = y_0$

6. En cada uno de los siguientes problemas, trace la gráfica de dN/dt contra N. Determinar los puntos críticos (de equilibrio) y clasificarlos cada uno como estable, inestable o semiestable.

i) $dN/dt = aN + bN^2$,	$a > 0\,,\ b > 0\,,\ N_0 \geq 0$
ii) $dN/dt = aN + bN^2$,	$a > 0\,,\ b > 0\,,\ -\infty < N_0 < \infty$
iii) $dN/dt = N(N-1)(N-2)$,	$N_0 \geq 0$
iv) $dN/dt = e^N - 1$,	$-\infty < N_0 < \infty$
v) $dN/dt = e^{-N} - 1$,	$-\infty < N_0 < \infty$
vi) $dN/dt = -2(\arctan N)/(1+N^2)$,	$-\infty < N_0 < \infty$
vii) $dN/dt = -k(N-1)^2$,	$k > 0\,,\ -\infty < N_0 < \infty$
viii) $dN/dt = N^2(N^2-1)$,	$-\infty < N_0 < \infty$
ix) $dN/dt = N(1-N^2)$,	$-\infty < N_0 < \infty$
x) $dN/dt = aN - b\sqrt{N}$,	$a > 0\,,\ b > 0\,,\ N_0 \geq 0$
xi) $dN/dt = N^2(4-N^2)$,	$-\infty < N_0 < \infty$
xii) $dN/dt = N^2(1-N)^2$,	$-\infty < N_0 < \infty$