Ejercicios de Física Cuántica

Curso 2000-2001. Hoja 6

1. a) Calcular los niveles de energía correspondientes a una partícula alfa de masa $m_\alpha = 3727.38$ MeV en un nucleo atómico, cuya energía potencial se puede aproximar por el pozo unidimensional:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0\,, \\ -V_1 & 0 < x < a\,, \\ V_2 & a < x < a+b\,, \\ 0 & x > a+b\,, \end{cases}$$

donde la profundidad del pozo es de $V_1 = 6$ MeV y la barrera tiene una altura $V_2 = 4$ MeV. La anchura del pozo es de $a = 6.5$ fm y la de la barrera es de $b = 43.7$ fm. Calcular la opacidad ϵ de la barrera.

[Ayuda: Para el cálculo de los niveles de energía es posible usar la aproximación física $b \gg a$.]

b) ¿Existe algún estado metaestable? En caso afirmativo,
i) Calcular el coeficiente de transmisión T.
i) Estimar la vida media τ del estado metaestable.
iii) ¿Qué energía tendrá la partícula alfa emitida?

[Ayuda: Suponed que la partícula alfa oscila dentro del núcleo con una frecuencia dada por $v/2a$, siendo $p = \hbar k = m_\alpha v$ el momento no relativista de la partícula alfa dentro del núcleo. La vida media se puede estimar a partir de $\tau^{-1} = (v/2a)\,T$.]

2. Considérese una partícula cuya dinámica viene descrita por el Hamiltoniano $H = K + V(\mathbf{X}) = \mathbf{P}^2/2m + V(\mathbf{X})$. Demostrar el Teorema del Virial cuántico:

$$\langle K \rangle_\psi = \frac{1}{2} \langle \mathbf{X} \cdot \nabla V \rangle_\psi \,.$$

Particularizar a los casos en los que el potencial es homogéneo de grado n en las coordenadas $\mathbf{X}$, $V(\lambda \mathbf{X}) = \lambda^n V(\mathbf{X})$, y obtener una relación entre el valor esperado de la energía cinética y potencial de la partícula. Dar ejemplos.

3. ¿Qué relación debe de existir entre la anchura a y la profundidad V_0 de un pozo cuadrado finito centrado en el origen para que las probabilidades de hallar la partícula fuera y dentro del pozo, en el estado fundamental, sean iguales?

[Ayuda: Debeis hallar la solución de una ecuación transcendente por el método iterativo: $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0, 1, \ldots$, con $f(x)$ convergente.]

4. Una partícula de masa m se encuentra en un pozo cuadrado infinito de anchura a centrado en el origen. Inicialmente su función de onda es superposición lineal de estados ligados ψ_n, ψ_m con amplitudes a_n, a_m. Probar que $\langle X \rangle_t$ oscila armónicamente y calcular la amplitud y frecuencia de la oscilación. Interpretar los resultados.