Problemas de Física Cuántica

Curso 2010-2011. Hoja 3

1. Consideremos un paquete de ondas unidimensional $\psi(x)$ cuyo espectro en el espacio de momentos es Gaussiano, con desviación estándar σ:

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{\pi^{1/2}\sigma}} \exp\Big[- \frac{(k-k_0)^2}{2\sigma^2} \Big] .$$

   Se sabe que $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, A(k)\, \exp(ikx)$.
   a) Calcular la integral para obtener $\psi(x)$ y la incertidumbre en x.
   b) Calcular la incertidumbre en $p = \hbar k$ y el producto $\Delta x \Delta p$.

2. Obtener $A(k)$ en representación de momentos para $\psi(x) = N \exp(-\alpha\, x^2)$ y calcular la constante de normalización N. Comprobar que si $\psi(x)$ esta normalizada, $A(k)$ también.

   [Ayuda: La transformada de Fourier de una Gaussiana es otra Gaussiana.]

3. Suponiendo que la amplitud de probabilidad, sin normalizar, de encontrar una partícula en la posición x viene dada por la función de onda:

$$\psi(x) = \exp\Big[ik_0 x - \frac{(x-x_0)^2}{2a^2} \Big] ,$$

   a) Normalizarla.
   b) Calcular la indeterminación Δx en la posición de la partícula.
   c) Pasando al espacio de momentos, estimar la indeterminación Δp en el momento de la partícula.
   d) Determinar el significado físico de p_0 calculando el valor esperado del momento.
   e) ¿Cuál es la probabilidad de que la partícula tenga un momento mayor que p_0?

4. Consideremos un paquete de ondas de una partícula libre en una dimensión, con espectro:

$$A(k) = \begin{cases} 1 & |k| < k_0 \\ 0 & |k| > k_0 \end{cases}$$

   Calcular:
   a) El valor medio del operador momento P y su incertidumbre.
   b) La incertidumbre en la energía. [Ayuda: $H = P^2/2m$].
   c) El valor medio del operador posición X y su incertidumbre.
   d) Confirmar que se satisface $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$.

5. En un problema unidimensional, sea una partícula con función de onda:

$$\psi(x) = N \frac{\exp(ik_0 x)}{\sqrt{x^2 + a^2}} .$$

a) Hallar la constante de normalización N.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado de una medida de la posición de la partícula esté comprendida entre $-a/\sqrt{3}$ y $+a/\sqrt{3}$?
c) Calcular el valor medio del momento de la partícula.

6. Sea la función de onda de una partícula:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ A\,x(x-1)e^{ik_0x} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

a) Encontrar la constante de normalización A.
b) Obtener la función de onda en el espacio de momentos.
c) Hallar los valores medios de la posición y del momento.
d) Obtener $XP\psi(x)$, $PX\psi(x)$ y $[X,P]\psi(x)$.

7. Consideremos la función de onda de una partícula:

$$\psi(x) = N\,\exp(-\frac{|x|}{2a}), \qquad a > 0\,.$$

Calcular:
a) La constante de normalización N.
b) La probabilidad de que una medida de la posición de la partícula esté comprendida entre 0 y a.

8. Consideremos una partícula cuya función de onda viene dada por:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < -a \\ \frac{1}{\sqrt{2a}} & -a \leq x \leq a \\ 0 & a < x < \infty \end{cases}$$

a) Calcular la amplitud $A(k)$ en el espacio de momentos:

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\psi(x)\,\exp(-ikx).$$

b) Calcular el valor medio de P.
c) ¿Cuál es la probabilidad de medir el autovalor $p = \hbar\pi/a$?

9. Consideremos la función de onda de una partícula:

$$\psi(x) = N\,e^{ik_0x}\,\exp(-|x|/a)\,.$$

a) Normalizar esta función.
b) Obtener la función de onda en el espacio de momentos.
c) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar la partícula con momento $p > \hbar k_0$? ¿Y la probabilidad de que al medir se encuentre el autovalor $p = 2\hbar k_0$?
d) Encontrar la relación de indeterminación que satisfacen las dispersiones de posición y momento. ¿Satisface el principio de incertidumbre? Comentar.

10. Consideremos un sistema físico constituído por dos partículas de espín 1/2: $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$, con base ortonormal de cuatro vectores: $\{|++\rangle,\ |+-\rangle,\ |-+\rangle,\ |--\rangle\}$, donde $|m_{s_1} m_{s_2}\rangle \equiv |m_s\rangle_1 \otimes |m_s\rangle_2$, etc. El sistema se encuentra en el estado:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}|++\rangle + \frac{1}{2}|+-\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|--\rangle$$

a) ¿Cuál es la probabilidad de medir $-\hbar/2$ para la componente de espín S_{1z}? ¿Y de medir $-\hbar/2$ para S_{2z}?
b) ¿Cuál será el vector estado tras la medida, en ambos casos?

11. Sean X y P dos operadores hermíticos tales que $[X, P] = i\hbar$. Sea el Hamiltoniano de una partícula $H = P^2/2m + V(X)$.
a) Decir cuáles de los siguientes operadores son autoadjuntos:

$$XP, \qquad X + P, \qquad i(XP - PX), \qquad X^2 H$$

b) Calcular los siguientes conmutadores:

$$[X, H], \qquad [P, H], \qquad [XP, H], \qquad [X^2, H]$$

c) Demostrar que en la base ortonormal completa $\{|k\rangle\}$ de autoestados del Hamiltoniano, con autovalor E_k, se satisface

$$\sum_k (E_k - E_l)|\langle k|X|l\rangle|^2 = \frac{\hbar^2}{2m}$$

12. Consideremos un problema unidimensional de una partícula de masa m, cuya función de onda es $\psi(x)$.
a) Calcular la probabilidad $P(d_0)$ de que al medir la distancia de la partícula al origen se encuentre un resultado mayor que d_0. ¿Cuáles son los límites de $P(d_0)$ cuando $d_0 \to 0$ y cuando $d_0 \to \infty$?
b) Si en lugar de la distancia se mide el momento de la partícula, calcular la probabilidad de hallar un resultado mayor que un cierto valor p_0.

13. Sea el Hamiltoniano, en una cierta representación,

$$H = \alpha\, S_x + \beta\, S_y\,,$$

donde α y β son números reales, y S_x, S_y se definen como:

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x\,, \qquad S_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y\,,$$

a) Usando la representación de las matrices de Pauli, encontrar una expresión para H^2 en términos de α y β.
b) Encontrar los autovalores del operador Hamiltoniano.
c) Encontrar los autovectores de H en la representación de las matrices de Pauli.
d) Suponiendo que el sistema está en un autoestado de S_z, con autovalor $+\hbar/2$, encontrar

la función de onda correspondiente en la representación de matrices de Pauli.
e) Calcular la evolución temporal del estado del sistema.
f) ¿Cuánto tiempo tarda el sistema en encontrarse en un estado ortogonal al inicial?

[Ayuda: Las matrices σ_i, en la representación de Pauli, vienen dadas por:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}]$$

14. Considérese una partícula en el estado $\psi(x)$ confinada a una caja (barrera infinita) en el intervalo $(0, a)$. Se mide la posición de la partícula y se encuentra $x = a/2$. ¿Cuál es la probabilidad de obtener el valor E_n si se realizara una medida de la energía inmediatamente después? Discutir el resultado.