Problemas de Física Cuántica

Curso 2010-2011. Hoja 5

1. Sea un sistema físico cuántico con dos niveles y supóngase como base de kets los autoestados $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ de un operador lineal $\hat{A}$ que viene representado en esta base por
$$\hat{A} = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|\,,$$
mientras que el operador Hamiltoniano está dado por
$$\hat{H} = \hbar\omega_1\Big(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|\Big) + \hbar\omega_2\Big(|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow|\Big)\,.$$
El sistema se encuentra inicialmente en el estado puro $|\uparrow\rangle$. Calcular el valor medio de la energía y la dispersión de $\hat{A}$, en función del tiempo. ¿En qué instante el estado del sistema es autoestado de $\hat{A}$?

2. Una partícula microscópica de masa m se mueve en una dimensión, sometida al pozo infinito de potencial
$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| < a\,, \\ +\infty & |x| \geq a\,. \end{cases}$$
Supóngase que en un cierto instante $t = 0$ la partícula está en un estado $\phi_n(x)$ normalizado tal que: i) la probabilidad de que al medir en él la energía se encuentre una valor mayor que $\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$ es nula; ii) $\langle X\rangle = x_0$; iii) $\langle P\rangle = p_0$, donde x_0 y p_0 son constantes reales. Determínese la forma general de $\phi_n(x)$.

3. Consideremos el sistema físico formado por una partícula confinada en una caja de potencial de anchura a y paredes infinitas, centrado en $x = 0$. Preparando un gran número de estados, todos de igual manera, se obtiene, en la medida de su energía, $\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$ y $\frac{4\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$, con igual probabilidad, y se encuentra que el valor medio de la posición es cero inicialmente. ¿Cuál es el valor medio de la energía y la probabilidad de encontrar la partícula en la mitad derecha de la caja en cualquier otro instante posterior?

4. Una partícula de masa m en un pozo de potencial de paredes infinitas y anchura a, se halla en un estado tal que la probabilidad de que al medir la energía se obtenga un valor mayor que $\frac{8\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$ es cero.
a) ¿Entre qué valores está comprendida la energía media de la partícula?
b) Si en $t = 0$ el valor esperado de la energía es $\langle E\rangle = \frac{5\hbar^2\pi^2}{4ma^2}$ y el valor medio del momento es $\langle P\rangle = \frac{8\hbar}{3a}$, ¿Cuál es la función de onda?
c) Escribir la función de onda para $t_1 = \frac{2ma^2}{3\hbar\pi}$. Calcular los valores medios de la energía y del momento para ese tiempo. Discutir el significado físico de t_1.

5. Una partícula de masa m se encuentra sometida a la siguiente energía potencial
$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < a\,, \\ V_0 & a < x < a + b\,, \\ +\infty & x < 0\,,\ x > a + b\,. \end{cases}$$
Resolviendo la ecuación de Schrödinger, calcular su espectro cuando la energía $E > V_0$.

6. Considérese una partícula moviéndose en el potencial $V(x)$ de la figura adjunta. Para los siguientes rangos de energía total establecer, empleando argumentos cualitativos, si puede haber valores permitidos de la energía. En el caso afirmativo, establecer si su distribución es discreta o contínua. a) $E < V_0$; b) $V_0 < E < V_1$; c) $V_1 < E < V_2$; d) $V_2 < E < V_3$; e) $E > V_3$.

7. Supóngase que: i) En el instante $t = 0$ la partícula está en el estado fundamental $\phi_1^{(a)}(x)$ correspondiente al pozo infinito con paredes en $x = \pm a$; ii) Al cabo de un intervalo de tiempo infinitesimalmente breve, las paredes del pozo infinito pasan a estar ubicadas en $x = \pm b$, con $a < b < +\infty$.
a) Caracterícese la forma general del estado normalizado $\psi(x, t)$ que representa a la partícula en el nuevo pozo, en el instante $t > 0$. Hállese la amplitud de probabilidad de que, en dicho instante t, la partícula pueda estar en el estado fundamental $\phi_1^{(b)}(x)$ del nuevo pozo con anchura $2b$.
b) Considérese una situación análoga a la del apartado a), con la única diferencia de que las paredes pasan, instantaneamente, a estar en $x = \pm\infty$. Hállese la estructura general del estado $A(k, t)$ que representa momentos posibles de la partícula en la nueva situación, y obténganse sus probabilidades.

8. Una partícula microscópica de masa m se mueve sometida al potencial unidimensional

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & x < 0\,, \\ -V_1 & 0 < x < a\,, \\ V_2 & a < x < b\,, \\ 0 & x > b\,. \end{cases}$$

Los valores constantes V_1 y V_2 del potencial son positivos. Por hipótesis, la partícula incide inicialmente desde $x = -\infty$ en forma de onda plana $\exp(ikx)$. Resuélvase y discútase la ecuación de Schrödinger para la partícula en todo el espacio. Hállese el coeficiente de reflexión en la región $x > b$. Estúdiense los posibles estados ligados de la partícula.

9. Una partícula microscópica de masa m se mueve en un espacio unidimensional, sometida al potencial

$$V(x) = \begin{cases} -\lambda\delta(x-a) & 0 < x < b\,, \\ +\infty & x < 0\,,\ \ x > b\,, \end{cases}$$

con $\lambda > 0$ y $0 < a < b$. Resuélvase y discútase la ecuación de Schrödinger para la partícula.

10. Una partícula microscópica de masa m se mueve en una dimensión x, en el pozo de potencial

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < a\,, \\ V_2 & a < x < b\,, \\ V_1 & b < x < c\,, \\ +\infty & x < 0\,,\ \ x > c\,. \end{cases}$$

Se supone que los valores constantes V_2 y V_1 del potencial son positivos, con $V_2 > V_1$. Resuélvase y discútase la ecuación de Schrödinger para la partícula.

11. Una partícula microscópica de masa m en una dimensión espacial está sometida al potencial

$$V(x) = \begin{cases} \lambda\delta(x+a) & x < 0\,, \\ V_0 & x > 0\,, \end{cases}$$

con $V_0 > 0$ y $a > 0$.
a) Estúdiense los estados ligados.
b) Supóngase que la partícula incide inicialmente desde $x = -\infty$ en forma de onda plana $\exp(ikx)$ con energía $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, siendo k real y positivo. Hállese la solución de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo en todo x.

12. Una partícula de masa m se halla en un pozo infinito de anchura L en una dimensión, en el intervalo $(0, L)$. En $t = 0$ su función de onda es

$$\phi(x,0) = N \sin\frac{3\pi x}{L} \cos\frac{\pi x}{L}$$

a) ¿Cuál es la densidad de probabilidad de que la partícula se encuentre en el punto x al cabo de un tiempo $t = \frac{mL^2}{4\pi\hbar 15}$?
b) ¿Para qué valores de t los efectos cuánticos de interferencia de amplitudes estacionarias no afectan a la probabilidad?

[Ayuda: La energía de las soluciones estacionarias de la ecuación de Schrödinger viene dada por $E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2mL^2}$, $n = 1, 2, \ldots$]

13. Sea una barrera de potencial de altura $V_0 = 2$ eV y anchura $L = 1$ Å. Considérese un haz de electrones de energía $E = 1$ eV que se aproxima a la barrera desde $x = -\infty$.
a) Calcular la probabilidad de que un electrón atraviese la barrera, y la probabilidad de que se refleje. [Tratar al electrón como una onda plana.]
b) Si se tratase de un protón ($m_p \simeq 2000\, m_e$), ¿Cuál sería la probabilidad de atravesar la barrera?

14. Un protón moviéndose en un núcleo (unidimensional, $x =$ coordenada radial) viene descrito por la función de ondas

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1(x,t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2(x,t)\,,$$

donde $\psi_1(x,t)$ y $\psi_2(x,t)$ son las soluciones de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo correspondientes al estado fundamental y primer excitado para una partícula de masa m que se mueve en un pozo de potencial infinito centrado en el origen de anchura a. Esto da origen a una distribución de carga que oscila en el tiempo con la misma frecuencia que las oscilaciones de la densidad de probabilidad.
a) Evalúese esta frecuencia para $a = 10^{-14}$ m.
b) Calcúlese la energía del fotón que es emitido por la distribucion oscilante de carga cuando el protón pasa del estado excitado al fundamental.
c) ¿En qué región del espectro electromágnetico está tal fotón?
d) Calcúlese la energía media del estado $\psi(x,t)$.

15. Sea una barrera de potencial cuadrada y unidimensional de altura V_0 y anchura a,

$$V(x) = \begin{cases} \text{Region I :} & 0 & x < 0\,, \\ \text{Region II :} & V_0 & 0 < x < a\,, \\ \text{Region III :} & 0 & x > a\,. \end{cases}$$

a) Escribir las funciones de onda solución de la ecuación de Schrödinger en cada una de las regiones del potencial, para $E < V_0$ y $E > V_0$.
b) ¿Es posible que para alguna energía no se produzca reflexión en la barrera? En caso afirmativo, dar el valor de E. En caso negativo, razonarlo debidamente.
c) Dar algunos ejemplos físicos que puedan representarse de forma aproximada mediante una barrera de potencial en los casos $E < V_0$ y $E > V_0$.
d) Hallar la expresión de la probabilidad de atravesar la barrera en el caso $E < V_0$. Dar una expresión aproximada en el caso $2ma^2(V_0 - E) \gg \hbar^2$.
e) Para objetos macroscópicos, con energías muy pequeñas ($E \simeq 1$ eV) y espesores de barrera atómicos ($a \simeq 1$ Å), ¿Sería apreciable el efecto túnel? Razonar la respuesta.

[Ayuda: Fórmulas y datos relevantes:

$$T = \frac{4k_1^2k_2^2}{4k_1^2k_2^2 + (k_1^2 - k_2^2)\sin^2 k_2 a}$$

donde T es el coeficiente de transmisión de la barrera para $E > V_0$ y $k_1 \equiv \sqrt{2mE/\hbar^2}$; $k_2 \equiv \sqrt{2m(E - V_0)/\hbar^2}$. $\quad \hbar = 1973.3$ eV Å.]