

# Ejercicios de Física Cuántica

## Curso 2010-2011. Hoja 5

1. Demostrar, usando

$$y(\lambda) = \langle \psi | |C + i\lambda D|^2 | \psi \rangle \geq 0, \quad \forall \lambda,$$

donde  $C = A - \langle A \rangle$  y  $D = B - \langle B \rangle$ , la relación de incertidumbre

$$\Delta_\psi A \cdot \Delta_\psi B \geq \frac{1}{2} |\langle \psi | [A, B] | \psi \rangle|.$$

2. Un haz de átomos de hidrógeno son emitidos por un horno a 400 K de temperatura e inciden sobre un dispositivo de Stern-Gerlach de 1m de longitud y gradiente de campo magnético en la dirección del eje  $\hat{z}$  de magnitud 10 Tesla/m. Calcular la deflexión transversal de un átomo típico del haz, debido a la fuerza ejercida sobre su momento dipolar magnético de espín, en el momento de salir del aparato.
3. Calcular los autoestados de espín en cada una de las direcciones de los ejes coordenados  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$ , así como en la dirección arbitraria

$$\vec{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta).$$

4. Un haz de electrones se hace pasar por un dispositivo de tipo Stern-Gerlach con el gradiente de campo magnético en la dirección del eje z, de tal manera que se prepara el sistema en el estado  $|\uparrow\rangle$ , autoestado del operador  $S_z$  con autovalor  $+\hbar/2$ . A continuación se hace pasar el haz por un campo magnético homogéneo, de magnitud  $B_0 = 0.01$  T, en la dirección del eje  $\hat{y}$ ,  $\vec{B} = B_0(0, 1, 0)$ .

a) Calcular el factor giromagnético del electrón,  $g_s$ , sabiendo que después de un tiempo  $t_* = 1.7841$  ns, el sistema se encuentra en un estado ortogonal al inicial.

b) Considérese el operador  $A = (\mathbb{1} + \alpha \sigma_x)^2$ .

i) ¿Qué condición debe satisfacer  $\alpha$  para que  $A$  represente un observable?

ii) Calcular la dispersión de  $A$ ,  $\Delta A \equiv [\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2]^{1/2}$ , en el estado inicial.

iii) Calcular la evolución temporal de la dispersión de  $A$ . ¿Es posible que  $\Delta A(t) = 0$  para algún tiempo  $t$ ? Calcular ese tiempo y discutir el resultado.

[Ayuda: El Hamiltoniano de un sistema de espines sometido a un campo magnético  $\vec{B}$  está dado por

$$H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = \mu_B \frac{g_s}{\hbar} \vec{B} \cdot \vec{S}$$

donde  $\mu_B$  es el magnetón de Bohr,  $g_s$  es el factor giromagnético del electrón, y el operador de espín se puede escribir en función de las matrices de Pauli,  $\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$ ,

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.]$$