Problemas de Física Cuántica

Curso 2010-2011. Hoja 6

1. Considérese un oscilador armónico del que se sabe que la probabilidad de que al medir la energía nos dé la del estado fundamental es cero y que es igualmente cero la probabilidad de que el resultado de una medida de la energía sea superior o igual a $3\hbar\omega$. Se mide el valor medio de la energía obteniéndose $\langle H\rangle = 2\hbar\omega$.

   i) ¿Cuál es el valor medio de la posición?
   ii) Supóngase que el valor medio de la posición sea cero. Escribir la expresión del estado en que se encuentra el oscilador. ¿Queda definido sin ambiguedad con los datos que se han dado en el problema?

2. Se prepara un oscilador armónico en el instante inicial de modo que se encuentre en el estado:
$$|\Psi(0)\rangle = c_0\,|\phi_0\rangle + c_1\,e^{i\pi/4}|\phi_1\rangle$$
   donde c_0 y c_1 son reales. ¿Al cabo de cuánto tiempo la medida del valor medio de la posición daría el mismo valor que para el instante incial? En ese tiempo, ¿ha vuelto el oscilador al mismo estado en que se encontraba en el instante inicial?

3. Sea un oscilador armónico que se prepara en el instante $t = 0$ en el estado
$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\phi_0\rangle + |\phi_1\rangle\Big)$$
   ¿Cuál es la probabilidad de que en un instante posterior el oscilador vuelva a encontrarse en el estado $|\Psi(0)\rangle$?

4. En cierto instante $t = 0$ un oscilador armónico de frecuencia ω se encuentra en el estado
$$|\Psi(0)\rangle = C\Big(1 + \alpha\,X + \beta\,X^2\Big)|\phi_0\rangle,$$
   donde $|\phi_0\rangle$ es el estado fundamental del oscilador armónico y C, α y β son constantes complejas.

   i) a) ¿Es Ψ un autoestado del Hamiltoniano? b) ¿Es Ψ un autoestado de los operadores X o P? c) ¿Cuáles son los resultados posibles de una medida de la energía del oscilador en el estado Ψ? d) ¿Cuáles son los valores posibles de una medida de X y P en el estado Ψ?
   ii) Escríbase Ψ en términos de autoestados de H y hallar C como función de α y β de manera que esté normalizada a uno.
   iii) Determinar la probabilidad de que el oscilador se encuentre en un autoestado de la energía con autovalor: $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ con $n = 0, 1, 3$.
   iv) ¿Cuál es la función de ondas en un instante posterior cualquiera?
   v) Supongamos $\beta = 0$ ¿Cuánto valen los valores medios $\langle H\rangle$, $\langle X\rangle$ y $\langle P\rangle$ en $t = 0$?
   vi) Hállese, utilizando el teorema de Ehrenfest, la evolución de los valores esperados anteriores.

5. Una partícula se mueve en el potencial $V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$. Determinar la probabilidad de encontrar la partícula fuera de los límites clásicos para el estado fundamental y los excitados. Discutir el resultado.

6. Determinar la susceptibilidad eléctrica de un oscilador armónico unidimensional en un campo eléctrico exterior estático E. Hallar las autofunciones y los autovalores de la energía. [Ayuda: Considérese al campo eléctrico exterior como una perturbación generada por el potencial $V_1(x) = -eE\,x$. La susceptibilidad electrica es $\chi = e\,x$.]

7. Considérese un oscilador armónico unidimensional en un estado estacionario ϕ_n. Se define $U(k) = \exp(ikx)$.

   a) ¿Es $U(k)$ unitario? Probar que para todo n se verifica
   $$\sum_m |\langle \phi_n | U(k) | \phi_m \rangle|^2 = 1$$
   b) Expresar $U(k)$ en función de los operadores creación $\hat{a}^\dagger$ y destrucción $\hat{a}$.
   c) Establecer la relaciones
   $$e^{\lambda \hat{a}} |\phi_0\rangle = |\phi_0\rangle$$
   $$\langle \phi_n | e^{\lambda \hat{a}^\dagger} |\phi_0\rangle = \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}$$
   d) A partir de estas relaciones calcular el elemento de matriz $\langle \phi_0 | U(k) | \phi_n \rangle$ y expresarlo en función tanto de $E_k = \hbar^2 k^2 / 2m$ como de $E_\omega = \hbar\omega$.

8. Demostrar que en los autoestados del oscilador armónico unidimensional se verifica
   $$\langle \Delta X \rangle^2 = \frac{\hbar}{m\omega}\Big(n + \frac{1}{2}\Big),$$
   $$\langle \Delta P \rangle^2 = m\hbar\omega\Big(n + \frac{1}{2}\Big).$$

9. Escribir la ecuación de Schrödinger en la representación de momentos para un oscilador armónico y determinar la distribución de probabilidad de los diferentes valores del momento.

10. Una partícula en un oscilador armónico unidimensional tiene la siguiente función de onda:
    $$\Psi(x) = \begin{cases} \exp\Big(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\Big) & |x| < a\,, \\ 0 & |x| \geq a\,. \end{cases}$$
    Calcular la probabilidad de que al medir la energía encontremos el valor $\hbar\omega/2$.

11. Encontrar los niveles de energía de una partícula que se mueve en un pozo de potencial de la forma:
    $$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0\,, \\ \frac{m\omega^2 x^2}{2} & x \geq 0\,. \end{cases}$$