Física Cuántica. 3° Físicas. Grupo 34

Curso 1999-2000. Examen Final. 5 Septiembre 2000

1. En cierto instante $t = 0$ un oscilador armónico de frecuencia ω se encuentra en el estado
$$|\Psi(0)\rangle = A\Big(1 + a\,X\Big)|\phi_0\rangle,$$
donde $|\phi_0\rangle$ es el estado fundamental del oscilador armónico y A y a son constantes complejas.

   i) Escríbase Ψ en términos de autoestados de H y hallar la norma A como función de a.
   a) ¿Es Ψ un autoestado del Hamiltoniano?
   b) ¿Es Ψ un autoestado de los operadores X ó P?
   c) ¿Cuáles son los resultados posibles de una medida de la energía del oscilador en el estado Ψ?
   d) ¿Cuáles son los valores posibles de una medida de X y P en el estado Ψ?

   ii) Determinar la probabilidad de que el oscilador se encuentre en un autoestado de la energía con autovalor E_n.

   iii) ¿Cuál es la función de onda en un instante posterior cualquiera? ¿En que instante será la función de onda ortogonal a la del instante inicial? ¿Cuál es el valor esperado del momento en ese instante? Razonar la respuesta.

   iv) ¿Cuánto valen los valores medios $\langle H\rangle$, $\langle X\rangle$ y $\langle P\rangle$ en $t = 3\pi/\omega$?

   v) Hállese, utilizando el teorema de Ehrenfest, la evolución de los valores esperados anteriores.

   [Ayuda: El Hamiltoniano del oscilador armónico es
$$H = \frac{\hbar\omega}{2}\Big(-\frac{d^2}{dz^2} + z^2\Big) = \frac{\hbar\omega}{2}\Big(2N+1\Big)\,,$$
donde $z = \alpha\,x \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x$ y N es el operador número. Las autofunciones normalizadas del Hamiltoniano son
$$\phi_n(x) = N_n\,H_n(z)\,e^{-z^2/2}\,, \qquad N_n^2 = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}\,2^n\,n!}\,,$$
donde $H_n(z) = (-1)^n\,\exp(z^2)\frac{d^n}{dz^n}\exp(-z^2)$ son los polinomios de Hermite.]

2. i) Calcular (en eV) el valor del desdoblamiento de los niveles $2p_{1/2}$ y $2p_{3/2}$ del átomo de hidrógeno, debido a la interacción espín-órbita.

$$V_{so} = \frac{e^2}{2m_e^2c^2}\vec{L}\cdot\vec{S}\ \frac{1}{r^3}$$

ii) Se le aplica un campo magnético constante de módulo B_0. ¿Qué condición deberá satisfacer B_0 para que su efecto sobre las energías de los niveles sea pequeño comparado con el desdoblamiento espín-órbita?

iii) Calcular las modificaciones de las energías de los estados $2p_{3/2}$ en presencia de tal campo magnético.

iv) Imagine ahora que tuvieramos un ión H^- en su estado de energía más baja (calcularla despreciando la repulsión entre los dos electrones) y que le aplicáramos ese campo magnético; ¿Cuál sería ahora su estado fundamental? ¿Qué energía tendría? ¿Dependerán estos resultados de la aproximación de campo débil?

Algunas fórmulas útiles

- $E_R = \frac{m_e e^4}{2\hbar^2} = 13.6$ eV ; $a_B = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = 0.53$ Å;

  $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = 1/137$; $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c} = 6.25\ 10^{-9}$ eV G^{-1}

- $\langle nl|r^{-3}|nl\rangle = \frac{1}{a_B^3 n^3 l(l+1/2)(l+1)}$ (átomo de hidrógeno)

- $L_\pm|l\ m\rangle = \hbar\left(\frac{l(l+1)-m(m\pm 1)}{2}\right)^{1/2}|l\ m\pm 1\rangle \quad ; L_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(L_x \pm iL_y)$