Problemas de Física Cuántica

Curso 2010-2011. Hoja 2

1. Un sistema cuántico puede ser descrito por un conjunto completo de tres estados base $\{|\alpha\rangle,\ |\beta\rangle,\ |\gamma\rangle\}$. El estado $|\psi\rangle$ tiene las siguientes amplitudes de probabilidad en esta representación:

$$\langle\alpha|\psi\rangle = 1/\sqrt{3}\,, \qquad \langle\beta|\psi\rangle = 0\,, \qquad \langle\gamma|\psi\rangle = i\,\sqrt{2/3}\,,$$

y el estado $|\phi\rangle$ tiene como amplitudes:

$$\langle\alpha|\phi\rangle = (1+i)/\sqrt{3}\,, \qquad \langle\beta|\phi\rangle = 1/\sqrt{6}\,, \qquad \langle\gamma|\phi\rangle = 1/\sqrt{6}\,.$$

Encontrar la amplitud de probabilidad $\langle\psi|\phi\rangle$ y la probabilidad de encontrar el sistema en el estado $|\phi\rangle$ si inicialmente estaba en el estado $|\psi\rangle$.

2. Sean dos estados $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$, que en la base $\{|\alpha\rangle,\ |\beta\rangle,\ |\gamma\rangle\}$ estan descritos por:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}\,; \qquad |\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\,.$$

Sea S la matriz que permite pasar de la base $\{|\alpha\rangle,\ |\beta\rangle,\ |\gamma\rangle\}$ a otra base $\{|k\rangle,\ |l\rangle,\ |m\rangle\}$, y cuyos elementos son:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\cos\theta) & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta & \frac{1}{2}(1-\cos\theta) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta & \cos\theta & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta \\ \frac{1}{2}(1-\cos\theta) & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta & \frac{1}{2}(1+\cos\theta) \end{pmatrix}\,.$$

a) Sea $\theta = \pi/2$, encontrar las amplitudes de probabilidad de los estados $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ en la nueva base y utilizarlos para calcular $\langle\psi|\phi\rangle$. Comparar el resultado con la amplitud $\langle\psi|\phi\rangle$ calculada en la base inicial.
b) Considerese una nueva base

$$\begin{array}{ll} |\xi_x\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha\rangle - |\gamma\rangle) & \qquad |\chi_x\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}(|k\rangle - |m\rangle) \\ |\xi_y\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}}(|\alpha\rangle + |\gamma\rangle) & \qquad |\chi_y\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}}(|k\rangle + |m\rangle) \\ |\xi_z\rangle = |\beta\rangle & \qquad |\chi_z\rangle = |l\rangle \end{array}$$

i) Formar la matriz de transformación correspondiente a las nueve amplitudes $\langle\xi|\chi\rangle_{ij}$.
ii) Comparar el resultado con la matriz que hace girar un vector ordinario alrededor del eje Y.

3. Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}\,.$$

a) Encontrar los autovalores y autovectores y normalizarlos a 1.
b) Encontrar la matriz S que diagonaliza A, es decir, $S\,A\,S^{-1} = D$, donde D es una matriz diagonal.

4. Sean los operadores:

   a) $\Omega\phi(x) = \phi(-x)$
   b) $\Omega\phi(x) = \phi^2(x)$
   c) $\Omega\phi(x) = \phi(x+k)$
   d) $\Omega\phi(x) = \phi(x) + k$
   e) $\Omega\phi(x) = \phi(x/2)$
   f) $\Omega\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x,x')\phi(x')dx'$, donde $K(x,x') = K^*(x,x')$.
   g) $\Omega\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x,x')\phi(x')dx'$, donde $K(x,x') = -K(x',x)$.

   ¿Cuáles son lineales?

5. Sean los operadores:

   a) $\Omega\phi(x) = \phi(x+a)$
   b) $\Omega\phi(x) = \phi^*(x)$
   c) $\Omega\phi(x) = \phi(-x)$
   d) $\Omega\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x,x')\phi(x')dx'$, donde $K(x,x')$ es real y $K(x,x') = -K(x',x)$.

   ¿Cuáles son autoadjuntos?

6. Sean A y B dos operadores autoadjuntos. Demostrar que AB es autoadjunto si y sólo si A conmuta con B, es decir, $AB = BA$.

7. Si A es un operador autoadjunto que verifica $A^4 = 1$, encontrar sus autovalores. ¿Y si A no es autoadjunto?

8. Sabiendo que $[A,B] = C$ y $[C,A] = [C,B] = 0$, demostrar que:

$$[A, f(B)] = [A,B]\,\frac{df(B)}{dB}\,,$$

   siempre que $f(X)$ sea una función analítica de X. Como aplicación, calcular $[X^n, P]$.

9. Sean los siguientes operadores autoadjuntos (componentes del momento angular):

$$L_X = -i\hbar(Y\partial_Z - Z\partial_Y), \quad L_Y = -i\hbar(Z\partial_X - X\partial_Z), \quad L_Z = -i\hbar(X\partial_Y - Y\partial_X),$$

$$L_\pm = L_X \pm iL_Y$$

   Probar:

   a) $[L_Z, X] = i\hbar Y, \quad [L_Z, Y] = -i\hbar X, \quad [L_Z, Z] = 0, \quad [L_X, L_Y] = i\hbar L_Z$ cíclico
   b) $[\vec{L}, \vec{r}^2] = 0$
   c) $[L_Z, L_\pm] = \pm\hbar L_\pm$
   d) $L_\pm L_\mp = \vec{L}^2 - L_Z^2 \pm \hbar L_Z$

10. Un haz de electrones pasado por un dispositivo de Stern-Gerlach se encuentra en un estado con igual probabilidad de ser desviado hacia arriba o hacia abajo. Encontrar el estado de estos electrones en la base natural del aparato.

11. Consideremos el operador $H = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$,

    a) ¿Puede representar H un observable físico?
    b) Demostrar que $u(x) = A\,x\,\exp(-x^2/2)$ es autofunción de H y determinar su autovalor.
    c) Calcular la amplitud A que normaliza a 1 la autofunción $u(x)$.
    d) Obtener el valor esperado del operador posicion X en este estado.

    [Ayuda: $\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} \exp(-a\,x^2)dx = \Gamma(n+1/2)/a^{n+1/2}$.]

12. Consideremos un sistema físico cuyo espacio de estados es tridimensional y está generado por la base ortonormal $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$. En esta base, H y B estan definidos por:

$$H = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B = b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

    donde b y ω_0 son constantes reales.

    a) ¿Son H y B autoadjuntos? Encontrar sus autovalores.
    b) Probar que H y B conmutan.
    c) Calcular los autovalores de B en la base de autoestados de H.

13. Dos operadores A y B satisfacen las ecuaciones:

    $A = B^+B + 3\,, \qquad A = BB^+ + 1\,.$

    a) Probar que A es autoadjunto.
    b) Encontrar los conmutadores $[B^+, B]$ y $[A, B]$.
    c) Supongamos que $|\psi\rangle$ es un autoestado de A con autovalor a. Probar que si $B|\psi\rangle \neq 0$, entonces $B|\psi\rangle$ es un autoestado de A y encontrar su autovalor.

14. La operación de conjugación de carga C, que convierte una partícula en su antipartícula y viceversa, es un operador lineal que cumple $C^2 = I$, y anticonmuta con cualquier observable de carga Q: $CQ = -QC$. Dedúzcase que los autoestados de C son necesariamente de cargas medias nulas.

15. Sean $|\psi_n\rangle$ los autoestados de H. Supongamos que $|\psi_n\rangle$ forman una base ortonormal discreta. El operador $U(m,n)$ viene definido por:

$$U(m,n) = |\psi_m\rangle\langle\psi_n|$$

    a) Calcular el operador adjunto U^+ de $U(m,n)$.
    b) Calcular el conmutador $[H, U]$.
    c) Demostrar la relación:

$$U(m,n)\,U^+(p,q) = \delta_{nq}\,U(m,p).$$

d) Calcular $Tr[U(m,n)]$, la *traza* del operador U.
e) Sea A un operador de elementos de matriz $A_{mn} = \langle \psi_m | A | \psi_n \rangle$. Demostrar la relación:

$$A = \sum_{m,n} A_{mn}\, U(m,n).$$

f) Demostrar que $A_{pq} = Tr[A\, U^{+}(p,q)]$.

16. Consideremos el operador:

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

en un espacio de dimensión 2 en la base ortonormal $\{|1\rangle, |2\rangle\}$.

a) ¿Es σ_y autoadjunto? Calcular sus autovalores y sus autovectores normalizados.
b) Calcular las matrices de proyección sobre sus autovectores. Verificar que se satisfacen las relaciones de ortogonalidad y cierre.

17. Consideremos en un problema unidimensional el hamiltoniano H de una partícula, definido por:

$$H = P^2/2m + V(X)$$

donde X y P son los operadores posición y momento, que verifican la relación de conmutación: $[X, P] = i\hbar$.

Los autovectores de H son $|\phi_n\rangle$ tales que: $H|\phi_n\rangle = E_n|\phi_n\rangle$, con n discreto.

a) Demostrar que

$$\langle \phi_n | P | \phi_m \rangle \;= \alpha \,\langle \phi_n | X | \phi_m \rangle \,,$$

donde α es un coeficiente que sólo depende de la diferencia $E_n - E_m$. Calcular α.

[Ayuda: usar el conmutador $[X, H]$.]

b) Deducir, utilizando la relación de cierre, la igualdad:

$$\sum_m (E_n - E_m)^2\, |\langle \phi_n | X | \phi_m \rangle|^2 = \frac{\hbar^2}{m^2}\, \langle \phi_n | P^2 | \phi_n \rangle$$