Física Cuántica. 3° Físicas. Grupo 36

Curso 2010-11. Examen. 1 Febrero 2011

1. Un protón se mueve en un potencial unidimensional armónico de frecuencia ω.

   a) Escribir la función de onda de la partícula para todo tiempo, $\psi(x,t)$, sabiendo que para $t=0$ cumple:
   i) la probabilidad de que al medir su energía salga un valor mayor que $3\hbar\omega$ es nula;
   ii) $\psi(x,0)$ es real y par;
   iii) la probabilidad de hallar la partícula en el origen es nula.

   b) ¿Es $\psi(x,0)$ autofunción del Hamiltoniano? ¿lo es $\psi(x,t)$ para algún tiempo t?

   c) ¿Cuál es el valor esperado de la energía como función del tiempo?

   d) ¿Cómo varía con el tiempo la probabilidad de encontrar la partícula en el origen de coordenadas? ¿Puede haber interferencia destructiva en algún otro punto?

   e) Hallar la relación de incertidumbre entre posición y momento en ese estado, como función del tiempo. ¿Es posible disminuir la incertidumbre respecto a la del estado inicial?

[Ayuda: El Hamiltoniano del oscilador armónico es

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}\Big(-\frac{d^2}{dz^2} + z^2\Big) = \frac{\hbar\omega}{2}\Big(2N+1\Big)\,,$$

donde $z = \alpha\, x \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x$ y N es el operador número. Las autofunciones normalizadas del Hamiltoniano son

$$\phi_n(x) = N_n\, H_n(z)\, e^{-z^2/2}\,, \qquad N_n^2 = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}\, 2^n\, n!}\,,$$

donde $H_n(z) = (-1)^n \exp(z^2)\dfrac{d^n}{dz^n}\exp(-z^2)$ son los polinomios de Hermite.

La integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^{2n}\, e^{-x^2} = \Gamma\Big[n+\frac{1}{2}\Big]\,.$$

Para el último apartado podeis usar el teorema del Virial.]

2. Demostrar el Teorema del Virial para una partícula ligada moviéndose en un potencial 3D, $V(\mathbf{x})$. Aplicadlo al caso del oscilador armónico en tres dimensiones.

   [Ayuda: Demostrar que $\langle \dot{A} \rangle_\Psi = 0$ para todo operador A en un estado estacionario Ψ y aplicadlo al caso $A = \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}$]

3. Derivar la ley de Wien a partir de la distribución de Planck de cuerpo negro. Suponiendo que podamos aproximar la emisión del Sol como la de un cuerpo negro a una temperatura de 5800 K, ¿en qué región del espectro electromagnético se encuentra el máximo?

   [Ayuda: El espectro de cuerpo negro viene descrito por

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \ ]$$

   .

4. Un haz monocromático de fotones de longitud de onda λ sufren dispersión Compton inversa con los electrones de un plasma caliente a la temperatura $T_{\rm gas} = 1.16 \times 10^8$ K. Suponiendo que la energía cinética media de los electrones del plasma es de $K_e = \frac{3}{2} k T_{\rm gas}$, calcular la longitud de onda de los fotones incidentes para que el haz sea dispersado un ángulo $\theta = 90°$. ¿Cuál es la longitud de onda de los fotones dispersados?

   [Ayuda: Suponer que, en la dispersión Compton inversa, el electrón del plasma transfiere toda su energía cinética al fotón, quedando el electrón en reposo.]