# Examen de Física Cuántica

## Curso 1999-2000. Primer Parcial, 11 Febrero 2000

OBLIGATORIO: Problema 1 (5 puntos).
A ELEGIR: Problemas 2 ó 3 (5 puntos).

1. a) Calcular los niveles de energía correspondientes a una partícula alfa de masa $m_\alpha = 3727.38$ MeV en un nucleo atómico, cuya energía potencial se puede aproximar por el pozo unidimensional:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0\,, \\ -V_1 & 0 < x < a\,, \\ V_2 & a < x < a+b\,, \\ 0 & x > a+b\,, \end{cases}$$

donde la profundidad del pozo es de $V_1 = 6$ MeV y la barrera tiene una altura $V_2 = 4$ MeV. La anchura del pozo es de $a = 6.5$ fm y la de la barrera es de $b = 43.7$ fm.

[Ayuda: Para el cálculo de los niveles de energía es posible usar la aproximación física $b \gg a$. Resolved la ecuación transcendente $\sin x = \pm x/\epsilon$ con la fórmula

$$x_n = n\pi - \arcsin \frac{x_n}{\epsilon},$$

para el estado $n$-simo, en radianes. Converge en pocos pasos.]

b) ¿Existe algún estado metaestable? En caso afirmativo,

i) Calcular el coeficiente de transmisión $T$.

i) Estimar la vida media $\tau$ del estado metaestable.

iii) ¿Qué energía tendrá la partícula alfa emitida?

[Ayuda: Suponed que la partícula alfa oscila dentro del núcleo con una frecuencia dada por $v/2a$, siendo $p = \hbar k = m_\alpha v$ el momento no relativista de la partícula alfa dentro del núcleo. La vida media se puede estimar a partir de $\tau^{-1} = (v/2a)\,T$.]

2. a) Un haz monocromático de fotones de longitud de onda $\lambda$ sufren dispersión Compton inversa con los electrones de un plasma caliente a la temperatura $T_{\text{gas}} = 1.16 \times 10^8$ K. Suponiendo que la energía cinética media de los electrones del plasma es de $K_e = kT_{\text{gas}}$, calcular la longitud de onda de los fotones incidentes para que el haz sea dispersado un ángulo $\theta = 90°$.

[Ayuda: Suponed que, en la dispersión Compton inversa, el electrón del plasma transfiere toda su energía cinética al fotón, quedando el electrón en reposo.]

b) El haz dispersado incide sobre una red critalina de período $d = 1.7$ Å. ¿Cúantos máximos de difracción correspondientes a las reflexiones de Bragg se pueden observar entre $\alpha = 0°$ y $90°$? ¿Qué resolución angular necesito tener para distinguir unos máximos de otros?

[Ayuda: La ley de Bragg es $n\lambda = 2d \sin\phi = 2d \cos\frac{\alpha}{2}$]

3. Un haz de electrones se hace pasar por un dispositivo de tipo Stern-Gerlach con el gradiente de campo magnético en la dirección del eje z, de tal manera que se prepara el sistema en el estado $|\uparrow\rangle$, autoestado del operador $S_z$ con autovalor $+\hbar/2$. A continuación se hace pasar el haz por un campo magnético homogéneo, de intensidad $B_0 = 0.01$ T, en la dirección del eje y, $\vec{B} = B_0\,(0, 1, 0)$.

   a) Calcular el factor giromagnético del electrón, $g_s$, sabiendo que después de un tiempo $t_* = 1.7841$ ns, el sistema se encuentra en un estado ortogonal al inicial.

   b) Considérese el operador $A = (\mathbb{1} + \alpha\,\sigma_x)^2$.

   i) ¿Qué condición debe satisfacer $\alpha$ para que $A$ represente un observable?

   ii) Calcular la dispersión de $A$, $\Delta A \equiv [\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2]^{1/2}$, en el estado inicial.

   iii) Calcular la evolución temporal de la dispersión de $A$. ¿Es posible que $\Delta A(t) = 0$ para algún tiempo $t$? Calcular ese tiempo y discutir el resultado.

   [Ayuda: El Hamiltoniano de un sistema de espines sometido a un campo magnético $\vec{B}$ está dado por

$$H = -\vec{B}\cdot\vec{\mu} \;=\; \mu_{\mathrm{B}}\frac{g_s}{\hbar}\,\vec{B}\cdot\vec{S}$$

   donde $\mu_{\mathrm{B}}$ es el magnetón de Bohr, $g_s$ es el factor giromagnético del electrón, y el operador de espín se pueder escribir en función de las matrices de Pauli, $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\,\vec{\sigma}$,

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.]$$