Problemas de Física Cuántica

Curso 2010-2011. Hoja 4

1. Sea un sistema físico microscópico que evoluciona según las leyes de la Mecánica Cuántica. Se supone que el espacio de estados tiene dimensión 3, y que los kets $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ constituyen una base ortonormal en dicho espacio. Por hipótesis, los operadores correspondientes al Hamiltoniano $\hat{H}$ y a dos variables dinámicas, $\hat{A}$ y $\hat{B}$, se representan, con respecto a dicha base, por las matrices siguientes:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{12}^* & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} \end{pmatrix}, \qquad \hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}, \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix},$$

Las cantidades $E_{11}, E_{22}, E_{33}, a_3, b_1, b_2$ y b_3 son reales. Se supone que $a_1 \neq 0$.
a) Formúlense las condiciones que han de verificarse para que $\hat{H}$, $\hat{A}$ y $\hat{B}$ sean operadores autoadjuntos.
b) Hallar los autovalores y los autoestados de $\hat{H}$. Analícese qué ocurre si las dos condiciones $E_{11} = E_{22}, E_{12} = 0$ se satisfacen simultaneamente.
c) Suponiendo que $\hat{A}$ y $\hat{B}$ sean operadores autoadjuntos, hállense sus autovalores y estúdiese si conmutan con $\hat{H}$ y entre sí.

2. Demostrar que en los estados estacionarios correspondientes al espectro discreto del Hamiltoniano, el valor esperado del operador $\vec{P}$ es nulo.

3. ¿Qué se puede afirmar sobre la paridad de las autofunciones del Hamiltoniano

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

si el potencial es una función par de x: $V(-x) = V(x)$?

4. Una partícula que se mueve en tres dimensiones tiene un Hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + a(x^2 + y^2 + z^2) + bz\,,$$

donde a y b son constantes reales no nulas. Para cada uno de los siguientes observables estudiar si éste es conservado en el tiempo y por qué:
a) La energía, $\hat{H}$.
b) La componente z del momento angular orbital, $\hat{L}_z$.
c) La componente x del momento angular orbital, $\hat{L}_x$.
d) La componente z del momento lineal, $\hat{P}_z$.

5. Demuéstrese el teorema de Ehrenfest para el caso de una partícula en un campo electromagnético. Esto es, a partir de:

$$\frac{d}{dt}\langle\vec{F}\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle[\vec{F}, H]\rangle + \langle\frac{\partial\vec{F}}{\partial t}\rangle\,, \qquad H = \frac{1}{2m}\vec{\Pi}^2 + e\phi\,, \qquad \vec{\Pi} \equiv \vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}\,,$$

demuéstrese que

$$\frac{d}{dt}\langle\vec{r}\rangle = \frac{1}{m}\langle\vec{\Pi}\rangle\,, \qquad \frac{d}{dt}\langle\vec{\Pi}\rangle = \langle\vec{F}_L\rangle\,,$$

donde $\vec{F}_L = e\Big(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\Big)$ es la fuerza de Lorentz.

6. Las ecuaciones de evolución en el tiempo de los valores medios de las coordenadas y de los momentos canónicos conjugados de un sistema cuántico vienen dadas por:

$$\frac{d}{dt}\langle\vec{r}\rangle = \frac{1}{m}\langle\vec{p}\rangle\,, \qquad \frac{d}{dt}\langle\vec{p}\rangle = \langle\vec{F}(\vec{r},t)\rangle\,,$$

¿Equivalen estas dos ecuaciones a las ecuaciones clásicas de Newton, sustituyendo en ellas $\vec{r}$ por $\langle\vec{r}\rangle$? Razonar para cada uno de los tres casos siguientes:
a) $\vec{F} = 0$, b) $\vec{F} = -k\,\vec{r}$, c) $\vec{F} = k\,\vec{r}/r^3$.

7. Con los datos del problema 1), y suponiendo que $\hat{A}$ y $\hat{B}$ son operadores autoadjuntos y que $E_{11} = E_{22} \neq E_{33}, E_{12} = 0$, aplíquese la información previamente obtenida sobre $\hat{A}$ y $\hat{B}$ al estudio de los autoestados de $\hat{H}$.
a) En el instante $t = 0$, el sistema se encuentra en el estado $|\phi\rangle = |1\rangle - |2\rangle + |3\rangle$. Estudiése si esta normalizado y, en caso negativo, construýase, a partir de él, otro que lo esté. Hallar, en $t = 0$, el valor esperado de $\hat{H}$ y su incertidumbre.
b) Hállese el ket normalizado $|\psi(t)\rangle$ que representa el estado del sistema en $t > 0$, cuando éste evoluciona desde $t = 0$ sin haber sido sometido a ninguna perturbación o medida. Hállense el valor medio y la incertidumbre de $\hat{H}$ en $t > 0$.
c) Hallar, en el instante $t > 0$, el valor medio del observable representado, respecto a la base $\{|n\rangle\}_{n=1,2,3}$, por la matriz

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}\,,$$

siendo c real.

8. Comprobar que

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, A(k)\, e^{i(kx-\omega t)}$$

es solución de la ecuación de Schrödinger libre en una dimensión, siempre y cuando se verifique una cierta relación entre k y ω, llamada relación de dispersión. Si

$$\psi(x,0) = N\exp(-a^2x^2)\,,$$

calcular la constante de normalización y $\psi(x,t)$.

9. Una partícula cuántica de masa m tiene, en el tiempo $t = 0$, la siguiente función de onda

$$\psi(x) = \begin{cases} A(1 - 2|x|/a) & |x| < a/2\,, \\ 0 & |x| \geq a/2\,. \end{cases}$$

a) Calcular la constante de normalización A.
b) Hallar el valor medio de la energía cinética.
c) Calcular la evolución temporal de la función de onda.
d) Obtener la densidad de probabilidad para $p = 0$ en el tiempo t.
e) En el instante $t = t_0$ medimos el observable P y obtenemos un valor $p = \hbar k_0$, ¿Cuál será la función de onda de la partícula en un instante de tiempo posterior t_1?

10. El espacio de estados de un sistema físico es tridimensional y está determinado por los vectores $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$. En esta base, el Hamiltoniano del sistema, $\hat{H}$, y los dos observables $\hat{A}$ y $\hat{B}$, están representados por las matrices

$$\hat{H} = E \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \hat{A} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{B} = b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde E, a y b son constantes reales y positivas.
El estado del sistema en $t = 0$ esta dado por

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{2}|2\rangle + \frac{1}{2}|3\rangle$$

a) En $t = 0$ se mide la energía del sistema ¿Qué valores pueden encontrarse y con qué probabilidades? ¿Y si medimos A en lugar de H?
b) Calcular $|\psi(t)\rangle$, $\langle A(t)\rangle$ y $\langle B(t)\rangle$.
c) ¿Qué resultados se obtienen, y con qué probabilidades, si se mide A en el tiempo $t > 0$? ¿Y si se mide B?

11. Calcúlese la envolvente del paquete de ondas correspondiente a la partícula libre dada por la función de onda

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-(k-k_0)^2/a^2}\, e^{i(kx-\omega t)}\,.$$

Hállese la velocidad de grupo de este paquete. Demuéstrese que el paquete se expande a medida que se propaga.

12. La función de onda de una partícula libre, en un problema unidimensional, viene dada, para $t = 0$, por

$$\psi(x,0) = \frac{N}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-|k|/k_0}\, e^{ikx}\,,$$

donde N y k_0 son constantes.
a) ¿Cuál es la probabilidad $P(p_1, 0)$ de que una medida del momento lineal, efectuada en $t = 0$, de un resultado comprendido entre $-p_1$ y p_1?
b) ¿Cuál será la probabilidad $P(p_1, t)$ si la medida se realiza en el instante $t > 0$?

13. Consideremos una partícula que se mueve en una dimensión. Dos de sus autofunciones de la energía (normalizadas) son $\psi_1(x)$ y $\psi_2(x)$, con autovalores de la energía E_1 y E_2, respectivamente.
En el tiempo $t = 0$, la función de onda de la partícula está dada por

$$\phi(x, 0) = c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x)\,,$$

donde c_1 y c_2 son constantes.
a) Encontrar la función de onda $\phi(x, t)$ como función del tiempo, en términos de las constantes dadas y de la condición inicial.
b) Encontrar una expresión para el valor esperado de la posición de la partícula, como función del tiempo, para el estado $\phi(x, t)$.

14. Una partícula microscópica de masa m, que evoluciona libremente, está representada en el instante $t = 0$ por la función de onda

$$\psi(0) \equiv \psi(\vec{x}, 0) = N\, e^{i\vec{k}_0\, \vec{x}}\, e^{-a(x-x_0)^2}\, e^{-b|y-y_0|}\, e^{-c(z-z_0)^2}\,,$$

donde $\vec{k}_0$ es un vector real constante y a, b y c son constantes reales estrictamente positivas. Hallar:
a) La constante N, de forma que $\psi(0)$ esté normalizada.
b) La función de onda en $t = 0$ en el espacio de momentos, $A(\vec{k}, 0)$.
c) La probabilidad de que, en $t = 0$, la partícula esté en el intervalo $(y, y+dy)$, con valores cualesquiera para x y z.
d) La probabilidad de que, en $t = 0$, la componente y del momento de la partícula esté en el intervalo $(p_y, p_y + dp_y)$, con valores cualesquiera para p_x y p_z.
e) La probabilidad de que, al medir en $t = 0$ simultaneamente z y p_x para la partícula, los resultados estén en los intervalos $(z, z + dz)$ y $(p_x, p_x + dp_x)$, respectivamente.
f) El valor medio de $\hat{X}$ e $\hat{Y}$ en $t = 0$.
g) La función de onda para $t > 0$ en el espacio de momentos, $A(\vec{k}, t)$.
h) La probabilidad de que, en $t > 0$, la partícula tenga su primera coordenada en el intervalo $(x, x + dx)$, y simultaneamente, la tercera coordenada en el intervalo $(z, z + dz)$.